Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

31. August 2016

Name:	
Matr.-Nr.:	
Note	

Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Gesamt
Soll:	8	12	18	10	12	60
Ist:						

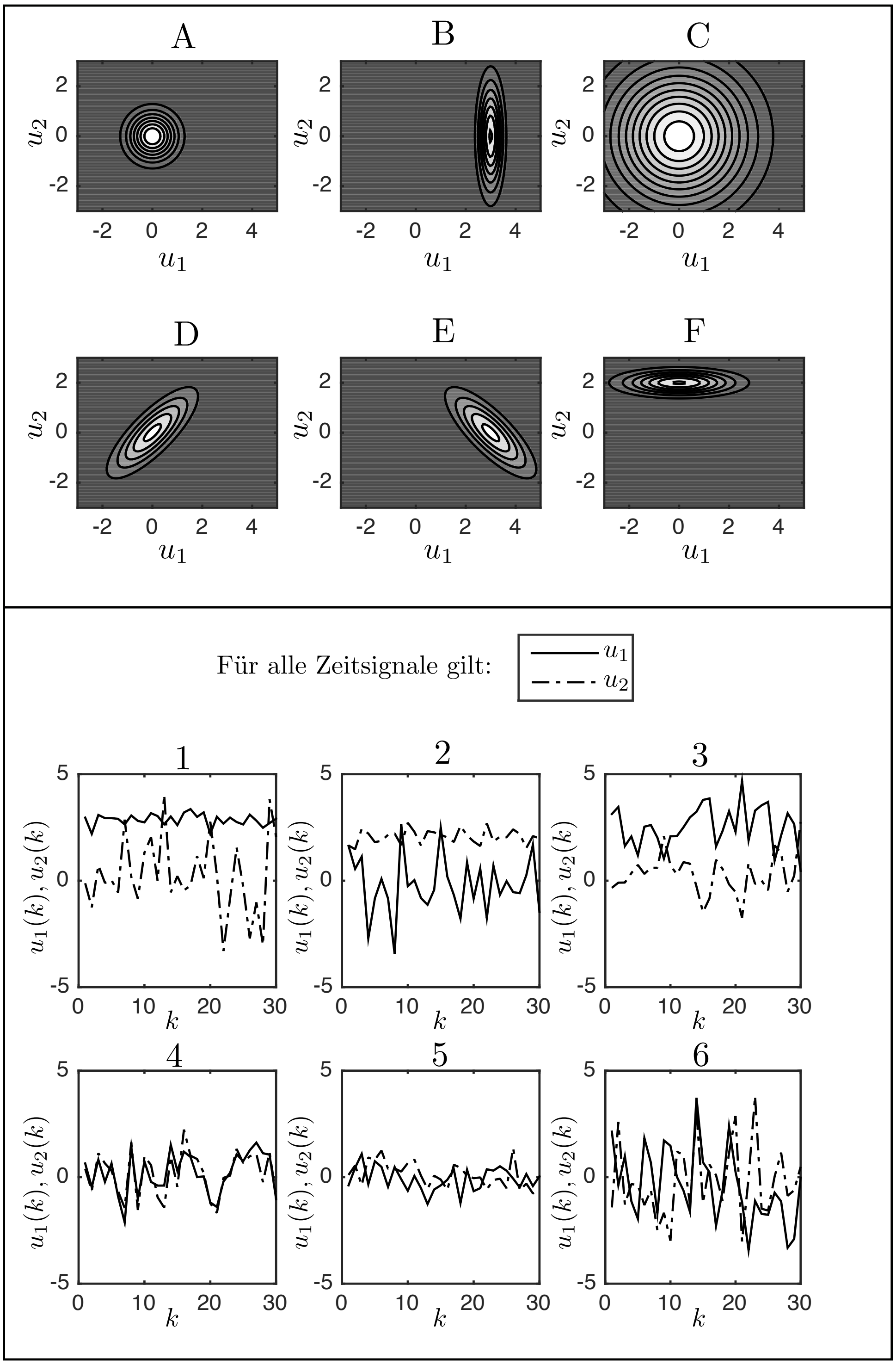
Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeitsverteilung

a) Ordnen Sie den zweidimensionalen Normalverteilungen (oben) jeweils zwei Signale (unten) zu. Große Werte der Wahrscheinlichkeitsdichte sind hell, kleine Werte sind dunkel gekennzeichnet.

b) Welche Eigenschaft haben zwei Signale, wenn deren zweidimensionale Normalverteilung exakt kreisförmige Höhenlinien besitzt?



