Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

09. März 2013

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	10	6	8	14	22	60
Note:	Ist:						

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Die parametrische Frequenzanalyse...
- ☐ ... führt auf ein kontinuierliches Amplitudenspektrum.
- ☐ ... führt auf ein diskretes Amplitudenspektrum.
- ☐ ... ist unempfindlicher bezüglich Messrauschen als nicht-parametrische Verfahren.

b) Die diskrete Fourier Transformation ist periodisch...
- ☐ ... in der Zeit und der Frequenz.
- ☐ ... nur in der Zeit.
- ☐ ... nur in der Frequenz.

c) Für eine Messung mit $N = 18.000$ Messwerten und einer Abtastfrequenz von $f_0 = 0,6\,\text{kHz}$ wird eine DFT durchgeführt. Welche Frequenzauflösung ergibt sich?
- ☐ $\Delta f = \frac{1}{60}$Hz.
- ☐ $\Delta f = \frac{1}{15}$Hz.
- ☐ $\Delta f = \frac{1}{30}$Hz.

d) Was kann mit der diskreten Fourier Transformation (DFT) erreicht werden?

- ☐ Die Transformation eines diskreten Signals aus dem Zeitbereich in den diskreten Frequenzbereich.
- ☐ Die Transformation eines Signals aus dem diskreten Frequenzbereich in den diskreten Zeitbereich.
- ☐ Die Transformation eines diskreten Signals aus dem Zeitbereich in den kontinuierlichen Frequenzbereich.

e) Eine Erhöhung der Anzahl der Messungen hat auf die Frequenzauflösung folgende Auswirkung:

- ☐ Sie wird grober.
- ☐ Sie wird feiner.
- ☐ Sie bleibt unberührt.

f) Für ein FIR-Filter mit der Grenzfrequenz f_g ist die Abtastfrequenz f_0 festzulegen. Kreuzen Sie Zutreffendes an.

- ☐ f_0 sollte so klein wie möglich gewählt werden.
- ☐ f_0 sollte so groß wie möglich gewählt werden.
- ☐ f_0 sollte in jedem Fall halb so groß sein wie die gewünschte Grenzfrequenz f_g.

g) Um eine sinnvolle Aussage über die in einem instationären Signal enthaltenen Frequenzen zu treffen, ...

- ☐ ... kann das Signal mit einer Kurzzeit-DFT untersucht werden.
- ☐ ... kann das Signal mit einer Wavelet-Transformation untersucht werden.
- ☐ ... kann das Signal nicht mit einer Kurzzeit-DFT untersucht werden.

h) Der sogenannte Leckeffekt kann reduziert werden durch die ...

- ☐ ... Multiplikation mit einem Hann-Fenster im Zeitbereich.
- ☐ ... Faltung mit einem Hann-Fenster im Zeitbereich.
- ☐ ... Multiplikation mit einem Rechteck-Fenster im Zeitbereich.

Aufgabe 2: Aliasing

Gegeben ist das periodische Signal $y(t) = \sin(2\pi \cdot 10\text{Hz} \cdot t)$.

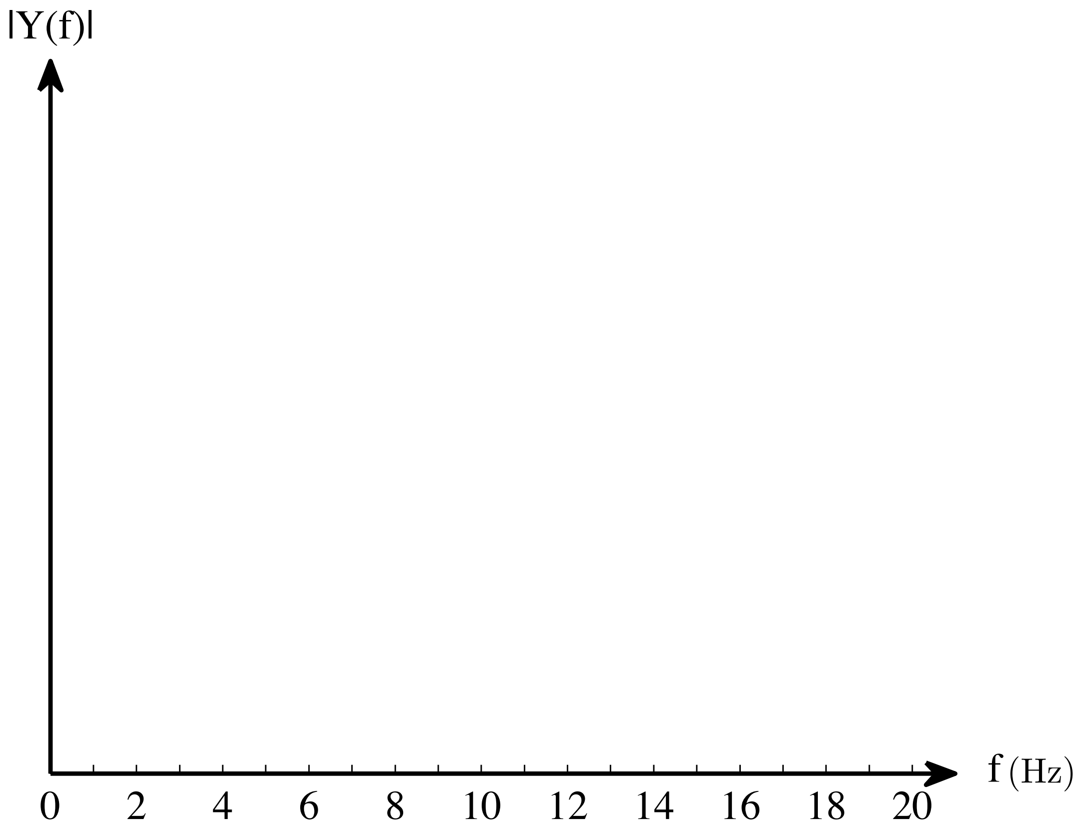
a) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum für das gegebene Signal in das unten stehende Diagramm.

