Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

14. März 2015

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	24	10	21	12	13	80
Note:	Ist:						

In dieser Klausur sind maximal 80 Punkte zu erreichen. Das Erreichen von 60 Punkten führt garantiert zur bestmöglichen Note (1.0).

Aufgabe 1: Zeitdiskrete Systeme

Gegeben sind die folgenden beiden Filter-Übertragungsfunktionen

$$G_1(z) = \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z^3} \quad \text{und}$$
$$G_2(z) = \frac{(z^5 + z^3 + z)}{3z^3} \; .$$

Gehen Sie für alle folgenden Untersuchungen von einer Abtastzeit von $T_0 = 1/2$ Sekunde aus.

a) Bestimmen Sie die Differenzengleichungen zu den beiden Filtern $G_1(z)$ und $G_2(z)$.

b) Zeichnen Sie für die beiden Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ jeweils das entsprechende Blockschaltbild.

c) Berechnen Sie die Pole der Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ in der z-Ebene.

d) Berechnen Sie mithilfe der Beziehung zwischen s- und z-Ebene, die Lage der Pole in der s-Ebene.

e) Berechnen Sie die Endwerte der Sprungantworten (Verstärkungen) sowohl für $G_1(z)$ als auch für $G_2(z)$, indem Sie den Endwertsatz anwenden. Im Allgemeinen lautet der Endwertsatz für ein Signal $x(k)$:

$$x(k \to \infty) = \lim_{z \to 1} \left((z-1) \cdot X(z) \right) \; .$$

f) Entscheiden Sie für die beiden Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ jeweils, ob es sich um ein kausales oder akausales System handelt. Begründen Sie kurz.

g) Berechnen Sie für beide Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ deren Phase in Abhängigkeit der Frequenz ω.

h) Zeichnen Sie für beide Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ den jeweiligen Phasengang. Bis zu welcher Frequenz ω_{grenz} zeichnet man den Phasengang eines abgetasteten Systems üblicherweise?

Aufgabe 2: Aliasing

Der Aufgabenteil f) kann unabhängig von den restlichen Aufgabenteilen gelöst werden.
Gegeben sind die periodischen Signale $y_1(t) = \sin(2\pi \cdot 4\text{Hz} \cdot t)$ und $y_2(t) = \sin(2\pi \cdot 12\text{Hz} \cdot t)$. Beide Signale werden mit einer Abtastfrequenz von $f_0 = 10\text{Hz}$ gemessen.

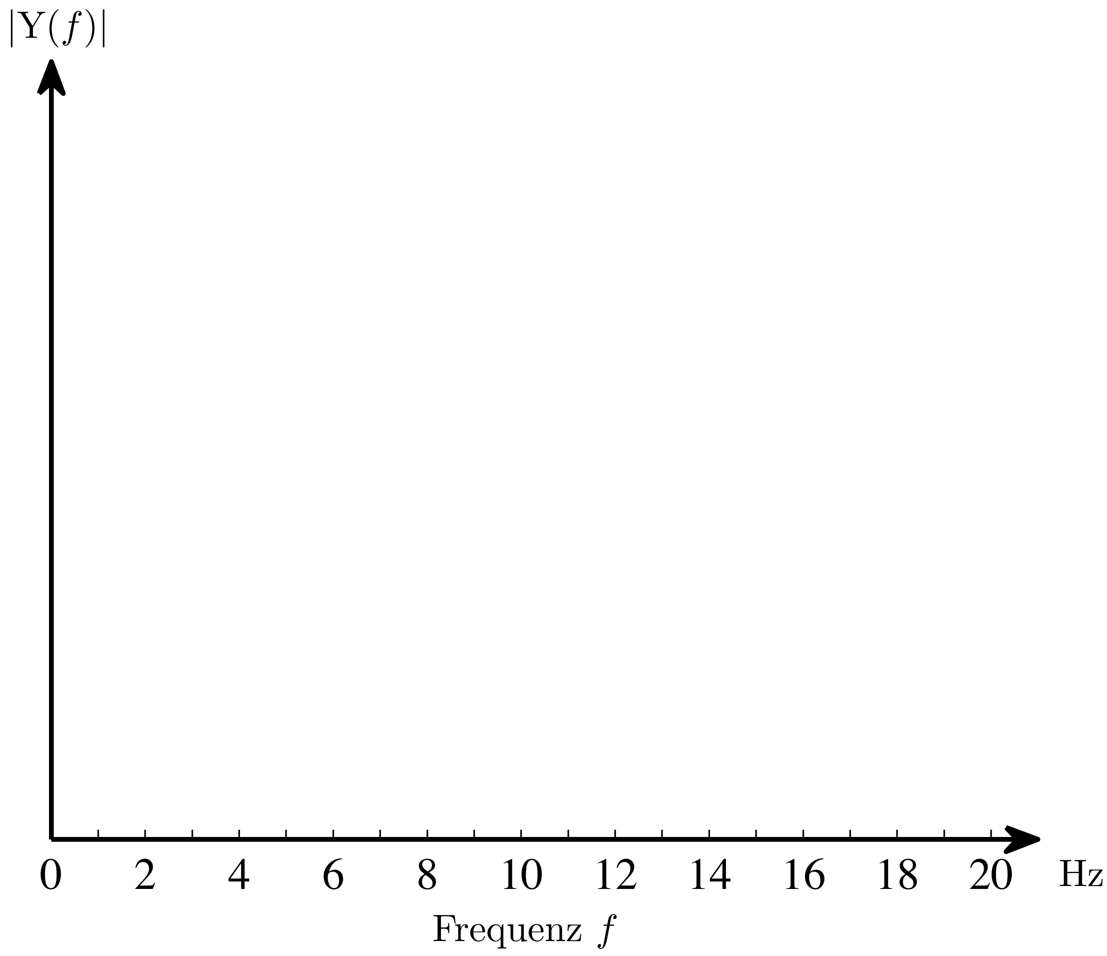
a) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum für die gegebenen Signale in das unten stehende Diagramm.

b) Kennzeichnen Sie im unten stehenden Diagramm die Nyquist-Frequenz (Shannonsches Abtasttheorem).

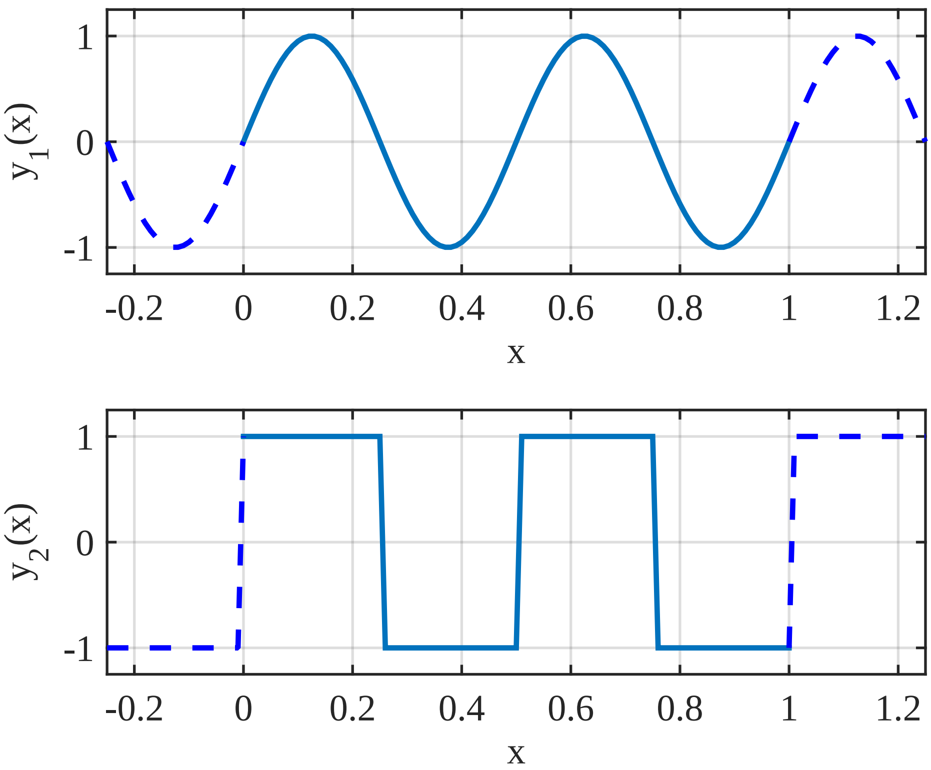
c) Beurteilen Sie in für $y_1(t)$ und $y_2(t)$, ob Aliasing auftritt.

d) Zeichnen Sie alle Schattenspektren von $y_1(t)$ und $y_2(t)$ die im Intervall $[0, 20]$ Hz liegen.

e) Welche Frequenz würde man anhand des abgetasteten Signals sowohl für $y_1(t)$ als auch für $y_2(t)$ vermuten?



