Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

7. März 2018

Name:	
Matr.-Nr.:	
Note:	

Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Gesamt
Soll:	15	15	11	12	7	60
Ist:						

Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Kombiniertes System (15 Punkte)

Es sind zwei verschiedene Systeme geben. Die Übertragungsfunktion des Systems (1) ist

$$G_1(z) = \frac{2}{z} + \frac{0.8}{z^2} \;, \tag{1}$$

während das System (2) durch die Differenzengleichung

$$y(k+1) + 0.6y(k) = 2u(k) + 0.8u(k-1) \tag{2}$$

beschrieben wird.

a) Führen Sie für System (2) die z-Transformation durch und bilden Sie die Übertragungsfunktion im z-Bereich. Verschieben Sie um so viele Zeitschritte, dass nur noch Potenzen ≤ 0 von z vorhanden sind.

Sollten Sie die Teilaufgabe a) nicht vollständig lösen können, nehmen Sie folgende alternative Übertragungsfunktionen an:

$$G_1'(z) = \frac{3}{z} + \frac{0.5}{z^3}$$

$$G_2'(z) = \frac{3z^{-1} + 0.5z^{-3}}{2 + 0.7z^{-1}}$$

b) Wie können System (1) und System (2) charakterisiert werden? Tragen Sie „ja“/„nein“ ein.

	kausal	akausal	IIR	FIR
System (1)				
System (2)				

c) Zeichnen Sie die Blockschaltbilder zu System (1) und System (2). Nutzen Sie dabei lediglich z^{-1}-Blöcke und Blöcke für die Koeffizienten.

d) Die Impulsantwort welches Systems ist für $k \geq 4$ gleich 0?

e) Für System (3) gilt die Gleichung $Y = G_1U_1 + G_2U_2$. Füllen Sie das nachfolgende Blockschaltbild korrekt aus.
Hinweis: Achten Sie auf Gemeinsamkeiten der Übertragungsfunktionen.

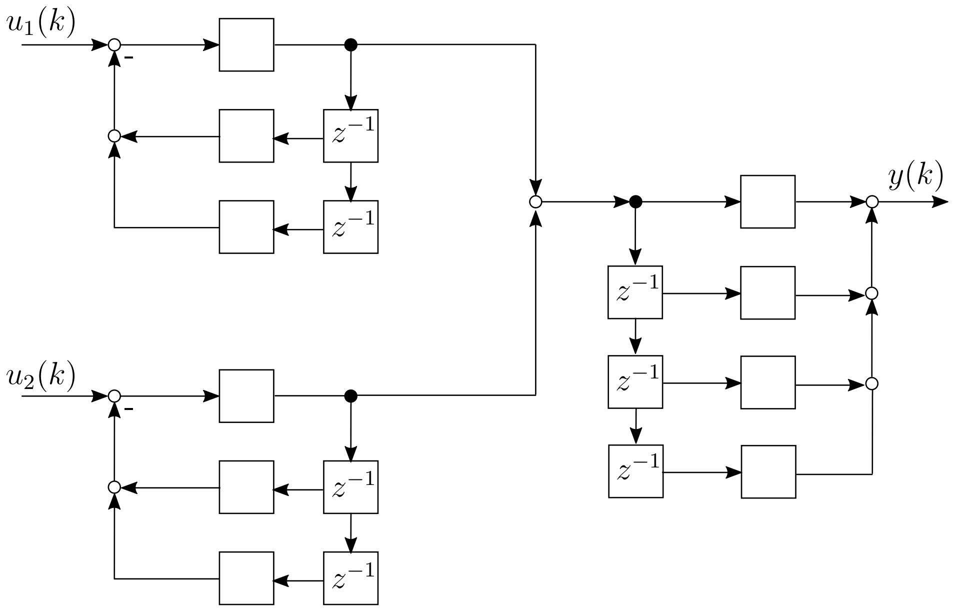


Bild 1: Blockschaltbild System (3)

Aufgabe 2: Diskrete Systeme / Amplitudengang (15 Punkte)

Gegeben ist folgende Übertragungsfunktion im z-Bereich

$$G(z) = \frac{ez - 1}{e - z} \tag{3}$$

wobei e die eulersche Zahl ist.

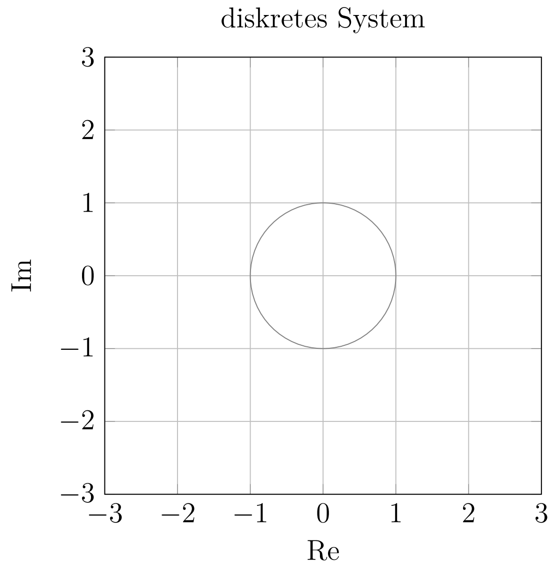
a) Berechnen Sie den Pol und die Nullstelle der Übertragungsfunktion. Zeichnen Sie diese in das unten dargestellte Diagramm ein.

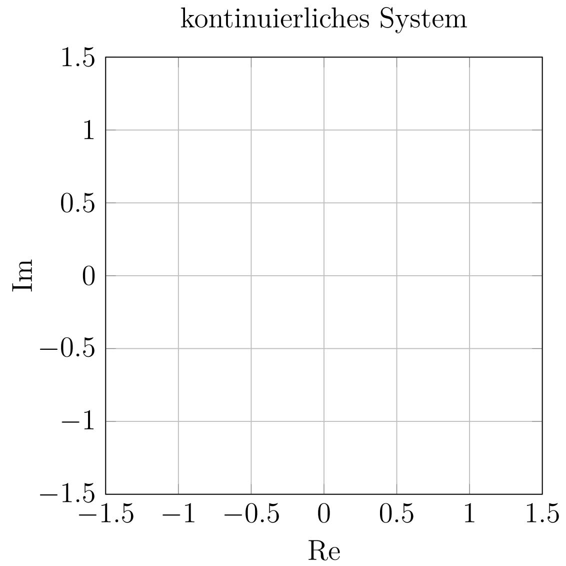
b) Berechnen Sie den Amplitudengang des Systems, wenn die Abtastzeit $T_0 = 1$ ist.

c) Wie nennt man Systeme, die einen solchen Amplitudengang aufweisen?

d) Bestimmen Sie das kontinuierliche System mit gleichen Polen und Nullstellen im s-Bereich.

e) Zeichnen Sie die Nullstellen des kontinuierlichen Systems in das Diagramm ein. Wie unterscheiden sich kontinuierliches und diskretes System?