Aufgabe 2: Zeitdiskretes System

Gegeben ist das zeitdiskrete System:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_2 z^{-2}}{1 + a_2 z^{-2}} \tag{1}$$

Die Abtastzeit des Systems liegt bei T_0.

Hinweis: Nutzen Sie nur in den Aufgabenteilen c und g die folgenden Koeffizienten des Systems:

$$b_0 = 0 \quad ; \quad b_2 = 1.5 \quad ; \quad a_2 = -0.25\,. \tag{2}$$

a) Zeichnen Sie das zugehörige Blockschaltbild für $G(z)$.

b) Transformieren Sie die Übertragungsfunktion in den Zeitbereich.

c) Berechnen Sie die Sprungantwort für $k = 0, 1, \ldots, 4$ mit $y(k) = 0$ für $k < 0$ (mit Koeffizienten aus (2)). Runden Sie wenn nötig auf drei Nachkommastellen. Welche Besonderheit tritt hier auf (ein Satz)?

d) Die Abtastzeit soll im Folgenden verändert werden. Hierzu wird $T_\mathrm{n} = 2T_0$ gesetzt. Wie wird dieser Vorgang genannt?

e) Welche Probleme können bei Vergrößerung der Abtastzeit auftreten?

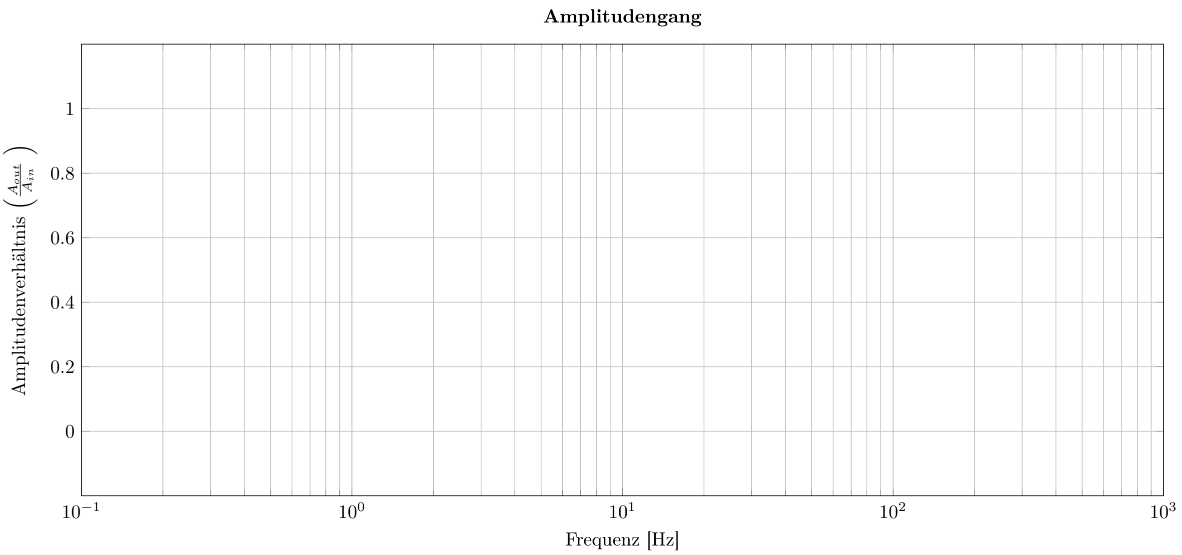
f) Wie lautet die neue Übertragungsfunktion $G_\mathrm{n}(z)$ mit der doppelten Abtastzeit?

g) Berechnen Sie die Sprungantwort für $k = 0, 1, \ldots, 2$ mit $y(k) = 0$ für $k < 0$ (mit Koeffizienten aus (2)). Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil c mit einem Satz?

