Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

24.03.2021

Name:	
Mat.-Nr.	
Note:	

Aufgabe:	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Punkte:	12	13	13	12	10	60
Erreicht:						

Dauer der Klausur: 1 Stunde

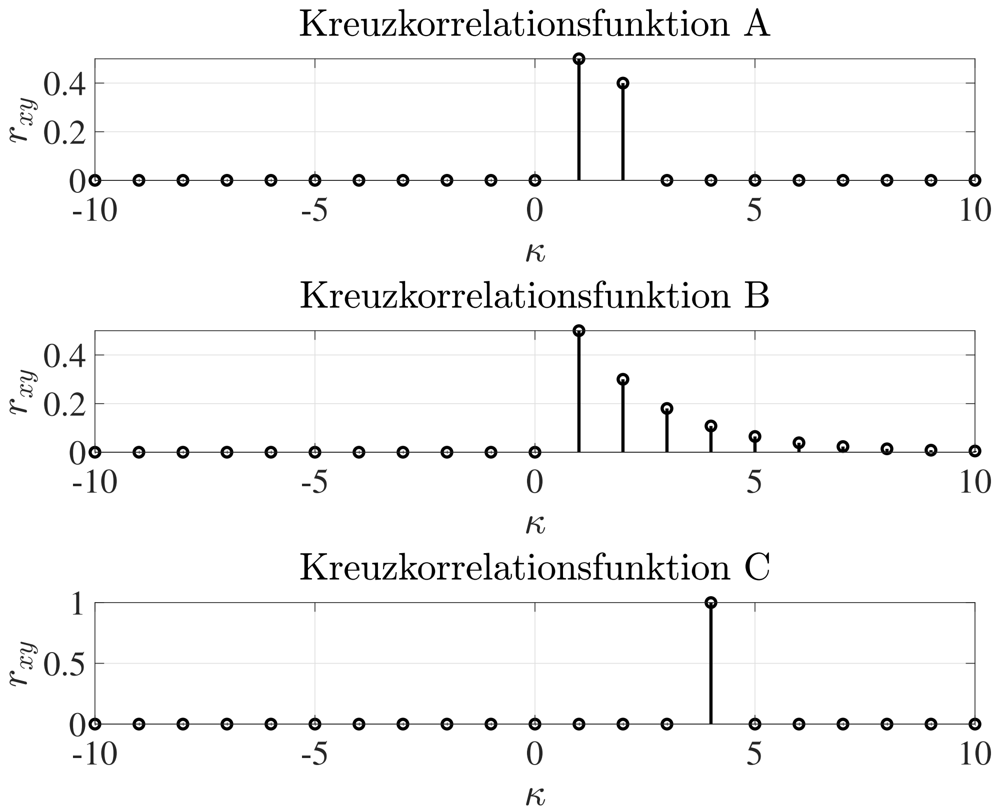
Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Korrelationsfunktion (12 Punkte)

a) Gegeben sind die folgenden drei Systeme

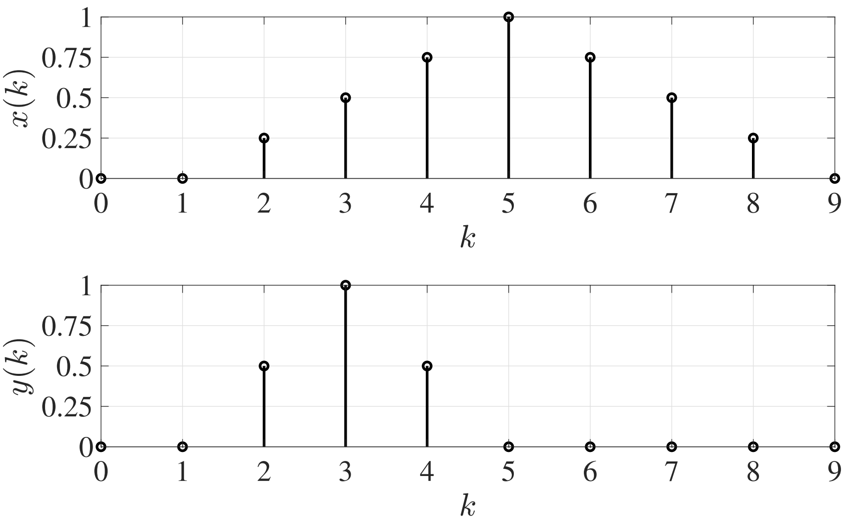
$$G_1(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$
$$G_2(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$
$$G_3(z) = z^{-4}.$$

