Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

26.08.2020

Name:	
Mat.-Nr.	
Note:	

Aufgabe:	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Punkte:	9	12	12	13	14	60
Erreicht:						

Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Quantisierung (9 Punkte)

Für die Quantisierung stehen hier zwei verschiedenen AD-Wandler zur Auswahl welche die realen Werte auf die nächste Quantisierungsstufen *abrunden*. Die Eckdaten hierfür lauten wie folgt:

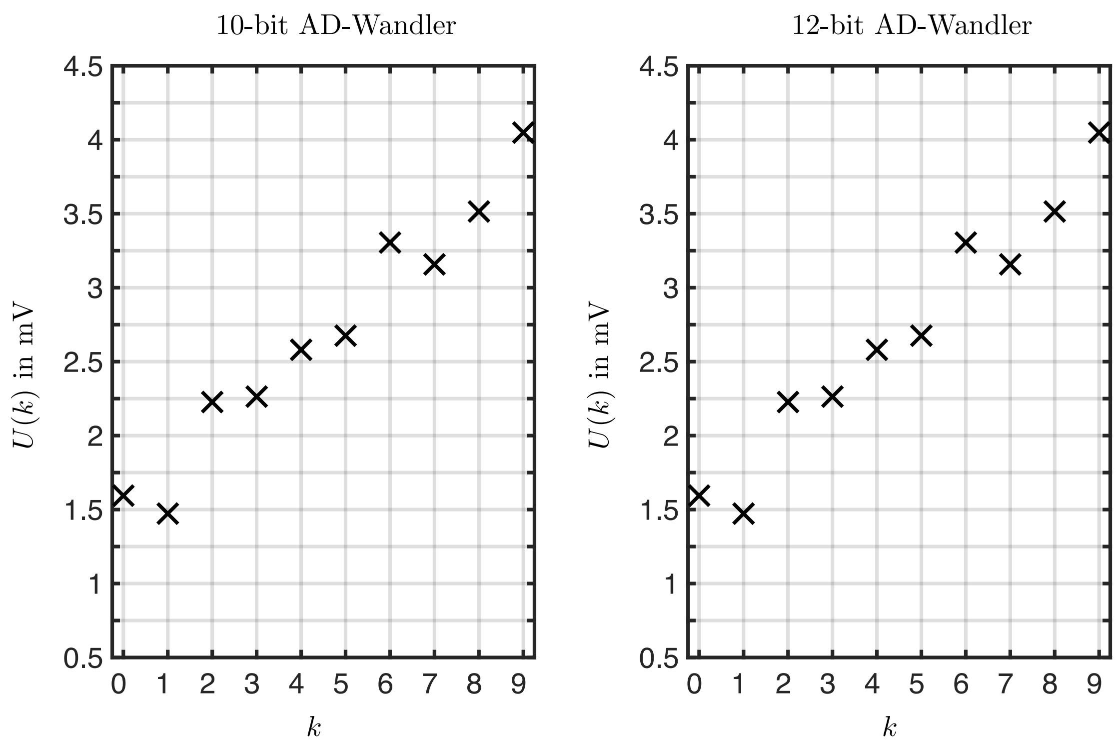
	10-bit AD-Wandler		**12-bit AD-Wandler**	
Abtastfrequenz:	$f_0 = 100$	Hz	$f_0 = 100$	Hz
Auflösung:	10	bit	12	bit
Messbereich:	$U_{\text{range}} = 0 \ldots 1024$	mV	$U_{\text{range}} = 0 \ldots 1024$	mV

a) Berechnen Sie aus den gegebenen Daten die Schrittweite ΔU sowie den maximalen Quantisierungsfehler $e_{\text{Q max}}$ für beide AD-Wandler.

b) Wie nennt man das Fehlersignal ($U(k) - U_{\text{Q}}(k)$, $k = 1, \ldots, N$), welches durch Quantisierung auftritt?

c) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat der Fehler, welcher durch die Quantisierung eines gleichverteilten Signals entsteht?

d) Nun soll die nachfolgende Messwertfolge einer *verrauschten* Rampe $U(k)$ quantisiert werden. Skizzieren Sie das quantisierte Signal $\text{Q}(k)$ mit einem Halteglied 0-ter Ordnung in das entsprechende Diagramm.

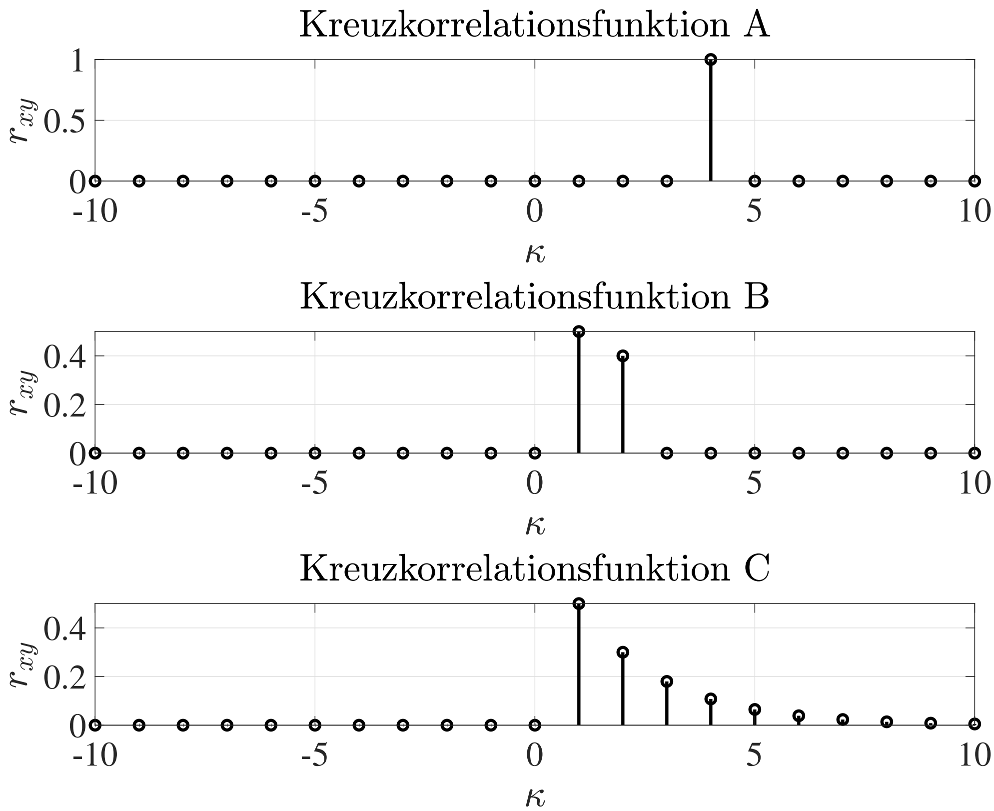


Aufgabe 2: Korrelationsfunktion (12 Punkte)

a) Gegeben sind die folgenden drei Systeme

$$G_1(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$
$$G_2(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$
$$G_3(z) = z^{-4}.$$

Die Systeme wurden jeweils mit einem impulsförmigen Eingangssignal $x(k)$ angeregt und der Ausgang des Systems $y(k)$ wurde aufgenommen. Anschließend wurde die Kreuzkorrelationsfunktion von Eingangssignal und Ausgangssignal berechnet. Ordnen Sie die Systeme den korrekten abgebildeten Kreuzkorrelationsfunktionen zu.

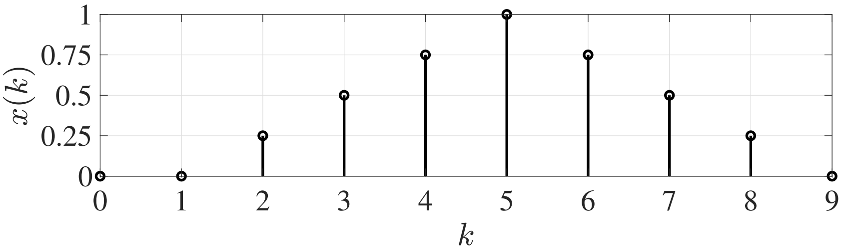


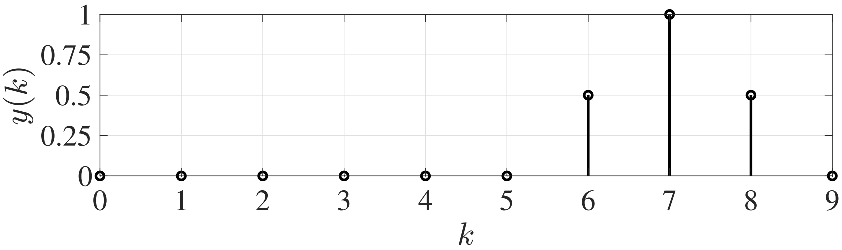
System	Kreuzkorrelations-funktion
1	
2	
3	

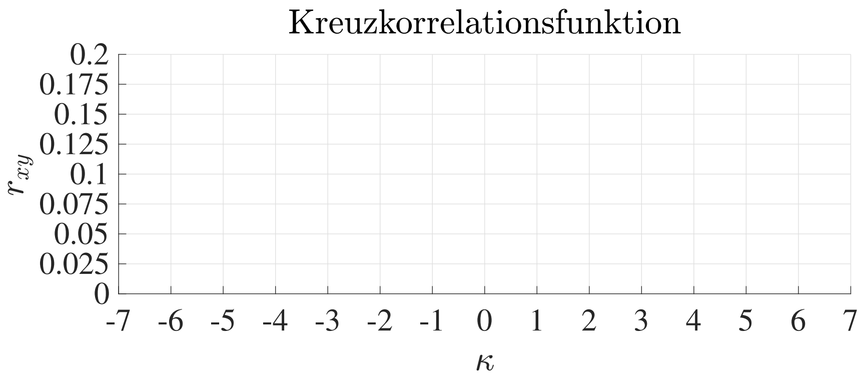
b) Gegeben ist der zeitdiskrete Verlauf der Signale $x(k)$ und $y(k)$. Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion r_{xy} für $\kappa = -7, -6, ..., 7$ und tragen Sie die berechneten Werte in das gegebene Diagramm ein.