b) Das Signal wird mit einer Abtastfrequenz von $f_0 = 8\text{Hz}$ gemessen. Erklären Sie, warum in diesem Fall Aliasing auftritt.

c) Kennzeichnen Sie im unten stehenden Diagramm die Nyquist-Frequenz (Shannonsches Abtasttheorem).

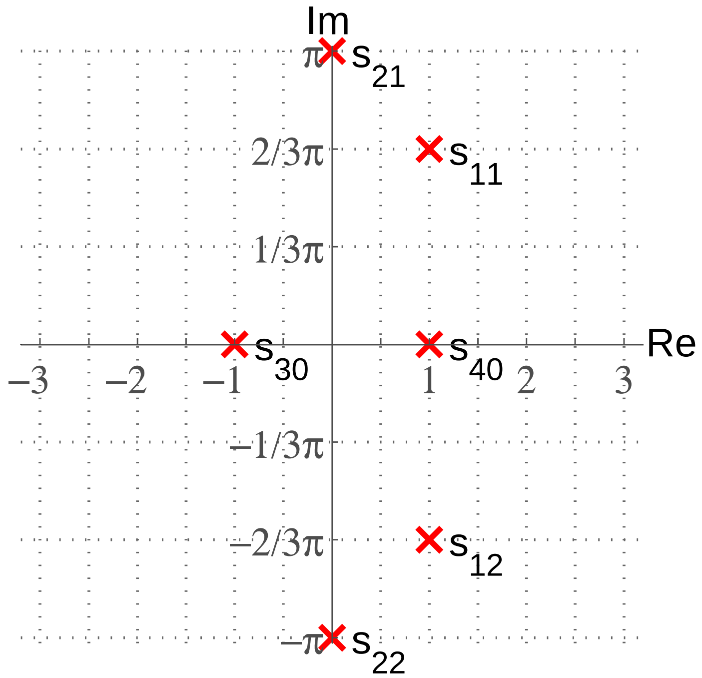
d) Zeichnen Sie die durch das Aliasing entstehenden Schattenspektren.

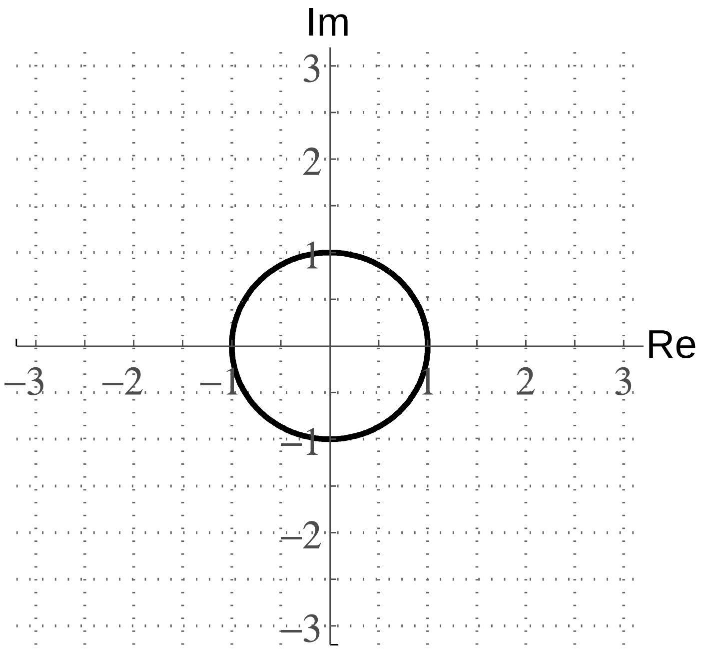
e) Welche Frequenz würde man fälschlicherweise anhand des abgetasteten Signals vermuten?



