Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
Department Maschinenbau
Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik

Einschub: Lokale Modellnetze

Vorlesung: Neuronale Netze und Fuzzy Systeme (NNFS)

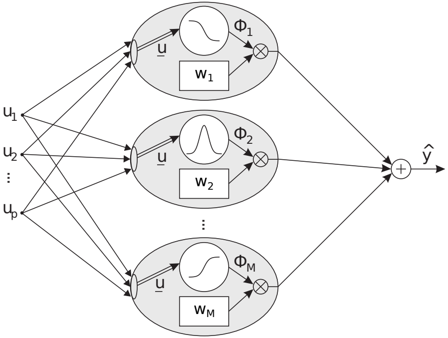
Prof. Dr.-Ing. Oliver Nelles

Universität Siegen

09. Januar 2017

Überblick

Normierte radiale Basis-Funktionen (NRBF-) Netze



Gleichung für Modellausgang:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{M} w_i \cdot \Phi_i(\boldsymbol{u}_i)$$

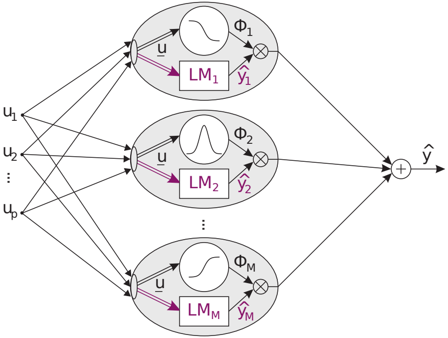
Partition of Unity:

$$\sum_{i=1}^{M} \Phi_i(\boldsymbol{u}) = 1$$

Gültigkeitsfunktionen:

$$\Phi_i(\boldsymbol{u}) = \frac{\mu_i(\boldsymbol{u})}{\sum_{j=1}^{M} \mu_j(\boldsymbol{u})}$$

Aufbau Lokaler Modellnetze (LMN)



Gleichung für Modellausgang:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{M} \hat{y}_i \cdot \Phi_i(\boldsymbol{u})$$

Partition of Unity:

$$\sum_{i=1}^{M} \Phi_i(\boldsymbol{u}) = 1$$

Gültigkeitsfunktionen:

$$\Phi_i(\boldsymbol{u}) = \frac{\mu_i(\boldsymbol{u})}{\sum_{j=1}^{M} \mu_j(\boldsymbol{u})}$$

NRBF Netz mit 1 Eingang und 2 Basisfunktionen

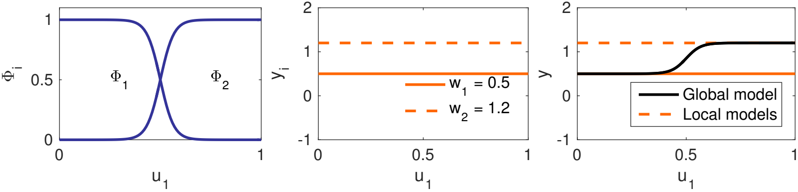
NRBF Modellausgang:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{2} w_i \cdot \Phi_i(\boldsymbol{u}_i)$$

Interpretation als Regeln:

if u_1 is small THEN $\hat{y}_i = w_1$

if u_1 is big THEN $\hat{y}_i = w_2$



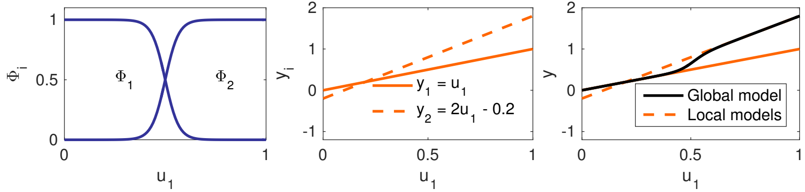
LMN mit 1 Eingang und 2 Lokalen Modellen

LMN Modellausgang:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{2} \hat{y}_i \cdot \Phi_i(\boldsymbol{u})$$

Interpretation als Regeln:

if u_1 is small THEN $\hat{y}_1 = u_1$
if u_1 is big THEN $\hat{y}_2 = 2u_1 - 0.2$



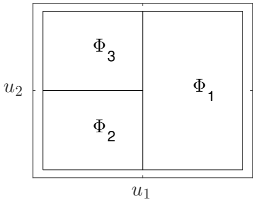
LMN mit 2 Eingängen und 3 Lokalen Modellen

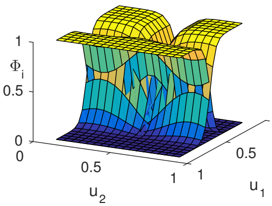
LMN Modellausgang:

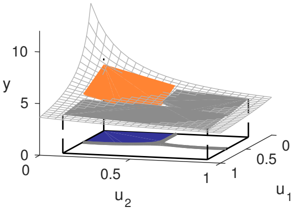
$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{3} \hat{y}_i \cdot \Phi_i(\boldsymbol{u})$$

Interpretation als Regeln:

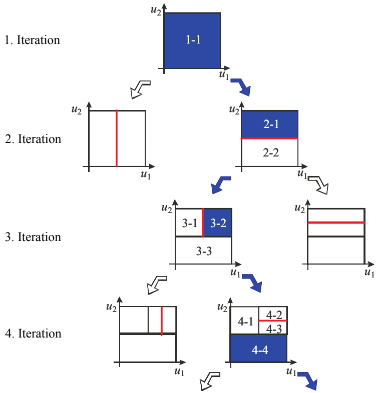
if u_1 is big THEN $\hat{y}_1$
if u_1 is small AND u_2 is small THEN $\hat{y}_2$
if u_1 is small AND u_2 is big THEN $\hat{y}_3$







Local Linear Model Tree (LOLIMOT)



(Haupt-)Problematik:

Bestimmung der Lage und Standardabweichungen der Zugehörigkeitsfunktionen.