Hinweis:

$$r_{xy}(\kappa) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1-\kappa} x(k) \cdot y(k+\kappa), & \text{für } \kappa \geq 0 \\ \frac{1}{N} \sum\limits_{k=-\kappa}^{N-1} x(k) \cdot y(k+\kappa), & \text{sonst.} \end{cases}$$







c) Geben Sie an, ob es sich bei der gegebenen Formel um die biasfreie oder die biasbehaftete Variante der Kreuzkorrelationsfunktion handelt.

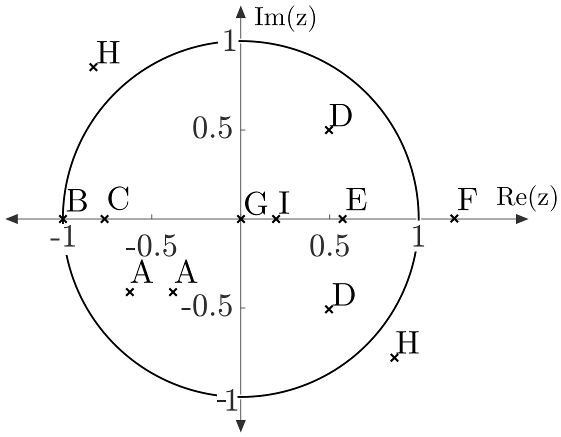
Aufgabe 3: Impulsantworten (12 Punkte)

Gegeben sind die Lagen der Pole von 9 unterschiedlichen Systemen (A-I) im Pol/Nullstellen-Diagramm und 6 unterschiedliche Impulsantworten (1-6).

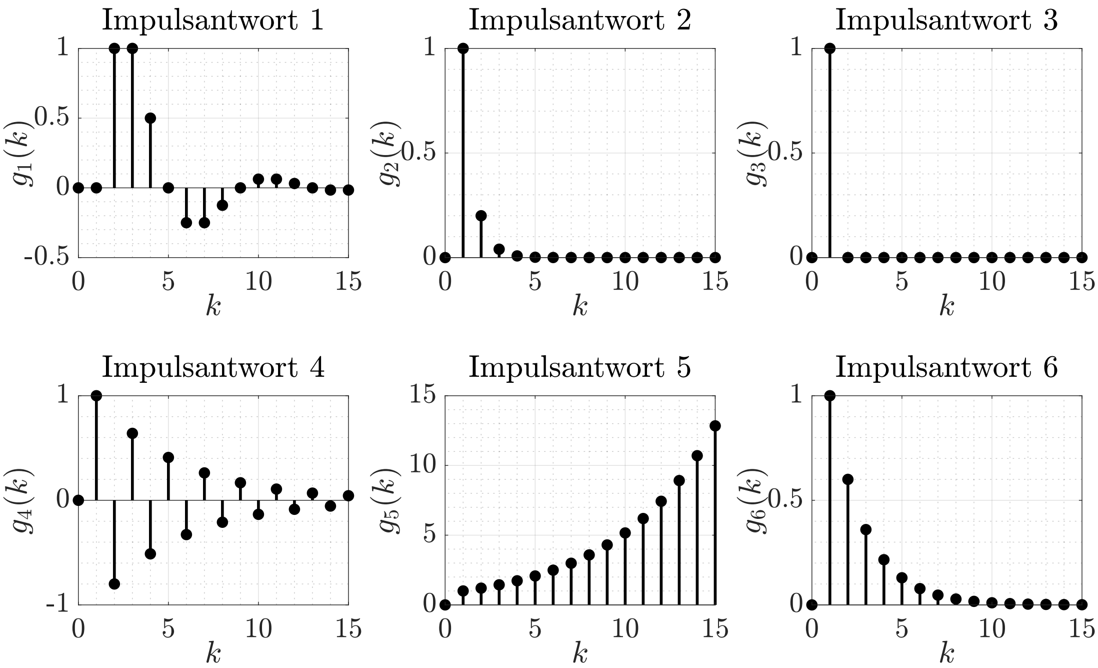
Ordnen Sie die Pole den Impulsantworten in der gegebenen Tabelle richtig zu.

(Hinweis: Drei Pollagen sind keiner Impulsantwort zurechenbar. Alle Übertragungsfunktion haben die Struktur $G(z) = \frac{1}{A(z)}$ mit $A(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - p_i)$)

Pole

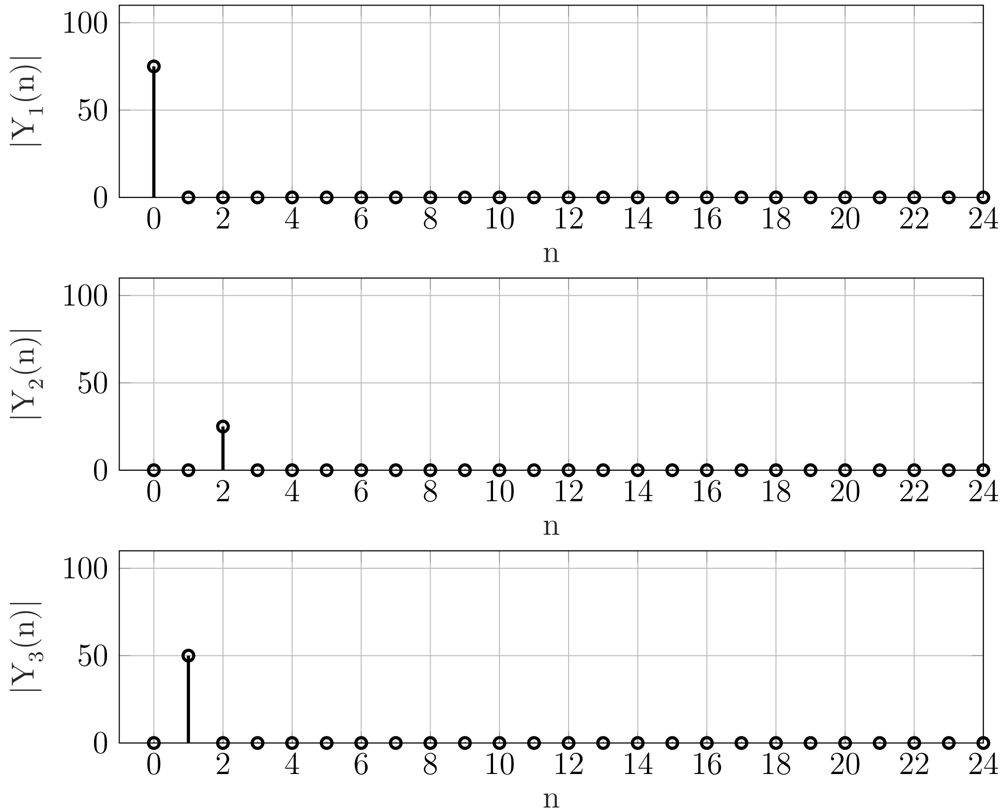


Impuls-antwort	Pole
1	
2	
3	
4	
5	
6	



Aufgabe 4: DFT (13 Punkte)

Im Folgenden sehen Sie die DFT Ergebnisse (linke Hälfte des Spektrums) von verschiedenen Signalen.
Hinweis: $|Y(n)| = \frac{N}{2} \cdot A$ *wenn* A *die Amplitude der Schwingung ist.*
Bei $\omega = 0$ *gilt:* $|Y(n)| = N \cdot A$.