Aufgabe 3: Beziehung zwischen s-Ebene und z-Ebene

Berechnen Sie die Lage der Punkte s_{ij} (zwei Pole und zwei Polpaare!) in der z-Ebene z_{ij} und zeichnen Sie diese in die z-Ebene ein. Benutzen Sie dazu in der z-Ebene die gleichen Indizes wie im s-Bereich. Nehmen Sie zur Umrechnung ein Abtastintervall von $T_0 = 1$ Sekunde an. (Hinweis: Verwenden Sie die exakte Formel zur Umrechnung in den z-Bereich).





Aufgabe 4: Filter

Gegeben ist das unten gezeigte Signal $u(k)$, welches gefiltert werden soll. Für Werte von k, die kleiner als -2 oder größer als 10 sind, sei das Eingangssignal Null. Zur Filterung dient zum einen der Median-Filter:

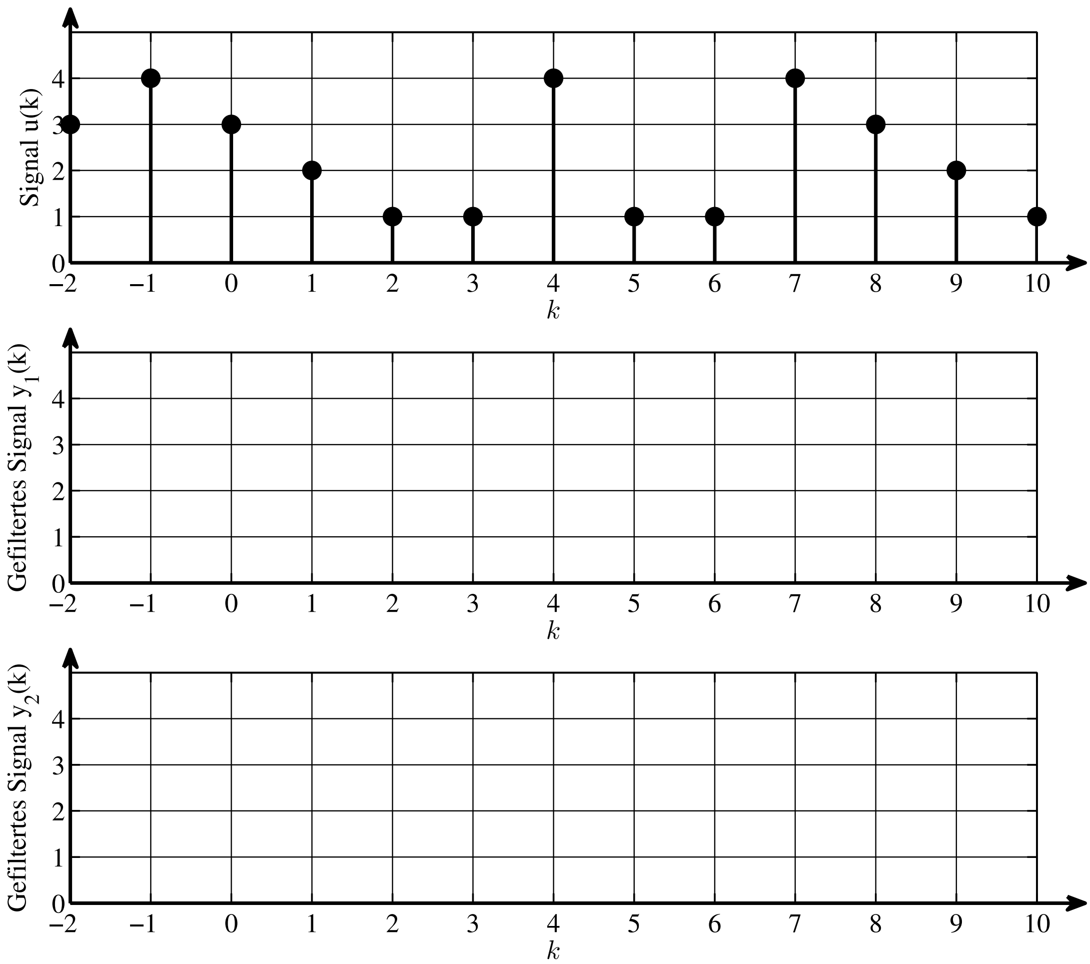
$$y_1(k) = \text{median}\{u(k), u(k-1), u(k-2)\} .$$

Darüber hinaus wird ein kausales Mittelwertfilter 2. Ordnung verwendet.

a) Stellen Sie die Differenzengleichung für das kausale Mittelwertfilter 2. Ordnung auf.

b) Berechnen und skizzieren Sie sowohl das mit dem Medianfilter gefilterte Signal $y_1(k)$ als auch das mit dem Mittelwertfilter gefilterte Signal $y_2(k)$. Benutzen Sie für die Skizzen die vorbereiteten Diagramme und geben Sie die Ausgangsfolgen in folgender Form an:
$y(k) = \{y(-2), y(-1), y(0), \ldots, y(10)\}$.

c) Handelt es sich beim Median- und Mittelwertfilter jeweils um einen Tiefpass- oder um einen Hochpass-Filter?