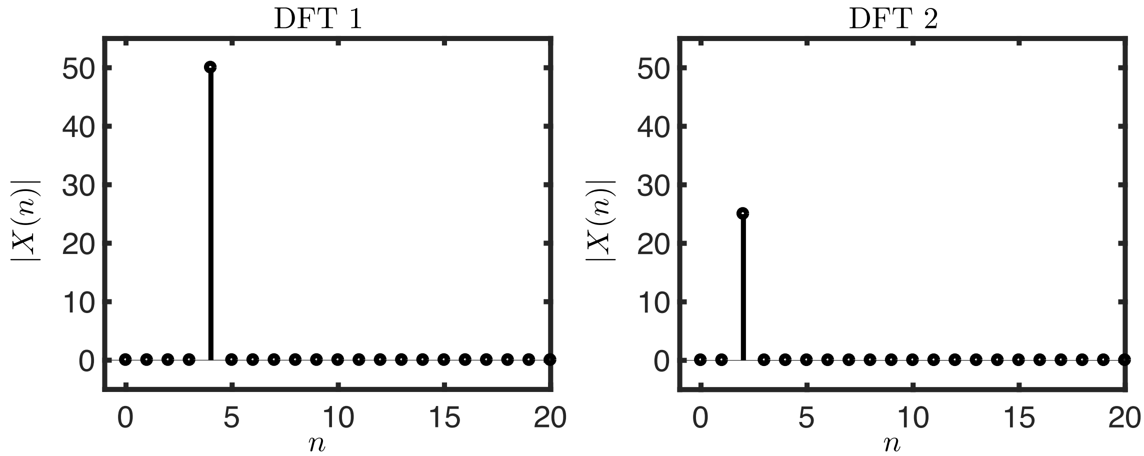


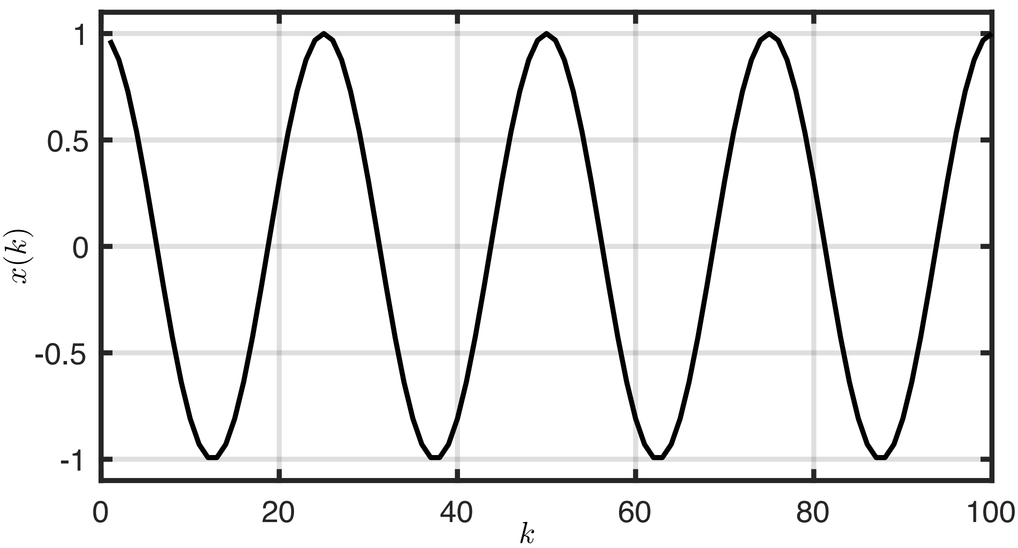


Aufgabe 3: Signalanalyse (11 Punkte)

Hinweis: Aufgabe 3 b) kann unabhängig von den anderen Aufgabenteilen gelöst werden.

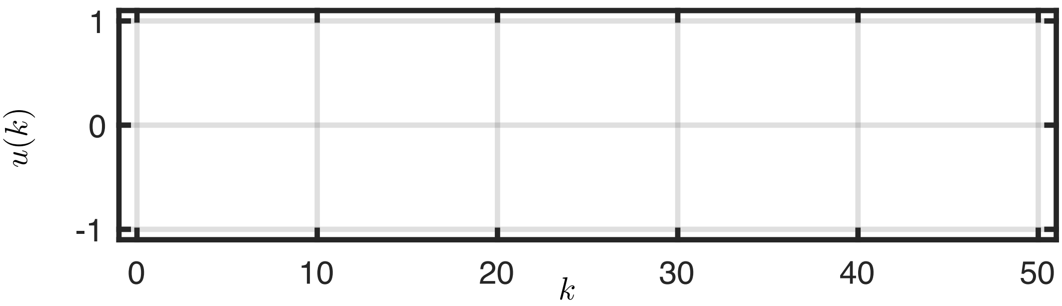
a) Im folgenden Bild sind zwei verschiedene DFTs zu sehen. Die zu Grunde liegenden Signale besitzen beide je $N = 100$ Datenpunkte. Das Signal $x(k)$ zu DFT 1 ist bereits im nachfolgenden Diagramm skizziert. Skizzieren Sie ein Signal, welches zu DFT 2 passt in das gleiche Diagramm. Beachten Sie, dass die Werte der DFT nur für $n = 0, 1, \ldots, 20$ abgebildet sind. Für $20 < n \leq 49$ gilt $|X(n)| = 0$.



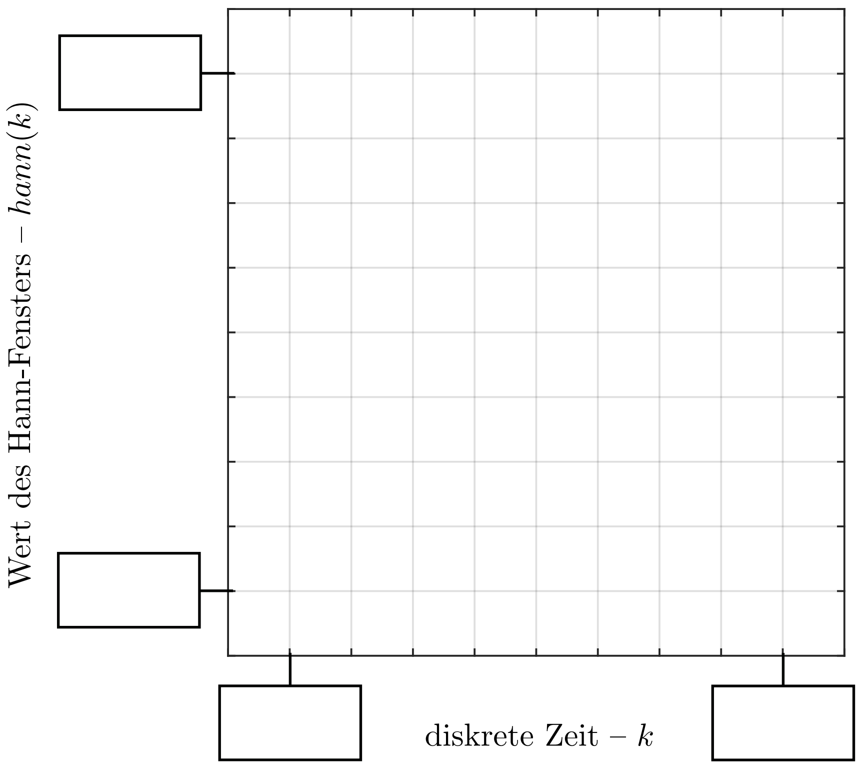


b) Skizzieren Sie in das nachfolgende Diagramm ein cosinusförmiges Signal bei dem der Leckeffekt deutlich auftritt. Das Signal muss folgende Eigenschaften besitzen:

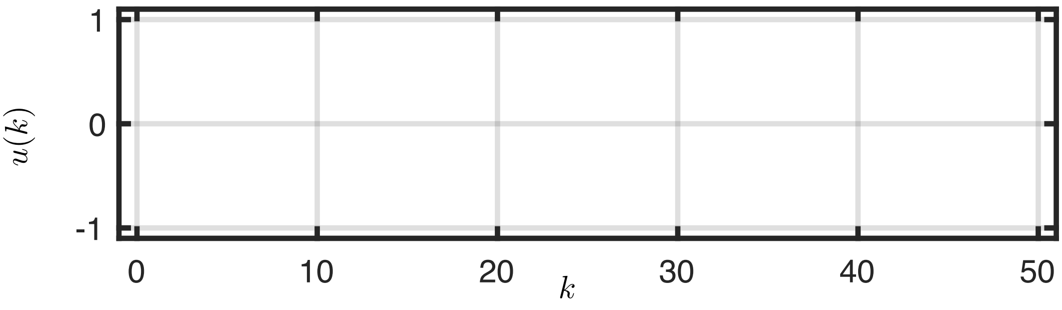
- $k = 0, 1, 2, \ldots 50$
- monofrequent,
- maximal 3 Schwingungen und
- Amplitude gleich eins.



c) Um den Leckeffekt zu minimieren soll nun ein Hann-Fenster auf das Signal aus b) angewendet werden. Skizzieren Sie das Hann-Fenster in das vorbereitete Diagramm. Vervollständigen Sie die Achsbeschriftung.



d) Wenden Sie nun das Hann-Fenster aus c) auf das von Ihnen gewählte Signal aus Aufgabenteil b) an. Skizzieren Sie das entstehende Signal in das vorbereitete Diagramm.



Aufgabe 4: Kreuzkorrelation (12 Punkte)

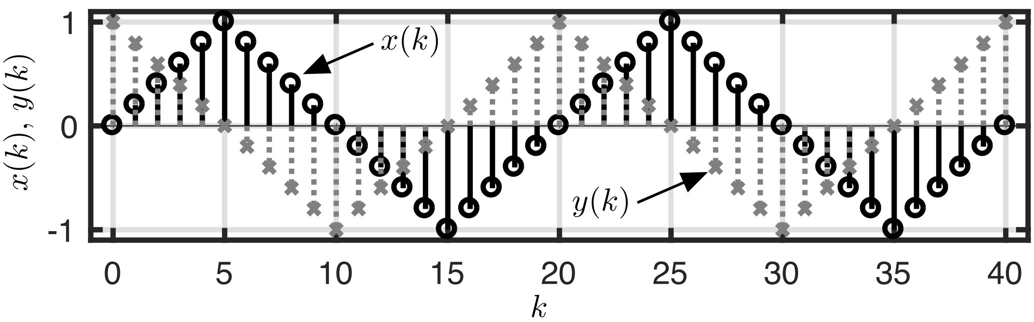


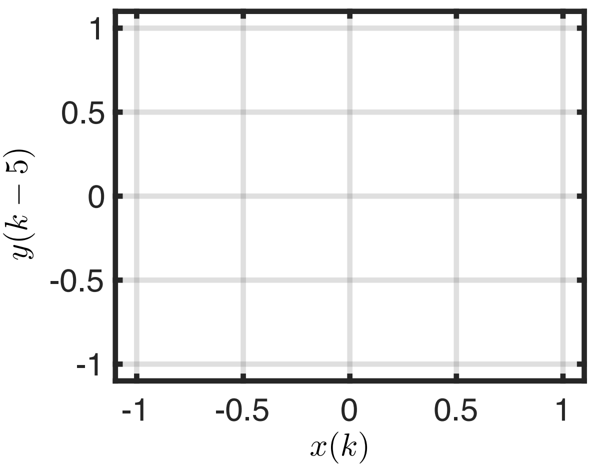
Bild 2: Zwei Schwingungen der Signale $x(k)$ und $y(k)$.

Die Kreuzkorrelationsfunktion zweier Signale $x(k)$ und $y(k)$, beide bestehend aus $N = 41$ Datenpunkten, kann für eine Zeitverschiebung κ wie folgt berechnet werden:

$$r_{xy}(\kappa) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1-\kappa} x(k) \cdot y(k+\kappa), & \text{für } \kappa \geq 0 \\ \frac{1}{N} \sum\limits_{k=-\kappa}^{N-1} x(k) \cdot y(k+\kappa), & \text{sonst} \end{cases} \tag{4}$$

a) Welche der in Bild 3 gezeigten Kreuzkorrelationsfunktionen entspricht der Kreuzkorrelationsfunktion, die zu den gezeigten Signalen $x(k)$ und $y(k)$ aus Bild 2 gehört?

b) Zeichnen Sie das zeitlich verschobene Signal $y(k+\kappa)$ über $x(k)$ in das unten vorbereitete Diagramm für $\kappa = -5$.



c) In Bild 2 wurden kontinuierliche Dreieckssignale abgetastet. Nehmen Sie nun an, dass die Abtastfrequenz verdoppelt wird. Wie verändert sich in diesem Fall die Zeitverschiebung bei der das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion erreicht wird?