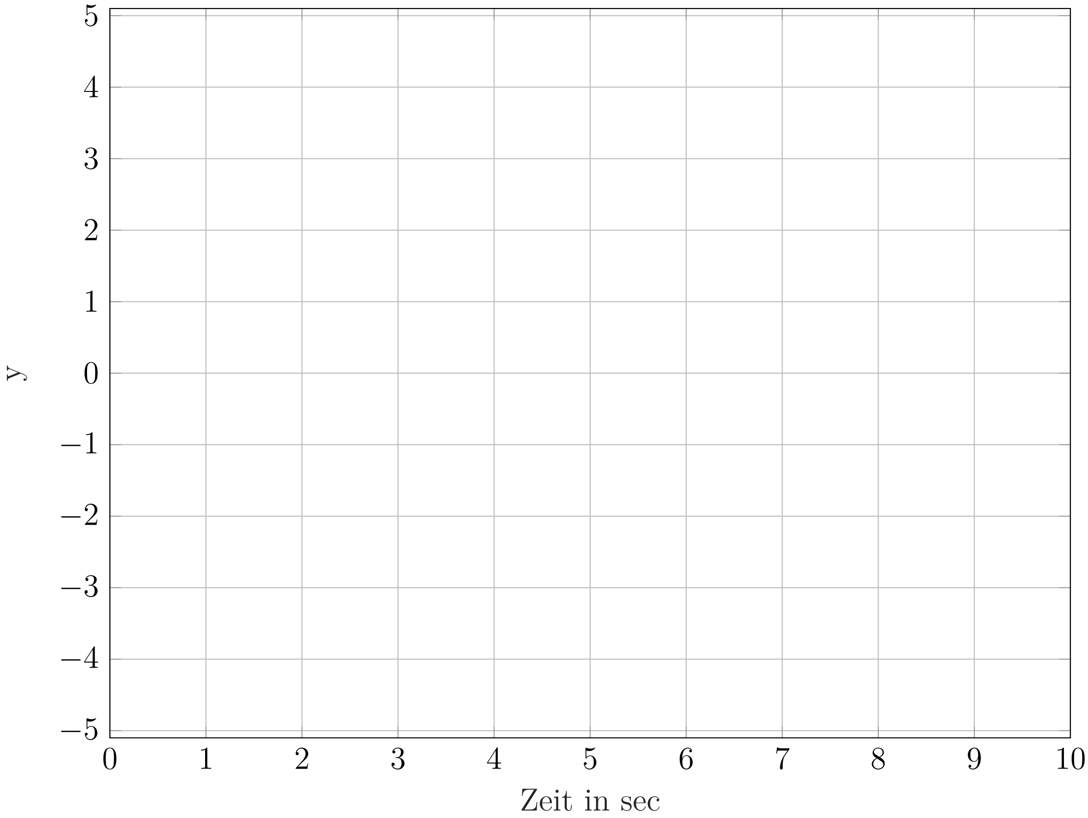


Die Signale wurden mit einer Abtastzeit von 0.2 sec im Zeitraum von 0 sec bis 9.8 sec abgetastet (erster Abtastschritt bei 0 sec).

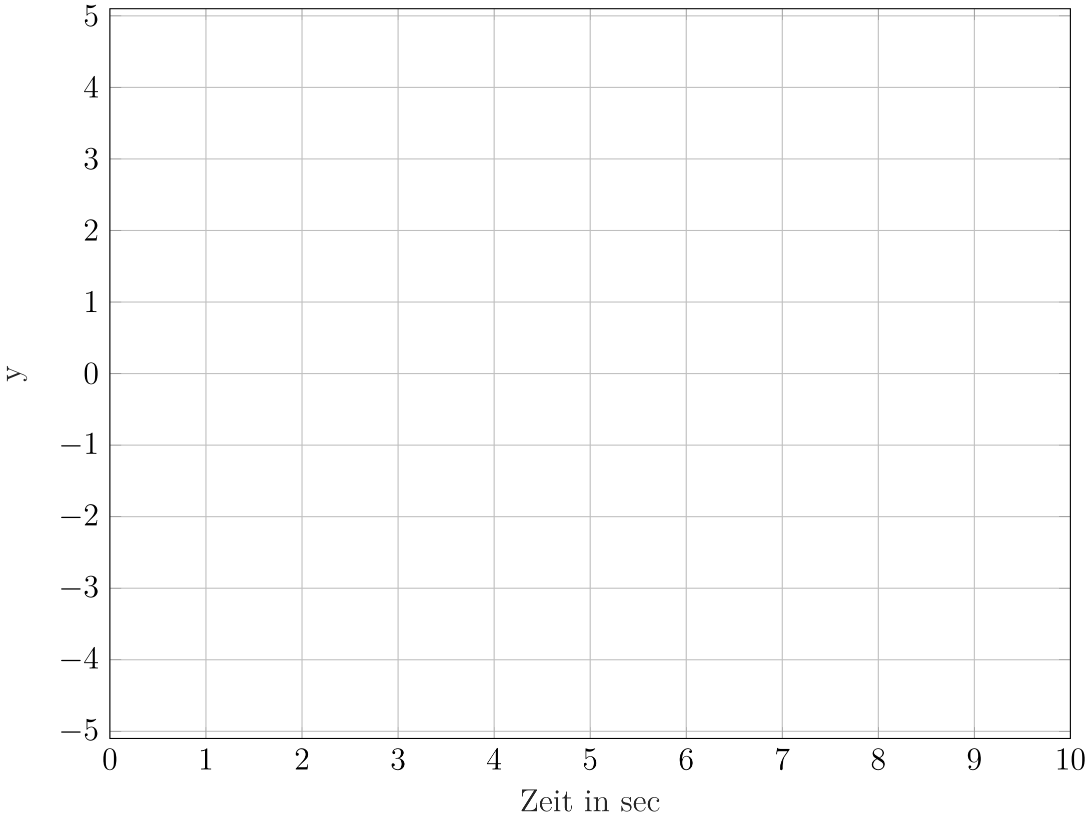
a) Berechnen Sie die Abtastfrequenz f_0.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Abtastschritte N.

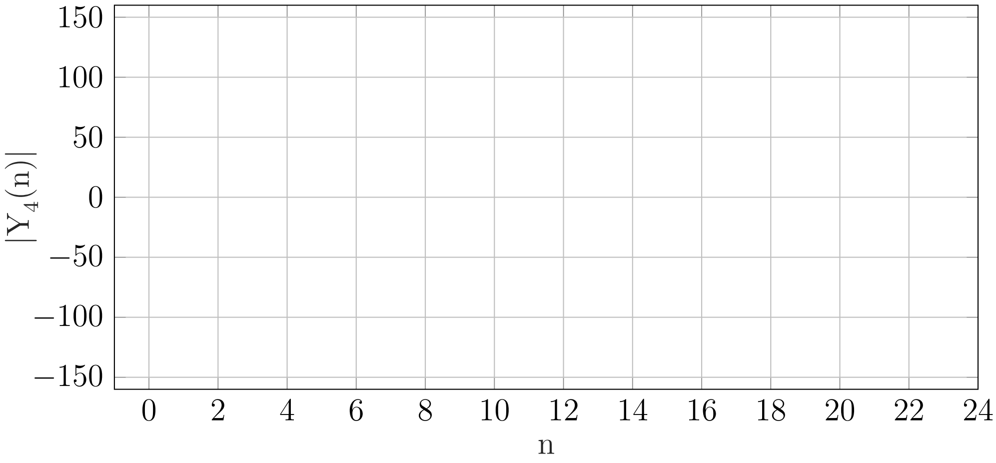
c) Zeichnen Sie die Signale $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ den oben stehenden Diagrammen entsprechend in das folgende leere Diagramm ein. Achten sie dabei darauf, dass die Linien der Signale gut zu unterscheiden und eindeutig zugeordnet sind.



d) Zeichnen Sie $y_4(t) = y_1(t) - y_2(t) - y_3(t)$ in das folgende leere Diagramm ein.



e) Tragen Sie nun das Ergebnis der DFT (nur die linke Seite des Spektrums) $|Y_4(n)|$ von dem vorhin gezeichneten Signal $y_4(t)$ in das folgende Diagramm ein.