Aufgabe 3: Filter

Hinweise: Aufgabenteil c) ist komplett unabhängig lösbar!

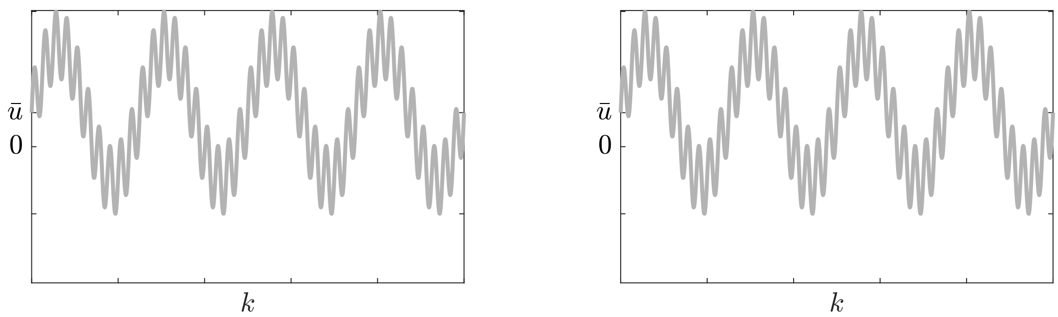
a) Es sollen zwei Filter G_{BS} and G_{BP} miteinander verglichen werden. Bei G_{BS} handelt es sich um ein Band-Stopp Filter, bei G_{BP} um ein Band-Pass Filter. Die Grenzfrequenzen des ersten Filters G_{BS} sind $f_{BS1} = 10$ Hz und $f_{BS2} = 50$ Hz. $f_{BP1} = 20$ Hz und $f_{BP2} = 60$ Hz sind die entsprechenden Grenzfrequenzen des zweiten Filters G_{BP}. Zeichnen Sie die **idealisierten** Amplitudengänge der beiden Filter G_{BS} und G_{BP} in das unten stehende Diagramm und kennzeichnen Sie, welcher Amplitudengang zu Filter G_{BS} und welcher zu Filter G_{BP} gehört.



b) Nun soll das Signal

$$u(k) = \sin(2\pi \cdot 4\text{Hz}\ kT_0) + 0.5\sin(2\pi \cdot 40\text{Hz}\ kT_0) + \bar{u}$$

mit den idealisierten Filtern G_{BS} und G_{BP} gefiltert werden. Zeichnen Sie die gefilterten Signale $y_{BS}(k)$ und $y_{BP}(k)$ *qualitativ*. Nutzen Sie dazu unten stehende Bilder. Gehen Sie davon aus, dass die Filter eingeschwungen sind. $\bar{u}$ kennzeichnet den Mittelwert des Signals $u(k)$. Die Abtastfrequenz beträgt $f_0 = 1000$ Hz.

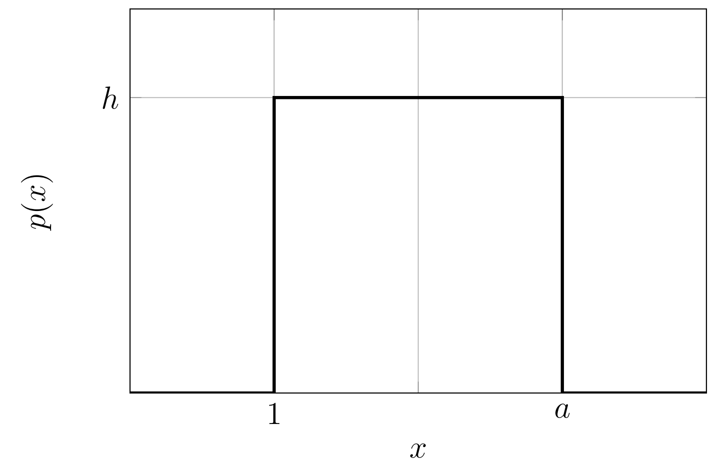


(a) $y_{BS}(k)$ nach Filterung von $u(k)$ mit G_{BS}. (b) $y_{BP}(k)$ nach Filterung von $u(k)$ mit G_{BP}.

