Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

28. August 2013

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	7	11	20	9	13	60
Note:	Ist:						

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Leitet man ein rauschbehaftetes Signal nach der Zeit ab …

- ☐ … wird das System instabil.
- ☐ … verändert sich die Verstärkung der Übertragungsfunktion.
- ☐ … verstärkt sich das Rauschen.

b) Das Shannonsche Abtasttheorem besagt, dass …

- ☐ … die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß sein muss, wie die höchste Frequenzkomponente.
- ☐ … Aliasing nur bei einer Abtastung eines verrauschten Signals auftritt.
- ☐ … das Amplitudenspektrum immer über den Bereich 0 bis $\frac{w_0}{2}$ aufgetragen wird, um eine Redundanz zu vermeiden.

c) Unüberwachtes Lernen …

- ☐ … benötigt den gewünschten Ausgangswert.
- ☐ … benötigt den gewünschten Ausgangswert nicht.
- ☐ … kann nicht zur Datenvorverarbeitung verwendet werden.

d) Die Hauptkomponentenanalyse (PCA) ...

- [ ] ... kann mit einem Filter durchgeführt werden.
- [ ] ... kann mithilfe der Lösung eines Eigenwertproblems durchgeführt werden.
- [ ] ... kann mit einer Singulärwertzerlegung durchgeführt werden.

e) Nichtparameterische Verfahren ...

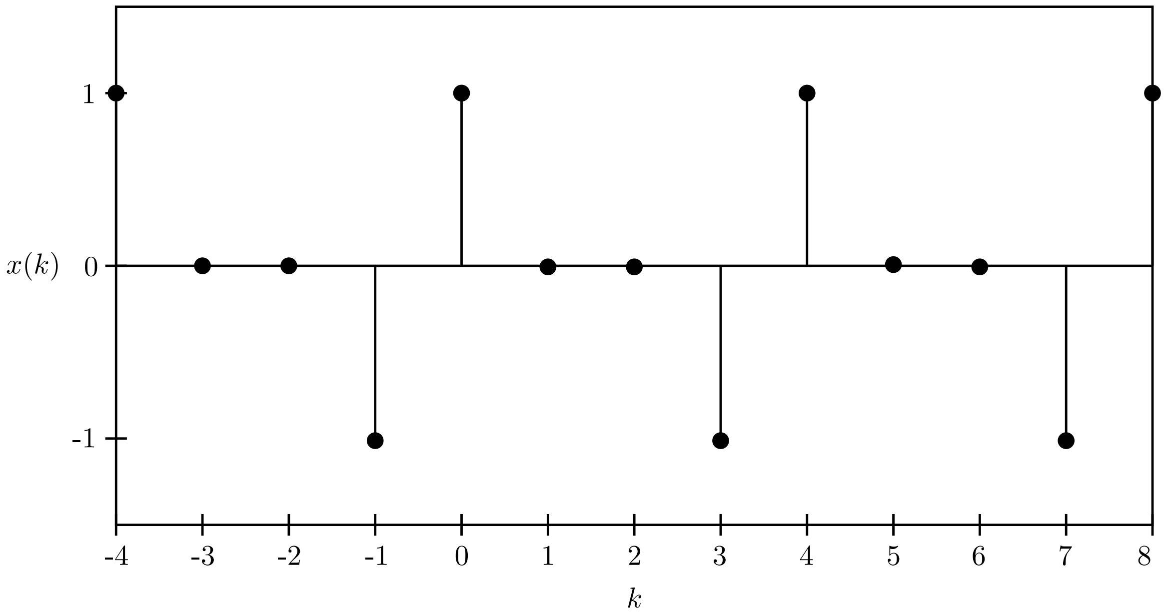
- [ ] ... sind flexibler als parameterische Verfahren.
- [ ] ... können nur im Zeitkontinuierlichen verwendet werden.
- [ ] ... verhalten sich robust gegenüber Rauschen.

f) Bewerten Sie folgende Aussagen zu adaptiven Filtern.