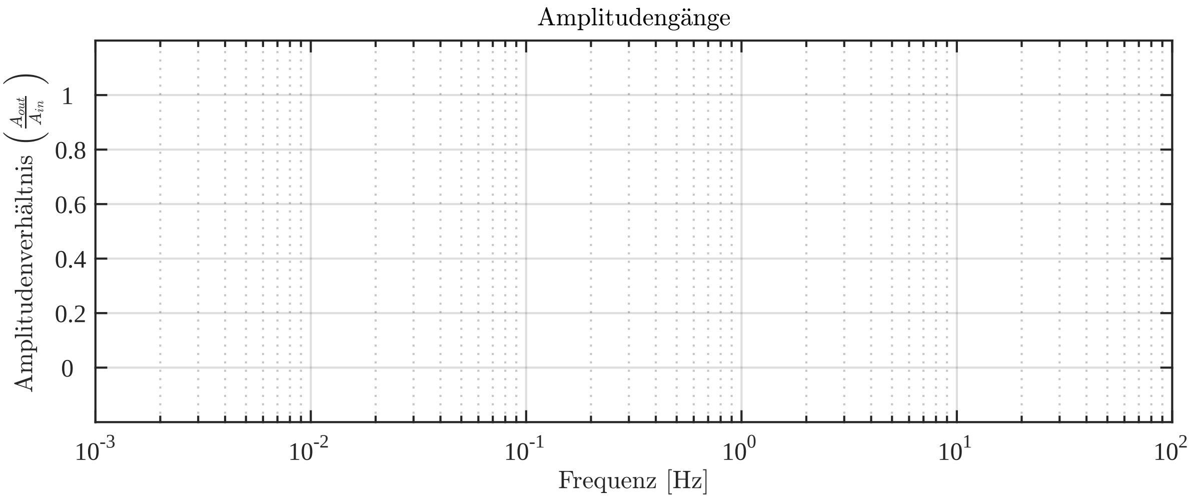
f) **Diese Teilaufgabe kann unabhängig von den vorangegangenen Aufgabenteilen gelöst werden!**
Gegeben ist eine Sinusschwingung y_1 und eine Rechtecksschwingung y_2 mit der gleichen Frequenz $f = 2$Hz. Beide sind nicht begrenzt und setzen sich gegen $\pm\infty$ fort. Es wird eine Abtastfrequenz $f_0 = 10$Hz verwendet. Beurteilen Sie in beiden Fällen ob Aliasing auftritt.



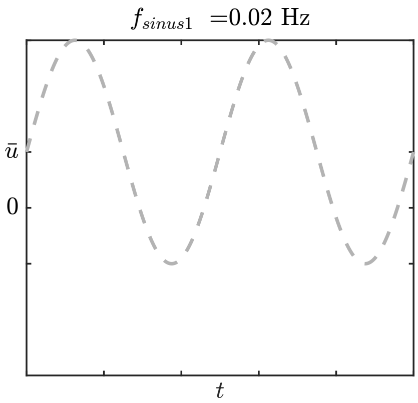
Aufgabe 3: Filter

Aufgabenteil c) ist unabhängig von den restlichen Aufgabenteilen lösbar.

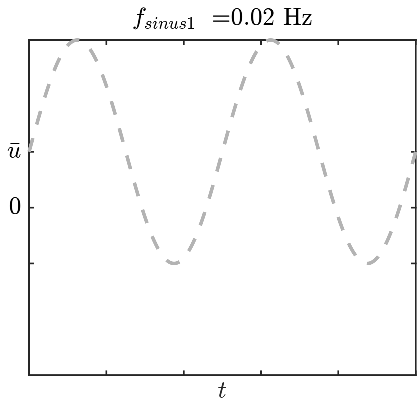
a) Es sollen zwei Filter G_{TP} und G_{BP} miteinander verglichen werden. Bei G_{TP} handelt es sich um ein Tiefpassfilter, bei G_{BP} um ein Bandpassfilter. Die Grenzfrequenz des ersten Filters G_{TP} ist $f_{TP} = 0.1$ Hz. Der Bandpassfilter besitzt zwei Grenzfrequenzen, die bei $f_{BP1} = 6$ Hz und $f_{BP2} = 30$ Hz liegen. Zeichnen Sie die **idealen** Amplitudengänge der beiden Filter G_{TP} und G_{BP} in das unten stehende Diagramm und kennzeichnen Sie, welcher Amplitudengang zu Filter G_{TP} und welcher zu Filter G_{BP} gehört.



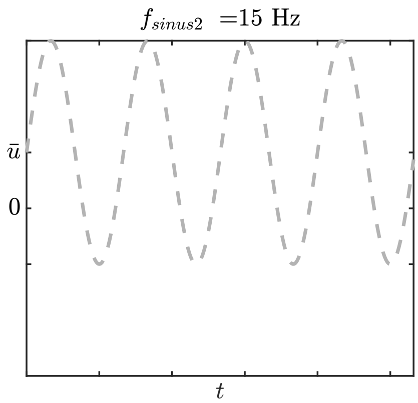
b) Nun sollen Sinusverläufe mit drei unterschiedlichen Frequenzen, $f_{sinus1} = 0.02$ Hz, $f_{sinus2} = 15$ Hz and $f_{sinus3} = 80$ Hz, mit den idealen Filtern G_{TP} und G_{BP} aus Aufgabenteil a) gefiltert werden. Die Sinusverläufe sind unten in jeder Spalte einmal dargestellt. Skizzieren Sie **qualitativ** in der linken Spalte das mit G_{TP} gefilterte Signal und in der rechten Spalte das mit G_{BP} gefilterte Signal. Gehen Sie davon aus, dass die Filterantworten bereits eingeschwungen sind. Bei dem mit $\bar{u}$ bezeichneten Wert handelt es sich um den Mittelwert des Eingangssignals $u(t)$.



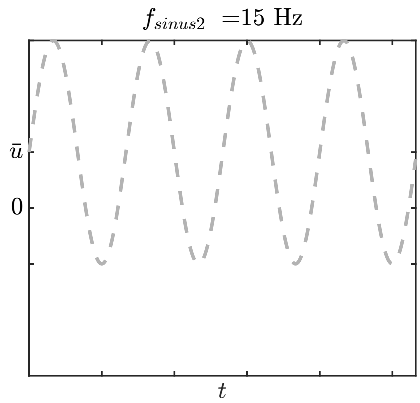
(a) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{TP} im eingeschwungenen Zustand.



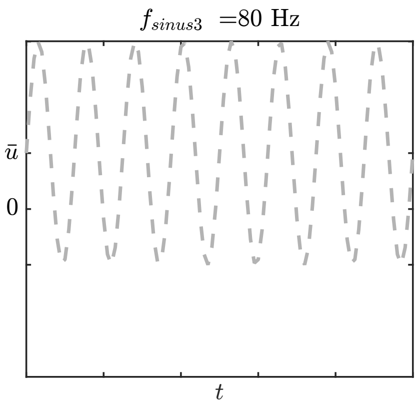
(b) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{BP} im eingeschwungenen Zustand.



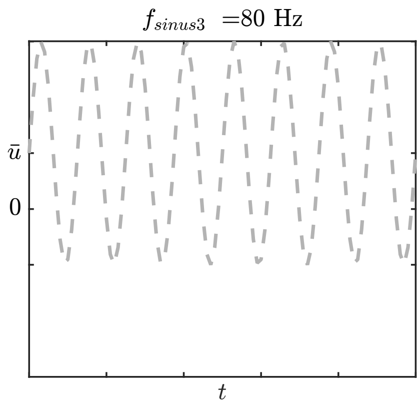
(c) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{TP} im eingeschwungenen Zustand.



