Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

11.03.2020

Name:	
Mat.-Nr.	
Note:	

Aufgabe:	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Punkte:	9	12	12	13	14	60
Erreicht:						

Dauer der Klausur: 2 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Quantisierung (9 Punkte)

Für die Quantisierung stehen hier zwei verschiedenen AD-Wandler zur Auswahl welche die realen Werte auf die nächste Quantisierungsstufen *abrunden*. Die Eckdaten hierfür lauten wie folgt:

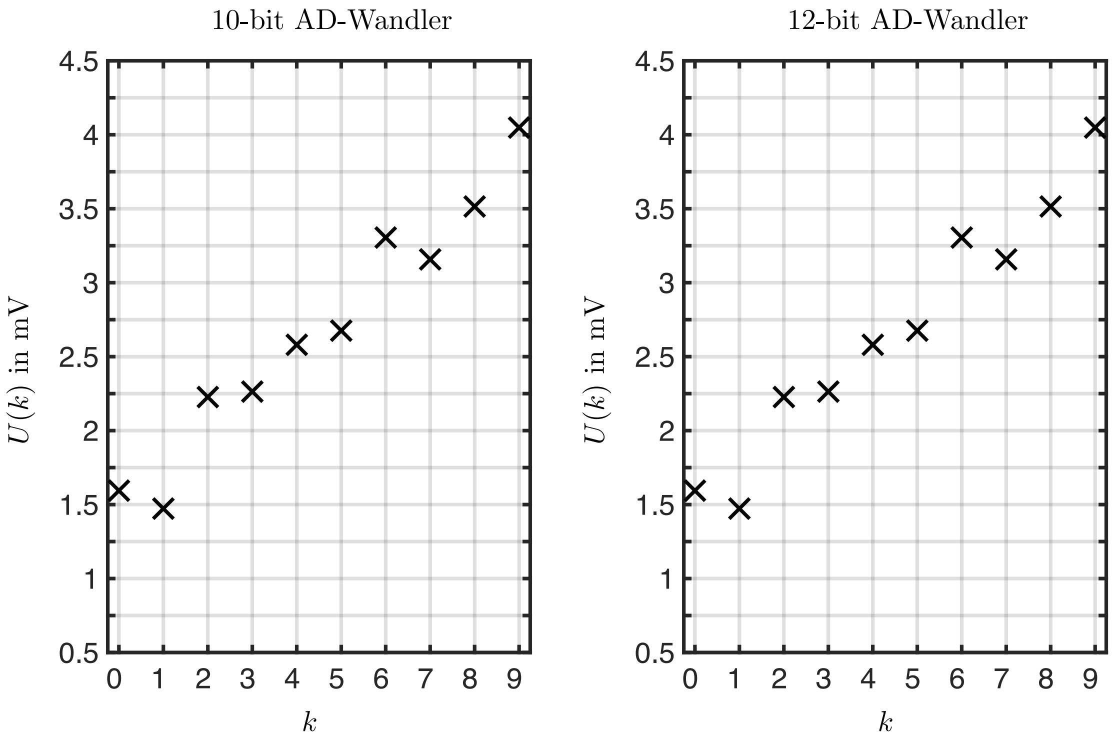
	10-bit AD-Wandler		**12-bit AD-Wandler**	
Abtastfrequenz:	$f_0 = 100$	Hz	$f_0 = 100$	Hz
Auflösung:	10	bit	12	bit
Messbereich:	$U_{\text{range}} = 0 \ldots 1024$	mV	$U_{\text{range}} = 0 \ldots 1024$	mV

a) Berechnen Sie aus den gegebenen Daten die Schrittweite ΔU sowie den maximalen Quantisierungsfehler $e_{\text{Q max}}$ für beide AD-Wandler.

b) Wie nennt man das Fehlersignal $(U(k) - U_{\text{Q}}(k),\ k = 1, \ldots, N)$, welches durch Quantisierung auftritt?

c) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat der Fehler, welcher durch die Quantisierung eines gleichverteilten Signals entsteht?

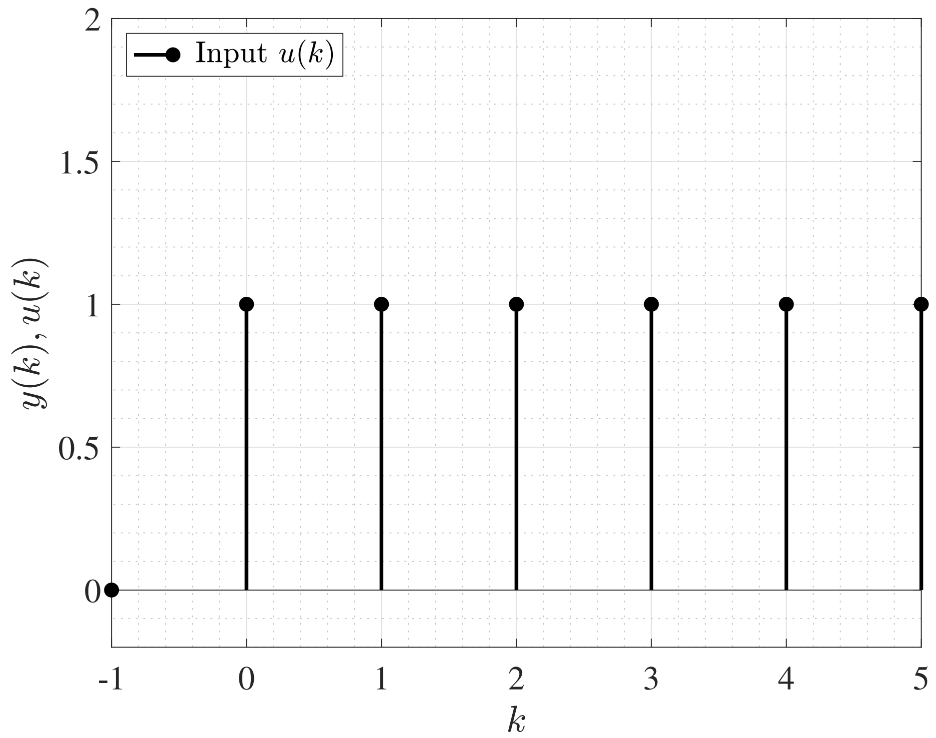
d) Nun soll die nachfolgende Messwertfolge einer *verrauschten* Rampe $U(k)$ quantisiert werden. Skizzieren Sie das quantisierte Signal $\text{Q}(k)$ mit einem Halteglied 0-ter Ordnung in das entsprechende Diagramm.



Aufgabe 2: Zeitdiskrete Systeme (12 Punkte)

Ein System mit dem Ausgang $y(k) = b_0 \cdot u(k) - a_1 \cdot y(k-2)$ ist gegeben mit $a_1 = -1$ und $b_0 = 0.3$.

a) Berechnen Sie die Wertefolge des Systemausgangs mit dem gegebenen Eingangssignal für $k = 0, 1, ..., 5$. Skizzieren Sie die Ergebnisse in der Abbildung. Nutzen Sie $y(k) = 0$ für alle $k < 0$ als Anfangsbedingung.



b) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Systems.

c) Berechnen Sie die Pole des Systems.

d) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ☐ Das System ist stabil.
- ☐ Das System ist instabil.
- ☐ Das System ist grenzstabil.

e) Wie kann man das gegebene System modifizieren, damit die beiden nicht angekreuzten Aussagen aus Teil d) zutreffen?