- [ ] Ein adaptives Filter ist ein zeitinvariantes, statisches System.
- [ ] Ein adaptives Filter passt seine Parameter aufgrund des Fehlers des Filters an.
- [ ] Ein adaptives IIR-Filter ist immer stabil.

Aufgabe 2: Diskrete Fourier-Transformation

Gegeben ist die unten abgebildete periodische Folge $x(k)$.



a) Welche Periodendauer N hat das Signal?

b) Stellen Sie das zu lösende Gleichungssystem zur diskreten Fourier-Transformierten $X(n)$ auf und formulieren Sie es in Matrix-Vektor-Schreibweise $\underline{X} = \underline{F}\,\underline{x}$. Beschränken Sie sich dabei zunächst auf die allgemeine Formulierung mithilfe der Abkürzung $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ und einem allgemeinen Signal $\underline{x}$ bzw. $x(k)$.

c) Setzen Sie in das Gleichungssystem das vorliegende Signal $x(k)$ ein und lösen Sie es nach $X(n)$ auf.

d) Berechnen Sie die benötigten Fourier-Koeffizienten W_N^{nk}.

e) Setzen Sie die Fourier-Koeffizienten ein und berechnen Sie das diskrete Amplitudenspektrum $|X(n)|$.

Aufgabe 3: Filter

Gegeben ist die folgende Übertragungsfunktion eines Filters im z-Bereich:

$$G_1(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \ .$$

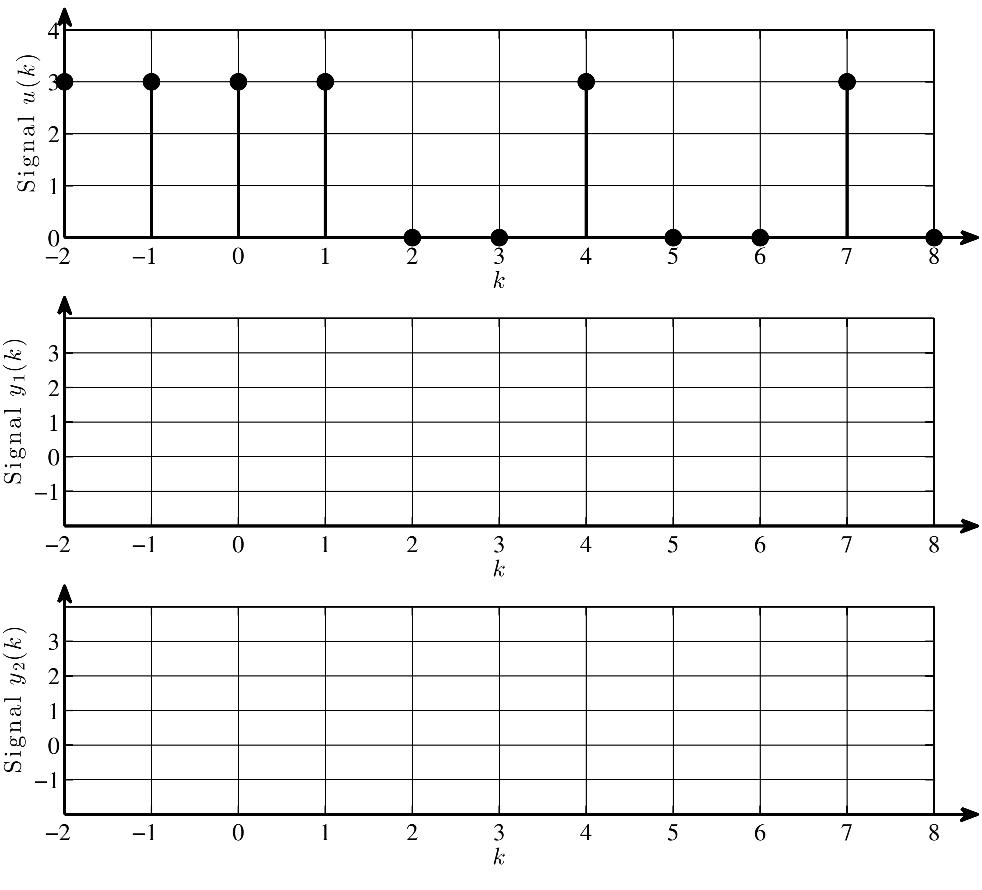
a) Stellen Sie die Differenzengleichung zum gegebenen Filter auf.

