Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

6. März 2019

Name:	
Matr.-Nr.:	
Note:	

Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	A6	Gesamt
Soll:	12	12	14	9	6	7	60
Ist:							

Dauer der Klausur: 1 Stunde

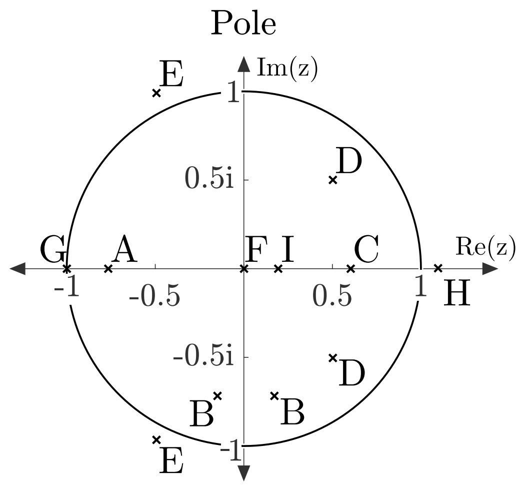
Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Sprungantworten (12 Punkte)

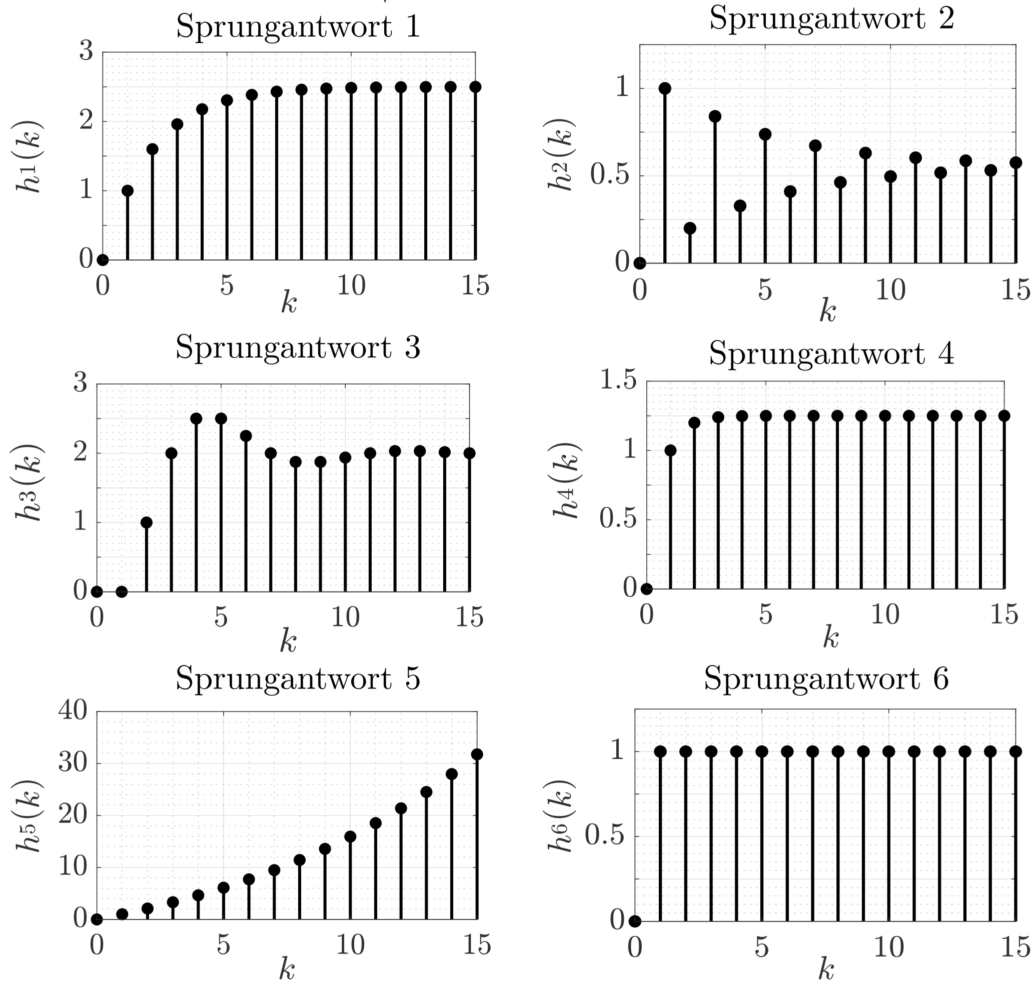
Gegeben sind die Lagen der Pole von neun unterschiedlichen Systemen (A-I) im Pol/Nullstellen-Diagramm und sechs unterschiedliche Sprungantworten (1-6).

Ordnen Sie die Pole den Sprungantworten in der gegebenen Tabelle richtig zu.

(Hinweis: Drei Pollagen sind keiner Sprungantwort zurechenbar. Alle Übertragungsfunktion haben die Struktur $G(z) = \frac{1}{A(z)}$ mit $A(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - p_i)$)