c) Im folgenden sind Eigenschaften aufgelistet, die auf IIR (Infinite Impulse Response) und/oder FIR (Finite Impulse Response) Filter zutreffen können. Das heißt eine Eigenschaft kann entweder einem oder beiden Filtertypen zugeordnet werden. Ordnen Sie die Eigenschaften den korrekten Filtertypen zu.

- Ein Integrator kann realisiert werden
- Ist ein dynamisches System
- Ein äquivalentes zeit-kontinuierliches System existiert
- Kann einen Pol bei $s = 0$ besitzen
- Kann einen Pol bei $z = 0$ besitzen

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsdichte (10 Punkte)



a) Benennen Sie die dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

b) Welche Höhe h hat die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, wenn die Konstante a gegeben ist?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert der dargestellten Dichtefunktion in Abhängigkeit von der Konstanten a.

d) Berechnen Sie die Varianz der dargestellten Dichtefunktion für $a = 2$. *Hinweis: Für eine Dichtefunktion $p(x)$ lautet die Formel für die Varianz der Zufallsvariablen:*

$$\mathrm{var}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}\{x\})^2 \, p(x) dx$$

Aufgabe 5: Eigenschaften diskreter System (12 Punkte)

Die folgenden Übertragungsfunktionen im z-Bereich sind gegeben:

$$G_1 = \frac{1+z+z^2}{z} \qquad G_2 = \frac{1+z+z^2}{2+z} \qquad G_3 = \frac{1}{z^{-1}-\frac{1}{2}}$$

$$G_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad G_5 = \frac{z^2-z+\frac{1}{4}}{z-\frac{1}{2}} \qquad G_6 = \frac{z-2}{z-0.5}$$

Markieren Sie zutreffende Eigenschaften in der Tabelle.

Übertragungsfunktion	FIR System	stabil	kausal	linear	Allpass
G_1					
G_2					
G_3					
G_4					
G_5					
G_6					

Für jede Übertragungsfunktion können 2 Punkte erreicht werden. Je falschem Kreuz wird 1 Punkt abgezogen und es können keine negativen Punkte in jeder Zeile erreicht werden.

Lösungen:

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeitsverteilung (8 Punkte)

a) Folgende Zuordnung gilt:

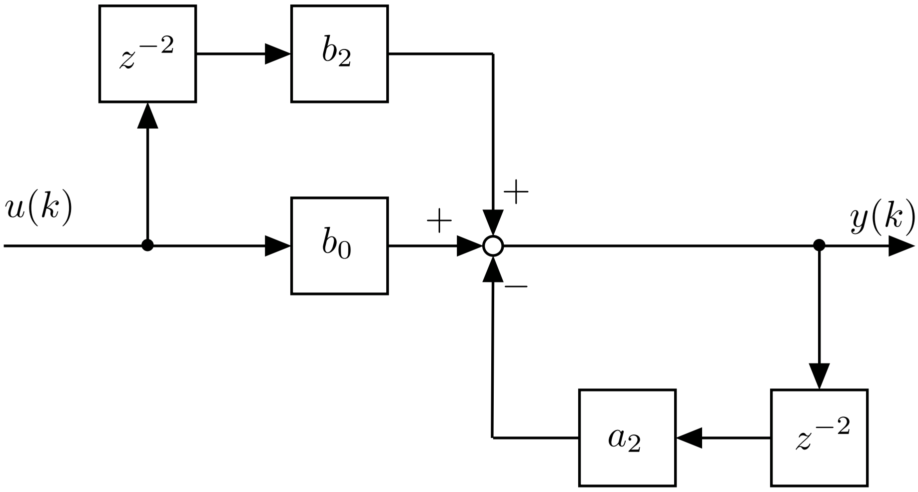
Verteilung:	A	B	C	D	E	F
Signale:	5	1	6	4	3	2