b) Zeichnen Sie das Blockschaltbild für das gegebene Filter.

c) Gegeben ist das unten gezeigte Signal $u(k)$, welches gefiltert werden soll. Für Werte von k, die kleiner als -2 oder größer als 8 sind, sei das Eingangssignal Null. Zur Filterung dient zum einen das gegebene Filter aus Aufgabenteil a) mit den Koeffizienten $b_0 = \frac{1}{3}$, $b_1 = -\frac{1}{3}$ und $a_1 = 0$ (gefiltertes Signal $y_1(k)$). Zum anderen ergibt sich das Signal $y_2(k)$ durch Filterung von $u(k)$ mit folgender Differenzengleichung:

$$y_2(k) = \frac{1}{3}\left(u(k+1) + u(k) + u(k-1)\right) \ .$$

Berechnen und skizzieren Sie die Werte für $y_1(k)$ und $y_2(k)$.



d) Geben Sie für beide Filter an, ob es sich um einen Tief- oder Hochpassfilter handelt.

e) Treffen Sie eine Aussage zum Thema Kausalität für beide Filter.

Aufgabe 4: Zeitdiskretes System

Gegeben ist die zeitkontinuierliche Sprungantwort eines PT_1-Systems

$$h(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) ,$$

mit der Verstärkung $K = 8$ und der Zeitkonstanten $T = 2$ sec.

a) Leiten Sie die Impulsantwort (Gewichtsfunktion) $g(t)$ des PT_1-Systems her.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ mittels Invarianz der Impulsantwort. Verwenden Sie hierfür die Abtastzeit $T_0 = 0{,}5$ sec.

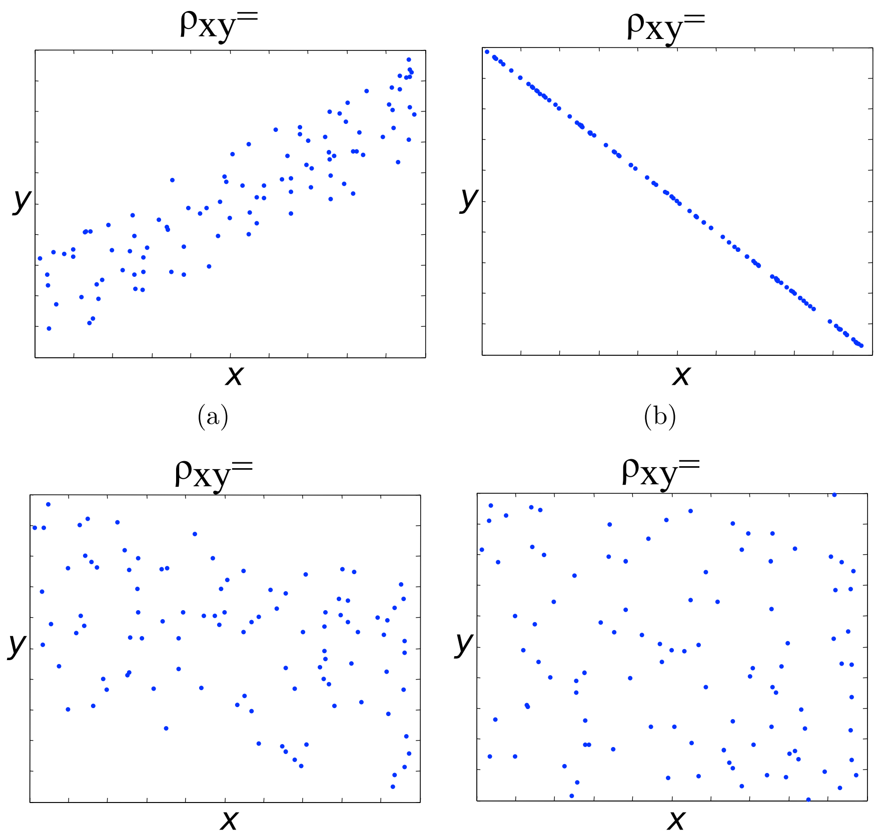
c) Ist das System sprungfähig? Welche Verstärkung ergibt sich?

d) Ermitteln Sie die Anfangswerte des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems.