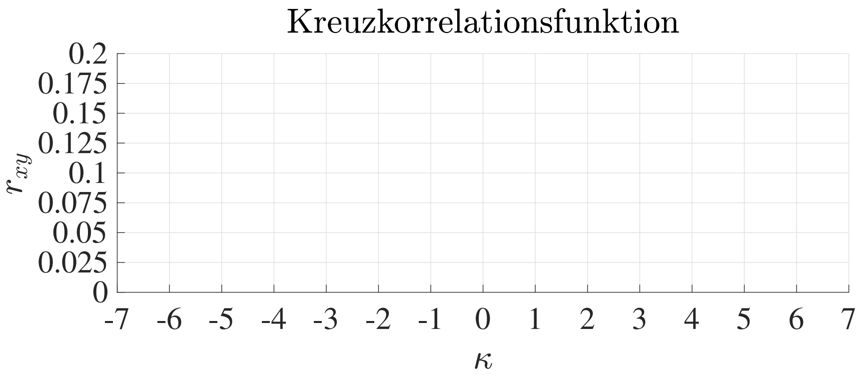
Die Systeme wurden jeweils mit einem impulsförmigen Eingangssignal $x(k)$ angeregt und der Ausgang des Systems $y(k)$ wurde aufgenommen. Anschließend wurde die Kreuzkorrelationsfunktion von Eingangssignal und Ausgangssignal berechnet. Ordnen Sie die Systeme den korrekten abgebildeten Kreuzkorrelationsfunktionen zu.



b) Gegeben ist der zeitdiskrete Verlauf der Signale $x(k)$ und $y(k)$. Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion r_{xy} für $\kappa = -7, -6, ..., 7$ und skizzieren Sie die berechneten Werte entweder in dem gegebenen Diagramm oder auf Ihrem Klausurbogen.
Hinweis:

$$r_{xy}(\kappa) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1-\kappa} x(k) \cdot y(k+\kappa), & \text{für } \kappa \geq 0 \\ \frac{1}{N} \sum\limits_{k=-\kappa}^{N-1} x(k) \cdot y(k+\kappa), & \text{sonst.} \end{cases}$$





c) Geben Sie an, ob es sich bei der gegebenen Formel um die biasfreie oder die biasbehaftete Variante der Kreuzkorrelationsfunktion handelt.

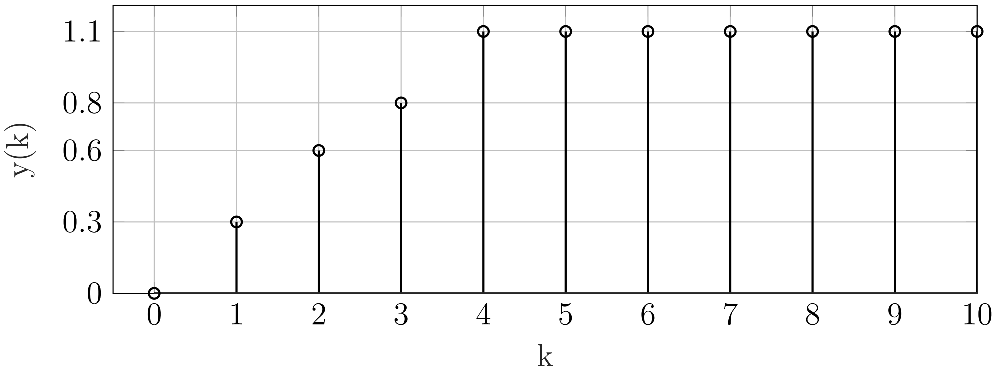
Aufgabe 2: FIR und IIR (13 Punkte)

In den folgenden Abbildungen sind die Sprungantworten verschiedener Filter gegeben. Der Sprung ist definiert als