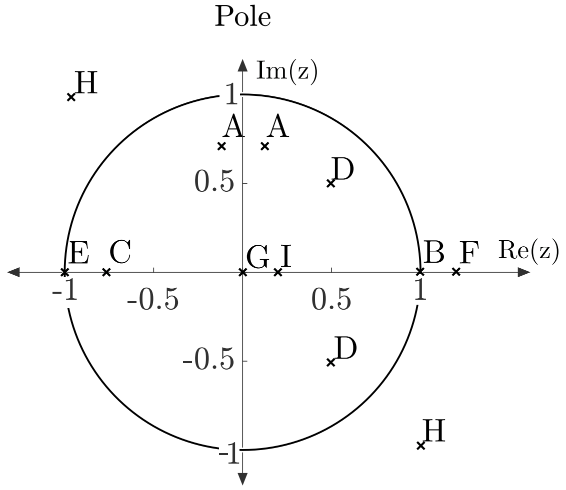
f) Nehmen Sie an, dass $a_1 = -0,5$ ist. Berechnen Sie den Endwert der *Impuls*antwort.

Aufgabe 3: Sprungantworten (12 Punkte)

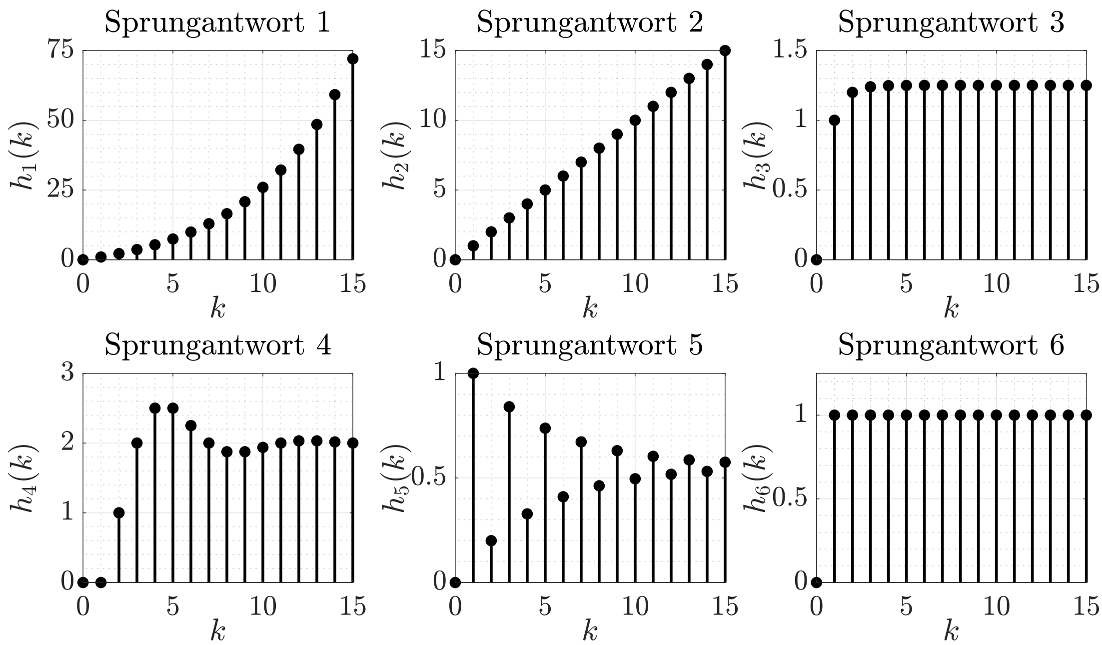
Gegeben sind die Lagen der Pole von 9 unterschiedlichen Systemen (A-I) im Pol/Nullstellen-Diagramm und 6 unterschiedliche Sprungantworten (1-6).

Ordnen Sie die Pole den Sprungantworten in der gegebenen Tabelle richtig zu.

(Hinweis: Drei Pollagen sind keiner Sprungantwort zurechenbar. Alle Übertragungsfunktion haben die Struktur $G(z) = \frac{1}{A(z)}$ mit $A(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - p_i)$)

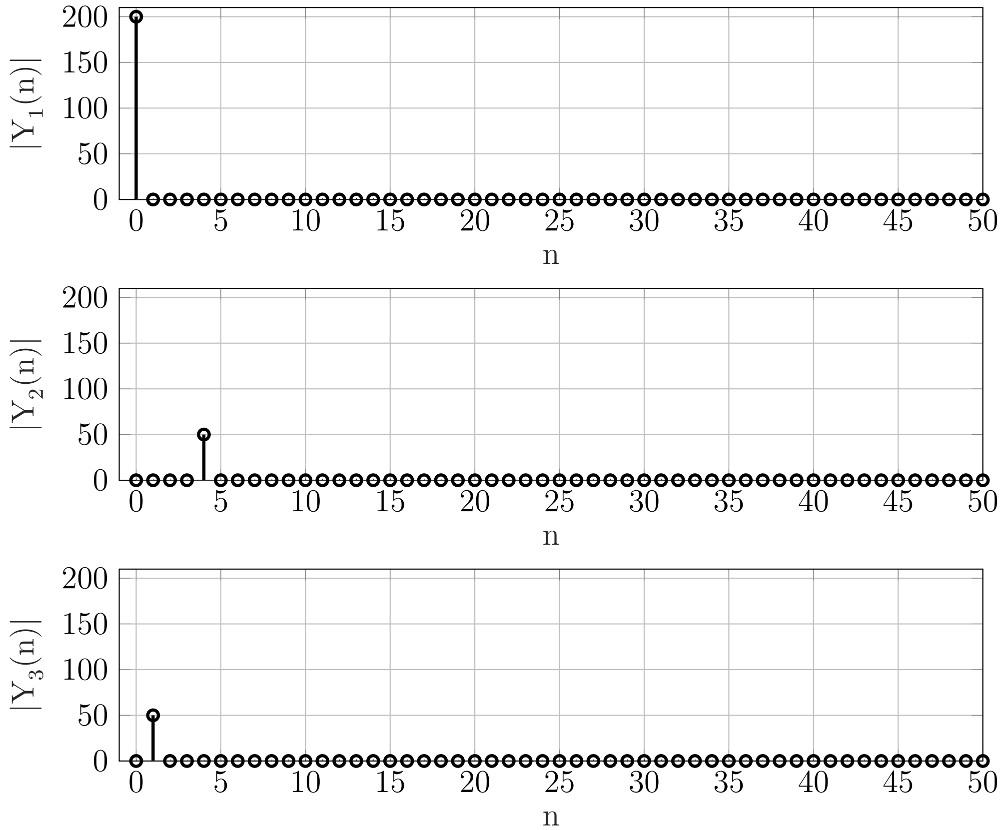


Sprung-antwort	Pole
1	
2	
3	
4	
5	
6	



Aufgabe 4: DFT (13 Punkte)

Im Folgenden sehen Sie die DFT Ergebnisse (linke Hälfte des Spektrums) von verschiedenen Signalen.
Hinweis: $|Y(n)| = \frac{N}{2} \cdot A$ *wenn* A *die Amplitude der Schwingung ist.*
Bei $\omega = 0$ *gilt:* $|Y(n)| = N \cdot A$.