Aufgabe 5: Stochastische Signale

Alle Aufgabenteile können komplett unabhängig voneinander gelöst werden.

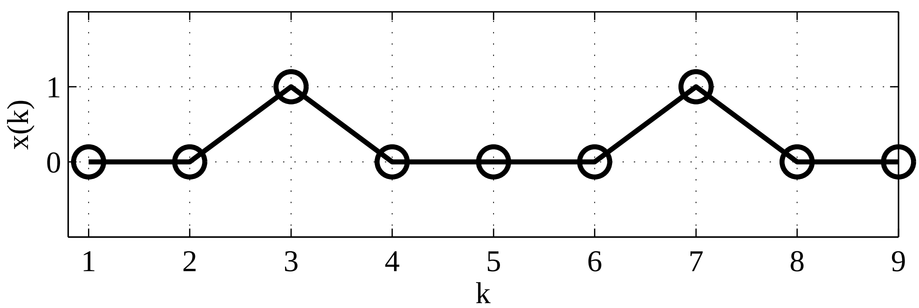
a) Ordnen Sie die folgenden Korrelationskoeffizienten den Bildern (a) bis (d) zu: -1,0; -0,4; 0,0; 0,9. Tragen Sie dazu den entsprechenden Koeffizienten direkt über dem jeweiligen Bild ein.



(a) (b) (c) (d)

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion für das unten abgebildete Signal $u(k)$. Benutzen Sie dazu folgende Schätzformel und variieren Sie die Zeitverschiebung um $\kappa = 0 \ldots 8$:

$$r_{xx}(\kappa) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-|\kappa|} x(k)x(k+\kappa) \ . \tag{1}$$



Geben Sie an, ob es sich bei Gleichung 1 um die biasfreie oder die biasbehaftete Variante handelt.

c) Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichtefunktionen

1) Skizzieren Sie in **einem** Koordinatensystem qualitativ **zwei** Normalverteilungen, mit folgenden Eigenschaften:

- Erwartungswert $\mu_1 = 0$, Varianz $\sigma_1^2 = 1$.
- Erwartungswert $\mu_2 = 0$, Varianz $\sigma_2^2 = 4$.

Kennzeichnen Sie, welche der gezeichneten Normalverteilungen welcher Varianz entsprechen soll.

2) Zeichnen Sie die exakte Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichtefunktion, bei der alle Werte zwischen 0 und 2 gleich wahrscheinlich sind (Gleichverteilung). Achten Sie dabei auf die Achsskalierung!

Achten Sie bei sämtlichen Skizzen auf vorhandene Achsbeschriftungen!

Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Leitet man ein rauschbehaftetes Signal nach der Zeit ab …

- ☐ … wird das System instabil.
- ☐ … verändert sich die Verstärkung der Übertragungsfunktion.
- ■ … verstärkt sich das Rauschen.

b) Das Shannonsche Abtasttheorem besagt, dass …

- ■ … die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß sein muss, wie die höchste Frequenzkomponente.
- ☐ … Aliasing nur bei einer Abtastung eines verrauschten Signals auftritt.
- ☐ … das Amplitudenspektrum immer über den Bereich 0 bis $\frac{\omega_0}{2}$ aufgetragen wird, um eine Redundanz zu vermeiden.

c) Unüberwachtes Lernen …

- ☐ … benötigt den gewünschten Ausgangswert.
- ■ … benötigt den gewünschten Ausgangswert nicht.
- ☐ … kann nicht zur Datenvorverarbeitung verwendet werden.

d) Die Hauptkomponentenanalyse (PCA) …

- ☐ … kann mit einem Filter durchgeführt werden.
- ■ … kann mithilfe der Lösung eines Eigenwertproblems durchgeführt werden.
- ■ … kann mit einer Singulärwertzerlegung durchgeführt werden.

e) Nichtparameterische Verfahren …

- ■ … sind flexibler als parameterische Verfahren.
- ☐ … können nur im Zeitkontinuierlichen verwendet werden.
- ☐ … verhalten sich robust gegenüber Rauschen.

f) Bewerten Sie folgende Aussagen zu adaptiven Filtern.