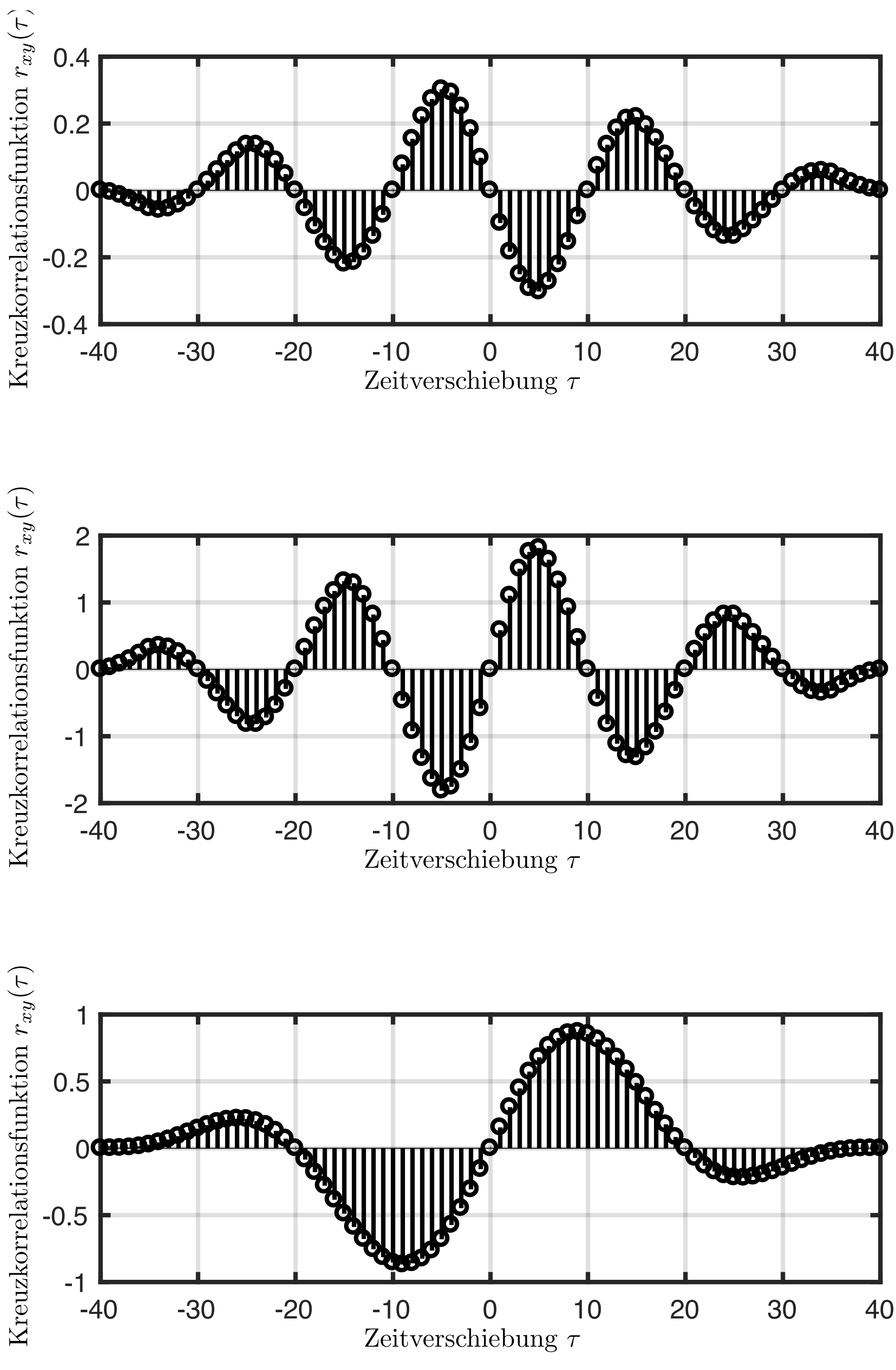
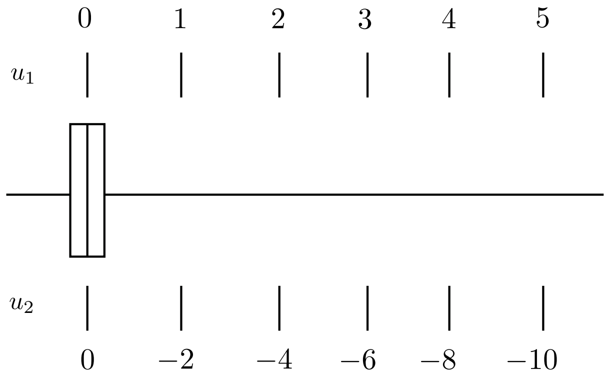


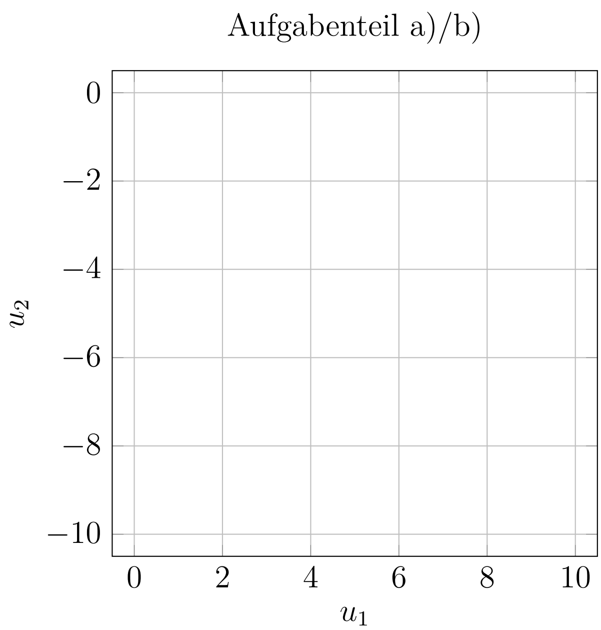
Bild 3: Kreuzkorrelationsfunktionen

Aufgabe 5: Singulärwertzerlegung (7 Punkte)

Eine technische Anlage hat zwei Eingänge u_1 und u_2, die mithilfe des dargestellten Schiebepotentiometer verstellt werden können. Bei der dargestelten Stellung gilt $u_1 = u_2 = 0$.

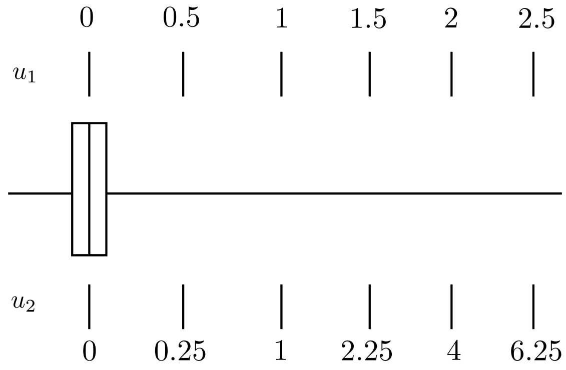


a) Zeichnen Sie die möglichen Kombination für $u_1 = 1, 2, 3, 4, 5$ in das Diagramm.

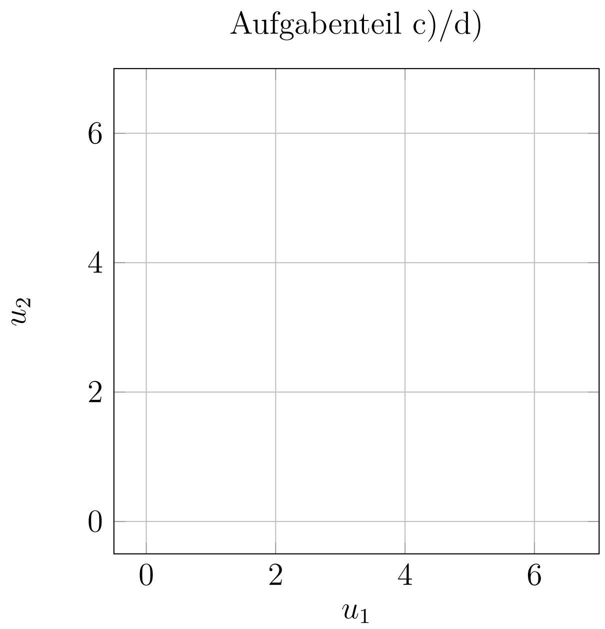


b) Führen Sie geometrisch eine PCA durch und skizzieren Sie dazu die Hauptachsen im Diagramm. Markieren Sie die Hauptachse mit dem Singulärwert 0.

c) An einer anderen Anlage können u_1 and u_2 mit dem unten dargestellten Schiebepotentiometer verstellt werden.