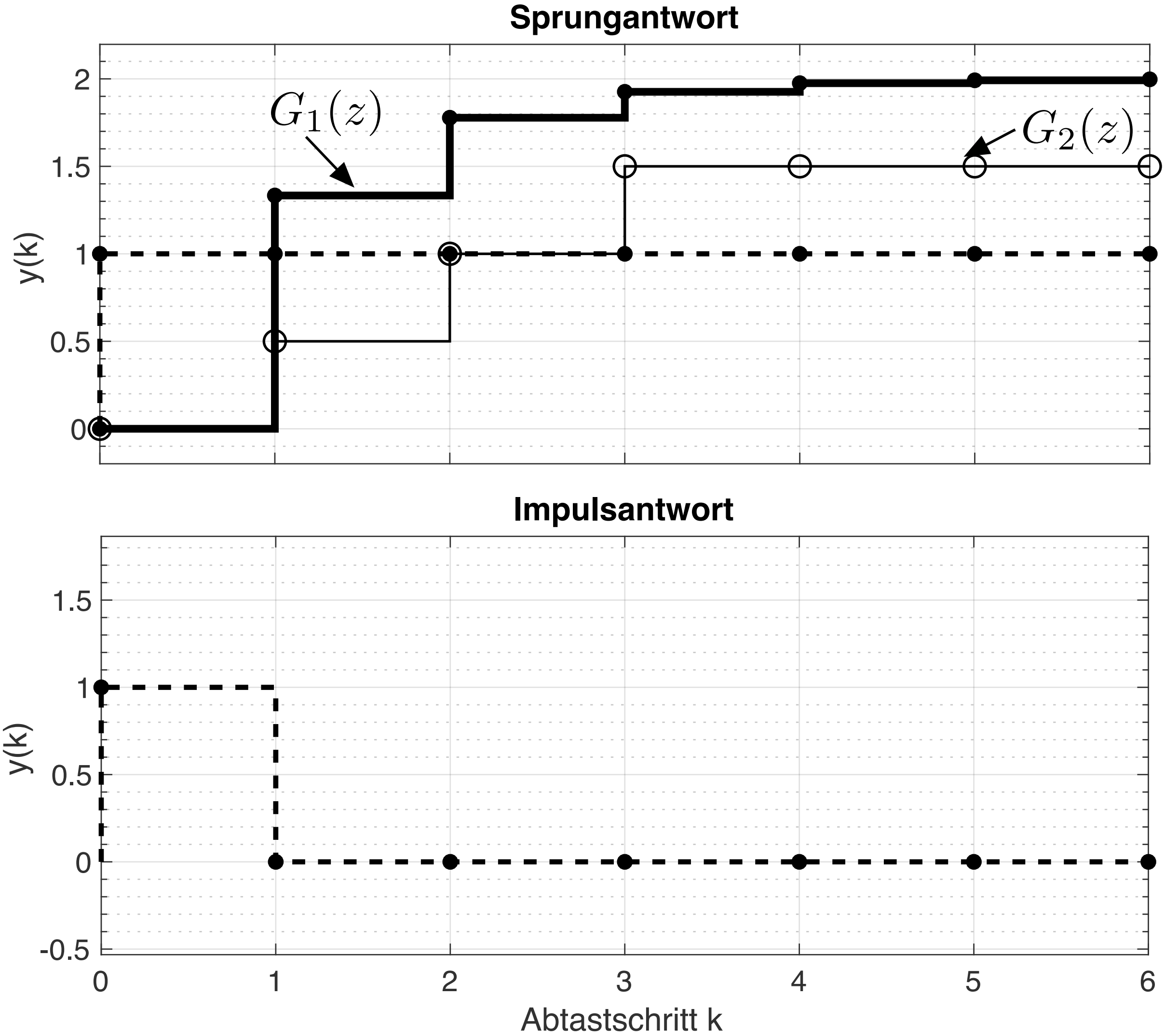


Sprung-antwort	Pole
1	
2	
3	
4	
5	
6	



Aufgabe 2: FIR- und IIR-Systeme (12 Punkte)

Gegeben sind die Sprungantworten der beiden Übertragungsfunktionen $G_1(z)$ und $G_2(z)$ im nachfolgenden Diagramm.



a) Zeichnen Sie die Impulsantworten von $G_1(z)$ und $G_2(z)$ in obiges Diagramm ein. Sie können die Werte dabei auf die Gitterabstände (0,1) runden.

b) Begründen Sie anhand der gezeichneten Impulsantworten, bei welchem System FIR bzw. IIR Verhalten vorliegt. Wenn Sie die Impulsantworten nicht zeichnen konnten, kann die Begründung auch anhand der Sprungantworten erfolgen.

c) Begründen Sie (z.B. Verstärkung, Pole, Nullstellen) für jede der nachfolgend gegebenen Übertragungsfunktionen $G_A(z), G_B(z), \ldots G_F(z)$, ob es sich dabei um $G_1(z)$, $G_2(z)$ oder keines von beiden handelt.

$$G_A(z) = \frac{2z^{-1}}{3 - z^{-1}}, \quad G_B(z) = \frac{(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})}{2}, \quad G_C(z) = \frac{2}{3 - z^{-1}}$$

$$G_D(z) = \frac{2z^{-1}}{1{,}5 - 0{,}5z^{-1}}, \quad G_E(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{2} \quad , G_F(z) = \frac{4z^{-1}}{0{,}5 + 1{,}5z^{-1}},$$

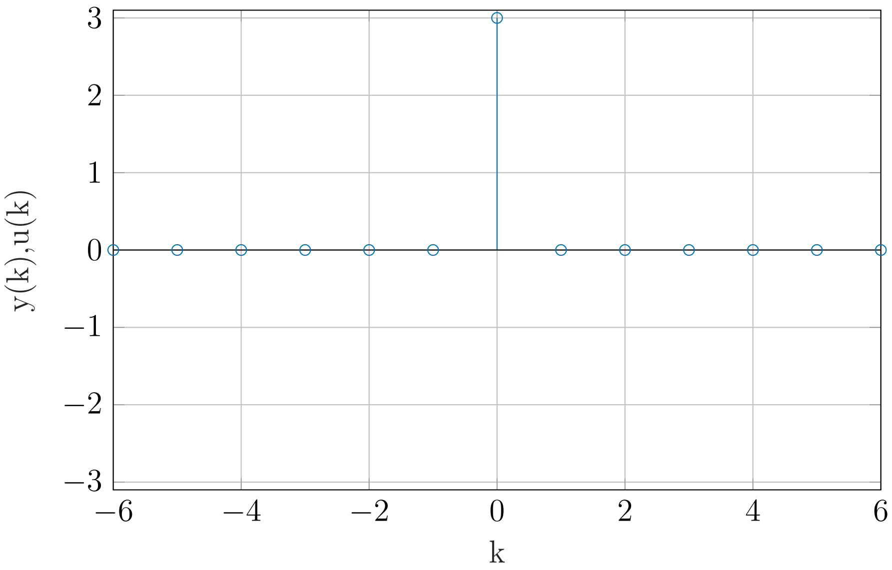
Aufgabe 3: Mittelwert-Filter (14 Punkte)

Gegeben ist folgende Ein- und Ausgangsbeziehung in diskreter Zeit:

$$y\left(k\right) = \frac{1}{3}\left(u\left(k+2\right) + u\left(k+1\right) + u\left(k\right)\right) \tag{1}$$

a) Nutzen Sie diese Beziehung, um die Übertragungsfunktion $\mathrm{G}(z)$ zu berechnen.

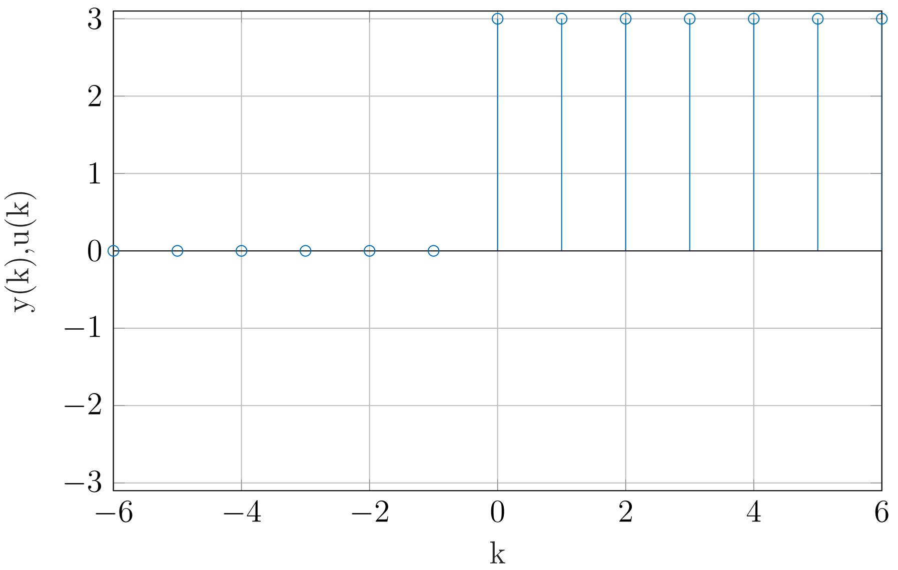
b) Zeichnen Sie die Antwort $y(k)$ zu dem Eingang $u(k)$ in das nachfolgende Diagramm ein.