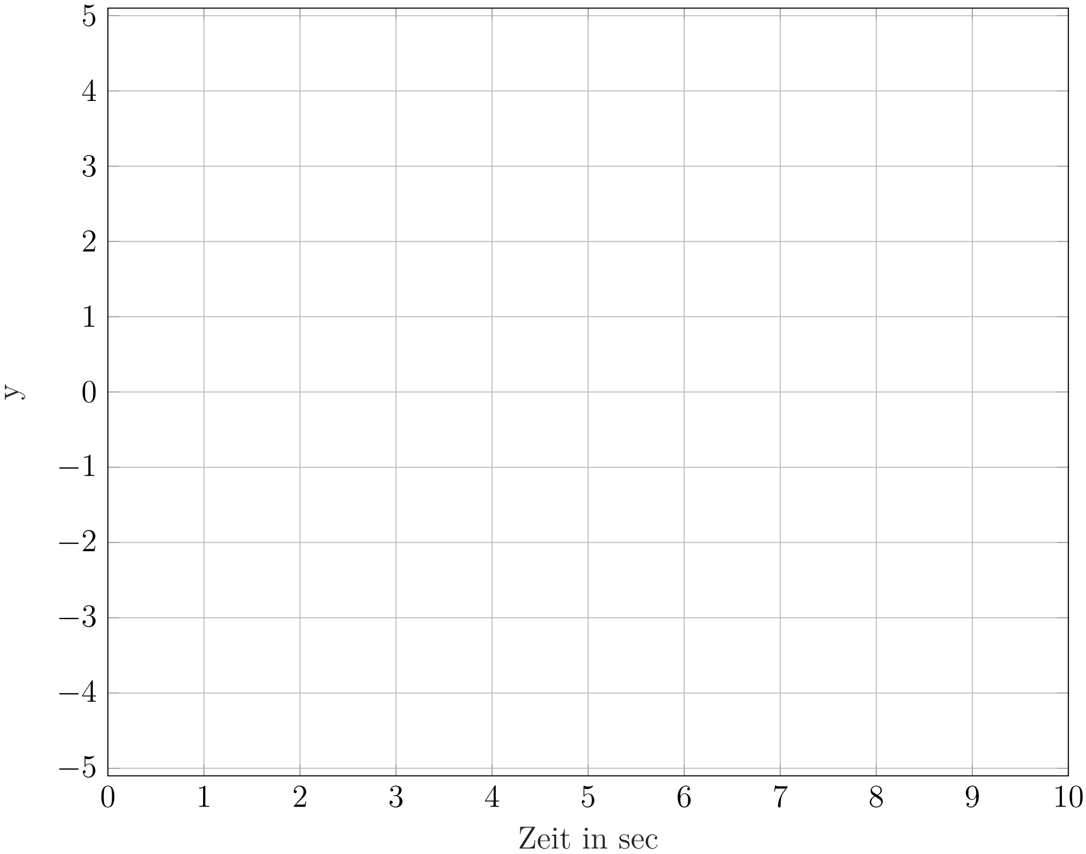


Die Signale wurden mit einer Abtastzeit von 0.1 sec im Zeitraum von 0 sec bis 9,9 sec abgetastet (erster Abtastschritt bei 0 sec).

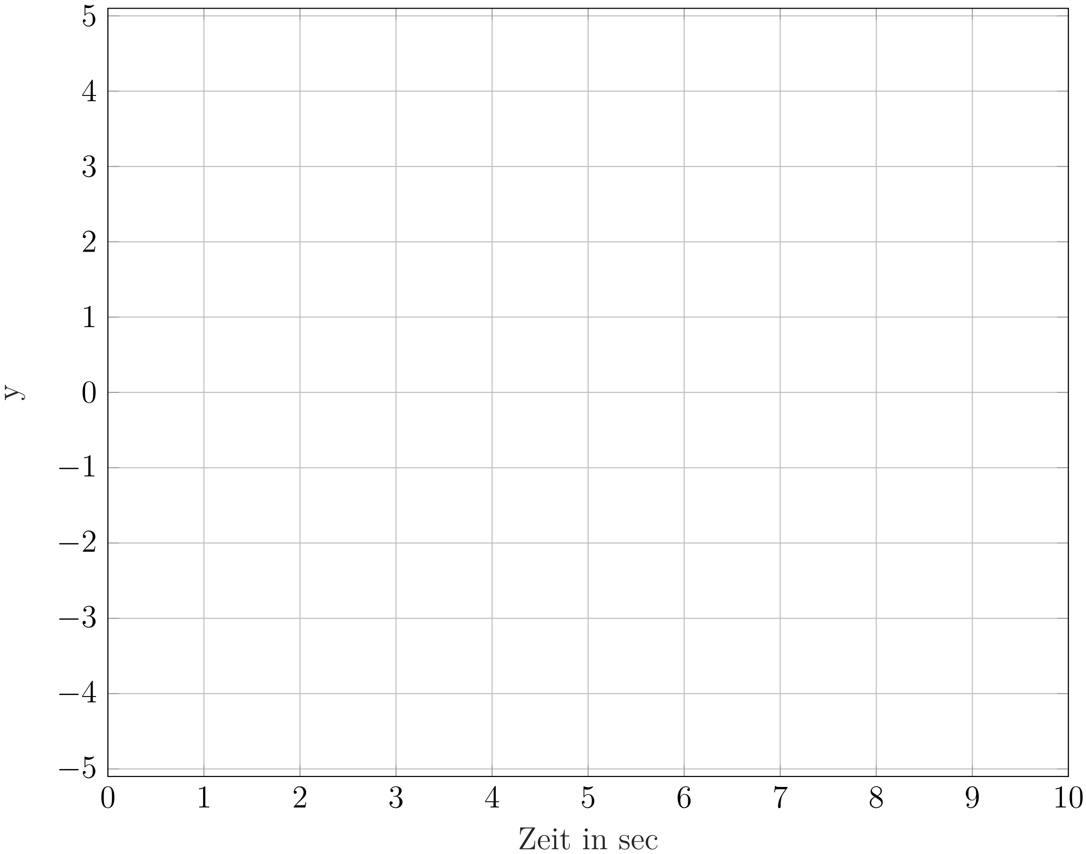
a) Was ist die Abtastfrequenz f_0?

b) Bestimmen sie N, wenn N die Anzahl der Abtastschritte ist.?

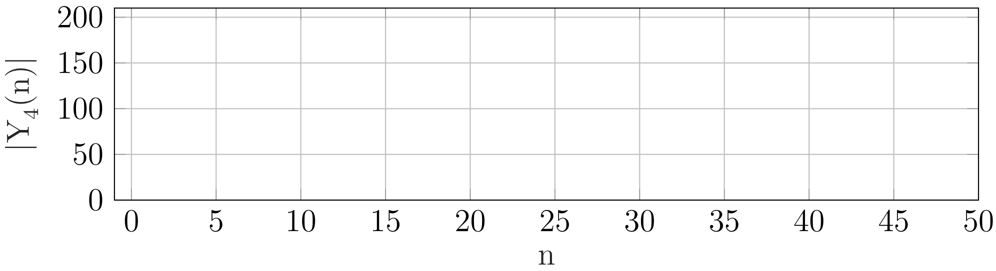
c) Zeichnen Sie die Signale $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ den oben stehenden Diagrammen entsprechend in das folgende leere Diagramm ein. Achten sie dabei darauf, dass die Linien der Signale gut zu unterscheiden und eindeutig zugeordnet sind.



d) Zeichnen Sie $y_4(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ in das folgende leere Diagramm ein.



e) Tragen Sie nun das Ergebnis der DFT (nur die linke Seite des Spektrums) $|Y_4(n)|$ von dem vorhin gezeichneten Signal $y_4(t)$ in das folgende Diagramm ein.