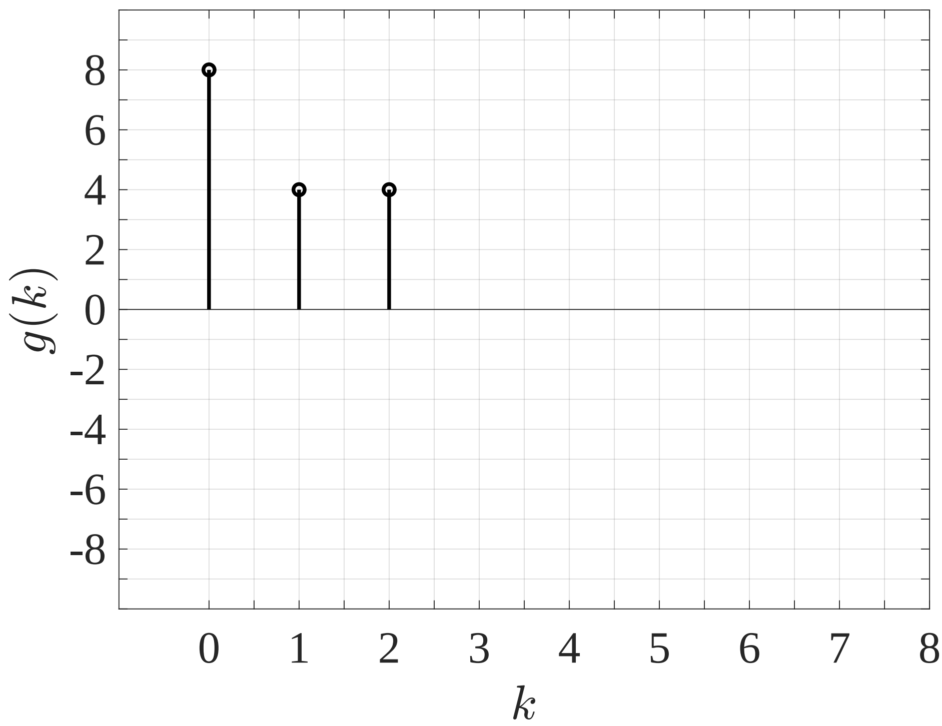
Aufgabe 5: Lineare Filter (14 Punkte)

a) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_1(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1}. \tag{1}$$

Berechnen Sie die zugehörige Differenzengleichung.

b) Bestimmen Sie aus dem dargestellten Teil der Impulsantwort die Koeffizienten b_0, b_1 und a_1 von $G_1(z)$.



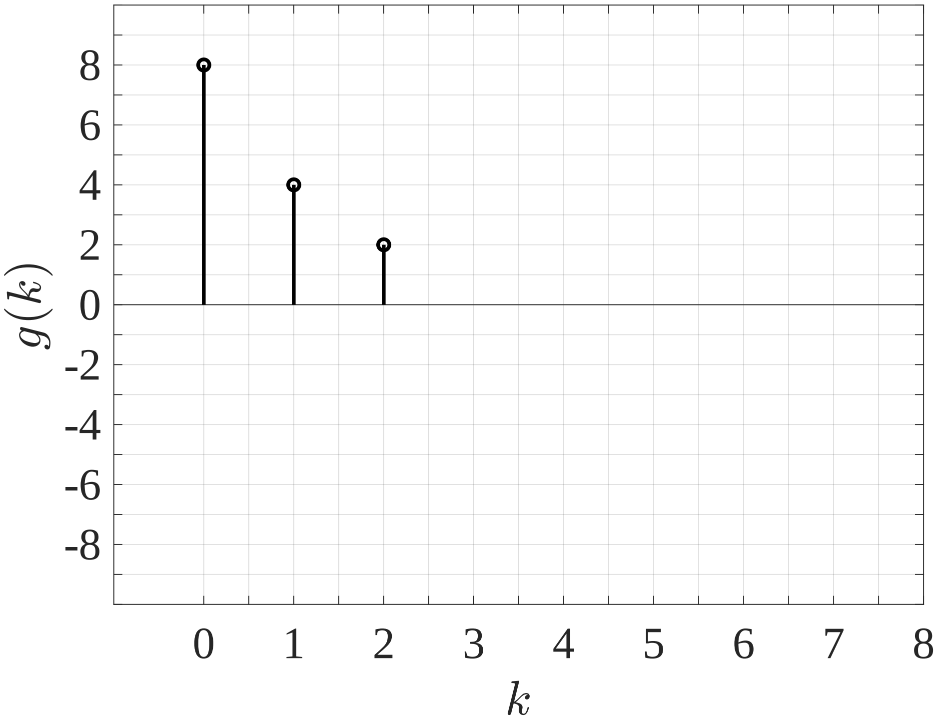
c) Zeichnen Sie die nächsten 4 Werte der Impulsantwort von $G_1(z)$ in das Diagramm ein.

d) Nun sei die Übertragungsfunktion

$$G_2(z) = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \tag{2}$$

gegeben. Berechnen Sie die diskrete Differenzengleichung.

e) Bestimmen Sie aus dem dargestellten Teil der Impulsantwort die Koeffizienten b_0, a_1 und a_2 von $G_2(z)$.



f) Zeichen Sie die nächsten 4 Werte der Impulsantwort von $G_2(z)$ in das Diagramm ein.

Lösung:

Aufgabe 1: Quantisierung (9 Punkte)

Für die Quantisierung stehen hier zwei verschiedenen AD-Wandler zur Auswahl welche die realen Werte auf die nächste Quantisierungsstufen *abrunden*. Die Eckdaten hierfür lauten wie folgt:

	10-bit AD-Wandler		**12-bit AD-Wandler**	
Abtastfrequenz:	$f_0 = 100$	Hz	$f_0 = 100$	Hz
Auflösung:	10	bit	12	bit
Messbereich:	$U_{\text{range}} = 0 \dots 1024$	mV	$U_{\text{range}} = 0 \dots 1024$	mV

a) Berechnen Sie aus den gegebenen Daten die Schrittweite ΔU sowie den maximalen Quantisierungsfehler $e_{\text{Q max}}$ für beide AD-Wandler.
Antwort:
Die Schrittweite ΔU ergibt sich durch äquidistantes Aufteilen des Messbereichs auf die 2^n Quantisierungsstufen:

$$\text{Allgemein:}\quad \Delta U = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2^n}$$
$$\Delta U_{\text{10-bit}} = \frac{1024\,\text{mV} - 0\,\text{mV}}{2^{10}}$$
$$\Delta U_{\text{10-bit}} = \frac{1024\,\text{mV}}{1024}$$
$$\Delta U_{\text{10-bit}} = 1\,\text{mV}$$
$$\Delta U_{\text{12-bit}} = \frac{1024\,\text{mV} - 0\,\text{mV}}{2^{12}}$$
$$\Delta U_{\text{12-bit}} = \frac{1024\,\text{mV}}{4096}$$
$$\Delta U_{\text{12-bit}} = \frac{1}{4}\,\text{mV}$$

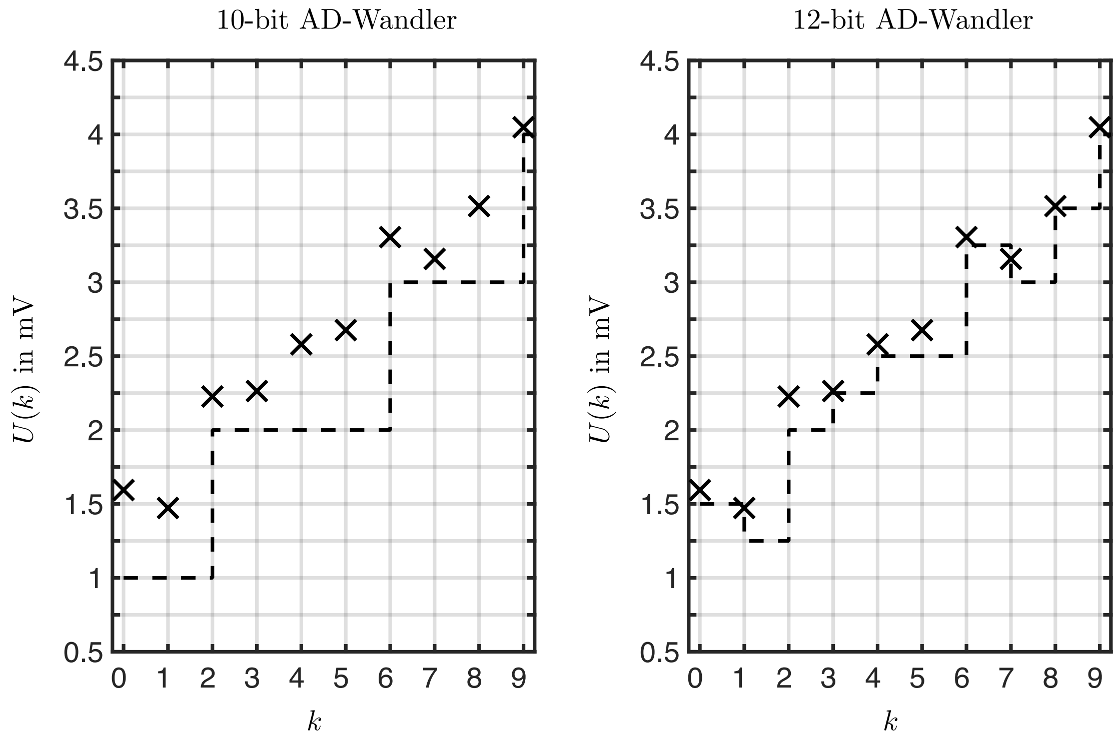
der maximale Fehler, welcher beim *Abrunden* auftreten kann, entspricht der Schrittweite:

$$e_{\text{Q max}} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2^n} \qquad \boxed{2}$$
$$e_{\text{Q max 10-bit}} = 1\,\text{mV}$$
$$e_{\text{Q max 12-bit}} = \frac{1}{4}\,\text{mV} \qquad \boxed{2}$$

b) Wie nennt man das Fehlersignal ($U(k) - U_{\text{Q}}(k)$, $k = 1, \dots, N$), welches durch Quantisierung auftritt?
Antwort:
Dieses Fehlersignal wird als Quantisierungssrauschen bezeichnet. $\boxed{1}$

c) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat der Fehler, welcher durch die Quantisierung eines gleichverteilten Signals entsteht?
Antwort:Der Quantisierungsfehler ist ebenfalls gleichverteilt. $\boxed{1}$

d) Nun soll die nachfolgende Messwertfolge einer *verrauschten* Rampe $U(k)$ quantisiert werden. Skizzieren Sie das quantisierte Signal $Q(k)$ mit einem Halteglied 0-ter Ordnung in das entsprechende Diagramm.



