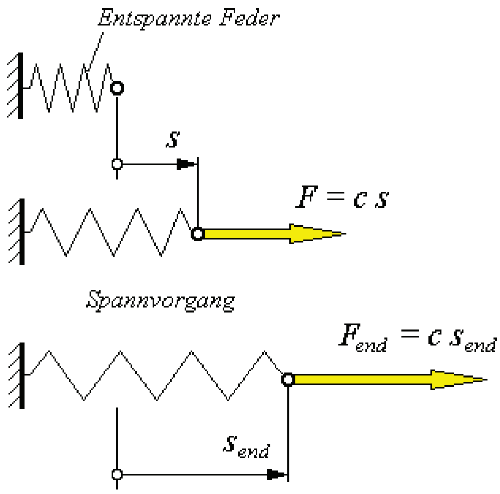
Formänderungsenergie

Die Arbeit, die die Belastungen bei der Verformung eines elastischen Körper leisten, ist im verformten Körper als Formänderungsenergie gespeichert.

Die nebenstehende Skizze zeigt als Analogie zum elastischen Körper den Spannvorgang einer linear-elastischen Feder, für die das Federgesetz $F = cs$ gilt (Federdehnung ist proportional zur Kraft, Proportionalitätsfaktor ist die so genannte Federsteifigkeit c). Die äußere Kraft muss entlang des Weges von 0 bis zum Maximalwert F_{end} anwachsen - für die von dieser Kraft geleisteten Arbeit gilt also:



$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{i}} &= \int\limits_{s=0}^{s_{\text{end}}} F \,\mathrm{d}s = \int\limits_{s=0}^{s_{\text{end}}} cs \,\mathrm{d}s = \frac{1}{2} c s_{\text{end}}^2 \\
&= \frac{1}{2} F_{\text{end}} s_{\text{end}} \ .
\end{aligned}
$$

Weil die Kraft beim Spannen der Feder linear von 0 bis auf ihren Endwert F_{end} wächst, ist die geleistete Arbeit die Hälfte von der Arbeit, die geleistet würde, wenn die Kraft auf dem gesamten Weg bereits die volle Größe hätte. Diese von der äußeren Kraft geleistete Arbeit ist als Formänderungsenergie W_i in der elastischen Feder gespeichert, die auch mit der inneren Kraft in der Feder $F_c = F_{\text{end}}$ aufgeschrieben werden kann:

$$
W_{\mathrm{i}} = = \frac{1}{2} c s_{\text{end}}^2 = \frac{1}{2} \frac{F_{\text{end}}^2}{c} = \frac{1}{2} \frac{F_c^2}{c} \ .
$$

Bei einem elastischen Körper entspricht die Formänderungsenergiedichte w_f der auf das Volumenelement $\mathrm{d}V$ bezogenen Arbeit, die von den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ mit den Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ geleistet worden ist.

$$
w_f = \int\limits_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \,\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \qquad (*)
$$

Deren Änderung $\mathrm{d}w_f$ heißt *spezifische* Formänderungsenergiedichte. Für diese gilt:

$$
\mathrm{d}w_f = \sigma_{ij} \,\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{\partial w_f}{\partial \varepsilon_{ij}} \mathrm{d}\varepsilon_{ij} \ \Leftrightarrow \ \sigma_{ij} = \frac{\partial w_f}{\partial \varepsilon_{ij}}
$$

Die Formänderungsenergiedichte w_f errechnet sich mit (*) und $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$

$$
w_f = C_{ijkl} \int\limits_0^{\varepsilon_{ij}} \varepsilon_{kl} \,\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}\, \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}
$$

Die Formänderungsenergie W_{i} im allgemeinen räumlichen Spannungszustand läßt sich als Summe der einzelnen Normal- und Schubspannungsanteile integriert über das Volumen V schreiben ($\gamma_{\mathrm{xy}} = 2\varepsilon_{\mathrm{xy}}$):

$$
W_{\mathrm{i}} = \int\limits_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}V = \int\limits_V \left[\frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{x}}\varepsilon_{\mathrm{x}} + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{y}}\varepsilon_{\mathrm{y}} + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{z}}\varepsilon_{\mathrm{z}} + \frac{1}{2}\tau_{\mathrm{xy}}\gamma_{\mathrm{xy}} + \frac{1}{2}\tau_{\mathrm{yz}}\gamma_{\mathrm{yz}} + \frac{1}{2}\tau_{\mathrm{xz}}\gamma_{\mathrm{xz}} \right] \mathrm{d}V \ .
$$

Die obige Gleichung für die Formänderungsenergie geht als Funktion der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ mit Hilfe des HOOKEschen Gesetzes in die Form

$$W_\mathrm{i} = \int\limits_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_\mathrm{x}^2 + \sigma_\mathrm{y}^2 + \sigma_\mathrm{z}^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_\mathrm{x}\sigma_\mathrm{y} + \sigma_\mathrm{y}\sigma_\mathrm{z} + \sigma_\mathrm{z}\sigma_\mathrm{x}\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_\mathrm{xy}^2 + \tau_\mathrm{yz}^2 + \tau_\mathrm{xz}^2\right)\right]\mathrm{d}V$$

über und kann mit den Hauptspannungen folgendermaßen formuliert werden:

$$W_\mathrm{i} = \int\limits_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right]\mathrm{d}V$$

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie die elastische Formänderungsenergie, die zwei hochfeste Stahlschrauben A und B unter der Last P höchstens aufnehmen können. Schraube A hat den Durchmesser d_A1 bei einer Länge a_1. Im Gewindebereich hat die Schraube den kleinsten Durchmesser d_A2 über der Länge a_2. Schraube B hat über die gesamte wirkende Länge $b = a_1 + a_2$ einen reduzierten Durchmesser d_B, siehe Abb. 1.