6

b) Die Wahrscheinlichkeiten sind unabhängig voneinander, daher sind die Signale zueinander unkorreliert $\rho_{u_1,u_2} = 0$ 2

Aufgabe 2: Zeitdiskretes System (14 Punkte)

a) Blockschaltbild des Originalsystems: $\boxed{3}$



b) Transformieren Sie die Übertragungsfunktion in den Zeitbereich.

$$U(z)\left(b_0 + b_2 z^{-2}\right) = Y(z)\left(1 + a_2 z^{-2}\right) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad b_0 u(k) + b_2 u(k-2) = y(k) + a_2 y(k-2) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad y(k) = b_0 u(k) + b_2 u(k-2) - a_2 y(k-2) \tag{4}$$

$\boxed{1}$

c) Berechnen Sie die Sprungantwort für $k = 0, 1, \ldots, 6$. Welche Besonderheit tritt hier auf?

$k = 0$

$$y(0) = b_0 \underbrace{\sigma(0)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(-2)}_{=0} - a_2 \underbrace{y(-2)}_{=0} \tag{5}$$

$$y(0) = b_0 \tag{6}$$

$$y(0) = 0 \tag{7}$$

$k = 1$

$$y(1) = b_0 \underbrace{\sigma(1)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(-1)}_{=0} - a_2 \underbrace{y(-1)}_{=0} \tag{8}$$

$$y(1) = b_0 \tag{9}$$

$$y(1) = 0 \tag{10}$$

$k = 2$

$$y(2) = b_0 \underbrace{\sigma(2)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(0)}_{=1} - a_2 \underbrace{y(0)}_{=b_0} \tag{11}$$

$$y(2) = b_0 + b_2 - a_2 b_0 \tag{12}$$

$$y(2) = 0 + 1.5 - (-0.25) \cdot 0 = 1.5 \tag{13}$$

$$k = 3 \qquad y(3) = b_0 \underbrace{\sigma(3)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(1)}_{=1} - a_2 \underbrace{y(1)}_{=b_0} \tag{14}$$

$$y(3) = b_0 + b_2 - a_2 b_0 \tag{15}$$

$$y(3) = 0 + 1.5 - (-0.25) \cdot 0 = 1.5 \tag{16}$$

$$k = 4 \qquad y(4) = b_0 \underbrace{\sigma(4)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(2)}_{=1} - a_2 \underbrace{y(2)}_{=b_0+b_2-a_2b_0} \tag{17}$$

$$y(4) = b_0 + b_2 - a_2 \left(b_0 + b_2 - a_2 b_0\right) \tag{18}$$

$$y(4) = 0 + 1.5 - (-0.25)\left(0 + 1.5 - (-0.25) \cdot 0\right) = 1.875 \tag{19}$$

Es fällt auf, dass die Sprungantwort des Systems jeweils für zwei Zeitschritte konstant bleibt und dann erst wieder springt. $\boxed{2}$

d) Die Abtastzeit soll im Folgenden verändert werden. Hierzu wird $T_\mathrm{n} = 2T_0$ gesetzt. Wie wird dieser Vorgang genannt?

Downsampling $\boxed{1}$

e) Welche Probleme können bei der Vergrößerung der Abtastzeit auftreten?

Durch Downsampling wird die Abtastfrequenz verringert, dadurch kann Aliasing entstehen. $\boxed{1}$

f) Wie lautet die neue Übertragungsfunktion $G_\mathrm{n}(z)$ mit der doppelten Abtastzeit?