3

$\sum 9$

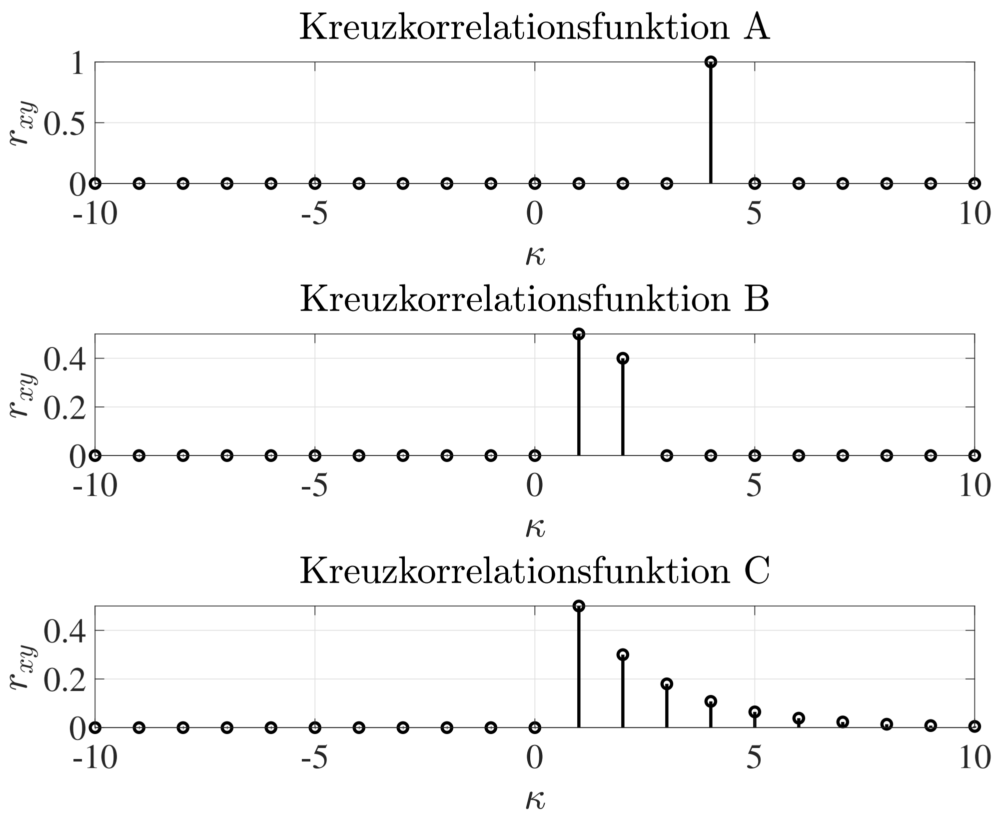
Aufgabe 2: Korrelationsfunktion (12 Punkte)

a) Gegeben sind die folgenden drei Systeme

$$G_1(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$
$$G_2(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$
$$G_3(z) = z^{-4}.$$

Die Systeme wurden jeweils mit einem impulsförmigen Eingangssignal $x(k)$ angeregt und der Ausgang des Systems $y(k)$ wurde aufgenommen. Anschließend wurde die Kreuzkorrelationsfunktion von Eingangssignal und Ausgangssignal berechnet. Ordnen Sie die Systeme den korrekten abgebildeten Kreuzkorrelationsfunktionen zu.

Antwort:



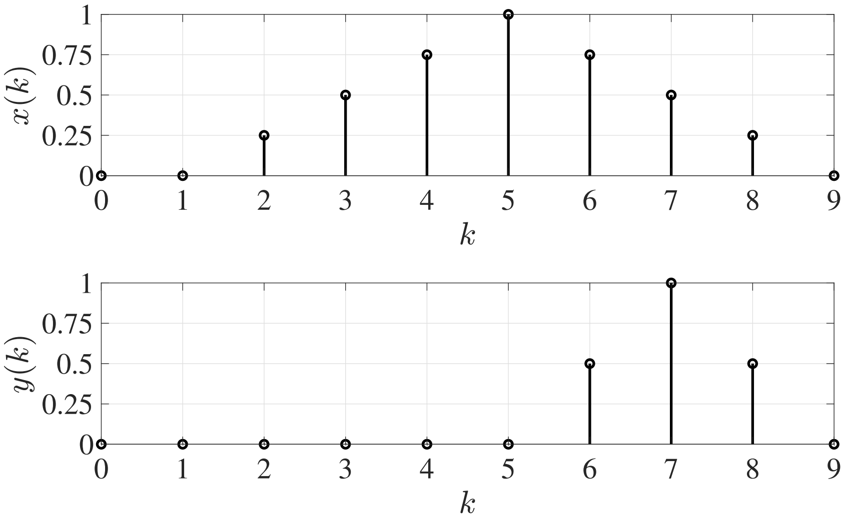
System	Kreuzkorrelations-funktion
1	C
2	B
3	A

3

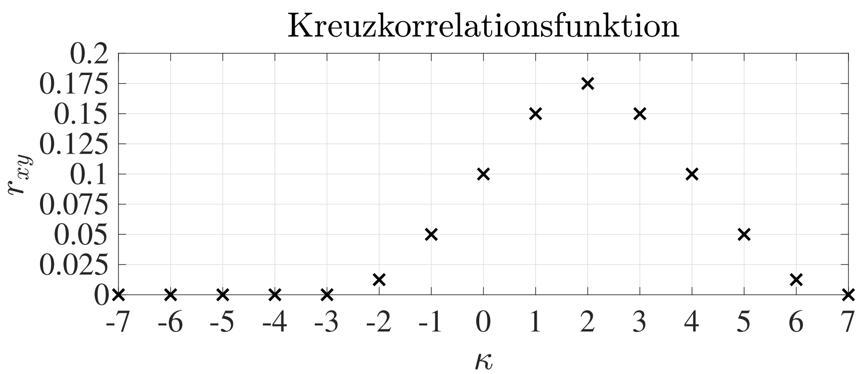
b) Gegeben ist der zeitdiskrete Verlauf der Signale $x(k)$ und $y(k)$. Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion r_{xy} für $\kappa = -7, -6, ..., 7$ und tragen Sie die berechneten Werte in das gegebene Diagramm ein.

Hinweis:

$$r_{xy}(\kappa) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1-\kappa} x(k) \cdot y(k+\kappa), & \text{für } \kappa \geq 0 \\ \frac{1}{N} \sum\limits_{k=-\kappa}^{N-1} x(k) \cdot y(k+\kappa), & \text{sonst.} \end{cases}$$



Antwort:



$\boxed{3}$

$$
\begin{aligned}
r_{xy}(-7) &= \frac{1}{10}(0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0 \\
r_{xy}(-6) &= \frac{1}{10}(0.75 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0 \\
r_{xy}(-5) &= \frac{1}{10}(1 \cdot 0 + 0.75 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0 \\
r_{xy}(-4) &= \frac{1}{10}(0.75 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0.75 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0 \\
r_{xy}(-3) &= 0 \\
r_{xy}(-2) &= \frac{1}{10}(0.25 \cdot 0.5) = 0.0125 \\
r_{xy}(-1) &= \frac{1}{10}(0.5 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25) = 0.05 \\
r_{xy}(0) &= \frac{1}{10}(0.5 \cdot 0.75 + 1 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.25) = 0.1 \\
r_{xy}(1) &= \frac{1}{10}(0.5 \cdot 1 + 1 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.5) = 0.15 \\
r_{xy}(2) &= \frac{1}{10}(0.5 \cdot 0.75 + 1 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.75) = 0.175 \\
r_{xy}(3) &= \frac{1}{10}(0.5 \cdot 1 + 1 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.5) = 0.15 \\
r_{xy}(4) &= \frac{1}{10}(0.5 \cdot 0.75 + 1 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.25) = 0.1 \\
r_{xy}(5) &= \frac{1}{10}(0.5 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25) = 0.05 \\
r_{xy}(6) &= \frac{1}{10}(0.25 \cdot 0.5) = 0.0125 \\
r_{xy}(7) &= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{5}$

c) Geben Sie an, ob es sich bei der gegebenen Formel um die biasfreie oder die biasbehaftete Variante der Kreuzkorrelationsfunktion handelt.
Antwort:
Es handelt sich um die biasbehaftete Variante der Kreuzkorrelationsfunktion. $\boxed{1}$

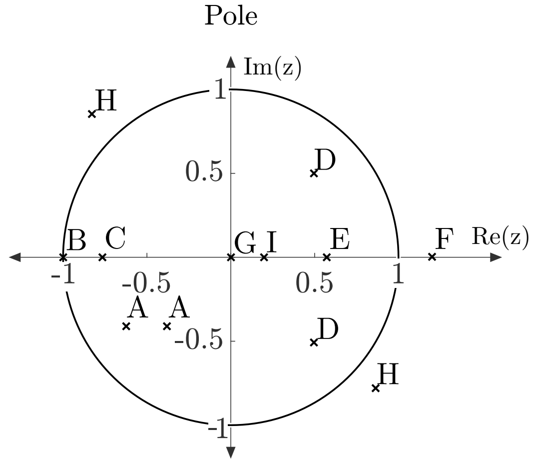
$\boxed{\sum 12}$

Aufgabe 3: Impulsantworten (12 Punkte)

Gegeben sind die Lagen der Pole von 9 unterschiedlichen Systemen (A-I) im Pol/Nullstellen-Diagramm und 6 unterschiedliche Impulsantworten (1-6).