c) Erstellen Sie die Übertragungsfunktion $\mathrm{G}_d(z)$ durch Zeitverschiebung von $\mathrm{G}(z)$ so, dass $\mathrm{G}_d(z)$ keine Phasenverschiebung hat. Geben Sie eine Erklärung oder Berechnung zu Ihrer Antwort.
Hinweis: Sie können folgende Gleichung nutzen: $e^{i\phi} = \cos\left(\phi\right) + i\sin\left(\phi\right)$

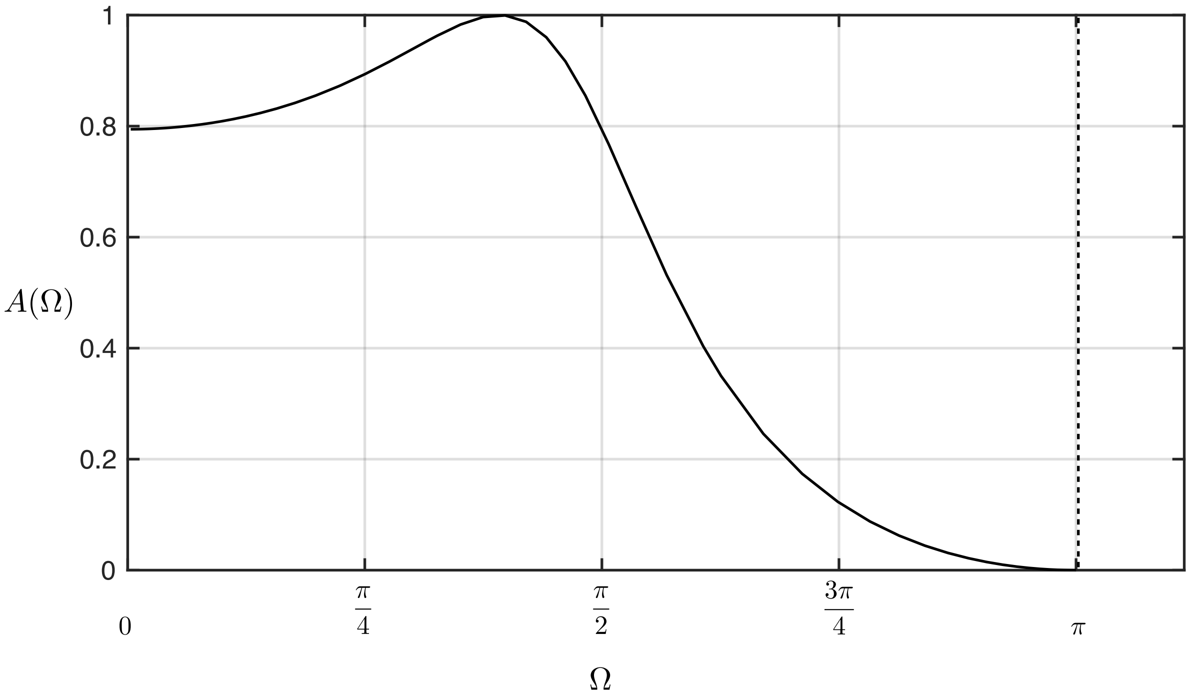
d) Stellt die Übertragungsfunktion $\mathrm{G}_d(z)$ ein kausales oder ein akausales System dar? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Zeichnen Sie die Antwort $y_d(k)$ (von der Übertragungsfunktion $G_d(z)$) auf das Eingangssignal $u(k)$ in das nachfolgende Diagramm ein.



Aufgabe 4: Filter (9 Punkte)

Gegeben ist folgender Amplitudengang eines Filters 2. Ordnung und einer normierten Eckfrequenz bei $\Omega_0 = \pi/2$.



a) Um welchen Filtertypen handelt es sich hier (Bandpass, Bandsperre, Tiefpass oder Hochpass)?

b) Benennen Sie den Filter (Butterworth, Cauer, Tschebyscheff-Typ I oder Tschebyscheff-Typ II).

c) Zeichnen Sie qualitativ die verbleibenden Filter (jeweils 2. Ordnung mit einer Eckfrequenz bei $\Omega_0 = \pi/2$) in den obigen Amplitudengang. Achte Sie darauf, dass die charakteristischen Eigenschaften jedes Filters gut zu erkennen sind. Machen Sie kenntlich, welcher Amplitudengang zu welchem Filter gehört.

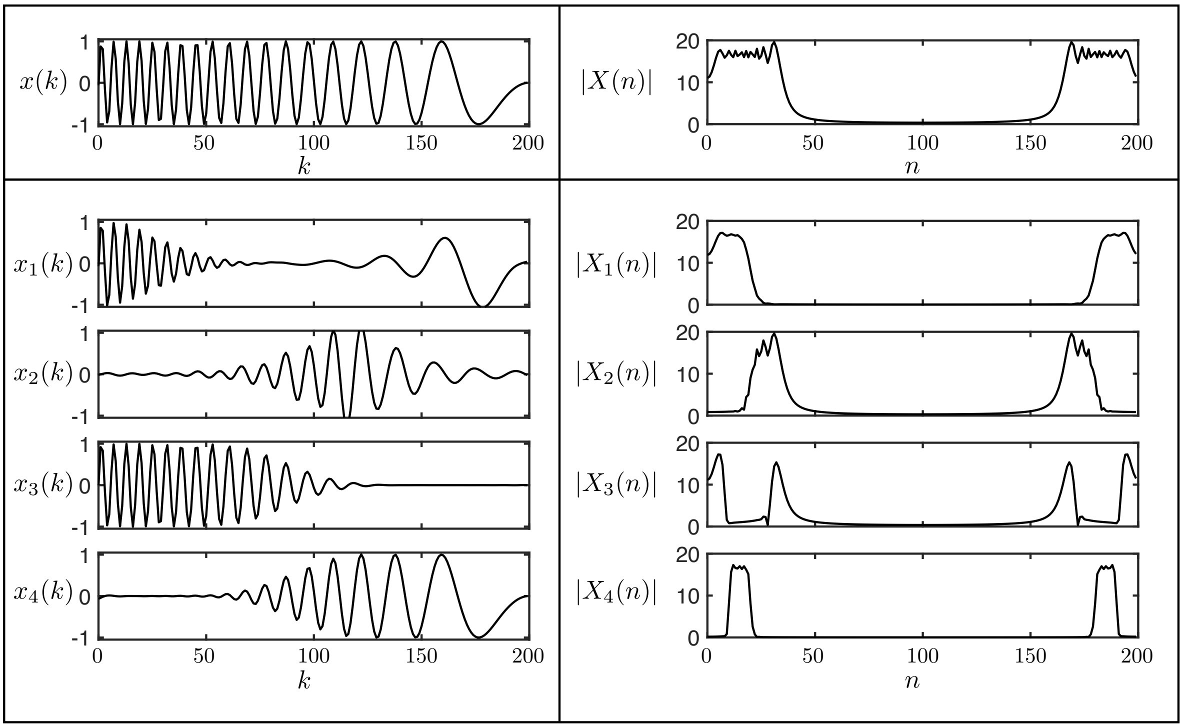
d) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild eines allgemeinen IIR-Filters 2. Ordnung. Benutzen Sie hierzu nur Blöcke die aus Konstanten oder z^{-1} bestehen.

e) Geben Sie die Differenzengleichung zu Aufgabenteil d) an.

f) Wovon hängt die Stabilität des IIR-Filters aus Aufgabenteil d) / e) ab (kurze Antwort)?