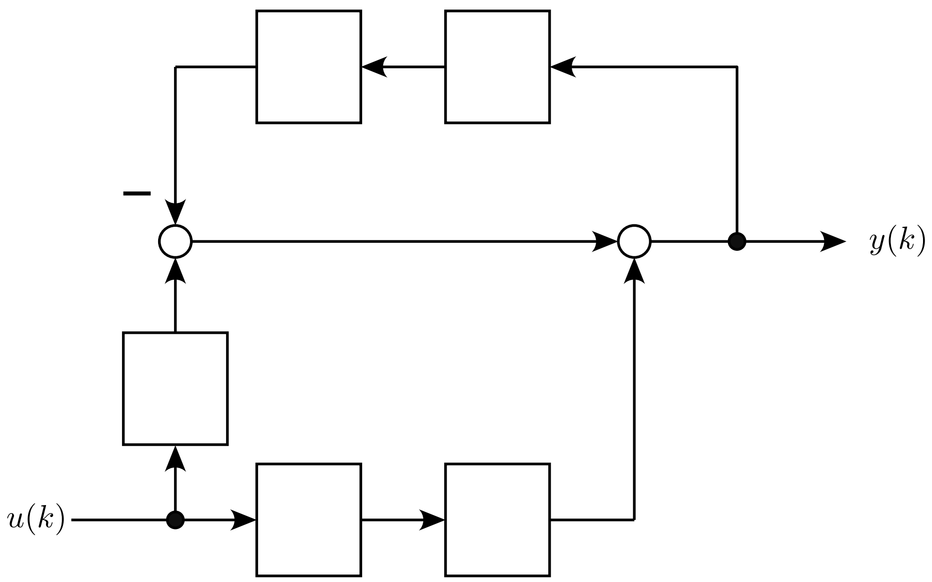


Aufgabe 5: Zeitdiskretes System

Gegeben ist die folgende Differenzengleichung eines allgemeinen zeitdiskreten Systems 1. Ordnung:

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) - a_1 y(k-1) \ .$$

a) Vervollständigen Sie das Blockschaltbild, damit es zur angegebenen Differenzengleichung passt.



b) Woran lässt sich erkennen, ob ein System sprungfähig ist oder nicht. Welche Bedingung muss im gegebenen System gelten, damit es sprungfähig ist?

c) Was muss gelten, damit das gezeigte System ein FIR-System ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Leiten Sie die Übertragungsfunktion im z-Bereich ($G(z) = \dots$) her.

e) Berechnen Sie die z-Transformierte der Sprungantwort $H(z)$.

f) Auf welchen Wert stellt sich die Sprungantwort $h(k)$ ein für $k \to \infty$? Wie lautet die Sprungantwort für $k = 0$?

g) Nehmen Sie nun an, dass die Koeffizienten folgende Werte aufweisen: $b_0 = 0{,}3$, $b_1 = 0$ und $a_1 = -0{,}9$. Stellen Sie die Gleichung für die Sprungantwort $h(k)$ auf.

h) Was würde mit der Impulsantwort passieren, wenn a_1 ein positives Vorzeichen hätte, d.h. $a_1 = +0{,}9$ wäre. Welchen Einfluss hat die Vorzeichenänderung des Pols auf die Stabilität?

Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Die parametrische Frequenzanalyse...

■ ... führt auf ein kontinuierliches Amplitudenspektrum.

□ ... führt auf ein diskretes Amplitudenspektrum.

■ ... ist unempfindlicher bezüglich Messrauschen als nicht-parametrische Verfahren.

b) Die diskrete Fourier Transformation ist periodisch...

■ ... in der Zeit und der Frequenz.

□ ... nur in der Zeit.

□ ... nur in der Frequenz.

c) Für eine Messung mit $N = 18.000$ Messwerten und einer Abtastfrequenz von $f_0 = 0,6\,\text{kHz}$ wird eine DFT durchgeführt. Welche Frequenzauflösung ergibt sich?

□ $\Delta f = \frac{1}{60}$Hz.

□ $\Delta f = \frac{1}{15}$Hz.

■ $\Delta f = \frac{1}{30}$Hz.

d) Was kann mit der diskreten Fourier Transformation (DFT) erreicht werden?

■ Die Transformation eines diskreten Signals aus dem Zeitbereich in den diskreten Frequenzbereich.

□ Die Transformation eines Signals aus dem diskreten Frequenzbereich in den diskreten Zeitbereich.