(d) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{BP} im eingeschwungenen Zustand.



(e) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{TP} im eingeschwungenen Zustand.



(f) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{BP} im eingeschwungenen Zustand.

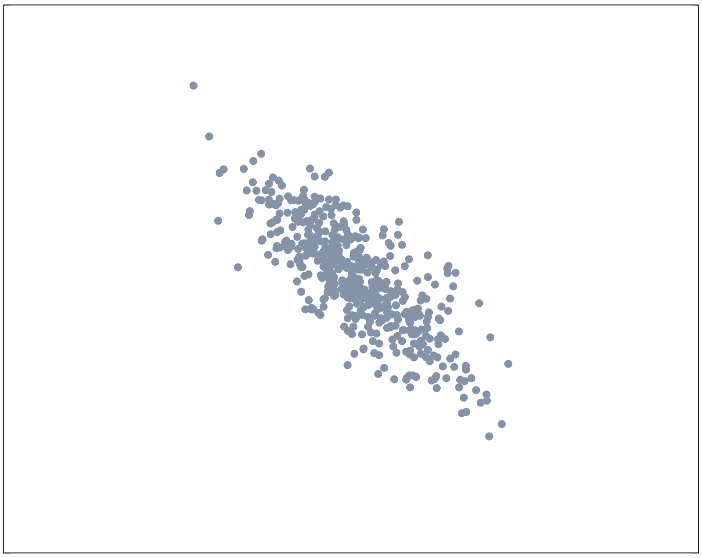
Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von Aufgabenteil a) und b) lösbar.

c) Weisen Sie die folgenden Eigenschaften entweder dem Filtertyp IIR (Infinite Impulse Response) oder dem Filtertyp FIR (Finite Impulse Response) zu.

- Typischerweise niedrige Ordnung
- Instabilität kann nicht auftreten
- Es existiert ein äquivalentes zeitkontinuierliches System
- Eine exakt lineare Phase ist realisierbar

Aufgabe 4: Hauptkomponentenanalyse und Clustering

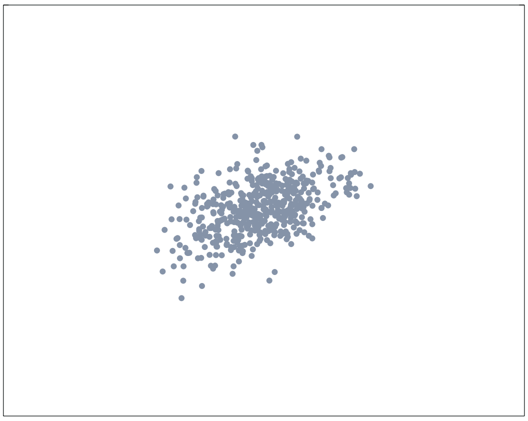
a) Gegeben ist folgende Datenverteilung:



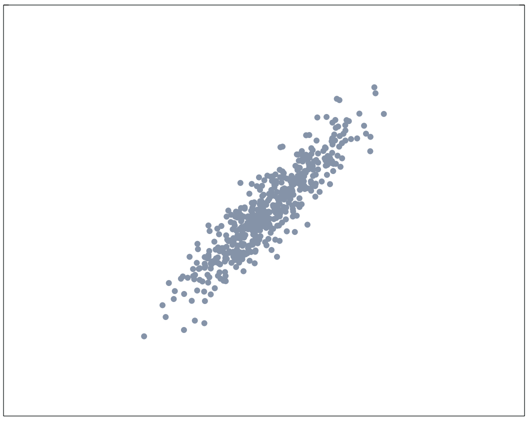
Zeichnen Sie **qualitativ** die erste und zweite Hauptkomponente ein und kennzeichnen Sie diese **deutlich** innerhalb des Bildes.

b) Als nächstes sind zwei Datenverteilungen gegeben:

a)



b)

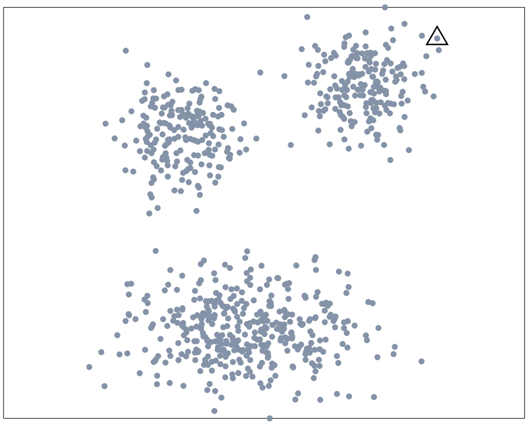


Welche eignet sich besser zur Dimensionsreduktion, a) oder b) ? Begründen Sie kurz ihre Antwort.

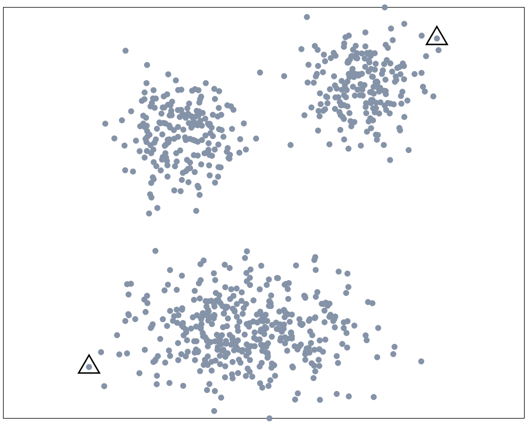
c) Gegeben ist nun eine Datenverteilung. Sie soll nun mit unterschiedlichen Anzahlen von Clustern mit Hilfe des k-means-Algorithmus gruppiert werden. Die mit Dreiecken versehenden Punkte sind die Initialwerte der Zentren für das Clustering.

Zeichnen Sie nun in die gegebenen Bilder die resultierenden Zentren der Cluster ein. Warum ist es notwendig die Startpunkte der Berechnung vorzugeben?

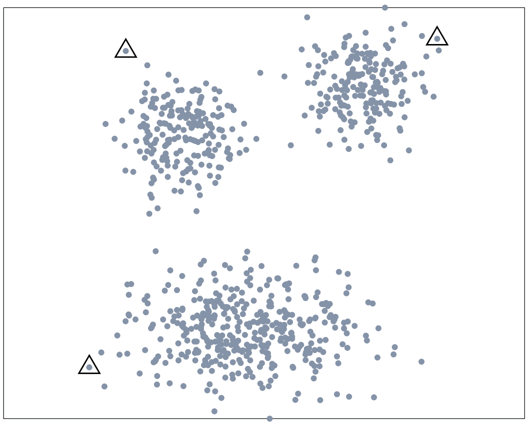
1)



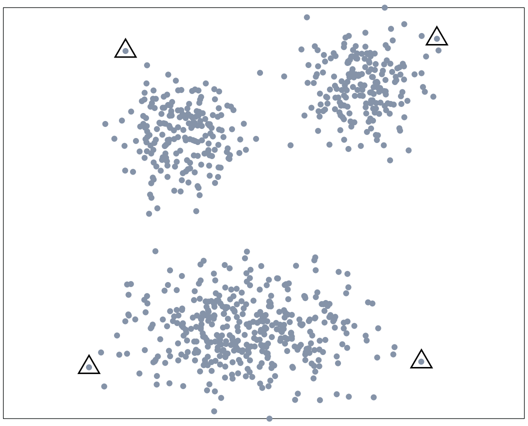
2)



3)

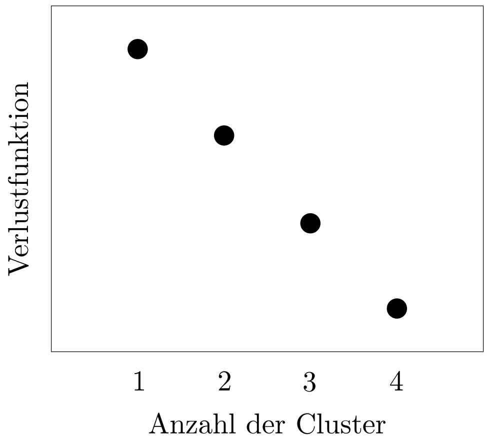


4)

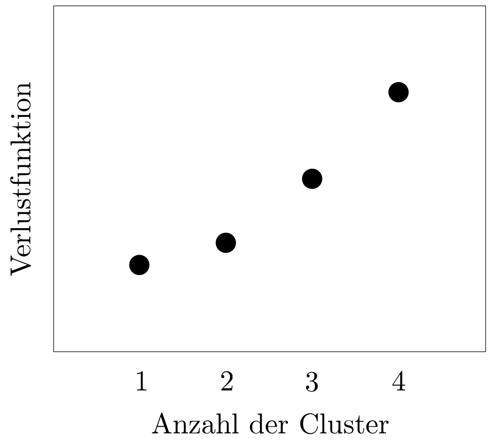


d) Gegeben sind vier mögliche Verläufe der Verlustfunktion des k-means-Algorithmus über der Anzahl der Cluster. Wählen Sie aus diesen Verläufen denjenigen aus, der zu der Datenverteilung aus c) passt.