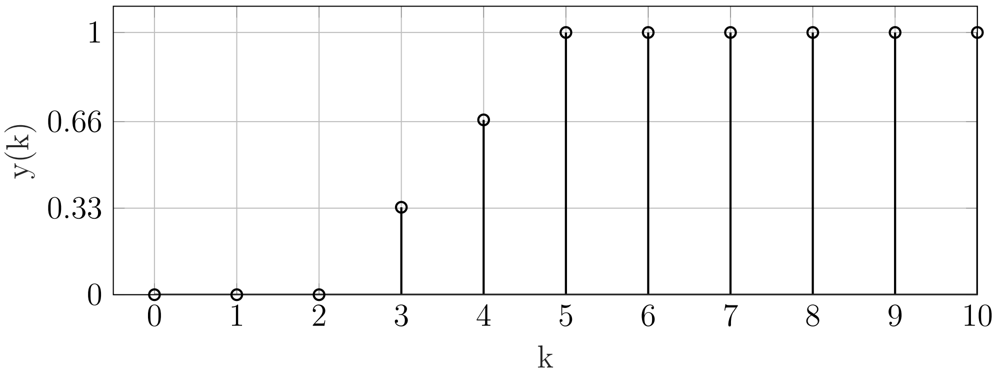
$$u(k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k < 2 \\ 1, & \text{falls } k \geq 2 \end{cases}.$$

Geben Sie für jeden Aufgabenteil eine Übertragungsfunktion $G(z)$ an.

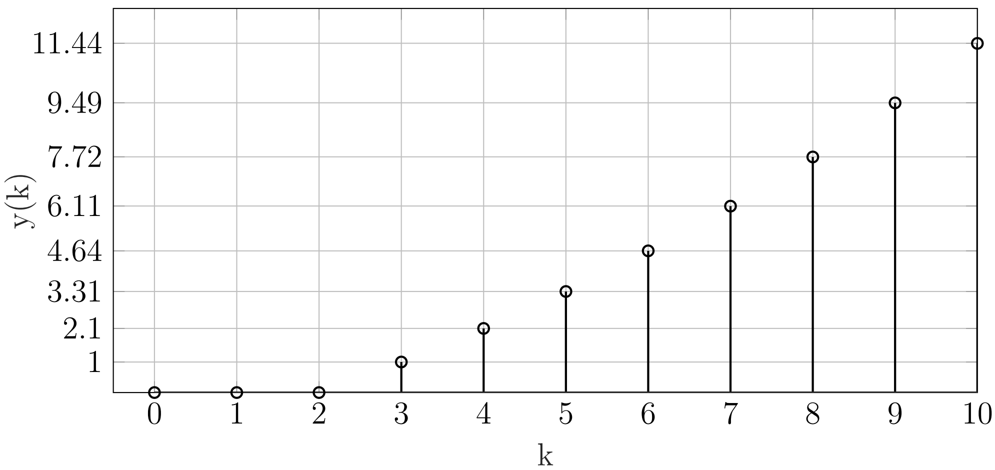
a) Filter 1



b) Filter 2



c) Filter 3

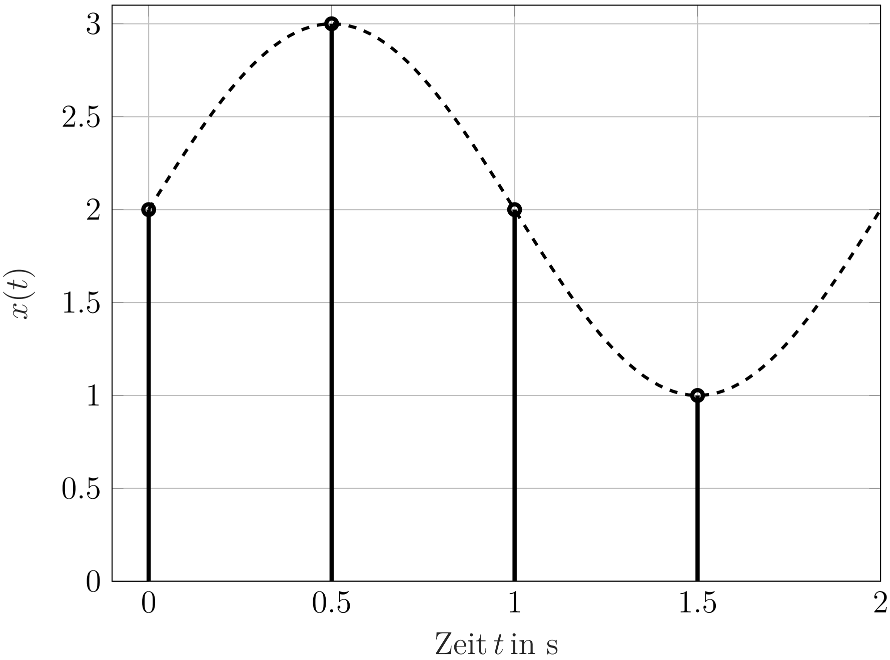


d) Duplizieren Sie die Tabelle auf Ihr Lösungsblatt und markieren Sie anschließend die Eigenschaften der jeweiligen Filter.