Zeichnen Sie die möglichen Kombinationen für $u_1 = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ in das Diagramm.



d) Führen Sie geometrisch eine PCA durch und zeichnen Sie dazu die Hauptachsen in das Diagramm ein.

Lösungen:

Aufgabe 1: Kombiniertes System (15 Punkte)

Es sind zwei verschiedene Systeme geben. Die Übertragungsfunktion des Systems (1) ist

$$G_1(z) = \frac{2}{z} + \frac{0.8}{z^2} \,, \tag{5}$$

während das System (2) durch die Differenzengleichung

$$y(k+1) + 0.6y(k) = 2u(k) + 0.8u(k-1) \tag{6}$$

beschrieben wird.

a) Verschieben um so viele Zeitschritte, dass nur noch Potenzen ≤ 0 von z vorhanden sind.

$$\begin{aligned}
y(k+1) + 0.6y(k) &= 2u(k) + 0.8u(k-1) \\
y(k) + 0.6y(k-1) &= 2u(k-1) + 0.4u(k-2) \\
Y(z) + 0.6z^{-1}Y(z) &= 2U(z)z^{-1} + 0.4U(z)z^{-2} \\
Y(z) \cdot (1 + 0.6z^{-1}) &= U(z) \cdot (2z^{-1} + 0.4z^{-2}) \\
\Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{2z^{-1} + 0.8z^{-2}}{1 + 0.6z^{-1}}
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

b) Wie können System (1) und System (2) charakterisiert werden? Tragen Sie „ja"/„nein" ein.

	kausal	akausal	IIR	FIR
System (I)	ja	nein	nein	ja
System (II)	ja	nein	ja	nein

$\boxed{2}$

c) Zeichnen Sie die Blockschaltbilder zu System (1) und System (2). Nutzen Sie dabei lediglich z^{-1}-Blöcke und Blöcke für die Koeffizienten.

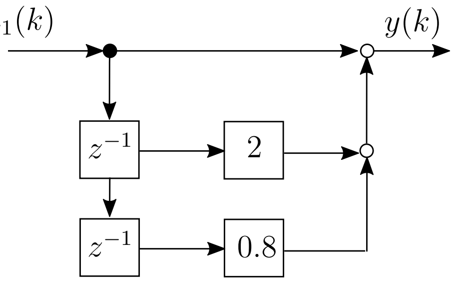


Bild 4: FIR-System (System (1))

$\boxed{2}$

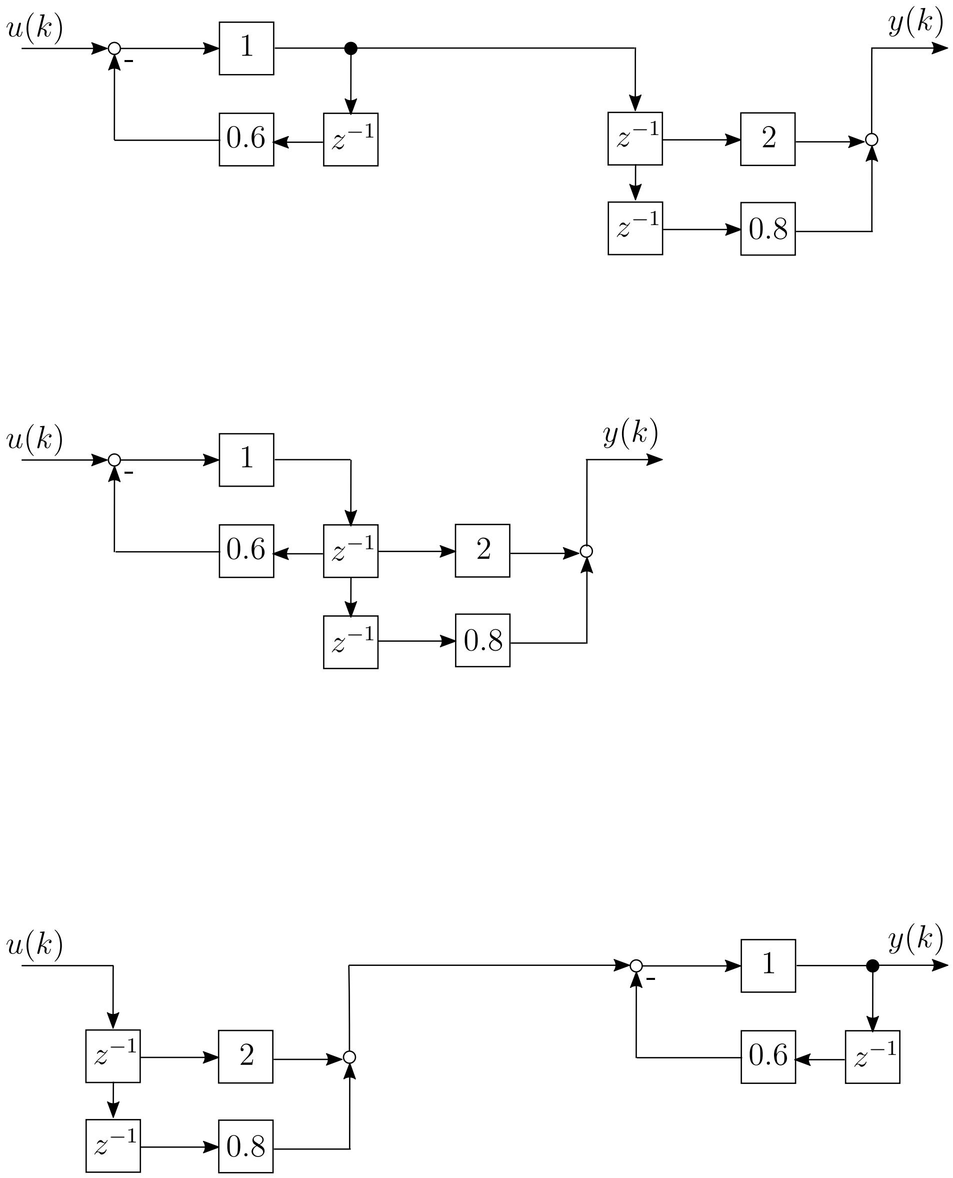


Bild 5: IIR-System (System (2)), verschiedene Varianten

4

d) Die Impulsantwort welches Systems ist für $k \geq 4$ gleich 0?

Die des FIR-Systems. 1

e) Für System (3) gilt die Gleichung $Y = G_1U_1 + G_2U_2$. Füllen Sie das nachfolgende Blockschaltbild korrekt aus.