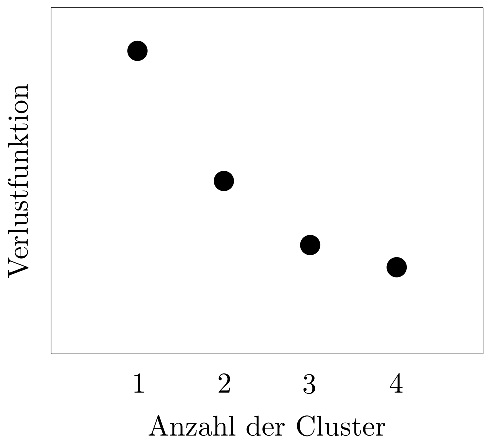
1)



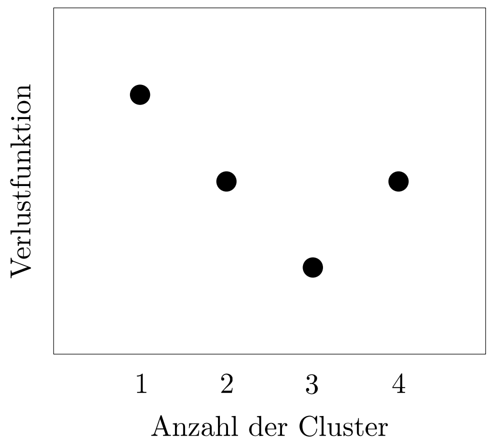
2)



3)



4)



Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

a) Gegeben sind drei Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit folgenden Eigenschaften:

I) Alle Werte sind gleich wahrscheinlich im Intervall von $[-2, 3]$.

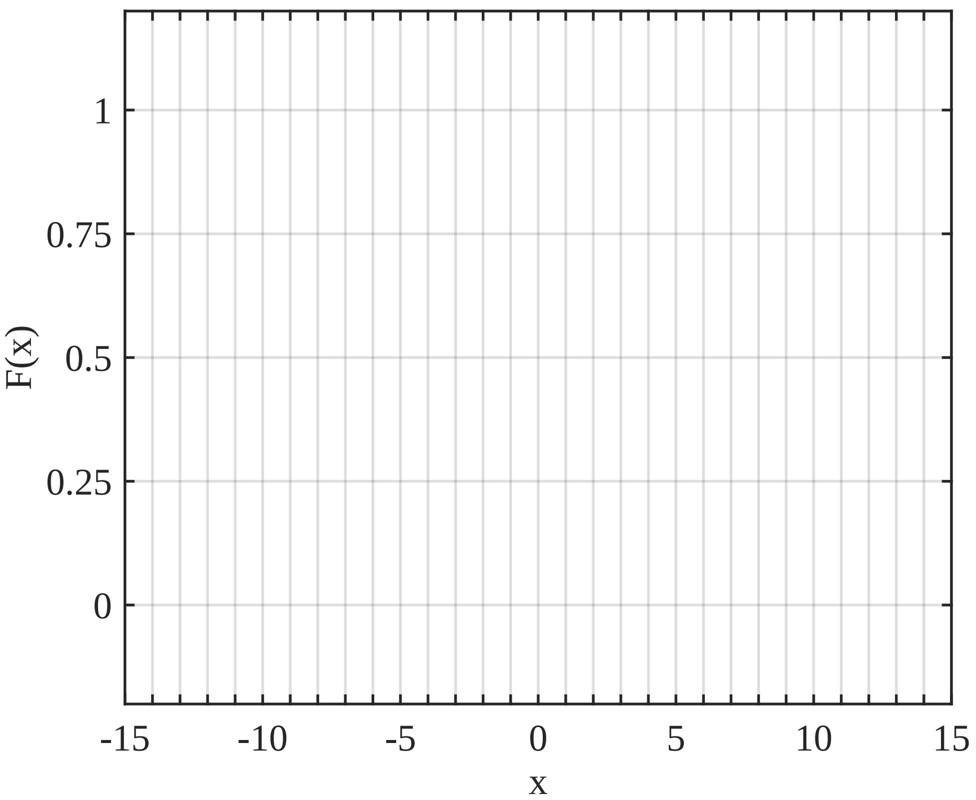
II) Alle Werte sind gleich wahrscheinlich im Intervall von $[-10, 0]$.

III) Alle Werte sind gleich wahrscheinlich im Intervall von $[-8, 12]$.

Wie bezeichnet man eine solche Verteilung?

b) Skizzieren Sie in **einem** Koordinatensystem **möglichst exakt** die **drei** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen aus Aufgabenteil a). Kennzeichnen Sie, welche der gezeichneten Verteilungen welcher der drei oben Aufgeführten entsprechen soll.

c) Zeichnen Sie nun in das unten vorgegebene Koordinatensystem die kumulierten Verteilungsfunktionen (Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen) zu den drei Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen I, II und III aus Aufgabenteil a) ein.



Lösungen:

Aufgabe 1: Zeitdiskrete Systeme

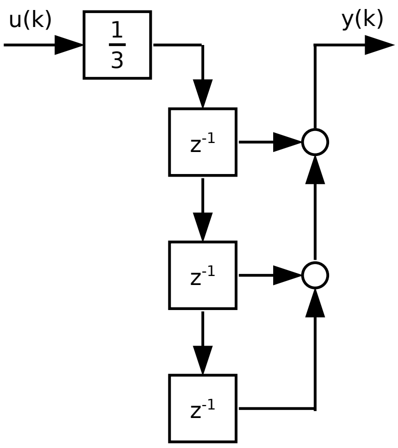
a) Bestimmen Sie die Differenzengleichungen zu den beiden Filtern $G_1(z)$ und $G_2(z)$.

$$G_1(z) = \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z^3}$$
$$\Leftrightarrow G_1(z) = \frac{1}{3}\left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right)$$
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$
$$y_1(k) = \frac{1}{3}u(k-1) + \frac{1}{3}u(k-2) + \frac{1}{3}u(k-3)$$

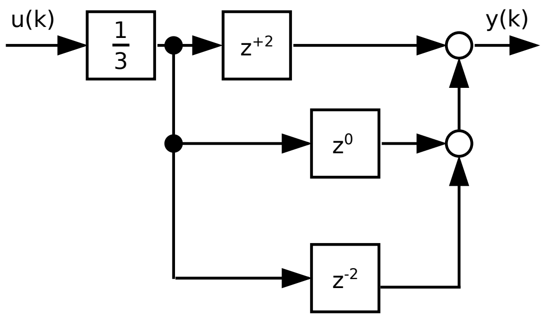
$$G_2(z) = \frac{(z^5 + z^3 + z)}{3z^3}$$
$$\Leftrightarrow G_2(z) = \frac{1}{3}\left(z^{2} + 1 + z^{-2}\right)$$
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$
$$y_2(k) = \frac{1}{3}u(k+2) + \frac{1}{3}u(k) + \frac{1}{3}u(k-2)$$

4

b) Zeichnen Sie für die beiden Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ jeweils das entsprechende Blockschaltbild.