Durch Verdopplung der Abtastzeit $T_\mathrm{n} = 2T_0$ ergibt sich

$$z = e^{sT_0} \tag{20}$$

$$z_\mathrm{n} = e^{sT_{0,\mathrm{n}}} \tag{21}$$

$$z_\mathrm{n} = e^{s2T_0} \tag{22}$$

$$\Rightarrow \quad z_\mathrm{n} = z^2 \tag{23}$$

$$\Rightarrow \quad z_\mathrm{n}^{\frac{1}{2}} = z \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

Für die Übertragungsfunktion folgt:

$$G_\mathrm{n}(z_\mathrm{n}) = \frac{b_0 + b_2 z_\mathrm{n}^{\frac{1}{2}\cdot(-2)}}{1 + a_2 z_\mathrm{n}^{\frac{1}{2}\cdot(-2)}} \tag{26}$$

$$G_\mathrm{n}(z_\mathrm{n}) = \frac{b_0 + b_2 z_\mathrm{n}^{-1}}{1 + a_2 z_\mathrm{n}^{-1}} \tag{27}$$

$\boxed{2}$

g) Berechnen Sie die Sprungantwort von $G_\mathrm{n}(z)$für $k = 0, 1, \ldots, 3$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil c) mit einem Satz?

$$U(z)\left(b_0 + b_2 z^{-1}\right) = Y(z)\left(1 + a_2 z^{-1}\right) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad b_0 u(k) + b_2 u(k-1) = y(k) + a_2 y(k-1) \tag{28}$$

$$\Rightarrow \quad y(k) = b_0 u(k) + b_2 u(k-1) - a_2 y(k-1) \tag{29}$$

$$k = 0 \qquad y(0) = b_0 \underbrace{\sigma(0)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(-1)}_{=0} - a_2 \underbrace{y(-1)}_{=0} \tag{30}$$

$$y(0) = b_0 \tag{31}$$

$$y(0) = 0 \tag{32}$$

$$k = 1 \qquad y(1) = b_0 \underbrace{\sigma(1)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(0)}_{=1} - a_2 \underbrace{y(0)}_{=b_0} \tag{33}$$

$$y(1) = b_0 + b_2 - a_2 b_0 \tag{34}$$

$$y(1) = 0 + 1.5 - (-0.25) \cdot 0 = 1.5 \tag{35}$$

$$k = 2 \qquad y(2) = b_0 \underbrace{\sigma(2)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(1)}_{=1} - a_2 \underbrace{y(1)}_{=b_2 - a_2 b_0} \tag{36}$$

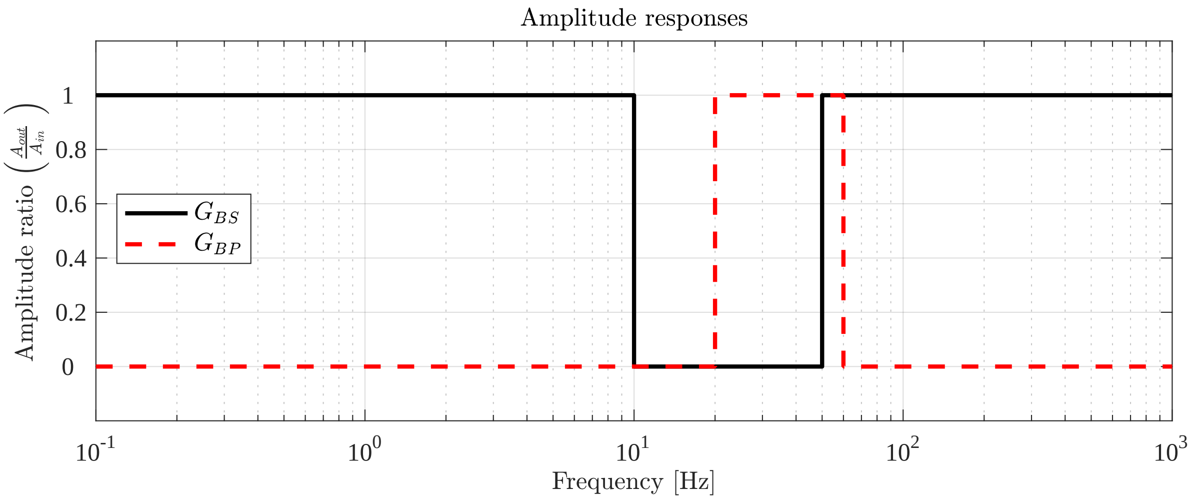
$$y(2) = b_0 + b_2 - a_2 \left(b_0 + b_2 - a_2 b_0\right) \tag{37}$$

$$y(2) = 0 + 1.5 - (-0.25)\left(0 + 1.5 - (-0.25) \cdot 0\right) = 1.875 \tag{38}$$