Filter	FIR	Akausal	Lineare Phase	Instabil	Verstärkung = 1
1					
2					
3					

Aufgabe 3: Diskrete Fourier Transformation (13 Punkte)

In der folgenden Abbildung sehen Sie ein Sinus-Signal $x(t)$ im kontinuierlichen Zeitbereich und das abgetastete Signal $x(k)$ für $k = 0, 1, 2, 3$:



a) Wie hoch ist die Frequenz f_x des Signals $x(t)$? Wie hoch ist die Abtastfrequenz f_s?

b) Berechnen Sie die Matrix $\underline{W}_N$ mit den diskreten Frequenzzeigern W_N^{nk} für das Gleichungssystem $\underline{X}(n) = \underline{W}_N \, \underline{x}(k)$.
Hinweis: $\mathrm{DFT}\{x(k)\} = \underline{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\mathrm{e}^{-i2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{nk}$
$W_N = \mathrm{e}^{-i2\pi/N}$

c) Berechnen Sie $\underline{X}(n)$.

d) Zeichnen Sie die diskreten Frequenzzeigern W_N^{nk} aus Aufgabenteil **b)** in der gaußschen Ebene (komplexe Zahlenebene).

e) Wie steigt der Aufwand für die Berechnung der DFT, wenn man die Abtastfrequenz f_s verdoppelt?

Aufgabe 4: Phase eines Filters (12 Punkte)

a) Gegeben ist das System

$$G(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2}.$$

Berechnen Sie das Filter $F(z)$, wobei gilt

$$F(z) = G(z) \cdot G(z^{-1}).$$

b) Berechnen Sie die Phase des zuvor berechneten Filters $F(z)$.
Hinweis: Setzen Sie $z = e^{i\omega T_0}$

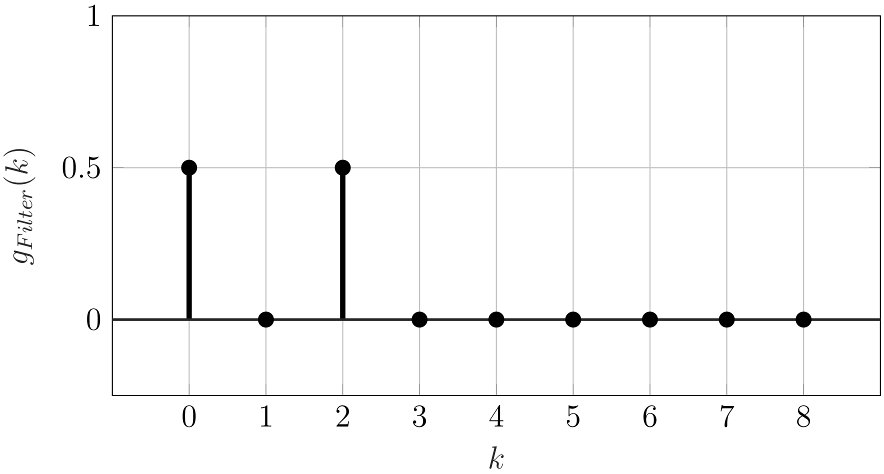
c) Passen Sie, falls nötig, $F(z)$ so an, dass das Filter kausal und sprungfähig wird.

d) Wie wird ein Filter mit der zuvor berechneten Phase bezeichnet?