Aufgabe 5: DFT (6 Punkte)

Gegeben ist ein sinusförmiges Signal $x(k)$, welches die Frequenz über die Zeit linear verändert. Der Verlauf der Absolutwerte der DFT ($|X(n)|$) ist ebenfalls gezeigt.



Im Folgenden wird das Signal $x(k)$ mit verschiedenen Filtertypen gefiltert. Das Ergebnis sind die Signale $x_1(k)$ - $x_4(k)$ sowie deren DFTs.

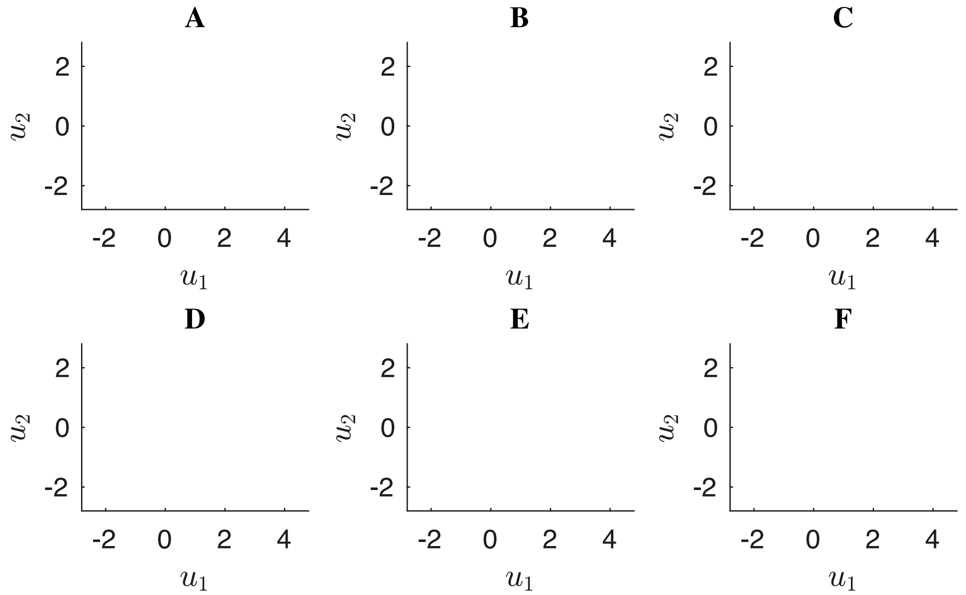
a) Ordnen Sie jedem Signal $x_i(k)$ den passenden Verlauf der Absolutwerte der DFT $|X_j(n)|$ zu.

Signal	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$
Zugehöriges $\lvert X_j(n)\rvert$				

b) Das Signal $x(k)$ hat eine sich zeitlich verändernde Frequenz. Welche Möglichkeiten gibt es solche Signale zu analysieren? Nennen Sie mindestens eine Vorgehensweise und erläutern Sie diese in **wenigen** Sätzen.

Aufgabe 6: Statistik (7 Punkte)

a) Skizzieren Sie grob die Höhenlinien der zweidimensionalen Normalverteilung für die gegebenen Signale in Bild 1.



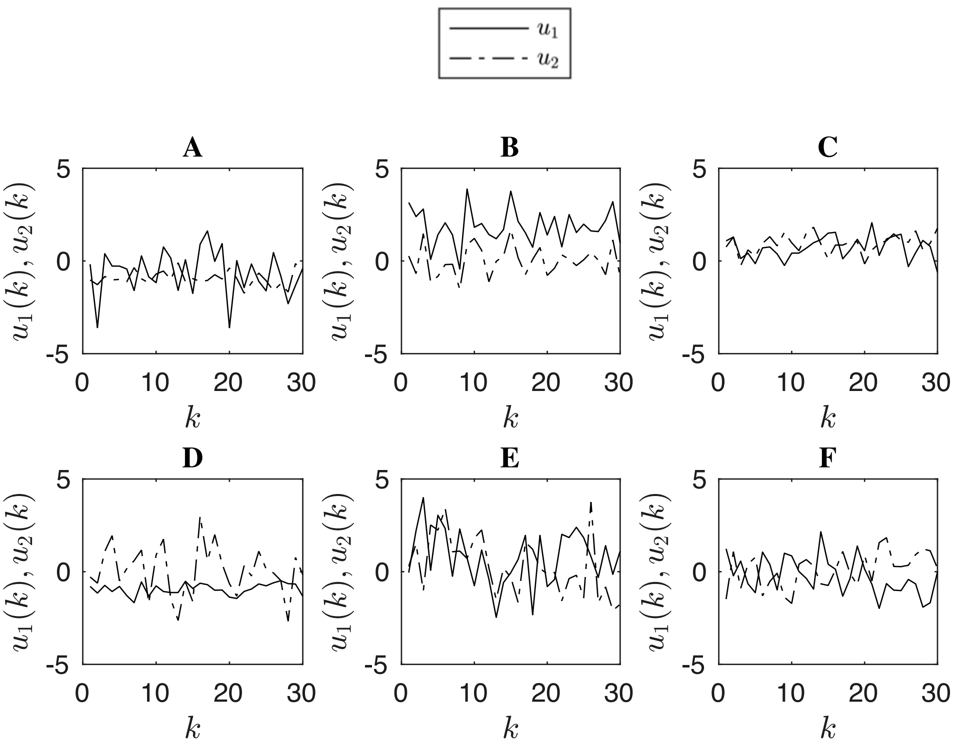


Bild 1: Signale u_1 und u_2 aus unterschiedlichen Verteilungen.

b) Eine zweidimensionale Normalverteilung hat perfekt kreisförmige Höhenlinien. Welche Eigenschaften besitzt diese Verteilung?