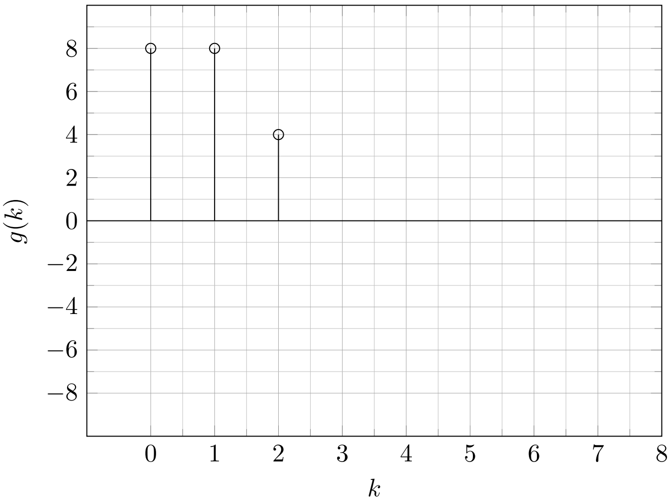
Aufgabe 5: Lineare Filter (14 Punkte)

a) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_1(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1}. \tag{1}$$

Berechnen Sie die zugehörige Differenzengleichung.

b) Bestimmen Sie aus dem dargestellten Teil der Impulsantwort die Koeffizienten b_0, b_1 und a_1 von $G_1(z)$.



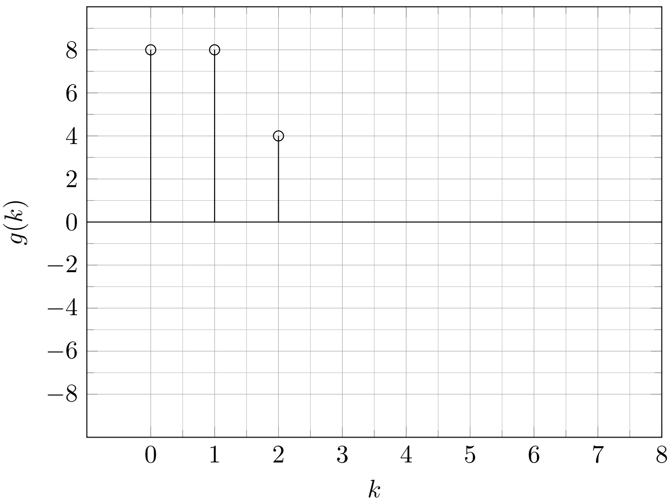
c) Zeichnen Sie die nächsten 4 Werte der Impulsantwort von $G_1(z)$ in das Diagramm ein.

d) Nun sei die Übertragungsfunktion

$$G_2(z) = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \tag{2}$$

gegeben. Berechnen Sie die diskrete Differenzengleichung.

e) Bestimmen Sie aus dem dargestellten Teil der Impulsantwort die Koeffizienten b_0, a_1 und a_2 von $G_2(z)$.



f) Zeichen Sie die nächsten 6 Werte der Impulsantwort von $G_2(z)$ in das Diagramm ein.

Lösung:

Aufgabe 1: Quantisierung (9 Punkte)

Für die Quantisierung stehen hier zwei verschiedenen AD-Wandler zur Auswahl welche die realen Werte auf die nächste Quantisierungsstufen *abrunden*. Die Eckdaten hierfür lauten wie folgt:

	10-bit AD-Wandler		**12-bit AD-Wandler**	
Abtastfrequenz:	$f_0 = 100$	Hz	$f_0 = 100$	Hz
Auflösung:	10	bit	12	bit
Messbereich:	$U_{\text{range}} = 0 \ldots 1024$	mV	$U_{\text{range}} = 0 \ldots 1024$	mV

a) Berechnen Sie aus den gegebenen Daten die Schrittweite ΔU sowie den maximalen Quantisierungsfehler $e_{\text{Q max}}$ für beide AD-Wandler.
Antwort:
Die Schrittweite ΔU ergibt sich durch äquidistantes Aufteilen des Messbereichs auf die 2^n Quantisierungsstufen:

$$\text{Allgemein:} \quad \Delta U = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2^n}$$
$$\Delta U_{\text{10-bit}} = \frac{1024\,\text{mV} - 0\,\text{mV}}{2^{10}}$$
$$\Delta U_{\text{10-bit}} = \frac{1024\,\text{mV}}{1024}$$
$$\Delta U_{\text{10-bit}} = 1\,\text{mV}$$
$$\Delta U_{\text{12-bit}} = \frac{1024\,\text{mV} - 0\,\text{mV}}{2^{12}}$$
$$\Delta U_{\text{12-bit}} = \frac{1024\,\text{mV}}{4096}$$
$$\Delta U_{\text{12-bit}} = \frac{1}{4}\,\text{mV}$$

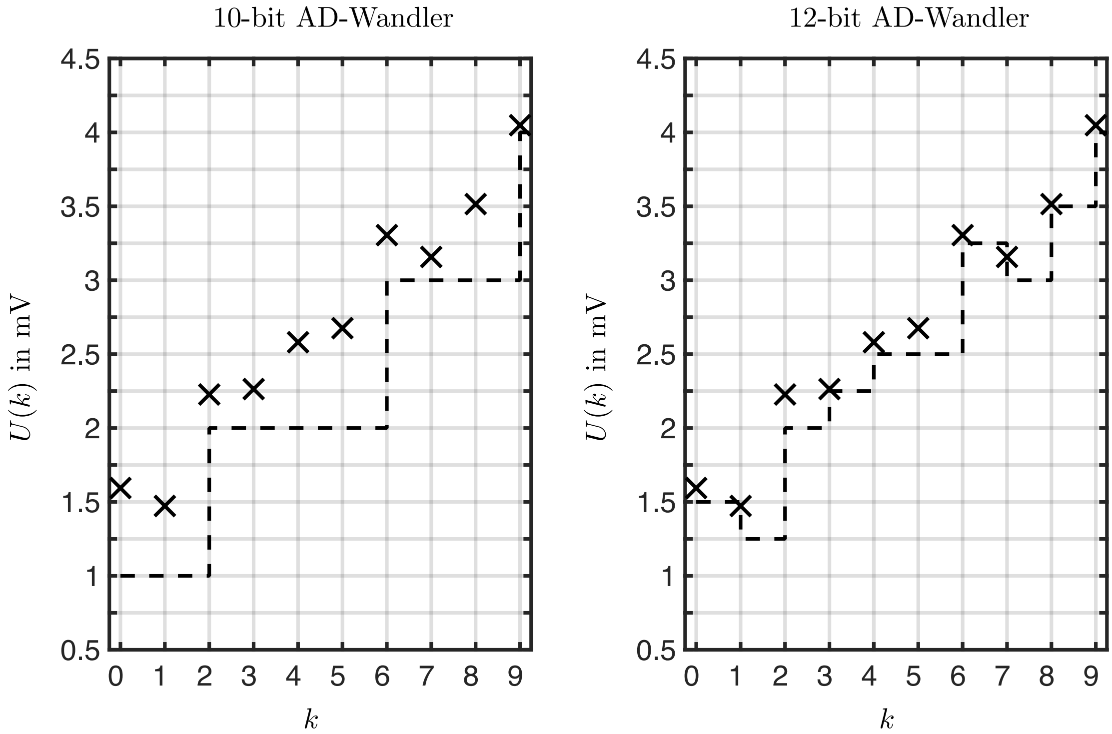
der maximale Fehler, welcher beim *Abrunden* auftreten kann, entspricht der Schrittweite:

$$e_{\text{Q max}} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2^n}$$ 2
$$e_{\text{Q max 10-bit}} = 1\,\text{mV}$$
$$e_{\text{Q max 12-bit}} = \frac{1}{4}\,\text{mV}$$ 2

b) Wie nennt man das Fehlersignal ($U(k) - U_{\text{Q}}(k)$, $k = 1, \ldots, N$), welches durch Quantisierung auftritt?
Antwort:
Dieses Fehlersignal wird als Quantisierungssrauschen bezeichnet. 1

c) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat der Fehler, welcher durch die Quantisierung eines gleichverteilten Signals entsteht?
Antwort:Der Quantisierungsfehler ist ebenfalls gleichverteilt. 1

d) Nun soll die nachfolgende Messwertfolge einer *verrauschten* Rampe $U(k)$ quantisiert werden. Skizzieren Sie das quantisierte Signal $\mathrm{Q}(k)$ mit einem Halteglied 0-ter Ordnung in das entsprechende Diagramm.