(g) Blockschaltbild $G_1(z)$



(h) Blockschaltbild $G_2(z)$

4

c) Berechnen Sie die Pole der Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ in der z-Ebene.

$$\Leftrightarrow G_1(z) = \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z^3}$$

$\Rightarrow$ Dreifacher Pol bei $z_{pG1} = 0$.

$$\Leftrightarrow G_2(z) = \frac{(z^5 + z^3 + z)}{3z^3}$$

$\Rightarrow$ Ebenfalls dreifacher Pol bei $z_{pG2} = 0$. 2

d) Berechnen Sie mithilfe der Beziehung zwischen s- und z-Ebene, die Lage der Pole in der s-Ebene.

$$z = \mathrm{e}^{sT_0}$$
$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{T_0} \ln z$$

$\Rightarrow s_{pG1} = s_{pG2} = -\infty$. 1

e) Berechnen Sie die Endwerte der Sprungantworten (Verstärkungen) sowohl für $G_1(z)$ als auch für $G_2(z)$, indem Sie den Endwertsatz anwenden.

$$\begin{aligned} h_1(t \to \infty) &= \lim_{z\to 1} (z-1) G_1(z) \underbrace{\Sigma(z)}_{z\text{-transformierter Einheitssprung}} \\ &= \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z^3} \frac{z}{\cancel{z-1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(t \to \infty) &= \lim_{z\to 1} (z-1) G_2(z) \Sigma(z) \\ &= \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \frac{(z^5 + z^3 + z)}{3z^3} \frac{z}{\cancel{z-1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2

f) Entscheiden Sie für die beiden Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ jeweils, ob es sich um ein kausales oder akausales System handelt. Begründen Sie kurz.
$G_1(z)$: Kausales Filter, da nur aktuelle Werte des Eingangssignals u und vergangene Werte von u zur Berechnung des aktuellen Filterausgangs benötigt werden.
$G_2(z)$: Akausales Filter, da nur neben aktuellen und vergangenen Werten des Eingangssignals u zusätzlich zukünftige Werte bentigt werden. 2

g) Berechnen Sie für beide Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ deren Phase.
Berechnung der Phase von $G_1(z)$:

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z^3} \\ \Leftrightarrow G_1(z) &= \frac{1}{3}\left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right) \\ \Leftrightarrow G_1(z) &= \frac{1}{3} z^{-2}\left(z + 1 + z^{-1}\right) \\ \Leftrightarrow G_1(z) &= \frac{1}{3} z^{-2}\left(1 + z + z^{-1}\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

Zur Phasenberechnung setzt man nun $s = i\omega$. Dabei ergeben sich folgende Beziehungen: $\boxed{1}$

$$\begin{aligned} z^{\pm n} &= \mathrm{e}^{\pm n s T_0} \\ \Leftrightarrow z^{\pm n} &= \mathrm{e}^{\pm i n \omega \cdot T_0} \\ \Leftrightarrow z^{\pm n} &= \cos(n\omega T_0) \pm i \sin(n\omega T_0) \ . \end{aligned}$$

Damit lässt sich Gl. 1 umschreiben zu: $\boxed{1}$

$$G_1(i\omega) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-i2\omega T_0}\left(1 + \underbrace{\mathrm{e}^{i\omega T_0} + \mathrm{e}^{-i\omega T_0}}_{=2\cos(\omega T_0)}\right) \ .$$

Somit besitzt der Ausdruck in Klammern nur noch einen positiven Realteil. Die Phase lässt sich somit direkt ablesen:

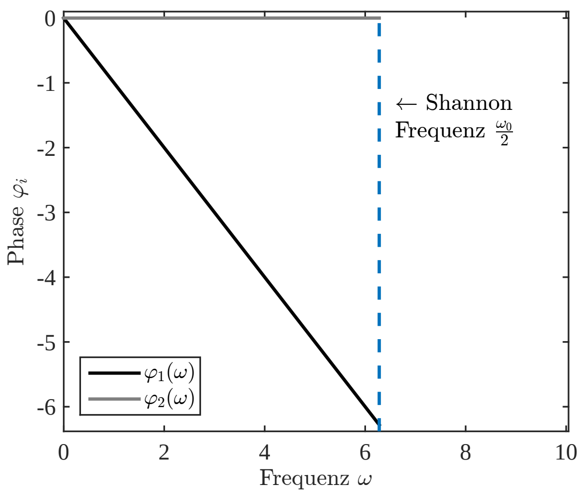
$$\varphi_1(\omega) = -2\omega T_0 \ .$$

Berechnung der Phase von $G_2(z)$: $\boxed{2}$

$$\begin{aligned} G_2(z) &= \frac{(z^5 + z^3 + z)}{3z^3} \\ \Leftrightarrow G_2(z) &= \frac{1}{3}\left(z^2 + 1 + z^{-2}\right) \\ \Leftrightarrow G_2(i\omega) &= \frac{1}{3}\left(1 + \underbrace{\mathrm{e}^{i2\omega T_0} + \mathrm{e}^{-i2\omega T_0}}_{=2\cos(2\omega T_0)}\right) \end{aligned}$$

Da hier keinerlei Imaginärteil übrig bleibt, besitzt der Filter $G_2(z)$ eine Phasenverschiebung von $\varphi_2(\omega) = 0$. $\boxed{2}$

h) Zeichnen Sie für beide Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ den jeweiligen Phasengang. Bis zu welcher Frequenz ω_{grenz} zeichnet man den Phasengang eines abgetasteten Systems üblicherweise?



Es gilt hier zu beachten, dass die Abszisse (x-Achse) in der Lösung linear skaliert ist. Üblicherweise ist diese Achse in der Darstellung des Phasengangs logarithmisch skaliert. $\boxed{2}$

Das zeichnen des Phasenganges zeitdiskreter Systeme macht nur bis zur Shannon-Frequenz Sinn $\omega_{\text{grenz}} = \frac{\omega_0}{2}$. $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 24}$

Aufgabe 2: Abtasttheorem

Die periodischen Signale $y_1(t) = \sin(2\pi \cdot 4\text{Hz} \cdot t)$ und $y_1(t) = \sin(2\pi \cdot 12\text{Hz} \cdot t)$ werden mit einer Abtastfrequenz von $f_0 = 10\text{Hz}$ gemessen.

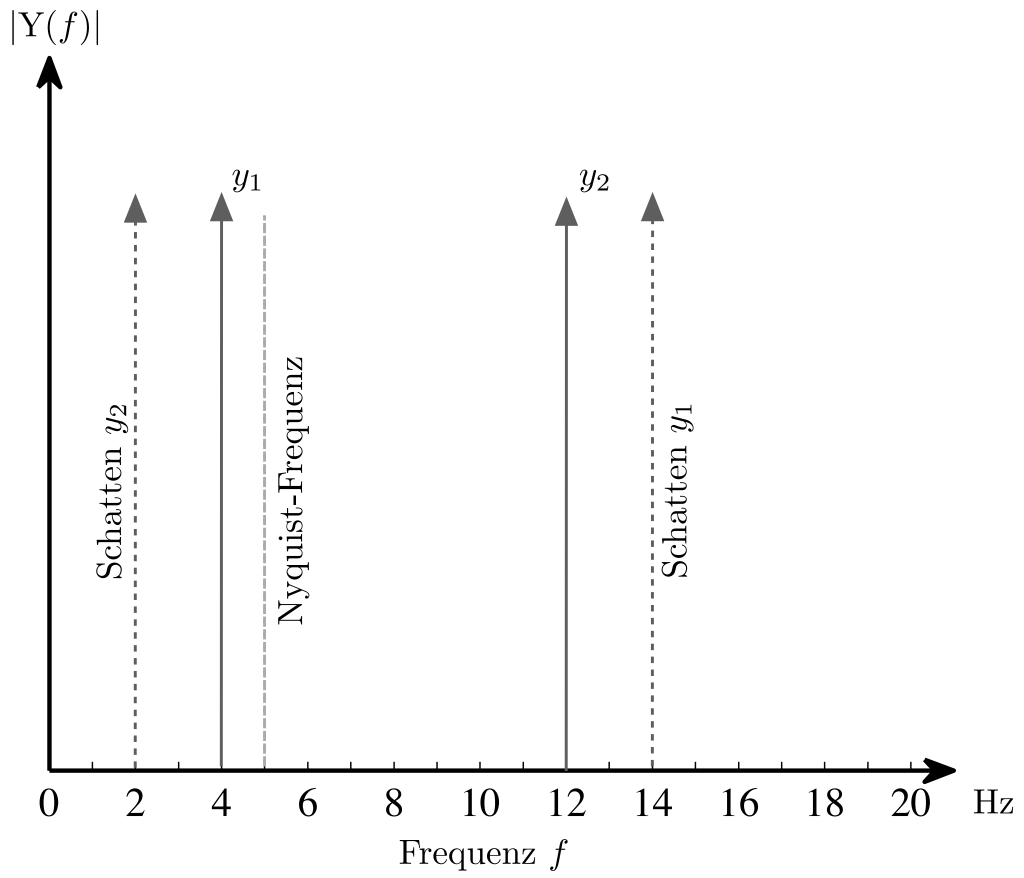
a) Signalspektrum. Siehe Diagramm. $\boxed{1}$

b) Nyquist-Frequenz (Shannonsches Abtasttheorem) $= \frac{f_0}{2} = 5\text{Hz}$. Siehe Diagramm. $\boxed{1}$