□ Die Transformation eines diskreten Signals aus dem Zeitbereich in den kontinuierlichen Frequenzbereich.

e) Eine Erhöhung der Anzahl der Messungen hat auf die Frequenzauflösung folgende Auswirkung:

□ Sie wird grober.

■ Sie wird feiner.

□ Sie bleibt unberührt.

f) Für ein FIR-Filter mit der Grenzfrequenz f_g ist die Abtastfrequenz f_0 festzulegen. Kreuzen Sie Zutreffendes an.

■ f_0 sollte so klein wie möglich gewählt werden.

□ f_0 sollte so groß wie möglich gewählt werden.

□ f_0 sollte in jedem Fall halb so groß sein wie die gewünschte Grenzfrequenz f_g.

g) Um eine sinnvolle Aussage über die in einem instationären Signal enthaltenen Frequenzen zu treffen, ...

■ ... kann das Signal mit einer Kurzzeit-DFT untersucht werden.

■ ... kann das Signal mit einer Wavelet-Transformation untersucht werden.

☐ ... kann das Signal nicht mit einer Kurzzeit-DFT untersucht werden.

h) Der sogenannte Leckeffekt kann reduziert werden durch die ...

■ ... Multiplikation mit einem Hann-Fenster im Zeitbereich.

☐ ... Faltung mit einem Hann-Fenster im Zeitbereich.

☐ ... Multiplikation mit einem Rechteck-Fenster im Zeitbereich.

$\boxed{\sum 10}$

Aufgabe 2: Abtasttheorem

Ein Signal $y(t) = \sin(2\pi \cdot 10\text{Hz} \cdot t)$ soll mit einer Abtastfrequenz von $f_0 = 8$Hz gemessen werden.

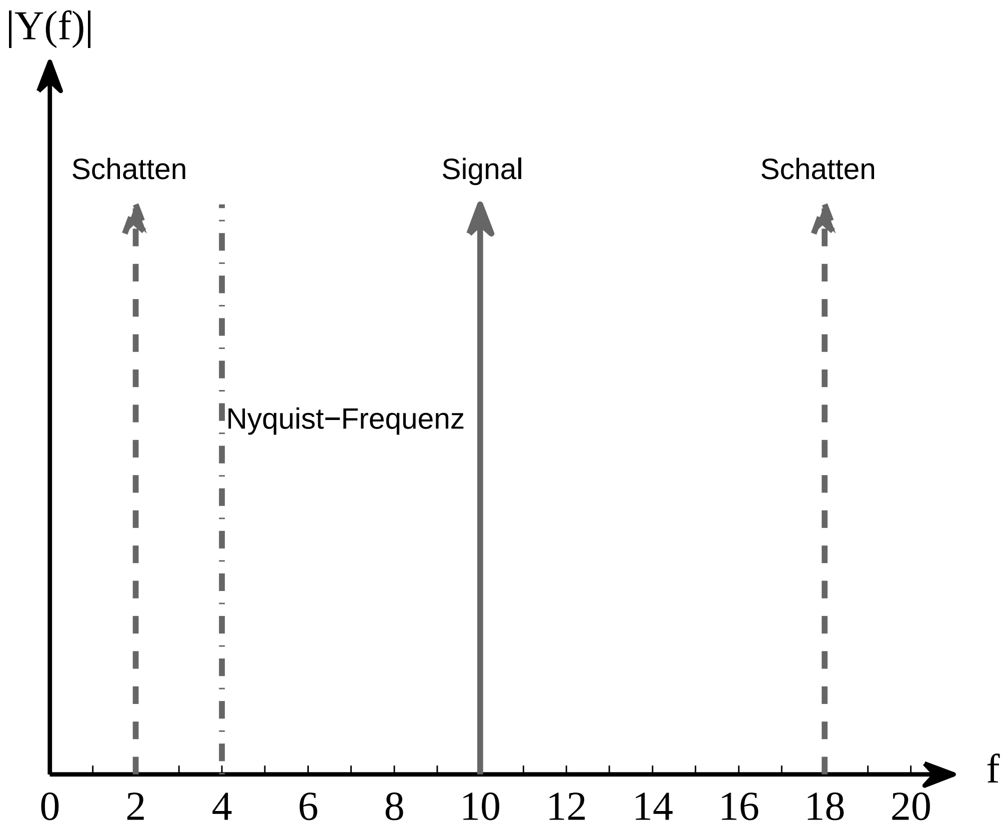
a) Signalspektrum. Siehe Diagramm. $\boxed{1}$

b) Das Signal müsste nach dem Shannonschen Abtasttheorem mit mindestens dem Doppelten der höchsten Signalfrequenz abgetastet werden, d.h. mit mindestens 20Hz. In diesem Fall ist $f_0 = 8$Hz und daher viel zu niedrig für gegebenes Signal. Dadurch tritt Aliasing auf. $\boxed{1}$

c) Shannon-Frequenz $= \frac{f_0}{2} = 4$Hz. $\boxed{1}$

d) Schattenspektren. Siehe Diagramm. $\boxed{1}$

e) Nach dem Abtasttheorem sind Signale nur bis $f = \frac{f_0}{2}$ ohne Informationsverlust rekonstruierbar. In diesem Fall wäre durch das entstandene Schattenspektrum ein falsches Sinus-Signal mit der Frequenz 2Hz statt des wahren Signals mit 10Hz sichtbar. $\boxed{2}$