- ☐ Ein adaptives Filter ist ein zeitinvariantes, statisches System.
- ■ Ein adaptives Filter passt seine Parameter aufgrund des Fehlers des Filters an.
- ☐ Ein adaptives IIR-Filter ist immer stabil.

$\boxed{\sum 7}$

Aufgabe 2: Diskrete Fourier-Transformation

Allgemein: $\text{DFT}\{x(k)\} = X(n) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W_N^{nk}$ mit $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$.

a) Die Periodendauer ist $N = 4$. $\boxed{1}$

b) Diskretes Zeitsignal ist periodisch mit $N = 4$ Abtastwerten:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} .$$

Somit ergibt sich die Rechenvorschrift zu:

$$\text{DFT}\{x(k)\} = X(n) = \sum_{k=0}^{3} x(k) \cdot W_4^{nk} .$$

Das zu lösende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} X(0) &= W_4^0 \cdot x(0) + W_4^0 \cdot x(1) + W_4^0 \cdot x(2) + W_4^0 \cdot x(3) \\ X(1) &= W_4^0 \cdot x(0) + W_4^1 \cdot x(1) + W_4^2 \cdot x(2) + W_4^3 \cdot x(3) \\ X(2) &= W_4^0 \cdot x(0) + W_4^2 \cdot x(1) + W_4^4 \cdot x(2) + W_4^6 \cdot x(3) \\ X(3) &= W_4^0 \cdot x(0) + W_4^3 \cdot x(1) + W_4^6 \cdot x(2) + W_4^9 \cdot x(3) . \end{aligned} \quad \boxed{4}$$

In Matrix-Vektor-Schreibweise umgeformt folgt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}}_{\underline{x}} . \quad (2) \quad \boxed{1}$$

c) Das gegebene Signal mit der Periodendauer $N = 4$ ist:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Eingesetzt in Gleichung 2 ergibt sich für $\underline{X}$:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-W_4^3 \\ 1-W_4^6 \\ 1-W_4^9 \end{bmatrix} . \quad \boxed{1}$$

d) Es sind lediglich die Fourier-Koeffizienten W_4^3, W_4^6 und W_4^9 zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
W_4^3 &= e^{-i\frac{2\pi}{4}3} = \cos(-\frac{3}{2}\pi) + i \cdot \sin(-\frac{3}{2}\pi) = i \\
W_4^6 &= e^{-i\frac{2\pi}{4}6} = \cos(-\frac{6}{2}\pi) + i \cdot \sin(-\frac{6}{2}\pi) = -1 \\
W_4^9 &= e^{-i\frac{2\pi}{4}9} = \cos(-\frac{9}{2}\pi) + i \cdot \sin(-\frac{9}{2}\pi) = -i\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$

e) Eingesetzt ergibt sich das Amplitudenspektrum $|\underline{X}|$:

$$
|\underline{X}| = \left| \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-i \\ 1-(-1) \\ 1-(-i) \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ 2 \\ 1+i \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} .
$$