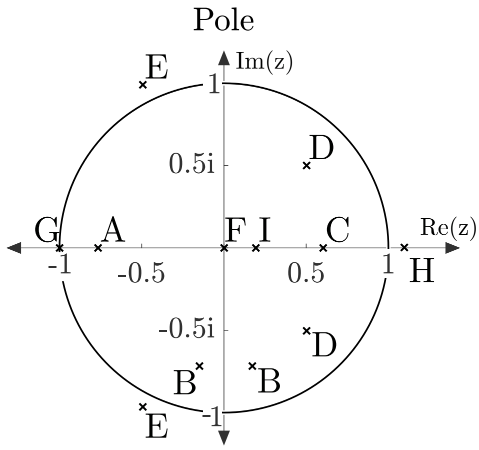
Lösungen:

Aufgabe 1: Sprungantworten (12 Punkte)

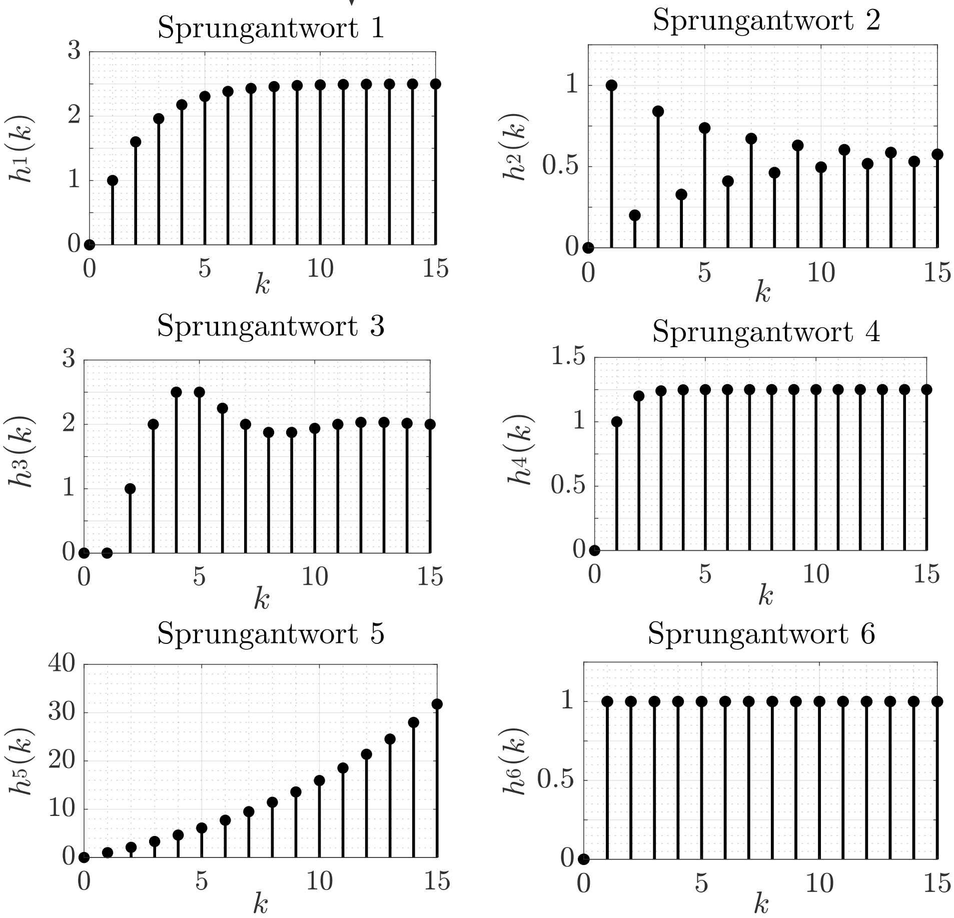
Gegeben sind die Lagen der Pole von neun unterschiedlichen Systemen (A-I) im Pol/Nullstellen-Diagramm und sechs unterschiedliche Sprungantworten (1-6).

Ordnen Sie die Pole den Sprungantworten in der gegebenen Tabelle richtig zu.

(Hinweis: Drei Pollagen sind keiner Sprungantwort zurechenbar. Alle Übertragungsfunktion haben die Struktur $G(z) = \frac{1}{A(z)}$ mit $A(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - p_i)$)

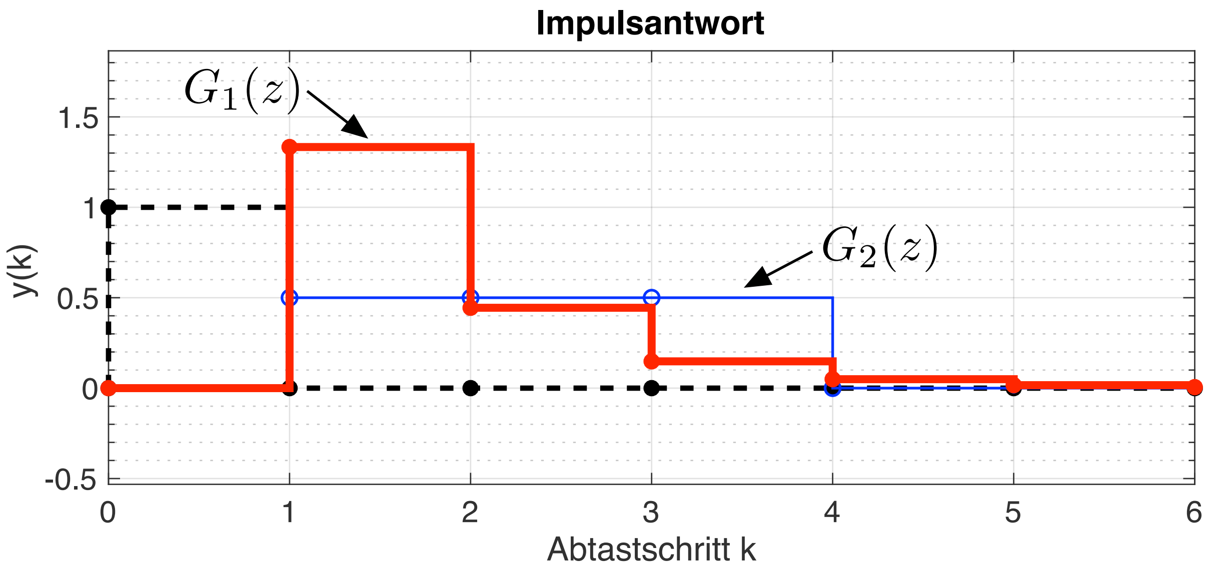


Sprung-antwort	Pole	
1	C	2
2	A	2
3	D	2
4	I	2
5	H	2
6	F	2



$\sum$ 12

Aufgabe 2: **FIR- und IIR-Systeme (12 Punkte)**



a) Impulsantworten von $G_1(z)$ und $G_2(z)$ siehe obiges Diagramm. Die Werte ergeben sich aus der Differenzbildung der Abtastwerte. 4

b) Welches System hat FIR bzw. IIR Verhalten:

- Die Impulsantwort von $G_1(z)$ nähert sich der Null asymptotisch (bzw. die Sprungantwort nähert sich asymptotisch einem Endwert), daraus folgt IIR-Verhalten.
- Die Impulsantwort von $G_2(z)$ fällt nach 4 Schritten exakt auf Null ab (bzw. die Spungantwort bleibt exakt konstant), daraus folgt FIR-Verhalten. 2

c) Begründung, ob es sich bei den 6 gegebenen Übertragungsfunktionen um $G_1(z)$, $G_2(z)$ oder keine von beiden handelt:

- $G_A(z)$: Hat Verstärkung 1, $G_1(z)$ und $G_2(z)$ haben Verstärkung 2 bzw. 1,5 $\Rightarrow$ Keine!
- $G_B(z)$: Hat Verstärkung 1,5, keine Pole (FIR) und ist nicht sprungfähig $\Rightarrow G_2(z)$
- $G_C(z)$: Hat Verstärkung 1, $G_1(z)$ und $G_2(z)$ haben Verstärkung 2 bzw. 1,5 $\Rightarrow$ Keine!
- $G_D(z)$: Hat Verstärkung 2, einen (stabilen) Pol (IIR) und ist nicht sprungfähig $\Rightarrow G_1(z)$
- $G_E(z)$: Hat Verstärkung 1,5, ist aber sprungfähig $\Rightarrow$ Keine!
- $G_F(z)$: Hat Verstärkung 2, hat aber einen instabilen Pol bei -3 $\Rightarrow$ Keine! 6

$\boxed{\sum 12}$

Aufgabe 3: Mittelwert-Filter (14 Punkte)

Gegeben ist folgende Ein- und Ausgangsbeziehung in diskreter Zeit:

$$y\left(k\right)=\frac{1}{3}\left(u\left(k+2\right)+u\left(k+1\right)+u\left(k\right)\right) \tag{2}$$

a) Nutzen Sie diese Beziehung, um die Übertragungsfunktion $\mathrm{G}(z)$ zu berechnen.
Antwort:

$$Y\left(z\right)=\frac{1}{3}\left(U\left(z\right)z^{0}+U\left(z\right)z^{1}+U\left(z\right)z^{2}\right) \tag{3}$$

$$G\left(z\right)=\frac{1}{3}\left(z^{2}+z^{1}+z^{0}\right) \tag{4}$$

$\boxed{2}$

b) Zeichnen Sie die Antwort $y(k)$ zu dem Eingangs $u(k)$ in Bild 2 ein.
Antwort: $\boxed{3}$

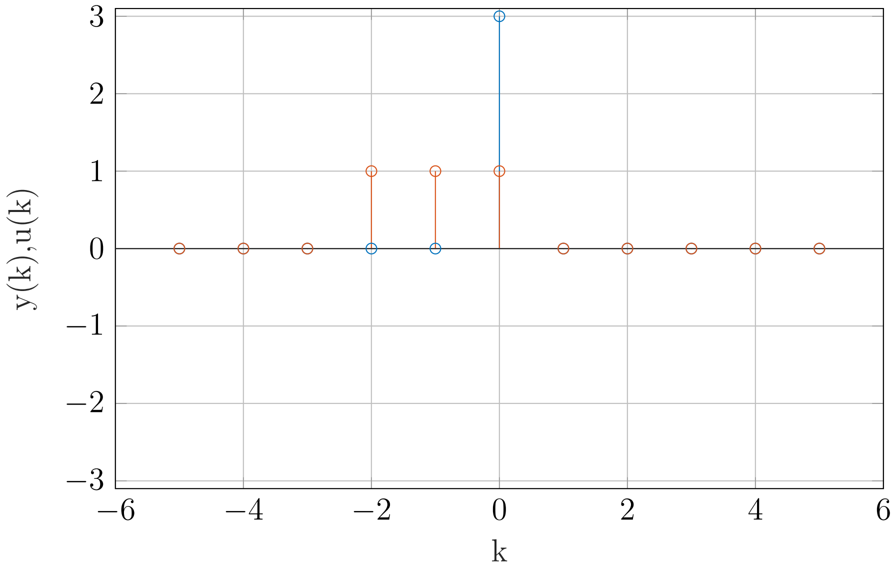


Bild 2: Eingang u(k): (○), Antwort y(k): (○)

c) Erstellen Sie die Übertragungsfunktion $G_d(z)$ durch Zeitverschiebung von $G(z)$ so, dass $G_d(z)$ keine Phasenverschiebung hat. Geben Sie eine Erklärung oder Berechnung zu Ihrer Antwort.
Hinweis: Sie können folgende Gleichung nutzen: $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$
Antwort:
Keine Phasenverschiebung bedeutet, dass sich die imaginären Anteile gegenseitig kürzen.
Mit dieser, oder ähnlicher Begründung reicht Gleichung (5), um die volle Punktzahl zu erzielen.

$$G_d(z) = G(z)z^{-1} = \frac{1}{3}\left(z^{-1} + 1 + z^1\right) \tag{5}$$
$$G_d\left(i\omega\right) = \frac{1}{3}\left(e^{-1i\omega T_0} + e^{0i\omega T_0} + e^{1i\omega T_0}\right) \tag{6}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\cos\left(\omega T_0\right) + i\sin\left(\omega T_0\right) + 1 + \cos\left(-\omega T_0\right) + i\sin\left(-\omega T_0\right)\right) \tag{7}$$
$$G_d\left(i\omega\right) = \frac{1}{3}\left(2\cos\left(\omega T_0\right) + 1\right) \tag{8}$$

4

d) Stellt die Übertragungsfunktion $G_d(z)$ zu ein kausales oder ein akausales System dar? Begründen Sie Ihre Antwort.
Antwort:
Akausal, denn es benötigt Werte aus der Zukunft $u(k+1)$. 2

e) Zeichnen Sie die Antwort $y_d(k)$ (von der Übertragungsfunktion $G_d(z)$) auf das Eingangssignal $u(k)$ in Bild 3 ein.
Antwort:

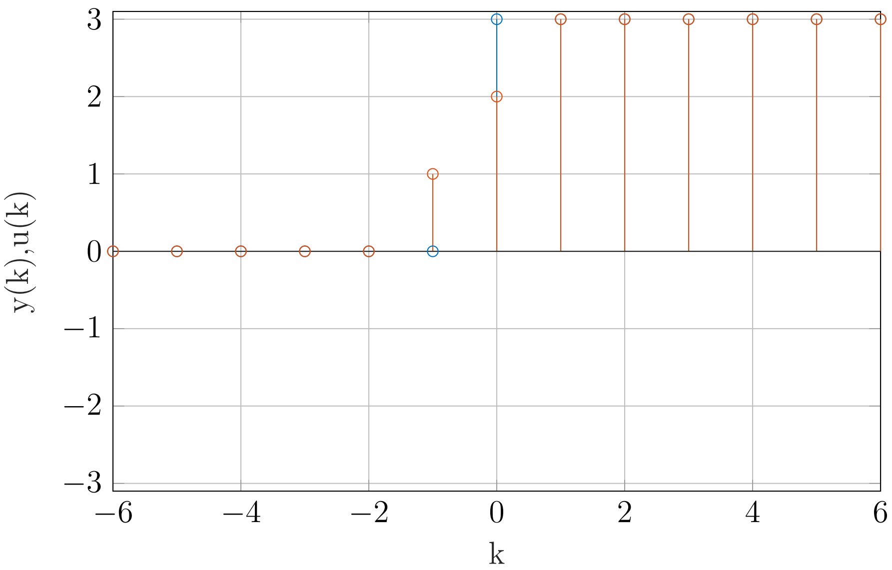


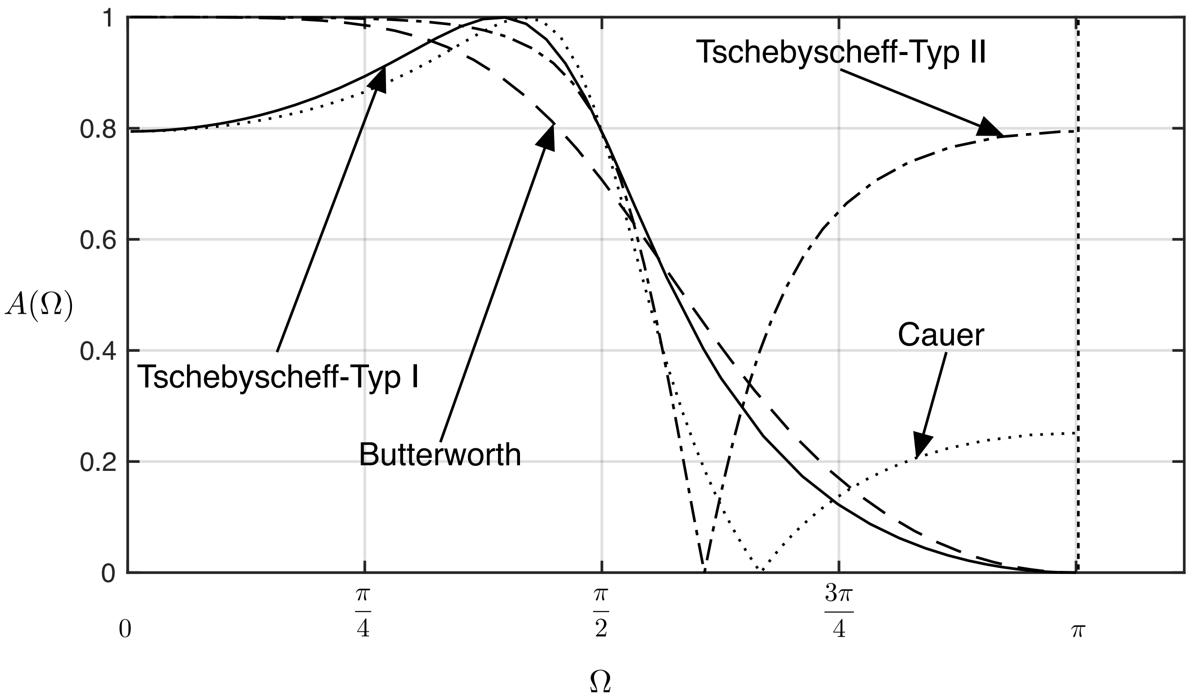
Bild 3: Eingang u(k): (○), Antwort y(k): (○)

3

$\sum 14$

Aufgabe 4: Filter und Konsorten (9 Punkte)

Gegeben ist folgender Amplitudengang eines Filters 2. Ordnung und einer normierten Eckfrequenz bei $\Omega_0 = \pi/2$.



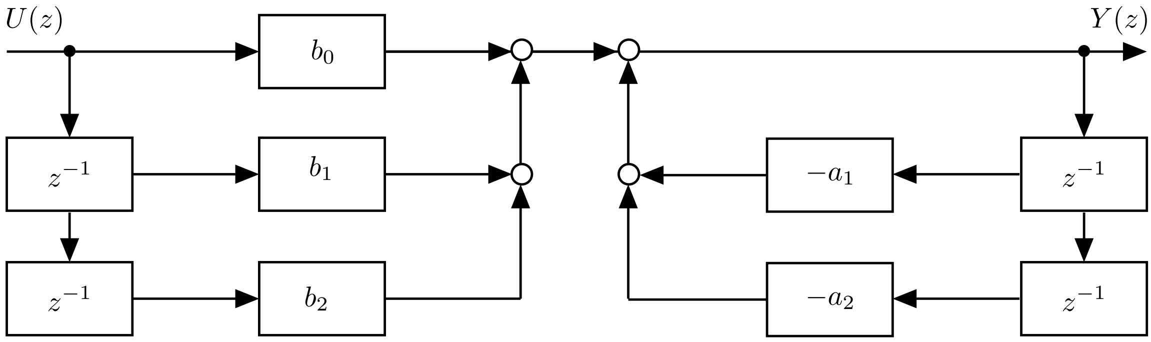
a) Um welchen Filtertypen handelt es sich hier (Bandpass, Bandsperre, Tiefpass oder Hochpass)?
Nur eine Eckfrequenz $\Rightarrow$ Tiefpass oder Hochpass.
Tiefe Frequenzen werden durchgelassen $\Rightarrow$ Tiefpass. 1

b) Benennen Sie den Filter (Butterworth, Cauer, Tschebyscheff-Typ I oder Tschebyscheff-Typ II).
Antwort siehe Bild. 1

c) Zeichnen Sie qualitativ die verbleibenden Filter (jeweils 2. Ordnung mit einer Eckfrequenz bei $\Omega_0 = \pi/2$) in den obigen Amplitudengang. Achte Sie darauf, dass die charakteristischen Eigenschaften jedes Filters gut zu erkennen sind. Machen Sie kenntlich, welcher Amplitudengang zu welchem Filter gehört.
Charakteristische Eigenschaften:
Tschebyscheff-Typ II $\Rightarrow$ Welle im Sperrbereich und Steilheit wie Tschebyscheff-Typ I 1

Cauer $\Rightarrow$ Welle im Durchlass- und Sperrbereich sowie steiler als Tschebyscheff 1
Butterworth$\Rightarrow$ Monotoner Amplitudengang sowie flacher als Tschebyscheff 1

d) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild eines allgemeinen IIR-Filters 2. Ordnung. Benutzen Sie hierzu nur Blöcke die aus Konstanten oder z^{-1} bestehen.



2

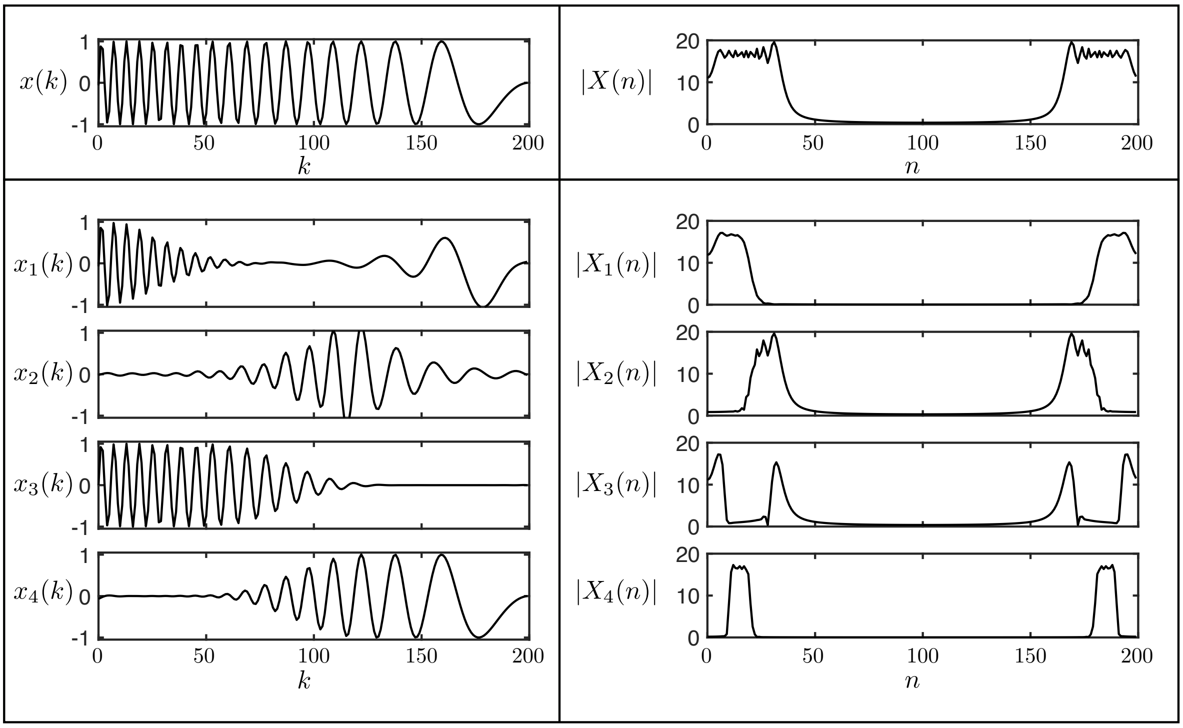
e) Geben Sie die Differenzengleichung zu Aufgabenteil d) an.
$y(k) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) - a_1y(k-1) - a_2y(k-2)$ 1