$\boxed{\sum 6}$

Aufgabe 3: Beziehung zwischen s-Ebene und z-Ebene

Allgemein: $z = e^{sT_0}$ mit $T_0 = 1$ folgt $z = e^s$

$z_{11} = e^{1+i\frac{2}{3}\pi} = e^1 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi} = e^1[cos(\frac{2}{3}\pi) + isin(\frac{2}{3}\pi)] \approx -1.36 + i2.35;$ 1

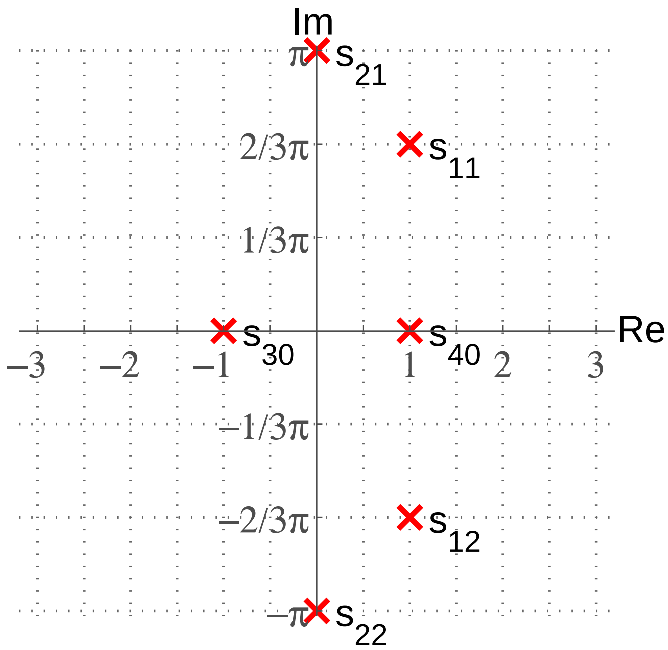
$z_{12} \approx -1.36 - i2.35;$ 1

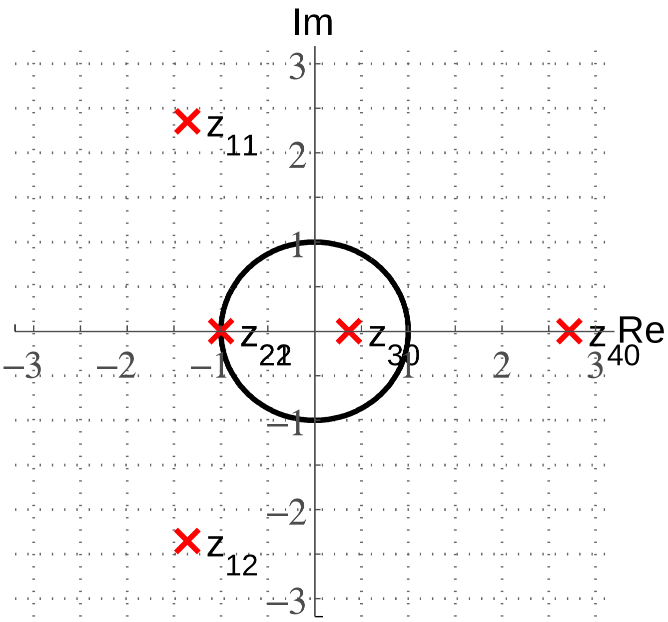
$z_{21} = -1;$ 1

$z_{22} = -1;$ 1

$z_{30} = e^{-1} \approx 0.37;$ 1