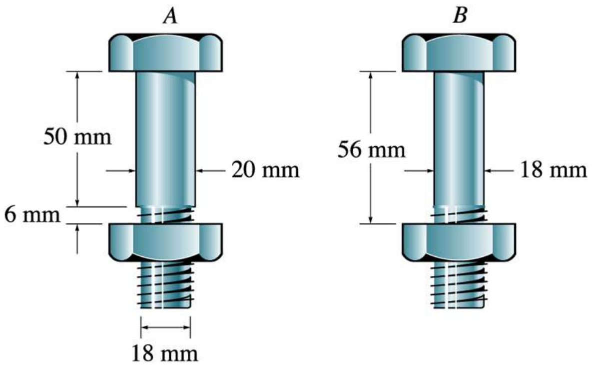


Abbildung 1: Geometrische Abmessungen der Schrauben A und B

(b) Berechnen Sie die elastische Formänderungsenergie eines Kragträgers der Länge L unter konstanter Streckenlast q_0 und konstantem EI.

Gegeben: $E_\mathrm{St} = 210 \cdot 10^3\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_\mathrm{F} = 310\,\mathrm{MPa}$, $d_\mathrm{A1} = 20\,\mathrm{mm}$, $d_\mathrm{A2} = 18\,\mathrm{mm}$, $d_\mathrm{B} = 18\,\mathrm{mm}$, $a_1 = 50\,\mathrm{mm}$, $a_2 = 6\,\mathrm{mm}$, $b = 56\,\mathrm{mm}$, q_0 und EI.

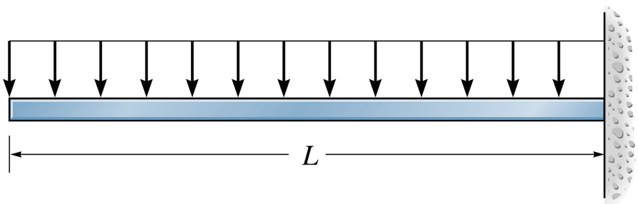
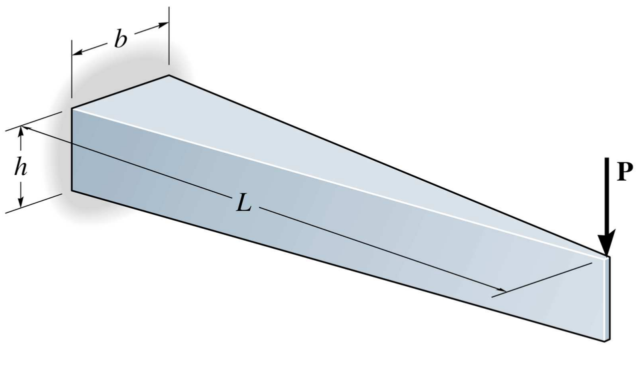


Abbildung 2: Darstellung eines durch eine konstante Streckenlast q_0 belasteten Kragträgers

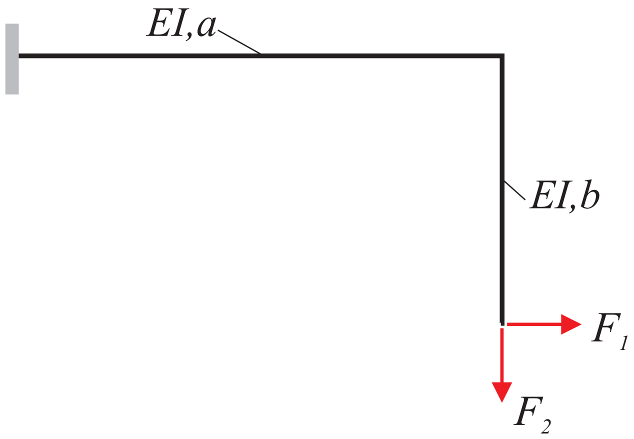
Aufgabe 2:

Der dargestellte Träger hat den gezeigten linear veränderlichen Querschnitt. Bestimmen Sie bei Einwirkung der Last P an seinem Ende die sich einstellende Formänderungsenergie. Zum Vergleich bestimmen Sie die Formänderungsenergie eines gleichbelasteten Balkens mit konstantem rechteckigen Querschnitt (Breite b und Höhe h). Beide Systeme seien aus demselben Material.

Gegeben: E, P, L, h, b.



Aufgabe 3:



Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Castigliano die Verschiebungen des Lastangriffspunktes infolge Biegung.

Gegeben: EI, a, b, F_1, F_2