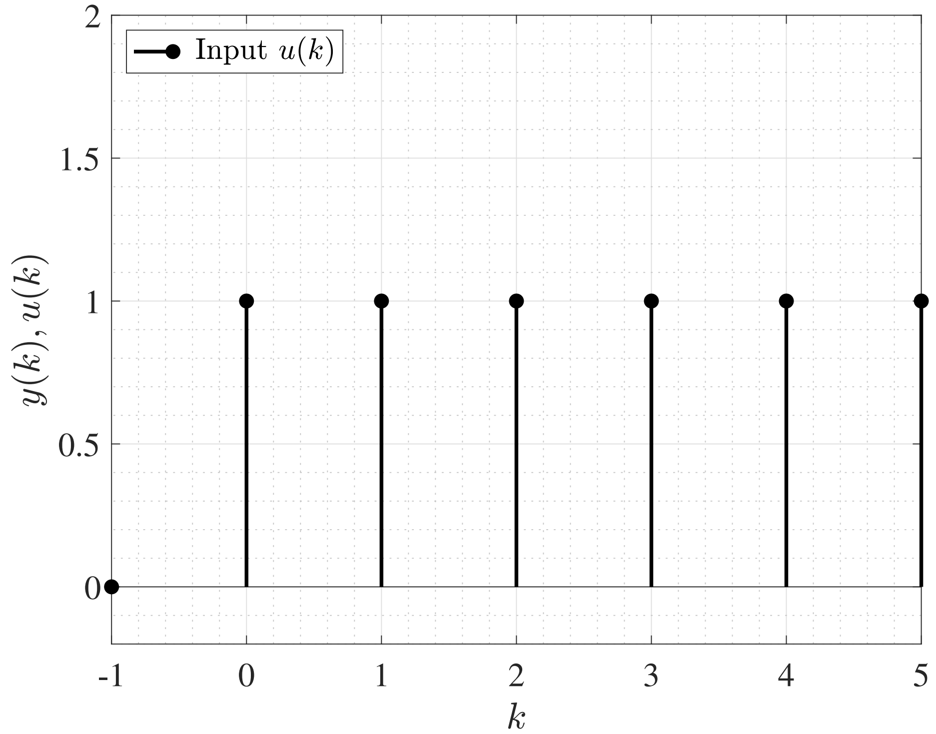
3

∑ 9

Aufgabe 2: Zeitdiskrete Systeme (12 Punkte)

Ein System mit dem Ausgang $y(k) = b_0 \cdot u(k) - a_1 \cdot y(k-2)$ ist gegeben mit $a_1 = -1$ und $b_0 = 0.3$.

a) Berechnen Sie die Wertefolge des Systemausgangs mit dem gegebenen Eingangssignal für $k = 0, 1, ..., 5$. Skizzieren Sie die Ergebnisse in der Abbildung. Nutzen Sie $y(k) = 0$ für alle $k < 0$ als Anfangsbedingung. **Antwort**: Gegeben ist das Eingangs-

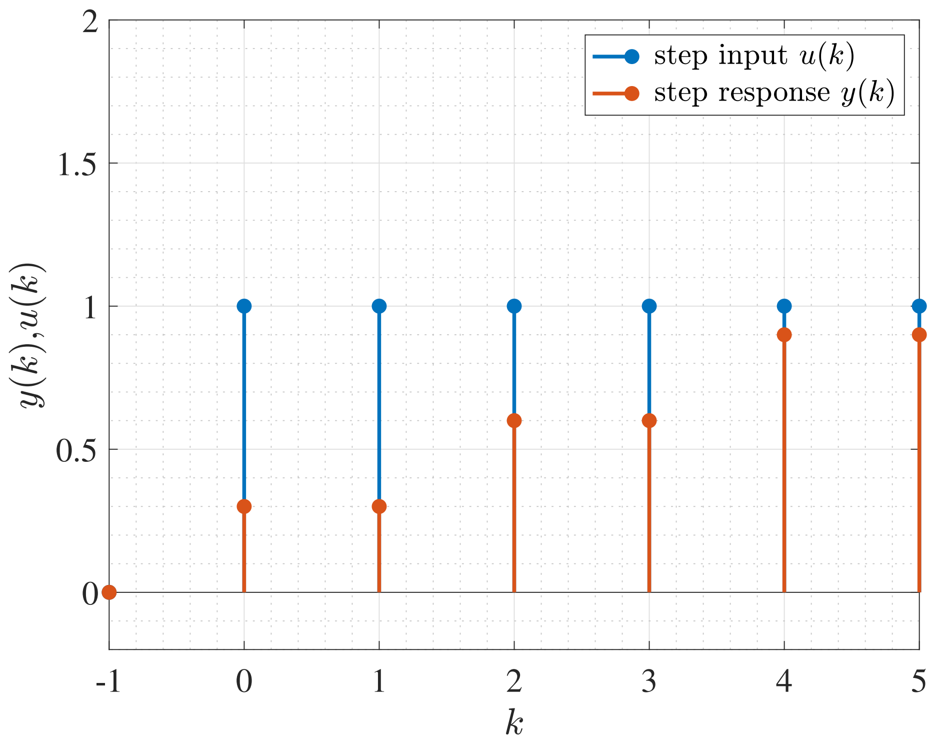


signal

$$u(k) = \begin{cases} 1, & \text{für } k \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit kann das Ausgangssignal berechnet werden zu 3

$$\begin{aligned}
y(k=0) &= b_0 \cdot u(0) - a_1 \cdot y(0-2) = 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = 0.3 \\
y(k=1) &= 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = 0.3 \\
y(k=2) &= 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0.3 = 0.6 \\
y(k=3) &= 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0.3 = 0.6 \\
y(k=4) &= 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0.6 = 0.9 \\
y(k=5) &= 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0.6 = 0.9
\end{aligned}$$



1

b) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Systems. **Antwort**: Siehe Bild 1.

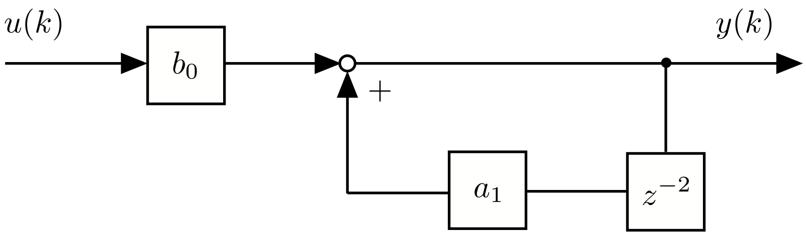


Bild 1: Blockschaltbild des gegebenen Systems

2

c) Berechnen Sie die Pole des Systems. **Antwort**:

$$
\begin{aligned}
y(k) + a_1 \cdot y(k-2) &= b_0 \cdot u(k) \\
Y(z) + a_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} &= b_0 \cdot U(z) \\
G(z) &= \frac{b_0}{1 + a_1 \cdot z^{-2}} \\
p_1 &= 1 \\
p_2 &= -1
\end{aligned}
$$

2

d) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ☐ Das System ist stabil.
- ☐ Das System ist instabil.
- ■ Das System ist grenzstabil.