$\boxed{1}$

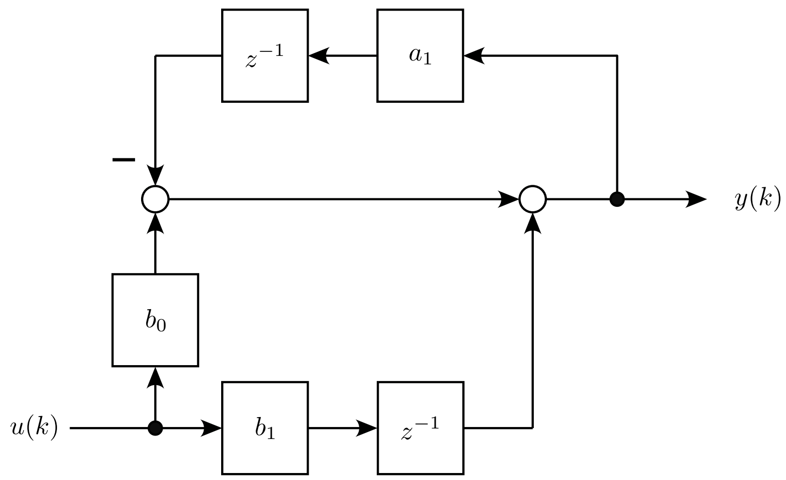
$\boxed{\sum 11}$

Aufgabe 3: Filter

a) Stellen Sie die Differenzengleichung zum gegebenen Filter auf.

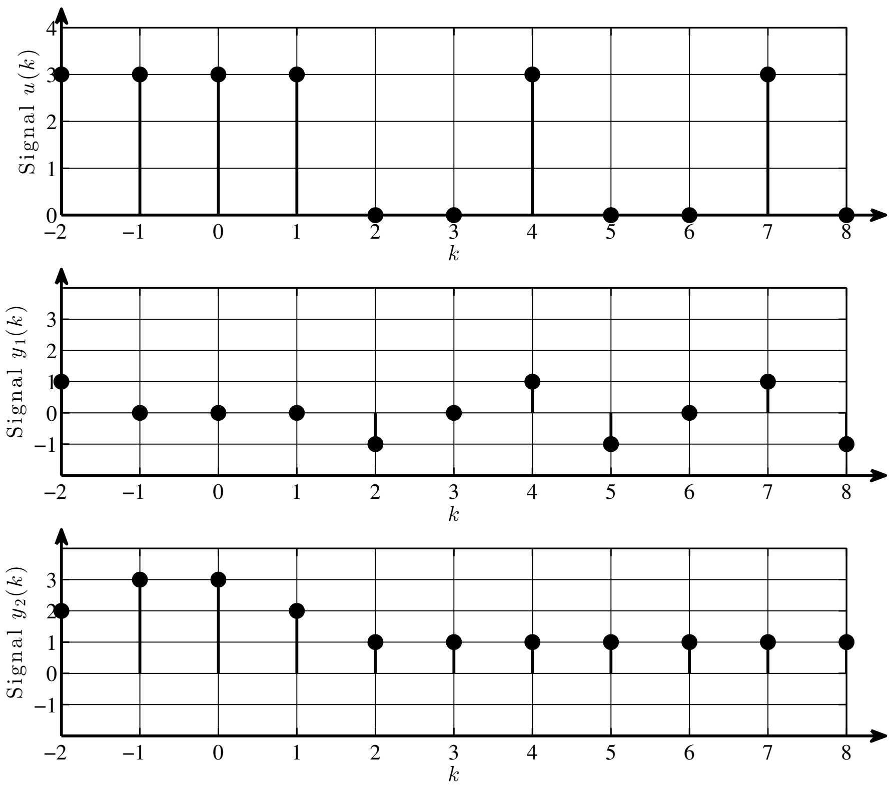
$y_1(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) - a_1 y(k-1)$ 1

b) Zeichnen Sie das Blockschaltbild für das gegebene Filter.



5

c) Berechnen und skizzieren Sie die Werte für $y_1(k)$ und $y_2(k)$.



10

d) Geben Sie für beide Filter an, ob es sich um einen Tief- oder Hochpassfilter handelt.

G_1: Hochpass; G_2: Tiefpass. 2

e) Treffen Sie eine Aussage zum Thema Kausalität für beide Filter.