$z_{40} = e^1 \approx 2.72$ 1





2

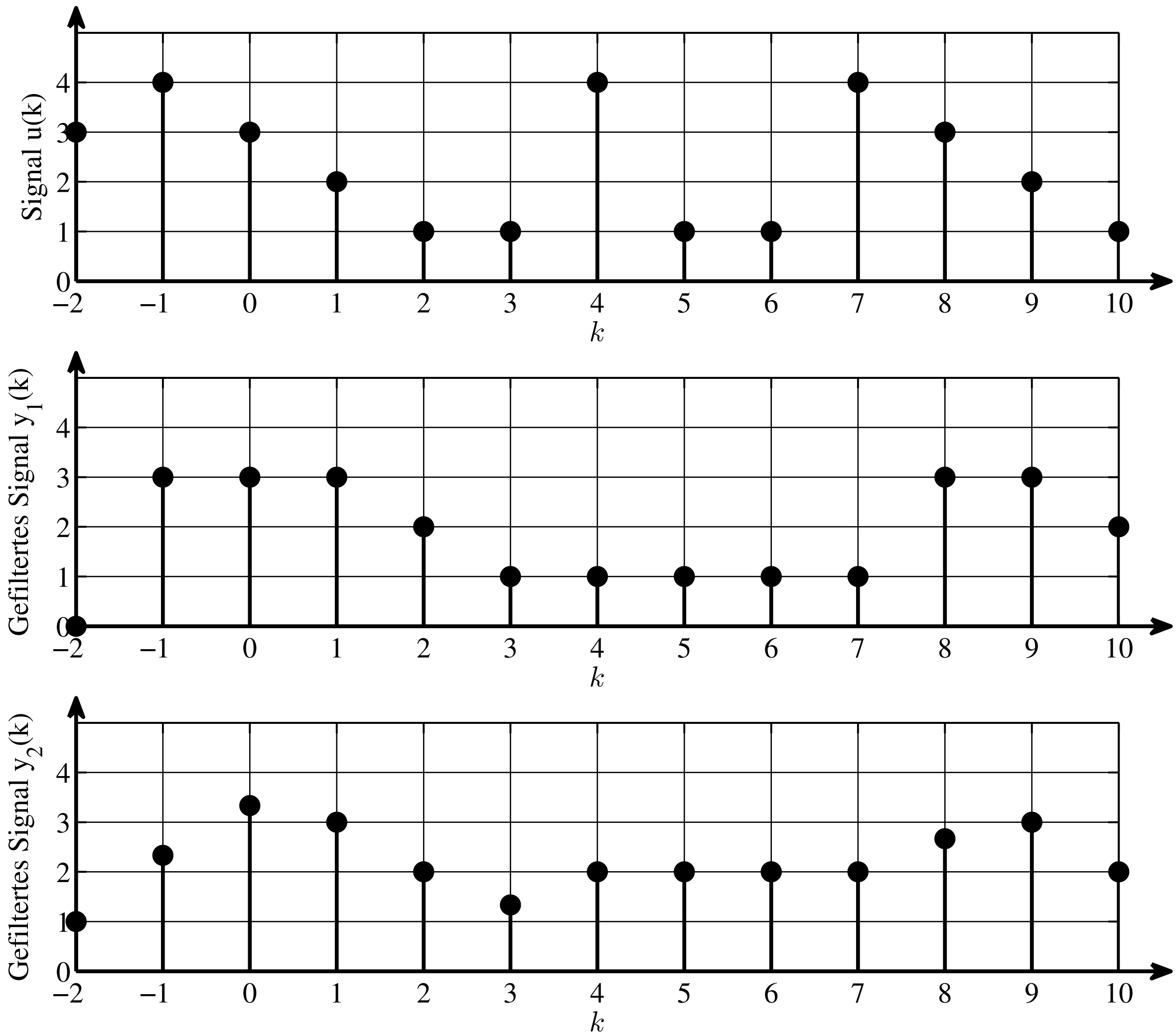
$\sum 8$

Aufgabe 4: Filter

a) $y_2(k) = \frac{1}{3}\left(u(k) + u(k-1) + u(k-2)\right)$. 2

b) Siehe Diagramme. 6
$y_1(k) = \{0; 3; 3; 3; 2; 1; 1; 1; 1; 1; 3; 3; 2\}$ 2
$y_2(k) = \{1; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}; 3; 2; \frac{4}{3}; 2; 2; 2; 2; \frac{8}{3}; 3; 2\}$ 2

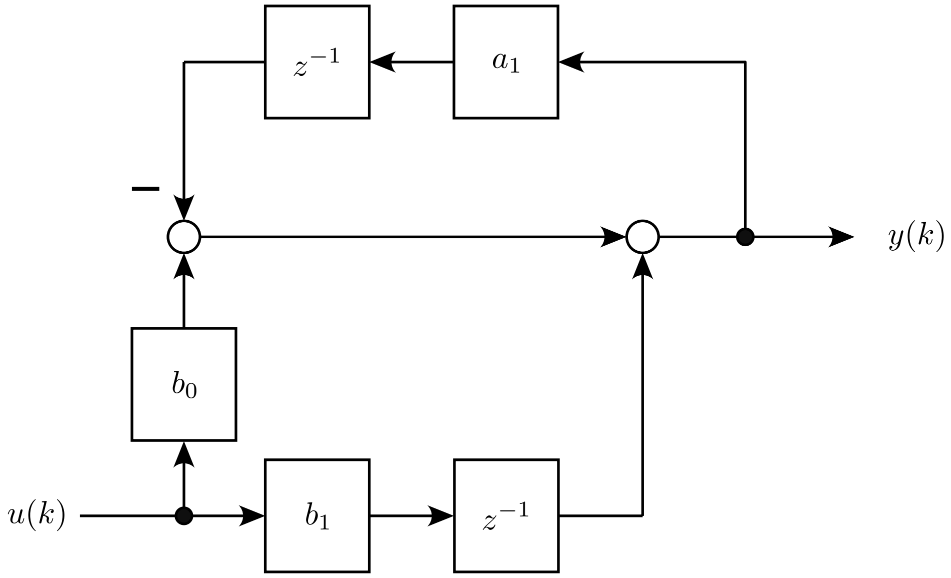
c) Sowohl Medianfilter als auch Mittelwertfilter sind Tiefpassfilter. 2