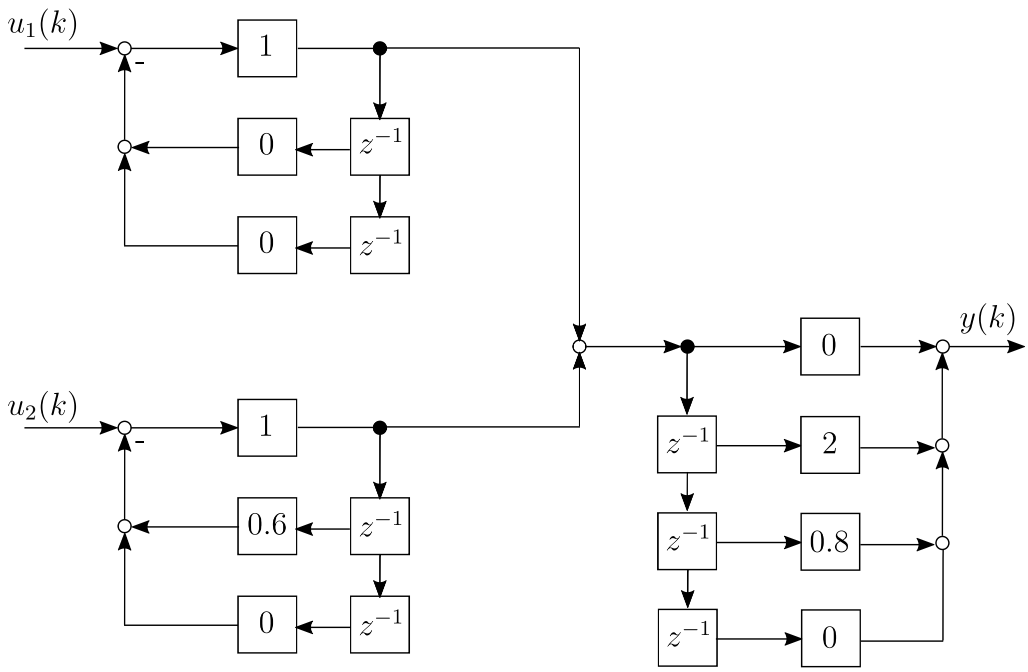


Bild 6: Blockschaltbild System (3)

3

Aufgabe 2: Diskrete Systeme / Amplitudengang (15 Punkte)

Gegeben ist folgende Übertragungsfunktion im z-Bereich

$$G(z) = \frac{ez-1}{e-z} \tag{7}$$

wobei e die eulersche Zahl ist.

a) Berechnen Sie den Pol und die Nullstelle der Übertragungsfunktion. Zeichnen Sie diese in das unten dargestellte Diagramm ein.
Die Nullstelle ist $n = \frac{1}{e}$, die Polstelle $p = e$. 2

b) Berechnen Sie den Amplitudengang des Systems, wenn die Abtastzeit $T_s = 1$ ist.
Für den Amplitudengang gilt:

$$\begin{aligned}
|G(i\omega)| &= \frac{|1-e\cdot e^{i\omega}|}{|e^{i\omega}-e|} && (8)\\
&= \frac{|1-e\sin(\omega)-ie\cos(\omega)|}{|\sin(\omega)-e+i\cos(\omega)|} && (9)\\
&= \frac{\sqrt{(1-e\sin(\omega))^2+e^2\cos^2(\omega)}}{\sqrt{(\sin(\omega)-e)^2+\cos^2(\omega)}} && (10)\\
&= \frac{\sqrt{1-2e\sin^2(\omega)+e^2\sin(\omega)+e^2\cos^2(\omega)}}{\sqrt{\sin^2(\omega)-2e\sin(\omega)+e^2+\cos^2(\omega)}} && (11)\\
&= \frac{\sqrt{1-2e\sin(\omega)+e^2}}{\sqrt{1-2e\sin(\omega)+e^2}} && (12)\\
&= 1 && (13)
\end{aligned}$$

5

c) Wie nennt man Systeme, die einen solchen Amplitudengang aufweisen?
Allpass 1

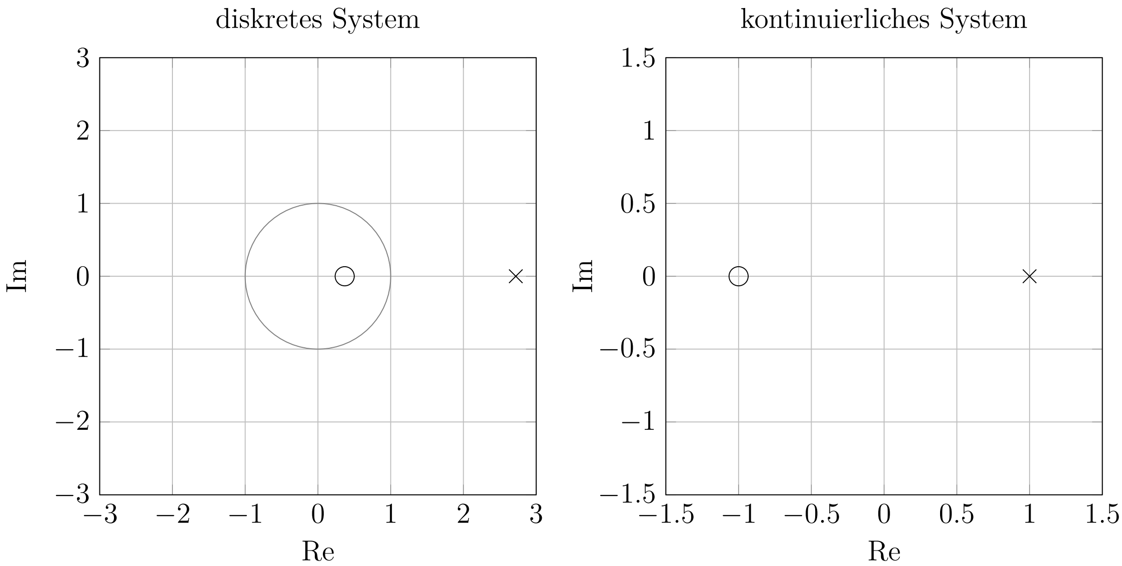
d) Bestimmen Sie das kontinuierliche System mit gleichen Polen und Nullstellen im s-Bereich.
Es gilt $z = e^{iT_s s}$ und daher $s = \frac{1}{T_s}\ln(z)$. Damit gilt für die Nullstelle $n_c = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ und für die Polstelle $p_c = \ln(e) = 1$. Die Übertragungsfunktion lautet damit