G_1: Kausales Filter; G_2: Akausales Filter. 2

$\sum$ 20

Aufgabe 4: Zeitdiskretes System

a) Um aus der Sprungantwort die Impulsantwort zu erhalten, muss die Sprungantwort abgeleitet werden:

$$g(t) = \frac{d}{dt}h(t) = \frac{d}{dt}\left(K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right) = K \cdot (-\frac{1}{T}) \cdot -e^{-\frac{t}{T}} = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \ . \qquad \boxed{2}$$

Setzt man die vorgegebenen Werte ein erhält man:

$$g(t) = \frac{8}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2sec}} = 4 \cdot e^{-\frac{t}{2sec}} \ .$$

b) Zunächst muss die Impulsantwort mit der Abtastzeit $T_0 = 0{,}5$ sec diskretisiert werden:

$$g(k) = g(t = T_0 \cdot k) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{T_0 \cdot k}{T}} = \frac{8}{2} \cdot e^{-\frac{0{,}5sec \cdot k}{2sec}} = 4 \cdot e^{-0{,}25k} \ . \qquad \boxed{1}$$

Eingesetzt in die allgemein Gleichung für die z-Transformation G(z) folgt:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(g(k) \cdot z^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(4 \cdot e^{-0{,}25k} \cdot z^{-k}\right) = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-0{,}25k} \cdot z^{-k}\right) \qquad \boxed{1}$$

$$= 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-0{,}25} \cdot z^{-1}\right)^k \ .$$

Mit der geometrischen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ folgt:

$$G(z) = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-0{,}25} \cdot z^{-1}\right)^k = \frac{4}{1 - e^{-0{,}25} \cdot z^{-1}} \ . \qquad \boxed{1}$$

c) Das System ist sprungfähig, da $u(k)$ direkten Einfluss auf $y(k)$ hat.

Die Verstärkung lautet: $\boxed{2}$

$$G(z = 1) = \frac{4}{1 - e^{-0{,}25}} = 18{,}08 \ .$$

d) Anfangswert des zeitkontinuierlichen Systems: $g(t \to 0sec) = 4 \cdot e^{-\frac{0sec}{2sec}} = 4.$ $\boxed{2}$

Anfangswert des zeitdiskreten Systems:

$$g(k \to 0) = 4 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 0} = 4 \ ,$$

oder

$$g(k \to 0) = \lim_{z \to \infty} G(z) = \frac{4}{1} = 4 \ .$$

$\boxed{\sum 9}$

Aufgabe 5: Filter

a) Ordnen Sie die folgenden Korrelationskoeffizienten den Bildern (a) bis (d) zu: -1,0; -0,4; 0,0; 0,9.

(a): 0,9
(b): -1
(c): -0,4
(d): 0 4

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion für das unten abgebildete Signal $u(k)$.

Die Autokorrelationsfunktion ist nur für zwei Zeitverschiebungen ungleich Null: Für $\kappa = 0$ und $\kappa = 4$.

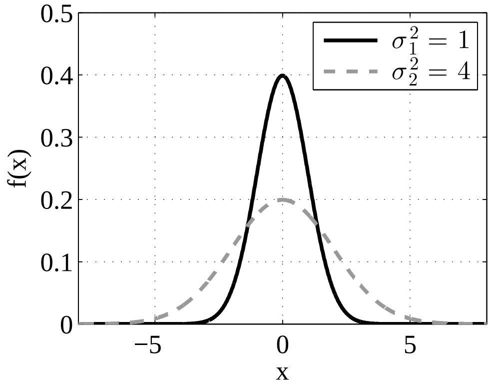
$$r_{xx}(\kappa = 0) = \frac{2}{9}$$
$$r_{xx}(\kappa = 4) = \frac{1}{9}\ .$$

3

Es handelt sich um die biasbehaftete Variante. 1

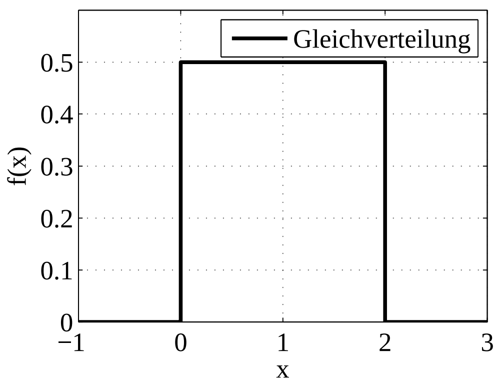
c) Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichtefunktionen

1) Normalverteilungen



3

2) Gleichverteilung



2

$\sum$ 13