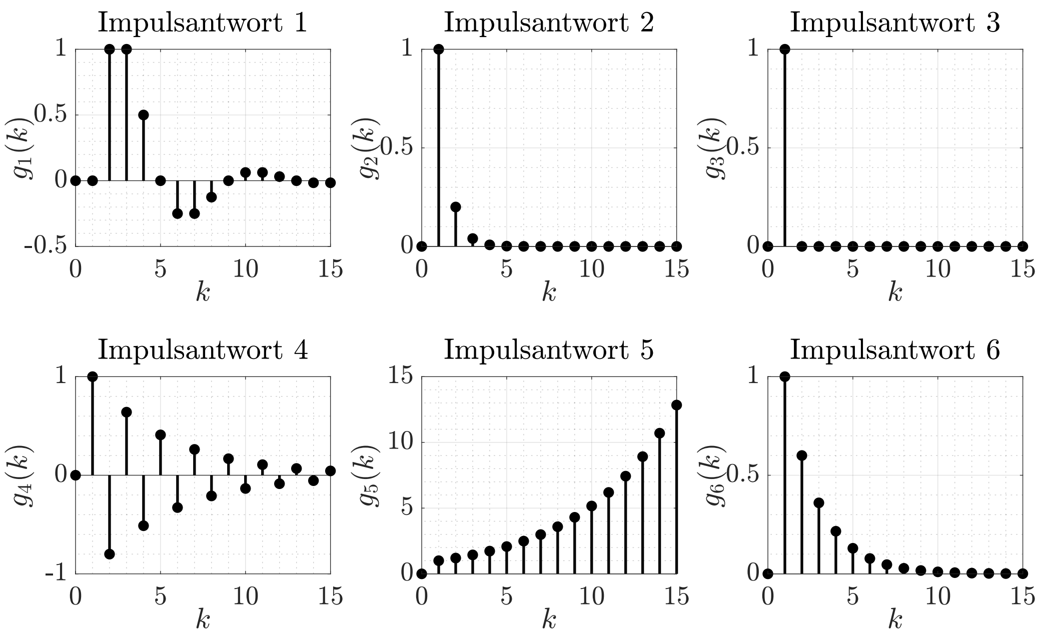
Ordnen Sie die Pole den Impulsantworten in der gegebenen Tabelle richtig zu.

(Hinweis: Drei Pollagen sind keiner Impulsantwort zurechenbar. Alle Übertragungsfunktion haben die Struktur $G(z) = \frac{1}{A(z)}$ mit $A(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - p_i)$)



Impuls-antwort	Pole
1	D
2	I
3	G
4	C
5	F
6	E

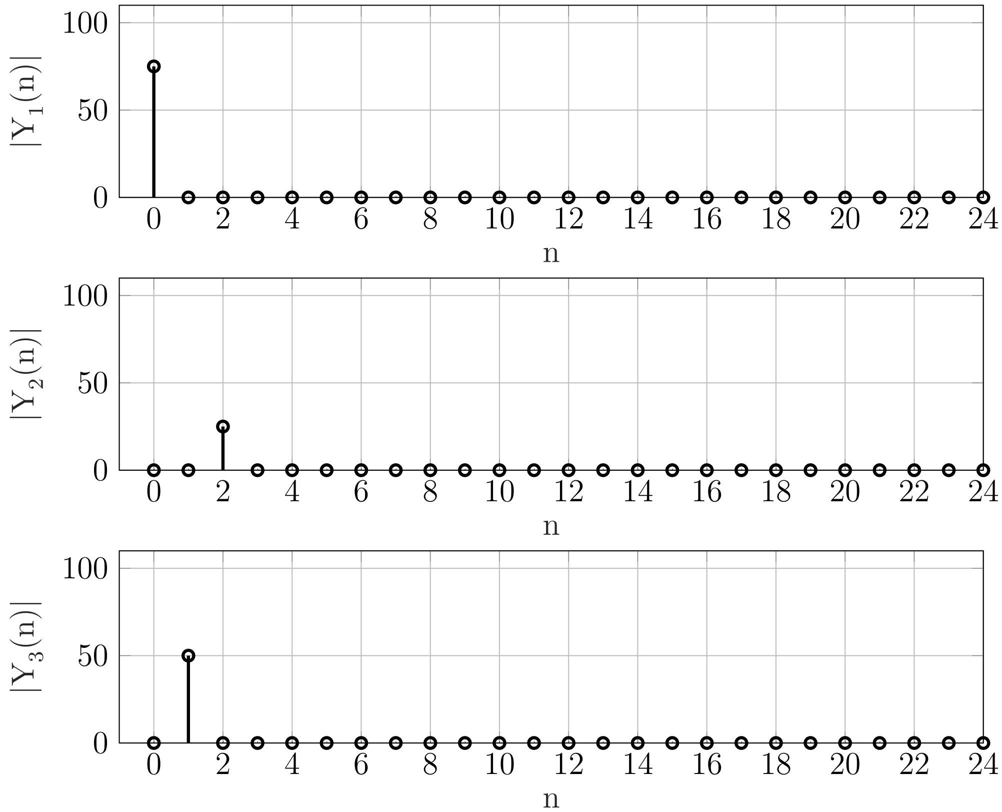
2 2 2 2 2 2



$\sum$ 12

Aufgabe 4: DFT (13 Punkte)

Im Folgenden sehen Sie die DFT Ergebnisse (linke Hälfte des Spektrums) von verschiedenen Signalen.
Hinweis: $|Y(n)| = \frac{N}{2} \cdot A$ *wenn* A *die Amplitude der Schwingung ist.*
Bei $\omega = 0$ *gilt:* $|Y(n)| = N \cdot A$.

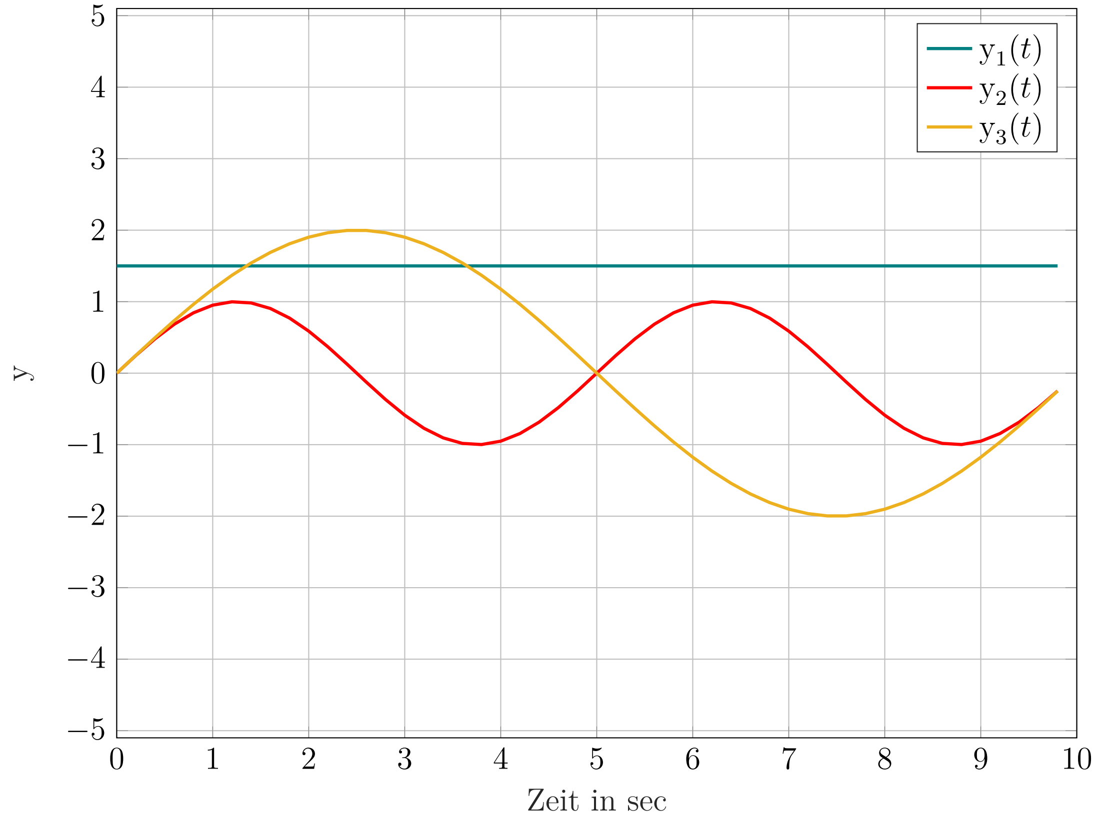


Die Signale wurden mit einer Abtastzeit von 0.2 sec im Zeitraum von 0 sec bis 9.8 sec abgetastet (erster Abtastschritt bei 0 sec).