$$G(s) = \frac{1+s}{1-s}. \tag{14}$$

4

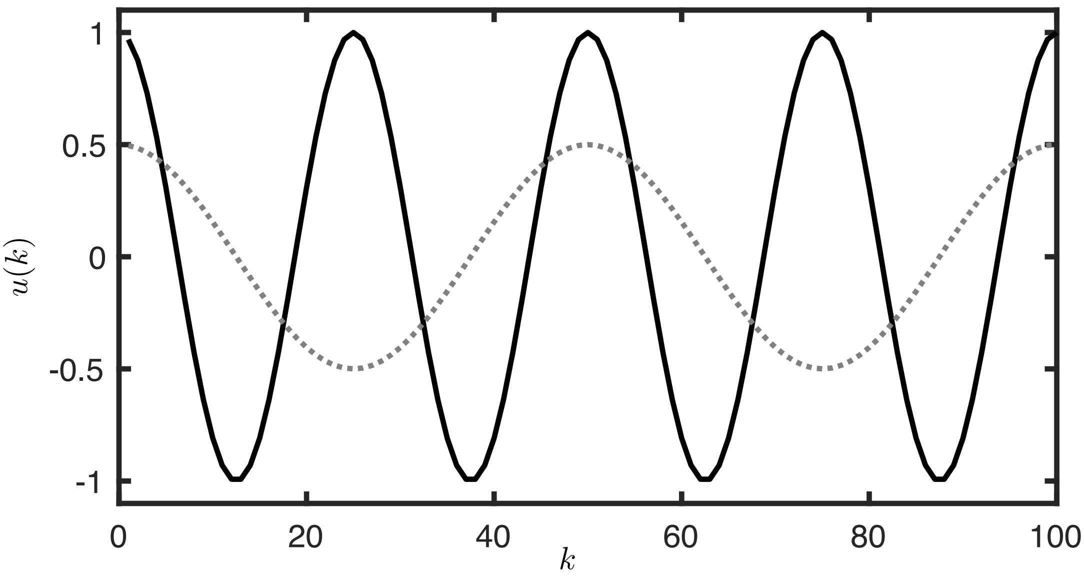
e) Zeichnen Sie die Nullstellen des kontinuierlichen Systems in das Diagramm ein. Wie unterscheiden sich kontinuierliches und diskretes System?
Beim kontinuierlichen System sind die Pole an der imaginären Achse gespiegelt, beim diskreten System gilt, dass die Nullstelle $\frac{1}{p}$ ist. 3

$\sum$ 15


diskretes System
Im
Re
−3
−2
−1
0
1
2
3
kontinuierliches System
Im
Re
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

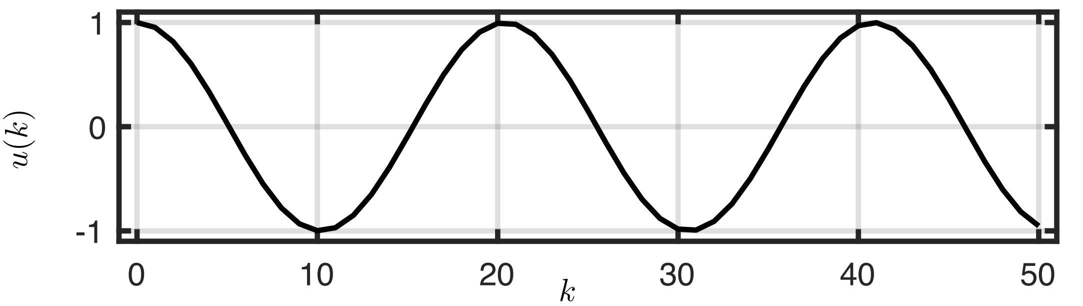
Aufgabe 3: Signalanalyse (11 Punkte)

a) Im folgenden Bild sind zwei verschiedene DFTs zu sehen. Das Signal $u(k)$ zu DFT 1 ist bereits im nachfolgenden Diagramm skizziert. Skizzieren sie bitte ein Signal, welches zu DFT 2 passt. Beachten Sie, dass die Werte der DFT nur für $n = 0, 1, \ldots, 20$ abgebildet sind. Alle weiteren Werte ergeben sich zu $|X(n > 20)| = 0$.
Da die DFT 1 nur einen Peak bei $n = 4$ besitzt ist hier ein Signal mit nur einer Frequenz zu erwarten, welche nach eine ganze Anzahl von Schwingungen besitzt. DFT 2 hat ebenfalls einen einzelnen Peak hier jedoch bei $n = 2$. Hieraus folgt, dass die Frequenz des zu Grunde liegenden Signals halb so groß sein muss. Die Höhe des Peaks ist halb so groß wie die von DFT 2, dies indiziert, dass zu Grunde liegende Signal ebenfalls nur die halbe Amplitude wie das Signal zu DFT 1 haben wird.



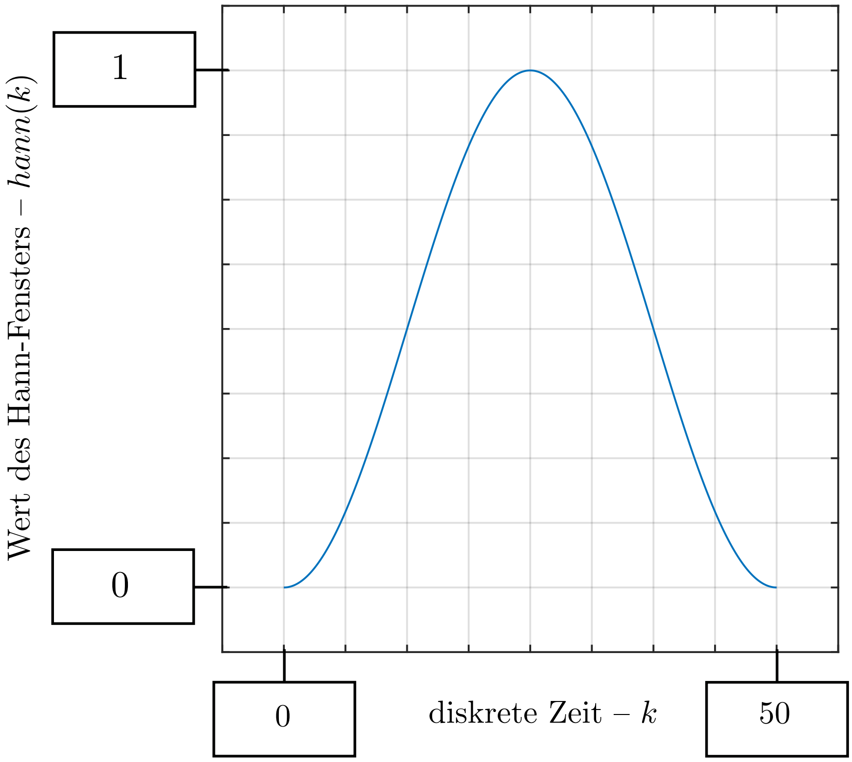
4

b) Skizzieren Sie in das nachfolgende Diagramm ein sinusförmiges Signal bei dem der Leckeffekt deutlich auftritt.



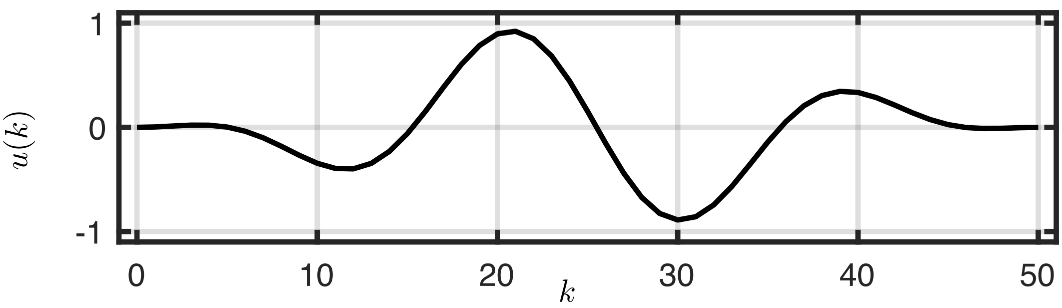
2

c) Um den Leckeffekt zu minimieren soll nun ein Hann-Fenster auf das Signal aus a) angewendet werden. Skizzieren Sie das Hann-Fenster in das vorbereitete Diagramm. Vervollständigen Sie die Achsbeschriftung.