1

e) Wie kann man das gegebene System modifizieren, damit die beiden nicht angekreuzten Aussagen aus Teil d) zutreffen? **Antwort**:Um ein instabiles System zu erhalten, muss $|a_1| > 1$ gewählt werden. Um ein stabiles System zu erhalten, muss $|a_1| < 1$ gewählt werden. $\boxed{1}$

f) Nehmen Sie an, dass $a_1 = -0,5$ ist. Berechnen Sie den Endwert der *Impuls*antwort. **Antwort**:

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z)$$

$$y(k \to \infty) = \lim_{z \to 1}(z-1)G(z)U(z) = (z-1)\frac{b_0}{1 + a_1 z^{-2}} = (z-1)\frac{b_0 z^2}{z^2 - 0.5} = 0$$

$\boxed{2}$

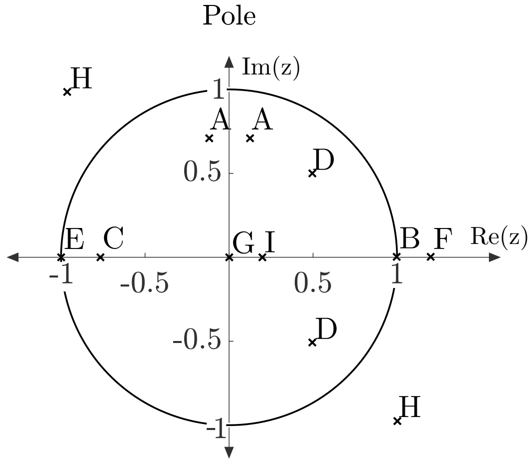
$\boxed{\sum 12}$

Aufgabe 3: Sprungantworten (12 Punkte)

Gegeben sind die Lagen der Pole von 9 unterschiedlichen Systemen (A-I) im Pol/Nullstellen-Diagramm und 6 unterschiedliche Sprungantworten (1-6).

Ordnen Sie die Pole den Sprungantworten in der gegebenen Tabelle richtig zu.

(Hinweis: Drei Pollagen sind keiner Sprungantwort zurechenbar. Alle Übertragungsfunktion haben die Struktur $G(z) = \frac{1}{A(z)}$ mit $A(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - p_i)$)



Sprung-antwort	Pole
1	F
2	B
3	I
4	D
5	C
6	G

2

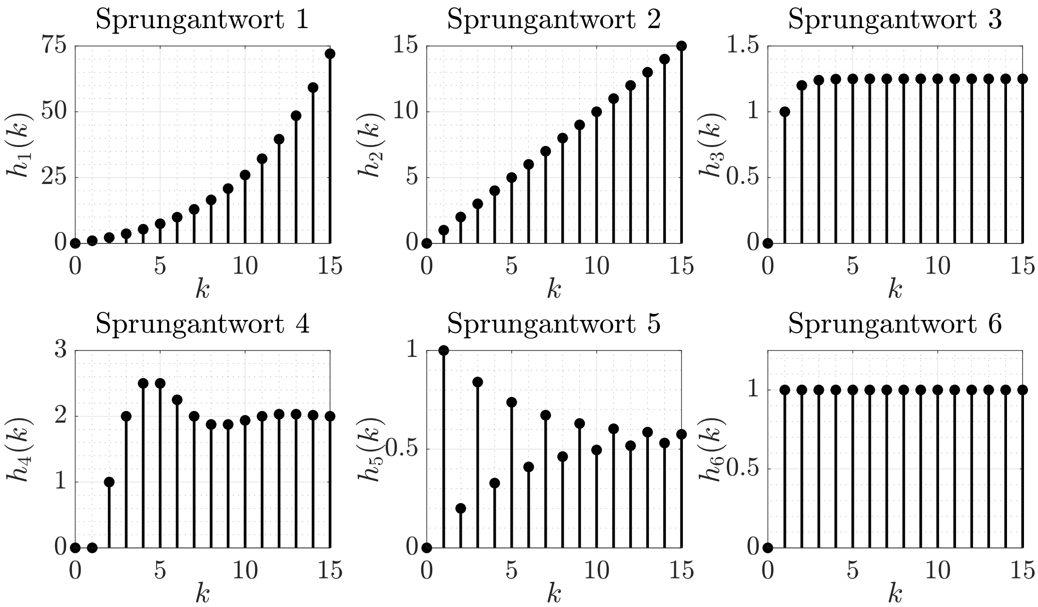
2

2

2

2

2



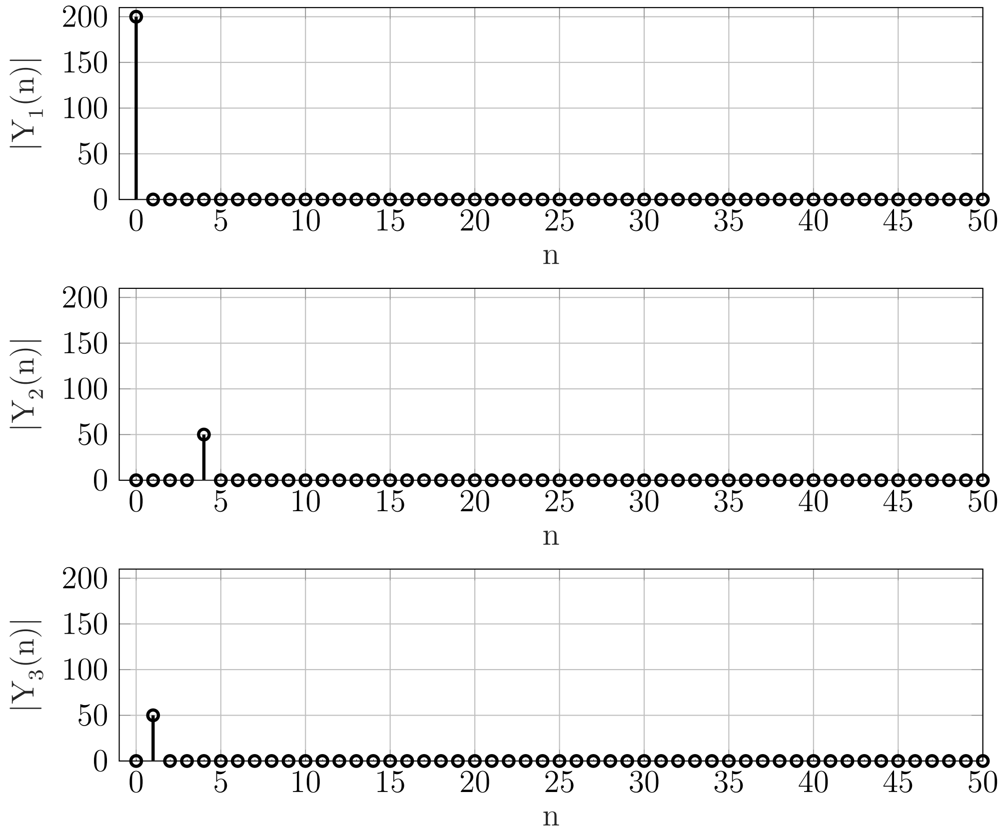
$\sum 12$

Aufgabe 4: DFT (13 Punkte)

Im Folgenden sehen Sie die DFT Ergebnisse (linke Hälfte des Spektrums) von verschiedenen Signalen.

Hinweis: $|Y(n)| = \frac{N}{2} \cdot A$ *wenn* A *die Amplitude der Schwingung ist.*

Bei $\omega = 0$ *gilt:* $|Y(n)| = N \cdot A$.