Lösungsansatz:

Sukzessive Unterteilung des Eingangsraumes (heuristisch, iterativ).

Schätzung der lokalen Modellparameter - Global

LMN mit 2 Eingängen und 2 lokal affinen Modellen

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{2} \underbrace{\left(w_{0,i} + w_{1,i}u_1 + w_{2,i}u_2\right)}_{\hat{y}_i} \cdot \Phi_i(\boldsymbol{u})$$

Globale Schätzung

$$\boldsymbol{X} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Phi_1(\boldsymbol{u}) & u_1(1)\Phi_1(\boldsymbol{u}) & u_2(1)\Phi_1(\boldsymbol{u}) & \Phi_2(\boldsymbol{u}) & u_1(1)\Phi_2(\boldsymbol{u}) & u_2(1)\Phi_2(\boldsymbol{u}) \\ \Phi_1(\boldsymbol{u}) & u_1(2)\Phi_1(\boldsymbol{u}) & u_2(2)\Phi_1(\boldsymbol{u}) & \Phi_2(\boldsymbol{u}) & u_1(2)\Phi_2(\boldsymbol{u}) & u_2(2)\Phi_2(\boldsymbol{u}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_1(\boldsymbol{u}) & u_1(N)\Phi_1(\boldsymbol{u}) & u_2(N)\Phi_1(\boldsymbol{u}) & \Phi_2(\boldsymbol{u}) & u_1(N)\Phi_2(\boldsymbol{u}) & u_2(N)\Phi_2(\boldsymbol{u}) \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Lokales Modell 1 } (\boldsymbol{X}_{\text{LM1}})} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Lokales Modell 2 } (\boldsymbol{X}_{\text{LM2}})}$$

$$\boldsymbol{w} = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{w_{0,1} \quad w_{1,1} \quad w_{2,1}}_{\boldsymbol{w}_{\text{LM1}}} & \underbrace{w_{0,2} \quad w_{1,2} \quad w_{2,2}}_{\boldsymbol{w}_{\text{LM2}}} \end{array}\right] \Longrightarrow \hat{\boldsymbol{w}} = \left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y}$$

Schätzung der lokalen Modellparameter - Lokal

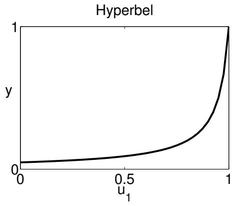
Lokale Schätzung

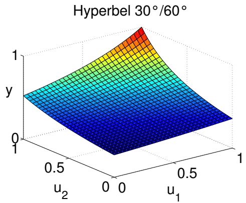
- M x lokale Least-Squares Schätzung: Geringerer Rechenaufwand
  $\Rightarrow \mathcal{O}\left(M(p+1)^3\right)$ statt $\mathcal{O}\left(M^3(p+1)^3\right)$

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathsf{LM}i} = \left(\boldsymbol{X}_{\mathsf{LM}i}^T \boldsymbol{X}_{\mathsf{LM}i}\right)^{-1} \boldsymbol{X}_{\mathsf{LM}i}^T \boldsymbol{y}_{LMi}$$
$$\text{mit } i = 1, 2, \ldots, M$$

- Interaktion zwischen lokalen Modellen wird ignoriert
  $\Rightarrow$ Erhöhung des Bias-Fehlers
- Einschränkung der Flexibilität $\Rightarrow$ Regularisierender Effekt!

Demonstrationsbeispiele in MATLAB





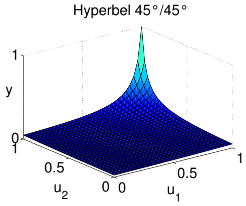
Hyperbel (1D):

$$y(u_1) = \frac{0.05}{0.05+(1-u_1)}$$

Hyperbel 30°/60° (2D):

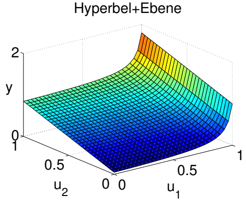
$$y(u_1, u_2) = \frac{0.55}{0.05+(1-0.5u_1)+(1-u_2)}$$

Demonstrationsbeispiele in MATLAB



Hyperbel 45°/45° (2D):

$$y(u_1, u_2) = \frac{0.05}{0.05+(1-u_1)+(1-u_2)}$$



Hyperbel+Ebene (2D):

$$y(u_1, u_2) = \frac{0.05}{0.05+(1-u_1)} + 0.8 \cdot u_2$$