3

d) Wenden Sie nun das Hann-Fenster aus b) auf das von Ihnen gewählte Signal aus Aufgabenteil a) an. Skizzieren Sie das entstehende Signal in das vorbereitete Diagramm.

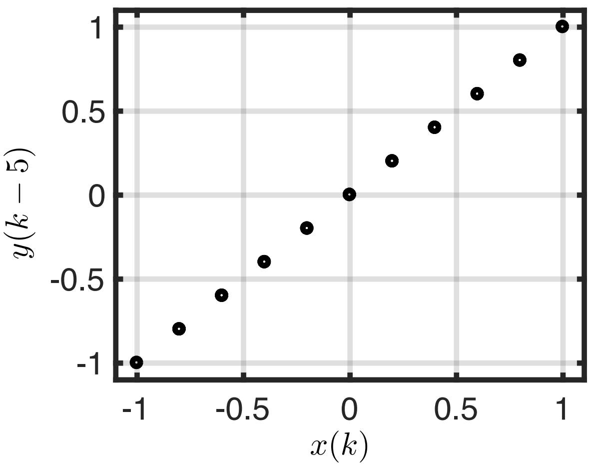


2

Aufgabe 4: Kreuzkorrelation (12 Punkte)

a) Welche der in Bild 3 gezeigten Kreuzkorrelationsfunktionen entspricht der Kreuzkorrelationsfunktion, die zu den gezeigten Signalen $x(k)$ und $y(k)$aus Bild 2 gehört?
Die Kreuzkorrelationsfunktion aus Bild 3 a) gehört zu den in Bild 2 dargestellten Signalen. Das Maximum der Korrelationsfunktion wird bei einer zeitlichen Verschiebung von $\tau = -5$ erreicht, da die Signale dann genau aufeinander liegen. 5

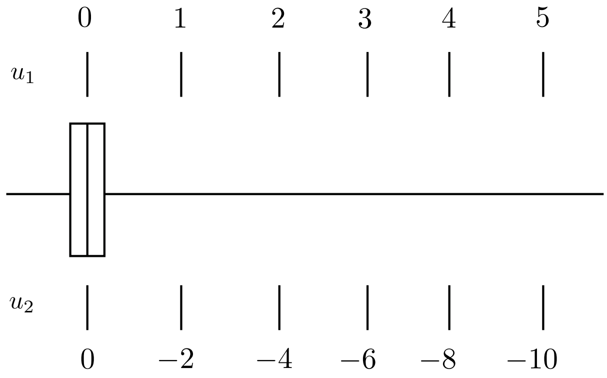
b) Zeichnen Sie das zeitlich verschobene Signal $y(k - \tau)$ über $x(k)$ in das unten vorbereitete Diagramm für $\tau = -5$.



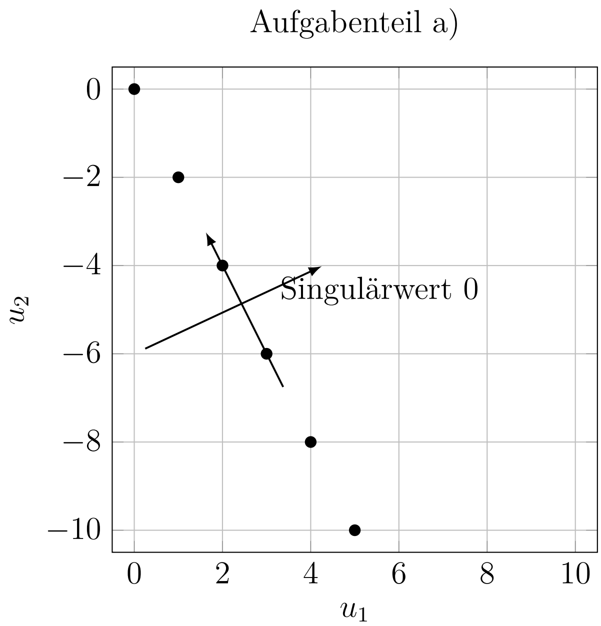
5

c) Nehmen Sie nun an, dass die Abtastfrequent verdoppelt wird. Wie verändert sich in diesem Fall die Zeitverschiebung bei der das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion erreicht wird?
Die Zeitverschiebung an der das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion erreicht wird verdoppelt sich, da sich die Anzahl der Datenpunkte verdoppelt. 2

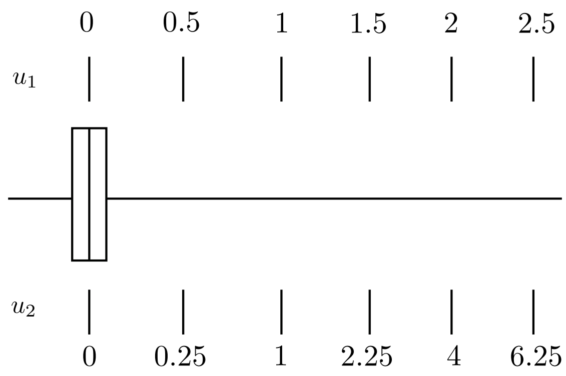
Aufgabe 5: Singulärwertzerlegung



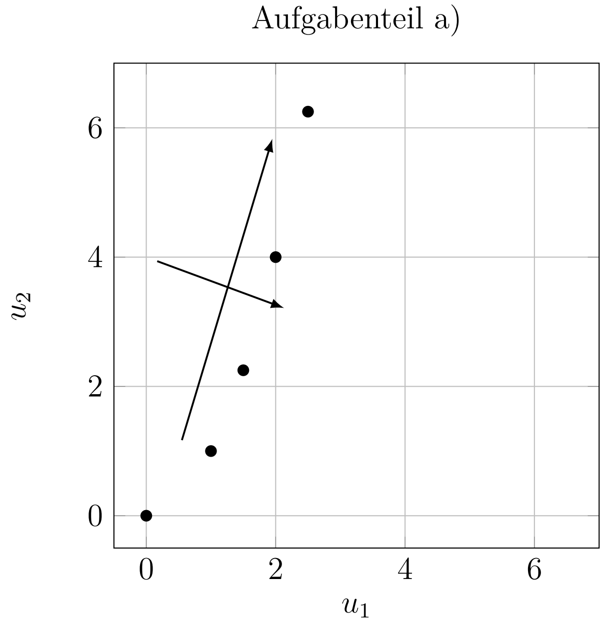
a) siehe Diagramm $\boxed{1}$



b) siehe Diagramm $\boxed{3}$



c) siehe Diagram $\boxed{1}$



d) siehe Diagramm $\boxed{2}$

e) Die Beziehung zwischen $u_2 = u_1^2$ ist nichtlinear. Daher entsteht auch eine Varianz senkrecht zur ersten Hauptachse. $\boxed{2}$

$\boxed{\sum 7}$