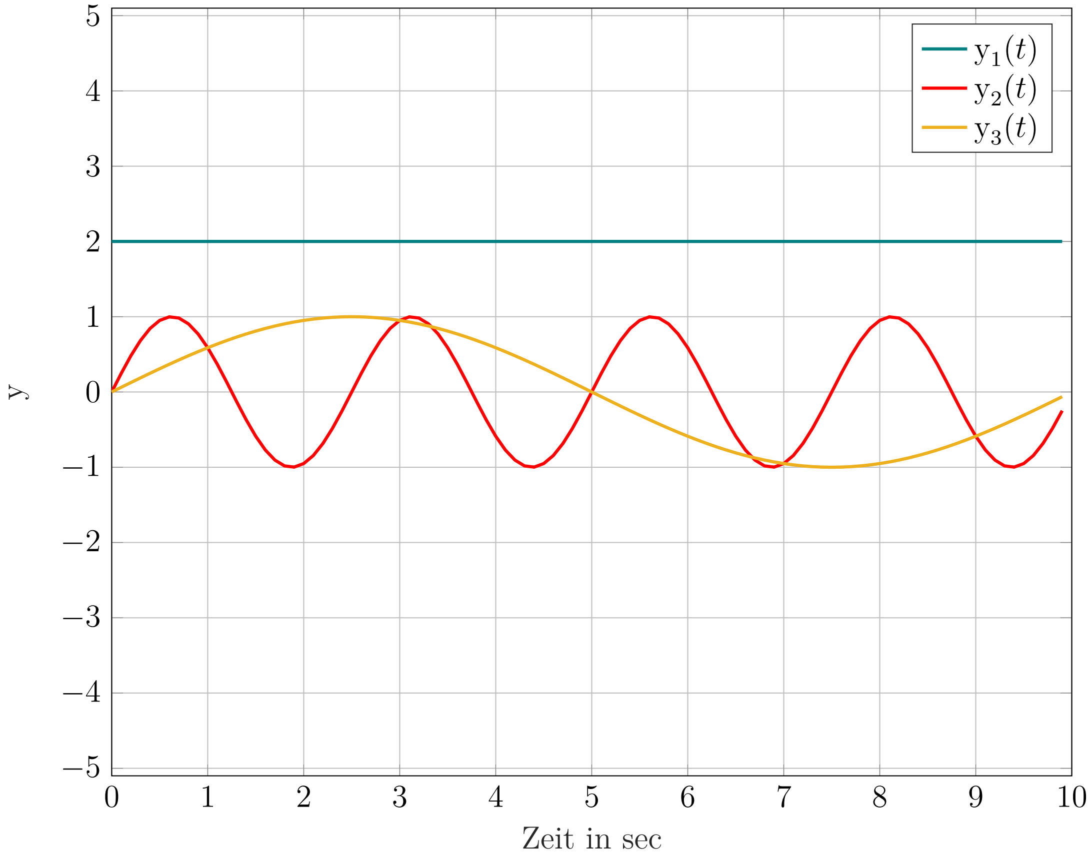


Die Signale wurden mit einer Abtastzeit von 0.1 sec im Zeitraum von 0 sec bis 9,9 sec abgetastet (erster Abtastschritt bei 0 sec).

a) Was ist die Abtastfrequenz f_0?
Antwort: $f_0 = \dfrac{1}{0.1 \text{ sec}} = 10 \text{ Hz}$ 1

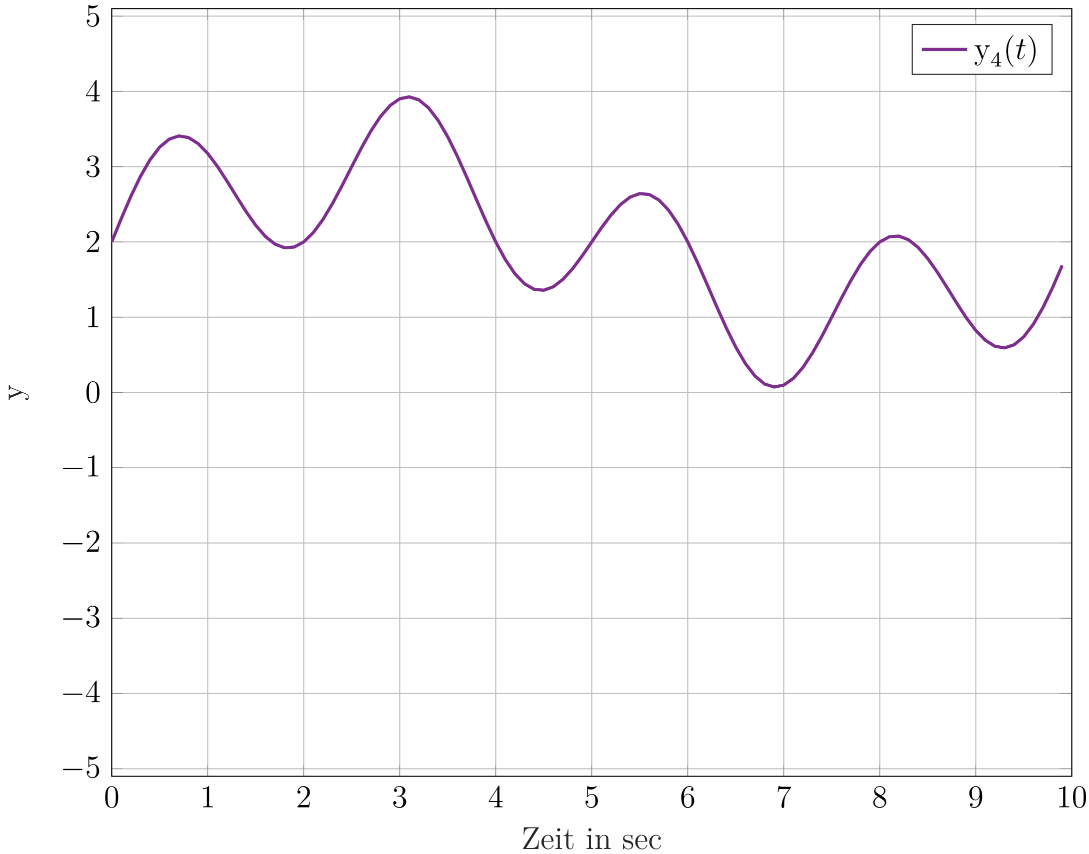
b) Bestimmen sie N, wenn N die Anzahl der Abtastschritte ist.?
Antwort: $N = 100 = \dfrac{9.9}{0.1} + 1$ 1

c) Zeichnen Sie die Signale $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ den oben stehenden Diagrammen entsprechend in das folgende leere Diagramm ein. Achten sie dabei darauf, dass die Linien der Signale gut zu unterscheiden und eindeutig zugeordnet sind.
Antwort:
$y_1(t)$ ist ein Gleichwert mit dem Wert 2.
$y_2(t)$ ist ein Sinus mit der Frequenz $\dfrac{1}{100} \cdot 10$ Hz und einer Amplitude von 1.
$y_3(t)$ ist ein Sinus mit der Frequenz $\dfrac{4}{100} \cdot 10$ Hz und einer Amplitude von 1.



6

d) Zeichnen Sie $y_4(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ in das folgende leere Diagramm ein.