f) Wovon hängt die Stabilität des IIR-Filters aus Aufgabenteil d) / e) ab (kurze Antwort)?
Die Stabilität eines Systems hängt von den Polstellen der Übertragungsfunktion ab. Diese werden durch die a-Koeffizienten bestimmt. 1

$\sum 9$

Aufgabe 5: DFT (6 Punkte)

Gegeben ist ein sinusförmiges Signal $x(k)$, welches die Frequenz über die Zeit linear verändert. Die Absolutwerte der DFT ($|X(n)|$) sind ebenfalls gezeigt.



Im Folgenden wurde das Signbal $x(k)$ mit verschiedenen Filtertypen gefiltert. Das Ergebnis sind die Signale $x_1(k)$ - $x_4(k)$ sowie deren Absolutwerte der DFT transformierten.

a) Ordnen Sie jedem Signal $x_i(k)$ den passenden Verlauf der Absolutwerte der DFT $|X_j(n)|$ zu.

Signal	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$
Zugehöriges $\|X_j(n)\|$	$\|X_3(n)\|$	$\|X_4(n)\|$	$\|X_2(n)\|$	$\|X_1(n)\|$

4

b) Das Signal $x(k)$ hat eine sich zeitlich verändernde Frequenz. Welche Möglichkeiten gibt es solche Signale zu analysieren? Nennen Sie mindestens eine Vorgehensweise und erläutern Sie diese in **wenigen** Sätzen.

Kurzzeit DFT:
Gefensterte DFT: Breite des Fensters bestimmt zeitliche Auflösung und damit implizit auch die Frequenzgenauigkeit. Die Breite ist ein vom Benutzer vorzugebender Parameter und sollte sich an der erwarteten Änderungsrate der Signalcharakteristik orientieren.
Die DFT hängt nun nicht mehr nur von der Frequenz n ab, sondern auch noch von einer zweiten Variablen: der Zeitverschiebung des Fensters. Sie gibt den Zeitpunkt an, für den die Kurzzeit-DFT gültig ist.

2

$\sum 6$

Aufgabe 6: Statistik

a) Skizzieren Sie grob die Höhenlinien der zweidimensionalen Normalverteilung für die gegebenen Signale in Bild 1.

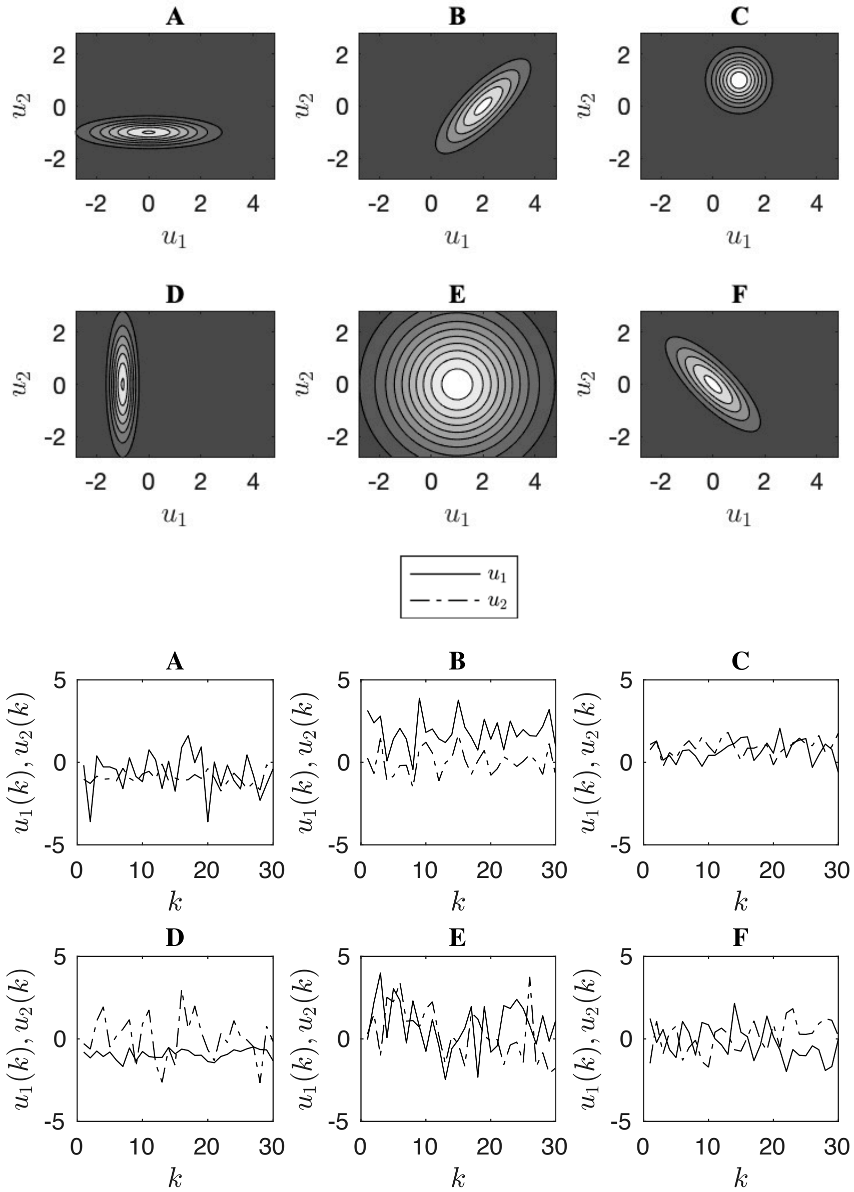


Bild 4: Korrekte Höhenlinien der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

$\boxed{6}$

b) Eine zweidimensionale Normalverteilung hat perfekt kreisförmige Höhenlinien. Welche Eigenschaften besitzt diese Verteilung?

Antwort:

Die Wahrscheinlichkeiten sind unabhängig voneinander, daher sind die Signale unkorreliert. $\rho_{u_1,u_2} = 0$ $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 7}$