Es fällt auf, dass die Sprungantwort des Systems jeweils für zwei Zeitschritte konstant bleibt und dann erst wieder springt. $\boxed{2}$

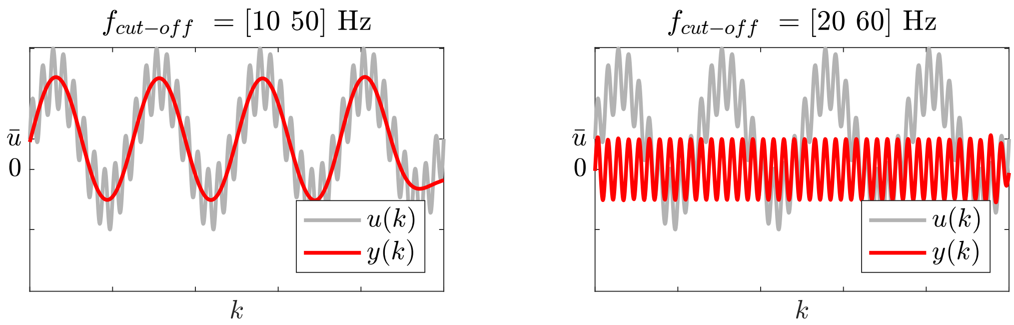
Aufgabe 3: Filter

a)



6

b)



(a) Sketch the output $y(k)$ qualitatively, if this sine wave is sent through filter G_{BS}.

(b) Sketch the output $y(k)$ qualitatively, if this sine wave is sent through filter G_{BP}.

6

c)
- Ein Integrator kann realisiert werden → IIR
- Ist ein dynamisches System → IIR and FIR
- Ein äquivalentes zeit-kontinuierliches System existiert → IIR
- Kann einen Pol bei $s = 0$ besitzen → IIR
- Kann einen Pol bei $z = 0$ besitzen → FIR

6

$\sum$ 18

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsdichte

a) Gleichverteilung $\boxed{1}$

b) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \tag{39}$$

daher gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = h \cdot (a-1) = 1 \tag{40}$$

und damit

$$h = \frac{1}{a-1} \tag{41}$$

$\boxed{2}$

c) Der Erwartungswert einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion berechnet sich zu

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{1}^{a} xhdx = h\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^a = \frac{1}{2}\frac{a^2-1}{a-1} = \frac{1+a}{2} \tag{42}$$

$\boxed{3}$

d) Für $a = 2$ gilt $h = 1$ und $E\{x\} = 1$. Die Varianz berechnet sich dann als

$$\begin{aligned} var\{x\} &= \int_{1}^{2} (x - E\{x\})^2\, hdx = h\int_{1}^{2} x^2 - 2xE\{x\} + E\{x\}^2 dx && (43)\\ &= h\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2E\{x\} + xE\{x\}^2\right]_1^2 && (44)\\ &= 1\left[\frac{8}{3} - 4 + 2 - \frac{1}{3} + 2 - 1\right] = \frac{4}{3}. && (45)\end{aligned}$$

$\boxed{4}$

$\boxed{\sum 10}$

Aufgabe 5: Eigenschaften diskreter System

Übertragungsfunktion	FIR System	stabil	kausal	linear	Allpass
G_1	x	x		x	
G_2				x	
G_3			x	x	
G_4		x	x	x	
G_5	x	x		x	
G_6		x	x	x	x

$\boxed{\sum 12}$