a) Berechnen Sie die Abtastfrequenz f_0.
Antwort: $f_0 = \frac{1}{0.2 \text{ sec}} = 5$ Hz 1

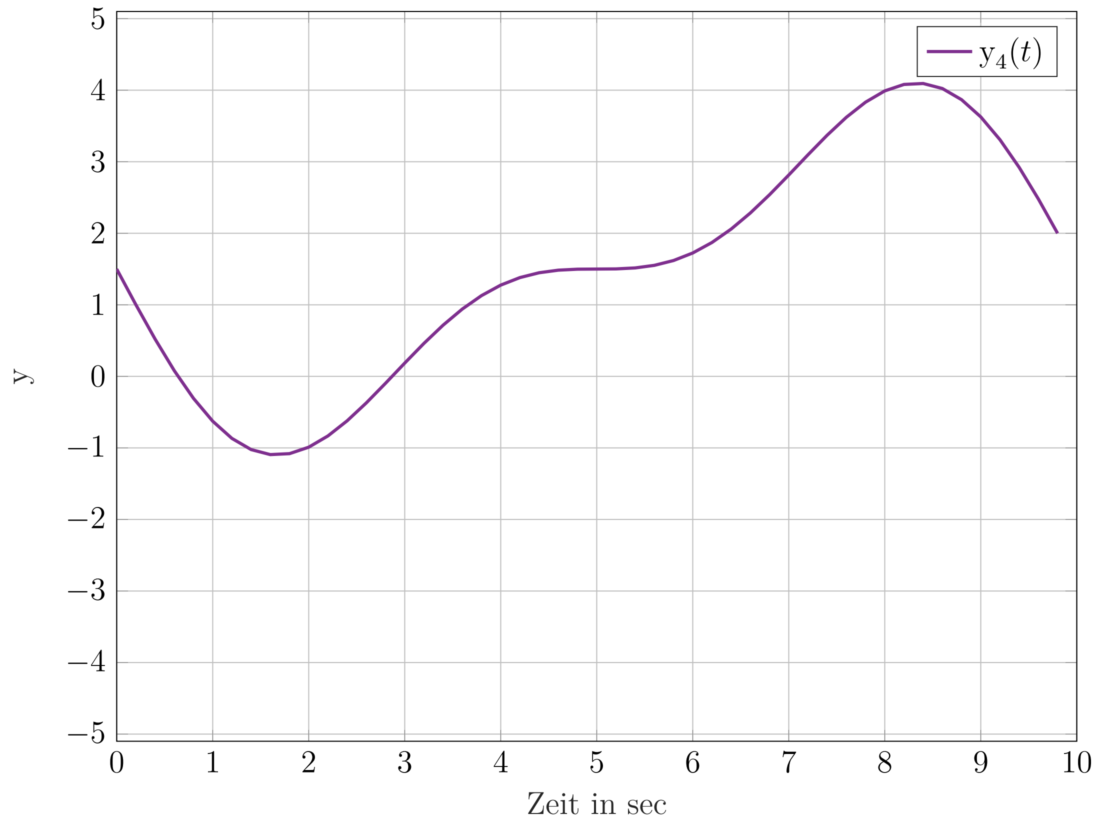
b) Bestimmen Sie die Anzahl der Abtastschritte N.
Antwort: $N = 50 = \frac{9.8}{0.2} + 1$ 1

c) Zeichnen Sie die Signale $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ den oben stehenden Diagrammen entsprechend in das folgende leere Diagramm ein. Achten sie dabei darauf, dass die Linien der Signale gut zu unterscheiden und eindeutig zugeordnet sind.
Antwort:
$y_1(t)$ ist ein Gleichwert mit dem Wert 1.5.
$y_2(t)$ ist ein Sinus mit der Frequenz $\frac{2}{50} \cdot 5$ Hz und einer Amplitude von 1.
$y_3(t)$ ist ein Sinus mit der Frequenz $\frac{1}{50} \cdot 5$ Hz und einer Amplitude von 2.



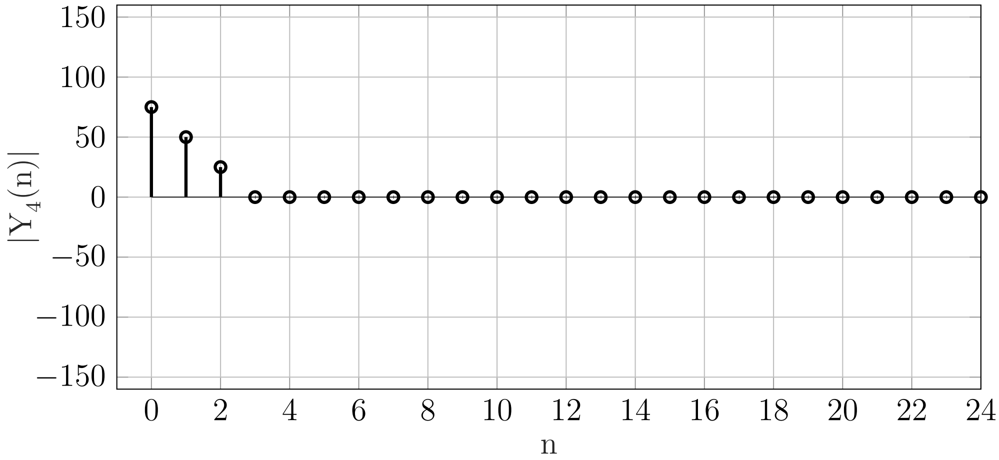
6

d) Zeichnen Sie $y_4(t) = y_1(t) - y_2(t) - y_3(t)$ in das folgende leere Diagramm ein.



2

e) Tragen Sie nun das Ergebnis der DFT (nur die linke Seite des Spektrums) $|Y_4(n)|$ von dem vorhin gezeichneten Signal $y_4(t)$ in das folgende Diagramm ein.
Antwort:
Die Spektralanalyse $|Y_4(N)| = |Y_1(N)| + |Y_2(N)| + |Y_3(N)|$ ist eine Addition der ersten 3 Spektralanalysen, weil die DFT eine lineare Transformation darstellt. Die Vorzeichen der einzelnen Signale haben keinen Einfluss auf den Betrag der DFT.



3

$\sum$ 13

Aufgabe 5: Lineare Filter (14 Punkte)

a) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

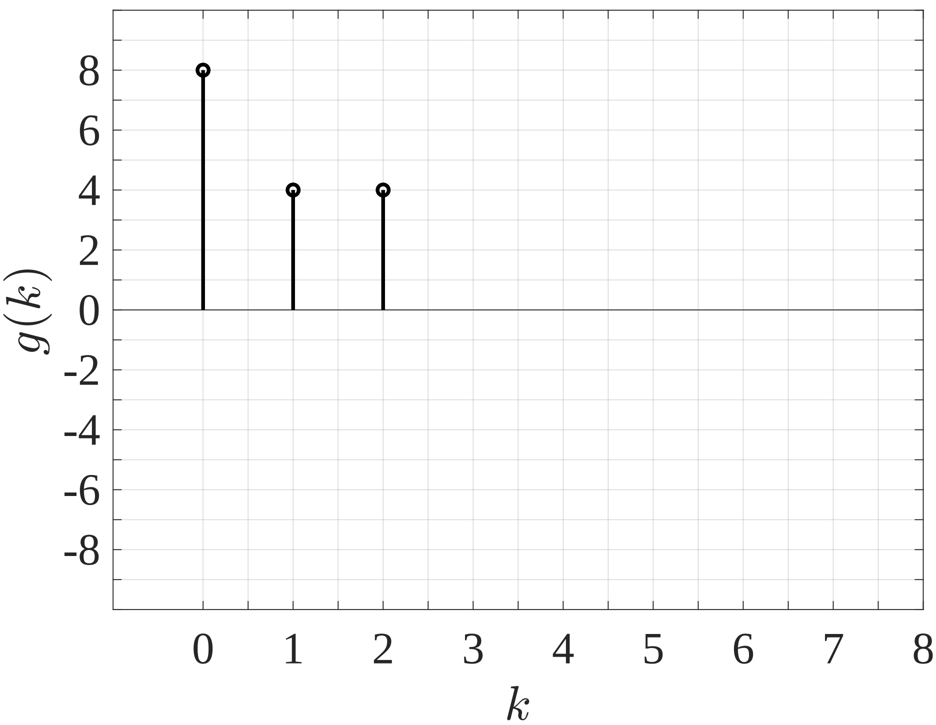
$$G_1(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1}. \tag{3}$$

Berechnen Sie die zugehörige Differenzengleichung. Die zugehörige Differenzengleichung lautet

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) - a_1 y(k-1). \tag{4}$$

1

b) Bestimmen Sie aus dem dargestellten Teil der Impulsantwort die Koeffizienten b_0, b_1 und a_1 von $G_1(z)$.