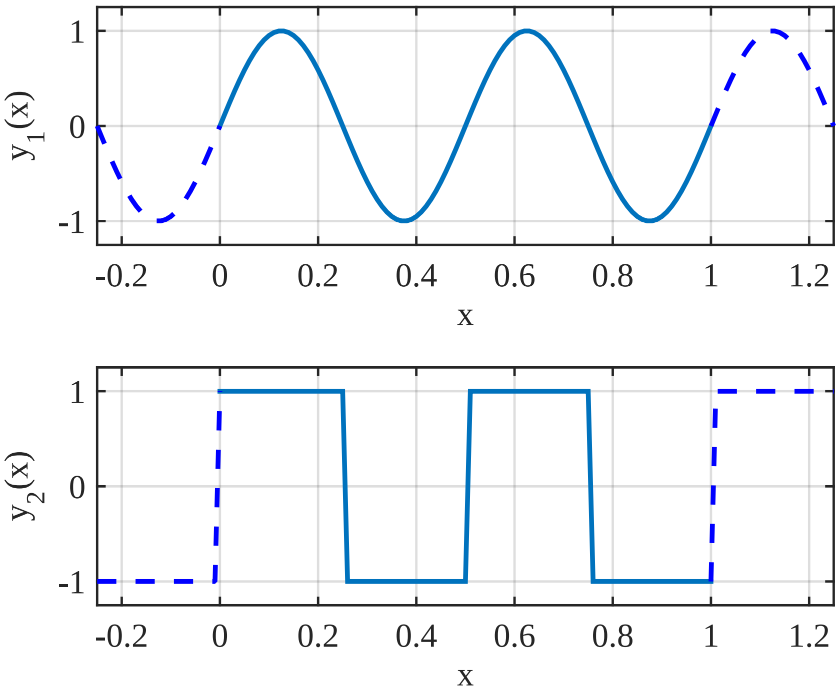
c) Das Signal müsste nach dem Shannonschen Abtasttheorem mit mindestens dem Doppelten der höchsten Signalfrequenz abgetastet werden, d.h. für y_1 mit mindestens 8 Hz und für y_2 mit mindestens 24 Hz. In diesem Fall ist $f_0 = 10\text{Hz}$ und daher für y_1 ausreichend und für y_2 zu niedrig. Bei y_1 tritt kein Aliasing auf; bei y_2 tritt Aliasing auf. $\boxed{2}$

d) Schattenspektren. Siehe Diagramm. $\boxed{2}$

e) Nach dem Abtasttheorem sind Signale nur bis $f = \frac{f_0}{2}$ ohne Informationsverlust rekonstruierbar. In diesem Fall wäre durch das entstandene Schattenspektrum des Signals y_2 ein falsches Sinus-Signal mit der Frequenz 2Hz statt des wahren Signals mit 12Hz sichtbar. Das Signal y_1 liegt unterhalb der Nyquist-Frequenz und wird somit korrekt erkannt. $\boxed{2}$



f) Gegeben ist eine Sinus- und eine Rechtecksschwingung mit der gleichen Frequenz $f = 2\text{Hz}$.



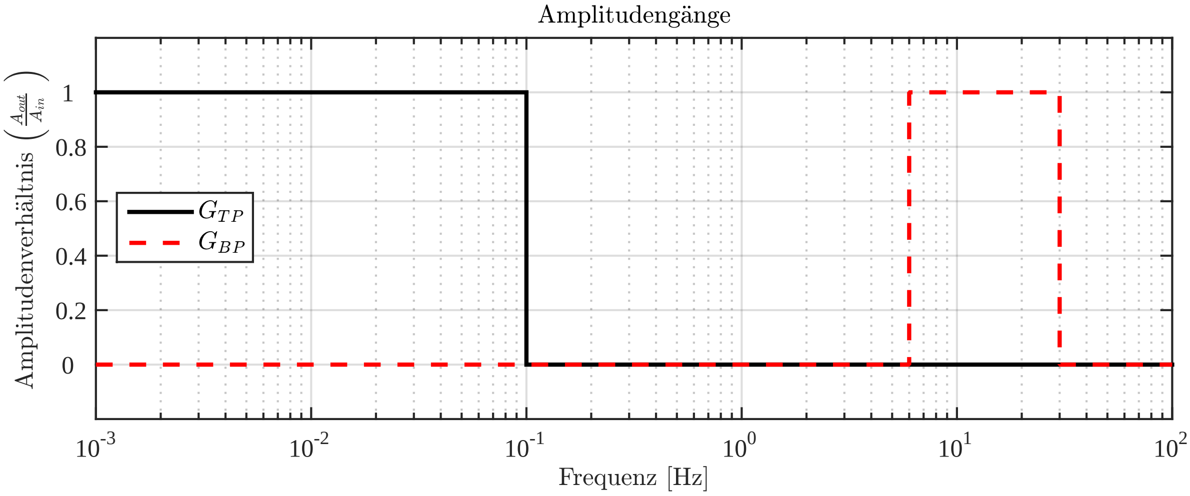
Beide sind nicht begrenzt und setzen sich gegen $\pm\infty$ fort.
Es wird eine Abtastfrequenz $f_0 = 10\text{Hz}$ verwendet.
In welchem der beiden Fälle tritt Aliasing auf?

Eine Sinusschwingung mit der Frequenz $f = 2\text{Hz}$, die mit einer Abtastfrequenz von $f_0 = 10\text{Hz}$ gemessen wird, erfüllt das Abtasttheorem nach Shannon. Die Rechtecksschwingung hat nicht nur eine Frequenz in ihrem Amplitudenspektrum. Durch das sprunghafte Umschalten werden auch sehr hohe Frequenzen angeregt. Diese liegen dann überhalb der nach dem Abtasttheorem geforderten zweifachen der Abtastfrequenz und werden dadurch nicht korrekt wiedergegeben. $\boxed{2}$

$\boxed{\sum 10}$

Aufgabe 3: Filter

a) Zeichnen Sie die idealen Amplitudengänge der beiden Filter G_1 und G_2.