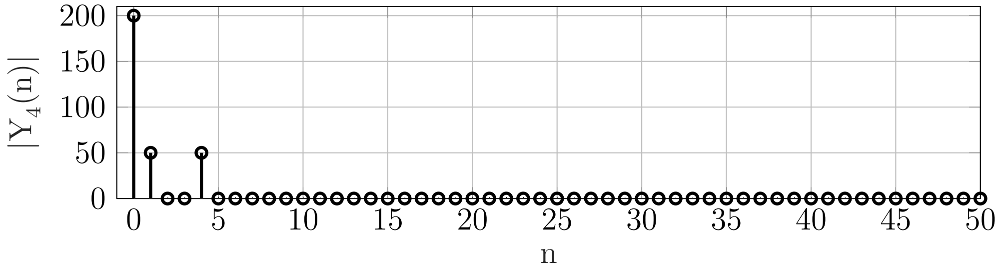


2

e) Tragen Sie nun das Ergebnis der DFT (nur die linke Seite des Spektrums) $|Y_4(n)|$ von dem vorhin gezeichneten Signal $y_4(t)$ in das folgende Diagramm ein.

Antwort:

Die Spektralanalyse $|Y_4(N)| = |Y_1(N)| + |Y_2(N)| + |Y_3(N)|$ ist eine Addition der ersten 3 Spektralanalysen, weil die DFT eine lineare Transformation darstellt.



3

$\sum$ 13

Aufgabe 5: Lineare Filter (14 Punkte)

a) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

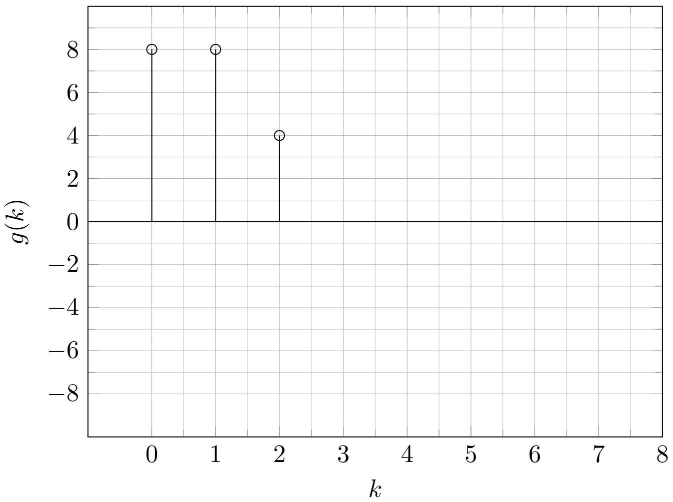
$$G_1(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1}. \tag{3}$$

Berechnen Sie die zugehörige Differenzengleichung. Die zugehörige Differenzengleichung lautet

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) - a_1 y(k-1). \tag{4}$$

1

b) Bestimmen Sie aus dem dargestellten Teil der Impulsantwort die Koeffizienten b_0, b_1 und a_1 von $G_1(z)$.

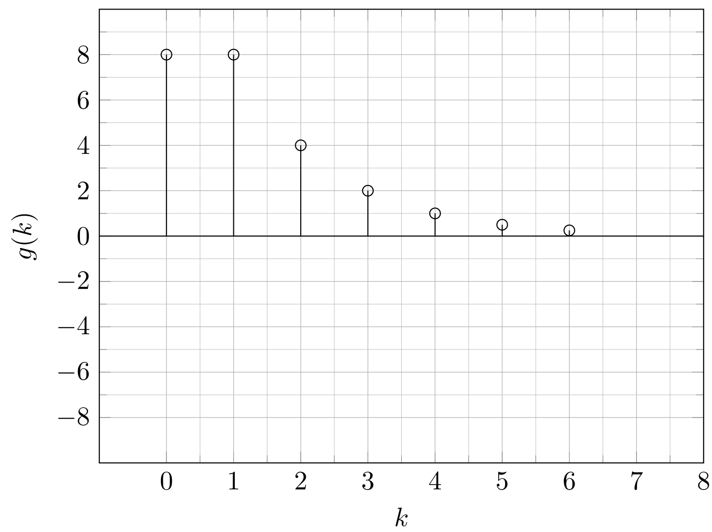


Es gilt:

$$g(0) = 8 = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 - a_1 \cdot 0 \rightarrow b_0 = 8 \tag{5}$$
$$g(2) = 4 = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 - a_1 \cdot 8 \rightarrow a_1 = -0.5 \tag{6}$$
$$g(1) = 8 = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 - 0.5 \cdot 8 \rightarrow b_1 = 4 \tag{7}$$

4

c) Zeichnen Sie die nächsten 4 Werte der Impulsantwort von $G_1(z)$ in das Diagramm ein.



2

d) Nun sei die Übertragungsfunktion

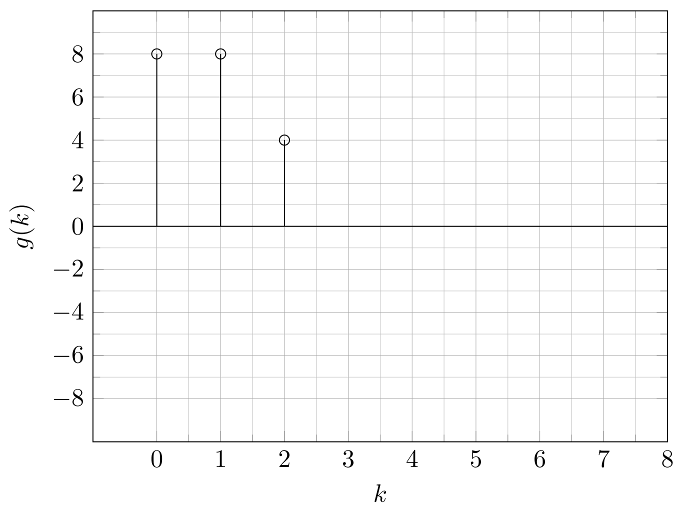
$$G_2(z) = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \tag{8}$$

gegeben. Berechnen Sie die diskrete Differenzengleichung. Die Differenzengleichung lautet

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k) \tag{9}$$

1

e) Bestimmen Sie aus dem dargestellten Teil der Impulsantwort die Koeffizienten b_0, a_1 und a_2 von $G_2(z)$.



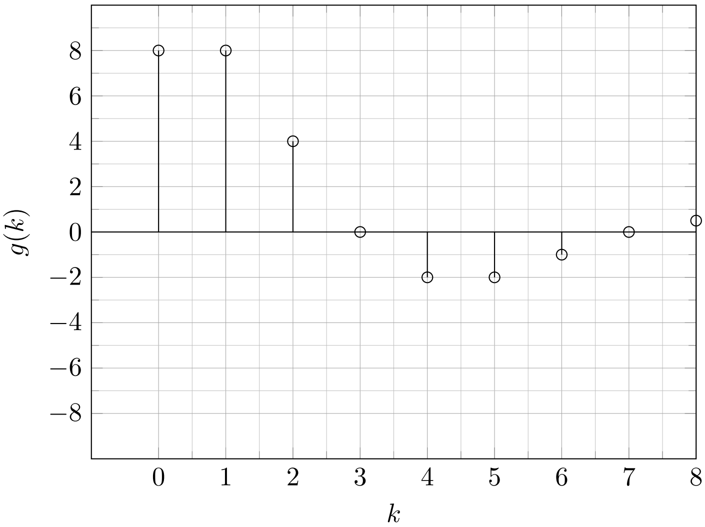
$$g(0) = 8 = b_0 \cdot 1 - a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0 \rightarrow b_0 = 8 \tag{10}$$

$$g(1) = 8 = b_0 \cdot 0 - a_1 \cdot 8 - a_2 \cdot 0 \rightarrow a_1 = -1 \tag{11}$$

$$g(2) = 8 = b_0 \cdot 0 + 8 - a_2 \cdot 8 = 4 \rightarrow a_2 = 0.5 \tag{12}$$

4

f) Zeichen Sie die nächsten 6 Werte der Impulsantwort von $G_2(z)$ in das Diagramm ein.



2

$\sum$ 14