$\sum$ 14

Aufgabe 5: Zeitdiskretes System

a) Das vollständige Blockschaltbild ist:



5

b) Ein System ist sprungfähig, wenn die Eingangsgröße $u(k)$ einen direkten Einfluss auf die Ausgangsgröße $y(k)$ besitzt. Dazu muss der zugehörige Koeffizient ungleich Null sein: $b_0 \neq 0$. Somit springt $y(k)$, wenn $u(k)$ springt. 1

c) Damit das System eine endliche Implusantwort hat, muss der Ausgang unabhängig von vorherigen Ausgängen berechnet werden können. Dies wird erreicht, indem der Koeffizient a_1 gleich Null ist. Es ist nun nicht mehr notwendig $y(k)$ rekursiv auszurechnen. 1

d) Die Übertragungsfunktion $G(z)$ leitet sich aus der Differenzengleichung wie folgt ab:

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) - a_1 y(k-1)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= b_0 \cdot U(z) + b_1 \cdot U(z) \cdot z^{-1} - a_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} \\
Y(z) \cdot (1 + a_1) &= U(z) \cdot \left(b_0 + b_1 \cdot z^{-1}\right) \\
G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1}}{1 + a_1 \cdot z^{-1}}
\end{aligned}$$

3

e) Die Sprungantwort im z-Bereich berechnet sich durch Multiplikation von $G(z)$ mit der z-Transformierten des Einheitssprungs:

$$H(z) = G(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{b_0 + b_1 \, z^{-1}}{(1 + a_1 \, z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

2

f) Endwert:

$$h(k \to \infty) = \lim_{z \to 1} (z-1) H(z) = \lim_{z \to 1} G(z) = \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1}\,.$$

Anfangswert:

$$h(k \to 0) = \lim_{z \to \infty} H(z) = b_0\,.$$ $\boxed{2}$

(Daher sprungfähig, wenn $b_0 \neq 0$!)

g) Mit gegebenen Koeffizienten ergibt sich die Sprungantwort ($u_k = \sigma(k)$) für $k = 0$ zu:

$$k = 0 : h(0) = b_0 = 0{,}3\,.$$ $\boxed{1}$

Für k>0 ergibt sich (allgemein):

$$\begin{aligned}
k = 1 : h(1) &= b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 1 + (-a_1) \cdot b_0 = b_1 + b_0 \cdot (1 - a_1) \\
k = 2 : h(2) &= b_0 + b_1 + (-a_1) \cdot h(1) = b_0 + b_1 + (-a_1) \cdot (b_1 + b_0 \cdot (1 - a_1)) \\
&= b_0 \cdot \left(1 + (-a_1) + (-a_1^2\right) + b_1 \cdot (1 - a_1) \\
k = 3 : h(3) &= b_0 + b_1 + (-a_1) \cdot h(2) \\
&= b_0 + b_1 + (-a_1) \cdot \left(b_0 \cdot \left(1 + (-a_1) + (-a_1^2\right) + b_1 \cdot (1 - a_1)\right) \\
&= b_0 \cdot \left(1 + (-a_1) + (-a_1)^2 + (-a_1)^3\right) + b_1 \cdot \left(1 + (-a_1) + (-a_1)^2\right) \\
h(k) &= b_0 \cdot \sum_{i=0}^{k} (-a_1)^i + b_1 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (-a_1)^j \\
&= b_0 \cdot \frac{1 - (-a_1)^{k+1}}{1 - (-a_1)} + b_1 \cdot \frac{1 - (-a_1)^k}{1 - (-a_1)}
\end{aligned}$$

Mit den gegebenen Werten $b_0 = 0{,}3, b_1 = 0$ und $a_1 = -0{,}9$ ergibt sich

$$h(k) = 0{,}3 \cdot \sum_{i=1}^{k} (0{,}9)^i = 0{,}3 \cdot \frac{1 - 0{,}9^{k+1}}{1 - 0{,}9} = 3 \cdot (1 - 0{,}9^{k+1})$$ $\boxed{6}$

h) Wenn $a_1 = +0{,}9$ wäre, ergäbe sich eine alternierende Impulsantwort. Die Stabilitätseigenschaften blieben unverändert. $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 22}$