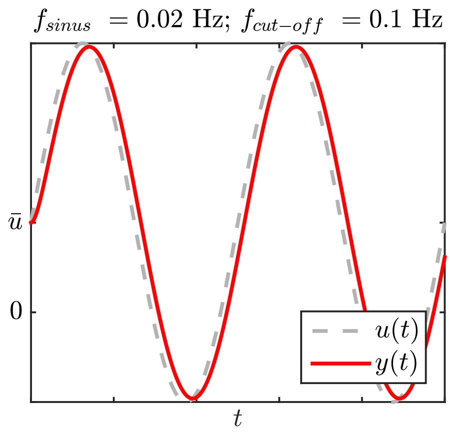
5

b) Zeichnen der idealen Filterantworten (siehe nächste Seite).
Die im Folgenden gezeigten Lösungen sind die exakten Lösungen, wenn man die Eingangssignale mit einem Butterworth Filter erster Ordnung (Tiefpass) bzw. einem Tschebyscheff Filter vom Typ 2, fünfter Ordnung (Bandpass) filtert. Um die volle Punktzahl zu erhalten, sollte zu erkennen sein, ob das gefilterte Signal weiterhin schwingt oder dessen Schwingung komplett gedämpft wurde. Zudem sollte zu erkennen sein, ob das gefilterte Signal noch einen Mittelwert besitzt oder nicht. 12

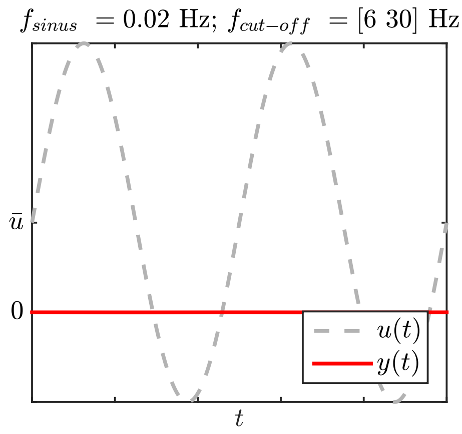
c) Zuweisung von Eigenschaften zu Filtertyp IIR oder FIR

- Typischerweise niedrige Ordnung → IIR 4
- Instabilität kann nicht auftreten → FIR
- Es existiert ein äquivalentes zeitkontinuierliches System → IIR
- Eine exakt lineare Phase ist realisierbar → FIR

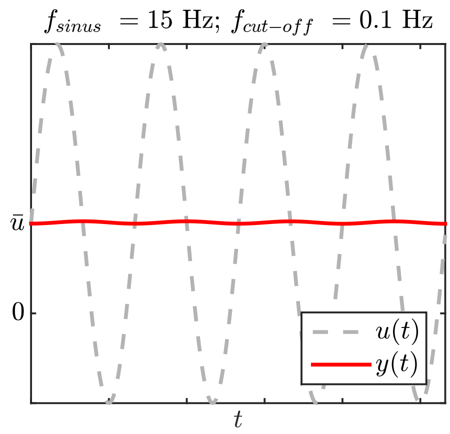
$\sum 21$



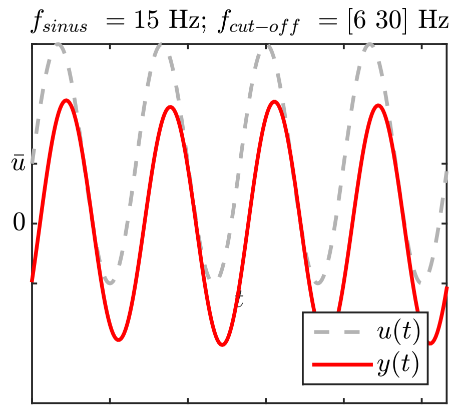
(a) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{TP} im eingeschwungenen Zustand.



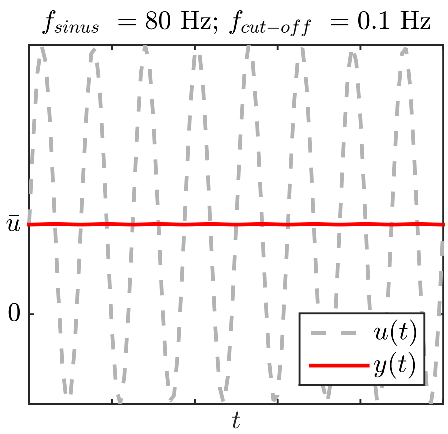
(b) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{BP} im eingeschwungenen Zustand.



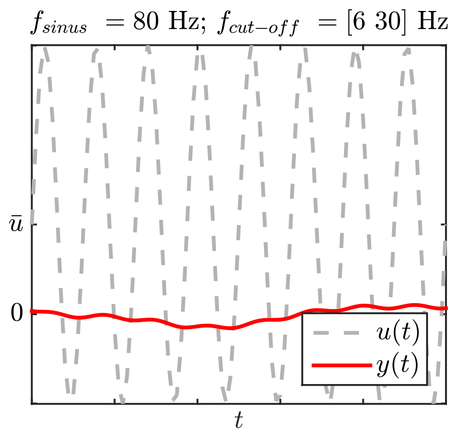
(c) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{TP} im eingeschwungenen Zustand.



(d) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{BP} im eingeschwungenen Zustand.



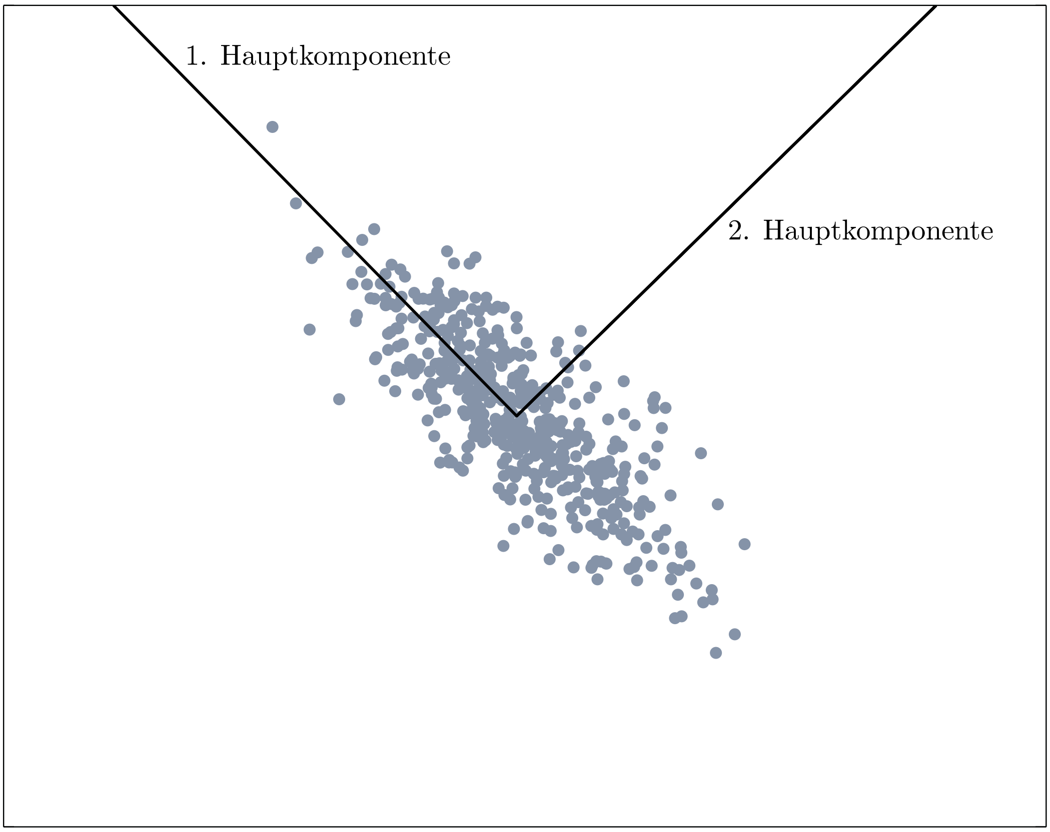
(e) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{TP} im eingeschwungenen Zustand.



(f) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_{BP} im eingeschwungenen Zustand.

Aufgabe 4: Hauptkomponentenanalyse und Clustering

a) Folgende Lösung ist exakt. Eine qualitativ richtige Skizze ist ausreichend.