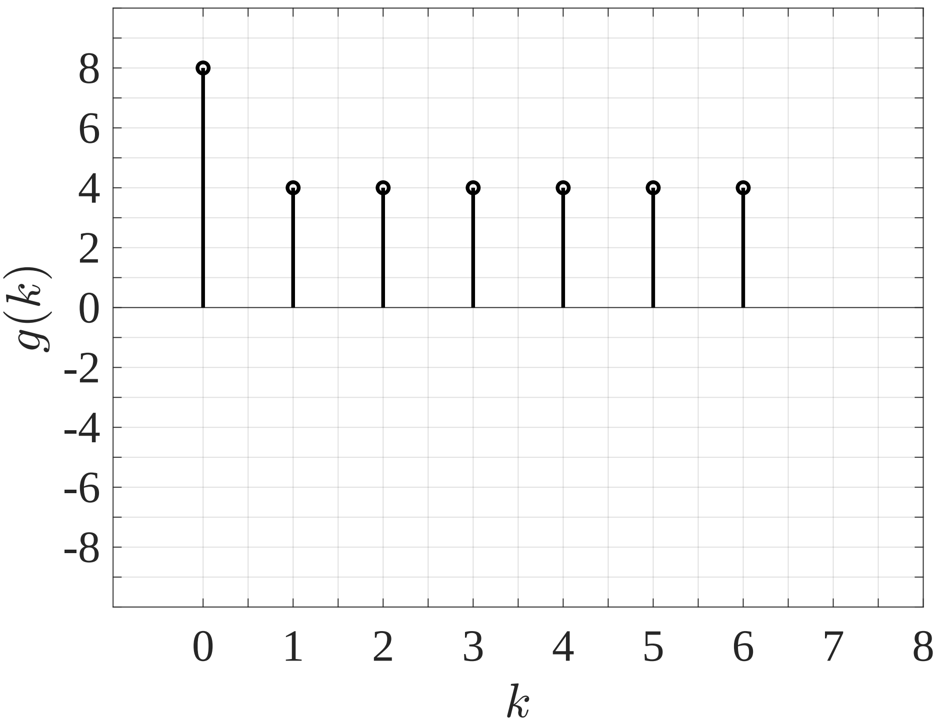


Es gilt:

$$g(0) = 8 = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 - a_1 \cdot 0 \rightarrow b_0 = 8 \tag{5}$$
$$g(2) = 4 = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 - a_1 \cdot 4 \rightarrow a_1 = -1 \tag{6}$$
$$g(1) = 4 = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 + 1 \cdot 8 \rightarrow b_1 = -4 \tag{7}$$

4

c) Zeichnen Sie die nächsten 4 Werte der Impulsantwort von $G_1(z)$ in das Diagramm ein.



2

d) Nun sei die Übertragungsfunktion

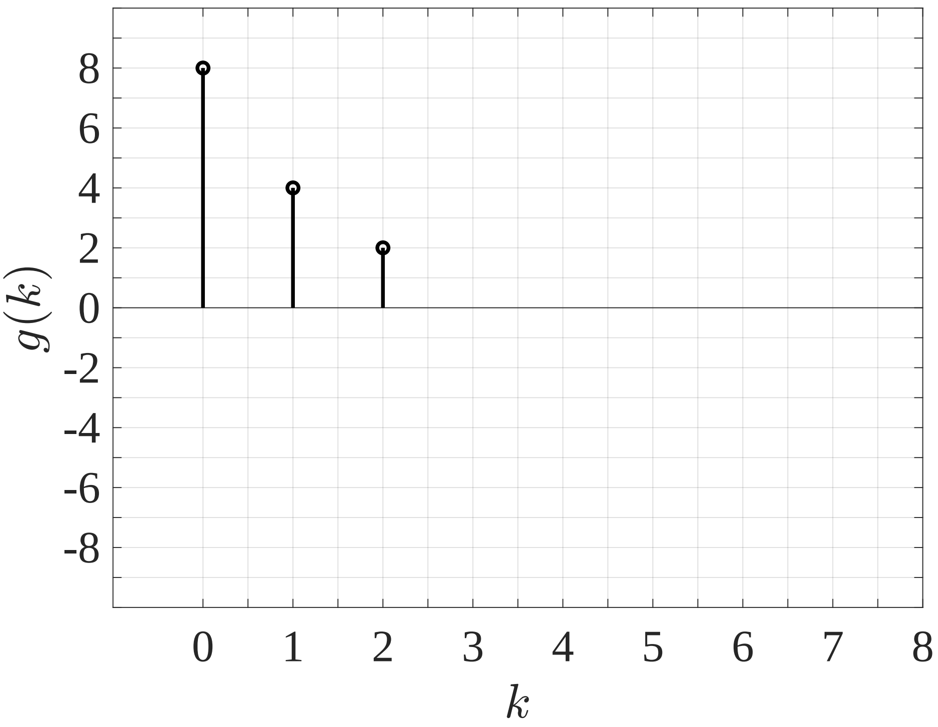
$$G_2(z) = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \tag{8}$$

gegeben. Berechnen Sie die diskrete Differenzengleichung. Die Differenzengleichung lautet

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k) \tag{9}$$

1

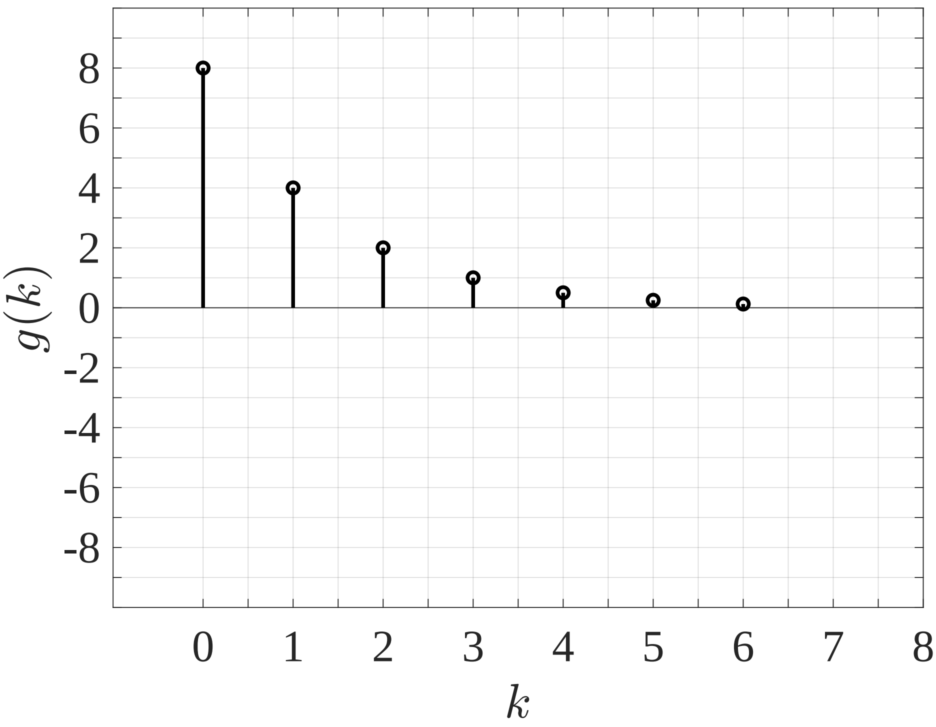
e) Bestimmen Sie aus dem dargestellten Teil der Impulsantwort die Koeffizienten b_0, a_1 und a_2 von $G_2(z)$.



$$g(0) = 8 = b_0 \cdot 1 - a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0 \rightarrow b_0 = 8 \tag{10}$$
$$g(1) = 4 = b_0 \cdot 0 - a_1 \cdot 8 - a_2 \cdot 0 \rightarrow a_1 = -0.5 \tag{11}$$
$$g(2) = 2 = b_0 \cdot 0 + 0.5 \cdot 4 - a_2 \cdot 8 \rightarrow a_2 = 0 \tag{12}$$

$\boxed{4}$

f) Zeichen Sie die nächsten 4 Werte der Impulsantwort von $G_2(z)$ in das Diagramm ein.



$\boxed{2}$

$\boxed{\sum 14}$