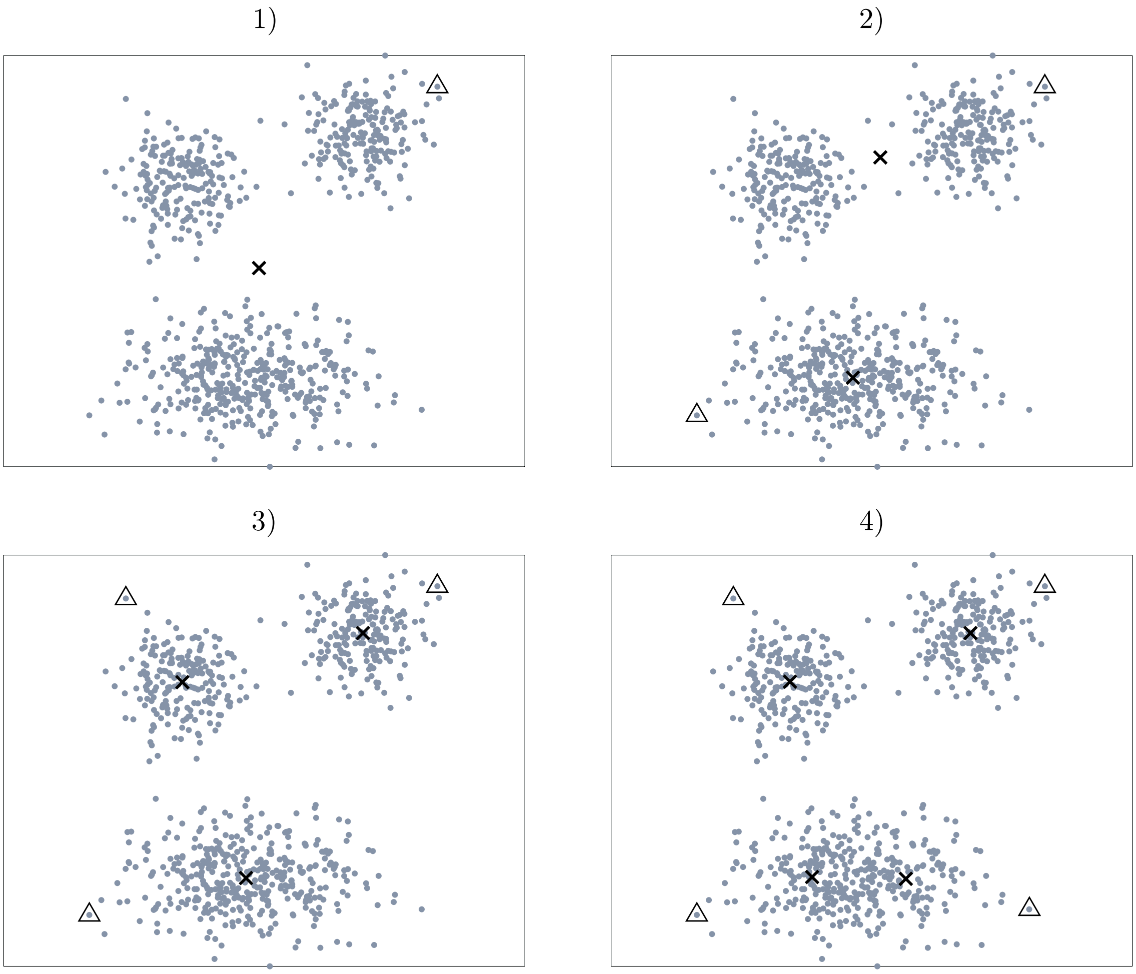


3

Hierbei ist der Winkel und die Reihenfolge wichtig. Außerdem treffen sich die Hauptkomponenten im Mittelwert/ Datenschwerpunkt.

b) Die Datenverteilung in Bild b) eignet sich besser zur Dimensionsreduktion, da die Ausdehnung entlang der ersten Hauptkomponente deutlich größer ist als die Ausdehnung entlang der zweiten Hauptkomponente. Bei Bild a) ist der Unterschied zwischen den Hauptkomponenten geringer. 2

c) Die Zufallsinitialisierung des k-means-Algorithmus kann dazu führen, dass er in ein lokales Optimum konvergiert. Da die Startwerte gegeben sind, ergeben sich qualitativ eindeutige Lösungen. 1



4

Bei einem Cluster gehört jeder Datenpunkt zu diesem Cluster und das Zentrum liegt im Datenschwerpunkt. Bei zwei Clustern und den gegeben Startwerten liegt das eine Zentrum in der oberen Hälfte, zwischen den Punktansammlungen, und das zweite Zentrum liegt in der unteren, großen Datenansammlung. Mit drei Startwerten ergeben sich drei Cluster. Die Zentren liegen innerhalb der Punktansammlungen. Bei 4 Clustern liegen zwei Zentren in den oberen Punktansammlungen und zwei Zentren liegen in der unteren Punktansammlung.

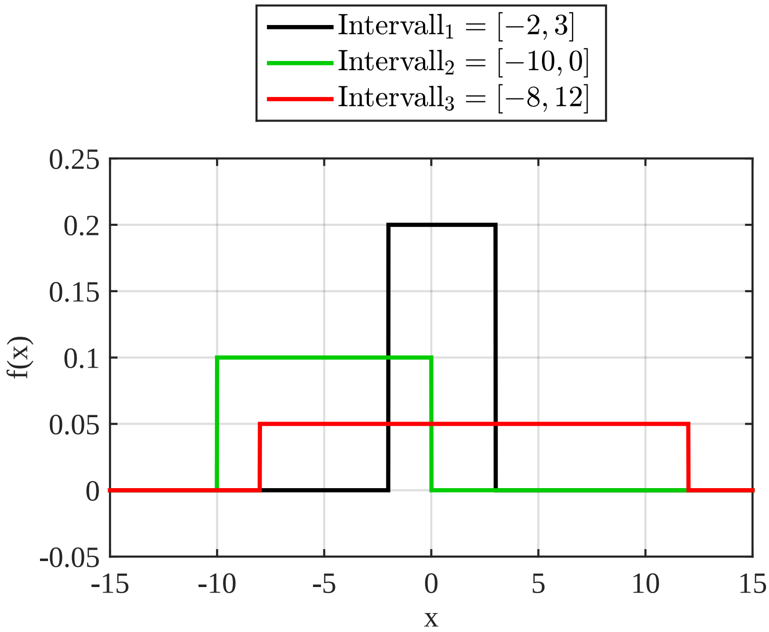
d) Ein Anstieg der Verlustfunktion über der Anzahl der Cluster ist bei k-means nicht möglich. Somit sind die Verläufe 2) und 4) falsch. Verlauf 1) fällt immer gleich ab. Das ist beim gegebenen Beispiel nicht gegeben, da die Verbesserung von drei zu vier Clustern geringer sein muss, als die Verbesserung von zwei zu drei Clustern. Verlauf 3) ist korrekt, da eine Verbesserung der Verlustfunktion mit steigender Anzahl der Cluster abnimmt. 2

$\sum 12$

Aufgabe 5: Stochastische Signale

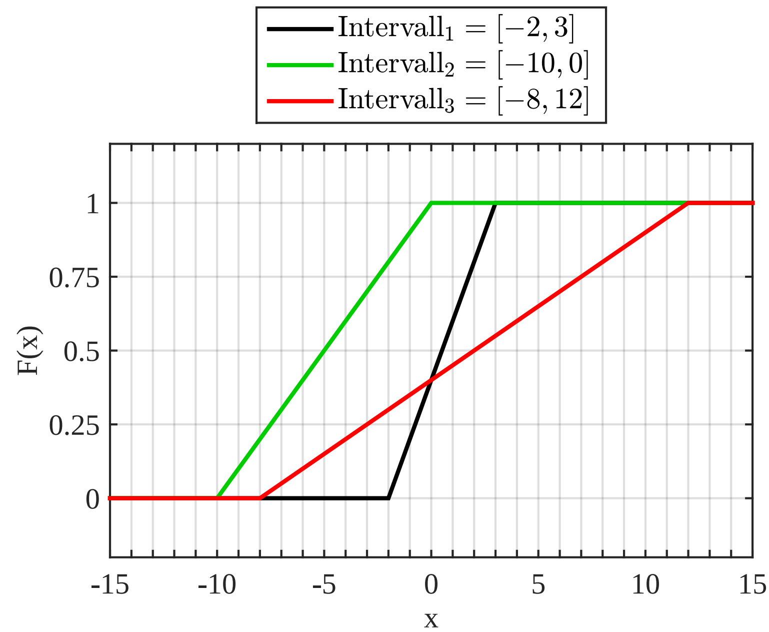
a) Gleichverteilung 1

b) Skizzieren Sie in **einem** Koordinatensystem möglichst exakt die **drei** Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen aus Aufgabenteil a).



6

c) Zeichnen Sie nun in das vorgegebene Koordinatensystem die kumulierten Verteilungsfunktionen (Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen) zu den drei Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen I, II und III aus Aufgabenteil a) ein.



6

$\sum$ 13