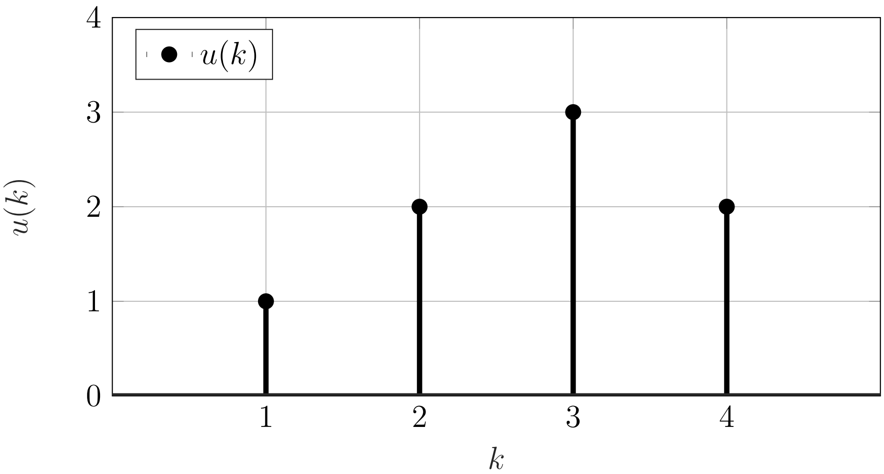
e) Was sind die Vorteile eines solchen Filtertypes?

Aufgabe 5: Lineare Filter (10 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt die Impulsantwort eines linearen Filters $g_{Filter}(k)$:



Dieses Filter kann zu Filterung von Signalen eingesetzt werden. Das für diese Aufgabe zu betrachtende Signal $u(k)$ besitzt den folgend dargestellten Verlauf:



a) Das Eingangssignal $u(k)$ soll nun gefiltert werden. Berechnen Sie die Wertefolge $y(k)$ des Filterausgangs für $k = 1, 2, \ldots, 8$. Nutzen Sie dafür $u(k) = 0$ für alle $k < 1$.

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Filters $G_{Filter}(z)$.

c) Um was für einen Filter handelt es sich?

d) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Filters.

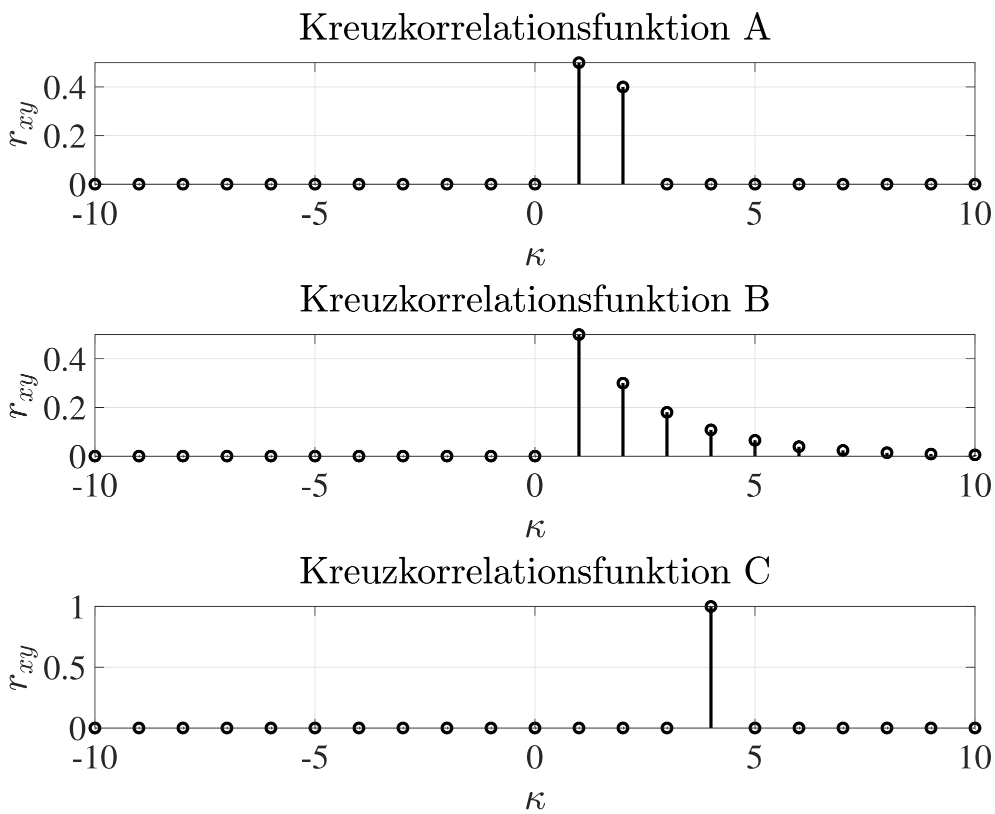
Lösung:

Aufgabe 1: Korrelationsfunktion (12 Punkte)

a) Gegeben sind die folgenden drei Systeme

$$G_1(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$
$$G_2(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$
$$G_3(z) = z^{-4}.$$

Die Systeme wurden jeweils mit einem impulsförmigen Eingangssignal $x(k)$ angeregt und der Ausgang des Systems $y(k)$ wurde aufgenommen. Anschließend wurde die Kreuzkorrelationsfunktion von Eingangssignal und Ausgangssignal berechnet. Ordnen Sie die Systeme den korrekten abgebildeten Kreuzkorrelationsfunktionen zu. **Antwort**:

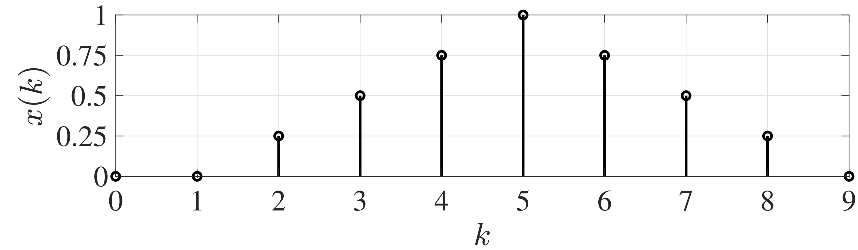


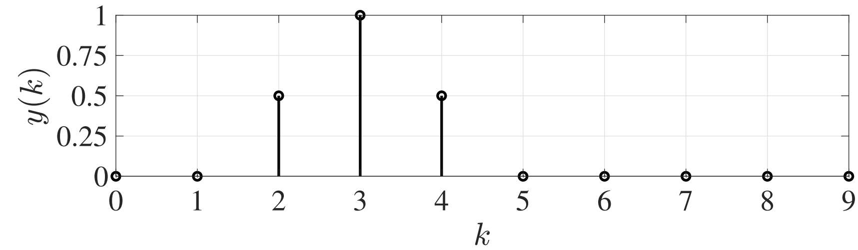
System	Kreuzkorrelations-funktion
1	B
2	A
3	C

3

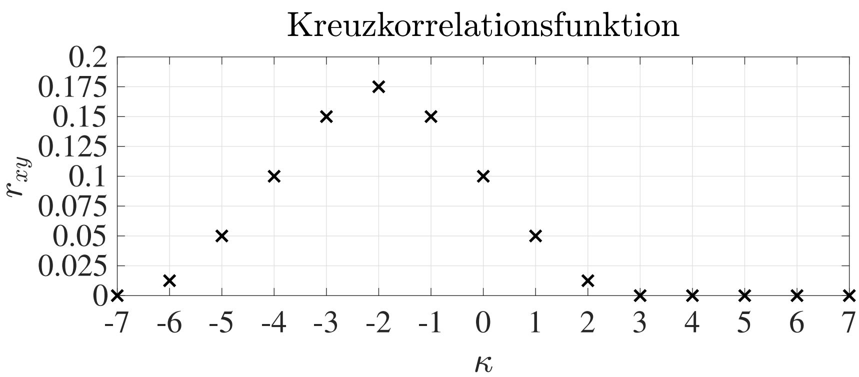
b) Gegeben ist der zeitdiskrete Verlauf der Signale $x(k)$ und $y(k)$. Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion r_{xy} für $\kappa = -7, -6, ..., 7$ und skizzieren Sie die berechneten Werte entweder in dem gegebenen Diagramm oder auf Ihrem Klausurbogen. Hinweis:

$$r_{xy}(\kappa) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1-\kappa} x(k) \cdot y(k+\kappa), & \text{für } \kappa \geq 0 \\ \frac{1}{N} \sum\limits_{k=-\kappa}^{N-1} x(k) \cdot y(k+\kappa), & \text{sonst.} \end{cases}$$





Antwort:



3

$$
\begin{aligned}
r_{xy}(7) &= \frac{1}{10}\,(0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0 \\
r_{xy}(6) &= \frac{1}{10}\,(0.75 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0 \\
r_{xy}(5) &= \frac{1}{10}\,(1 \cdot 0 + 0.75 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0 \\
r_{xy}(4) &= \frac{1}{10}\,(0.75 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0.75 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0 \\
r_{xy}(3) &= 0 \\
r_{xy}(2) &= \frac{1}{10}\,(0.25 \cdot 0.5) = 0.0125 \\
r_{xy}(1) &= \frac{1}{10}\,(0.5 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25) = 0.05 \\
r_{xy}(0) &= \frac{1}{10}\,(0.5 \cdot 0.75 + 1 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.25) = 0.1 \\
r_{xy}(-1) &= \frac{1}{10}\,(0.5 \cdot 1 + 1 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.5) = 0.15 \\
r_{xy}(-2) &= \frac{1}{10}\,(0.5 \cdot 0.75 + 1 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.75) = 0.175 \\
r_{xy}(-3) &= \frac{1}{10}\,(0.5 \cdot 1 + 1 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.5) = 0.15 \\
r_{xy}(-4) &= \frac{1}{10}\,(0.5 \cdot 0.75 + 1 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.25) = 0.1 \\
r_{xy}(-5) &= \frac{1}{10}\,(0.5 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25) = 0.05 \\
r_{xy}(-6) &= \frac{1}{10}\,(0.25 \cdot 0.5) = 0.0125 \\
r_{xy}(-7) &= 0
\end{aligned}
$$

5

c) Geben Sie an, ob es sich bei der gegebenen Formel um die biasfreie oder die biasbehaftete Variante der Kreuzkorrelationsfunktion handelt.
Antwort:
Es handelt sich um die biasbehaftete Variante der Kreuzkorrelationsfunktion. 1

$\sum$ 12

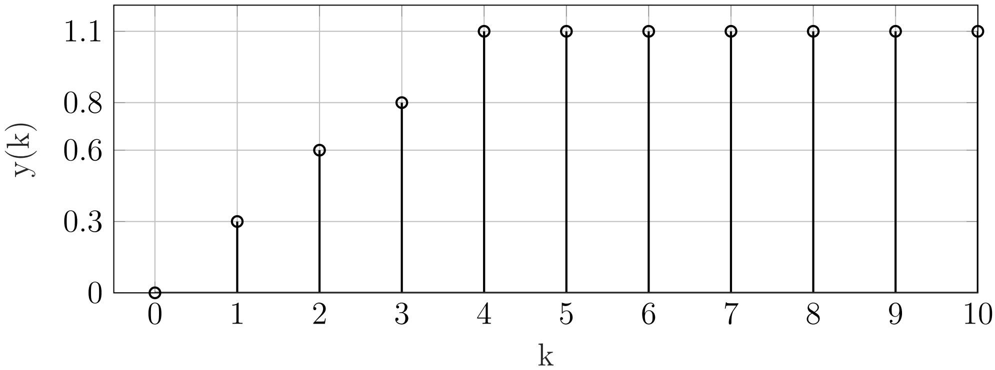
Aufgabe 2: FIR und IIR (13 Punkte)

In den folgenden Abbildungen sind die Sprungantworten verschiedener Filter gegeben. Der Sprung ist definiert als

$$u(k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k < 2 \\ 1, & \text{falls } k \geq 2 \end{cases}.$$

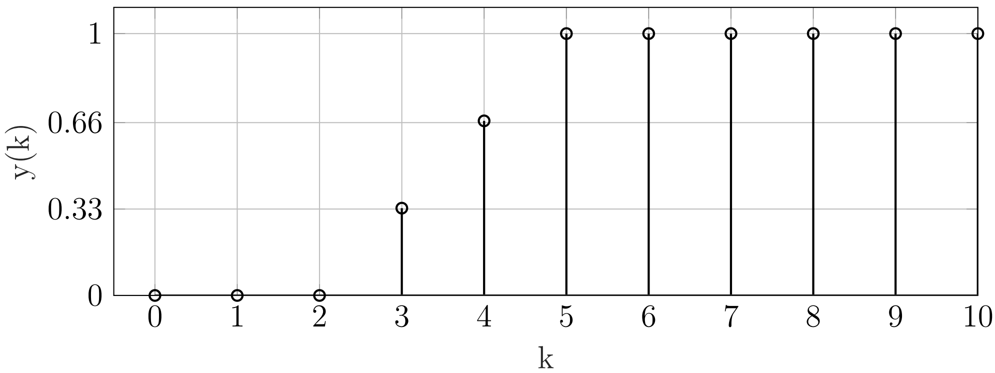
Geben Sie für jeden Aufgabenteil eine Übertragungsfunktion $G(z)$ an.

a) Filter 1



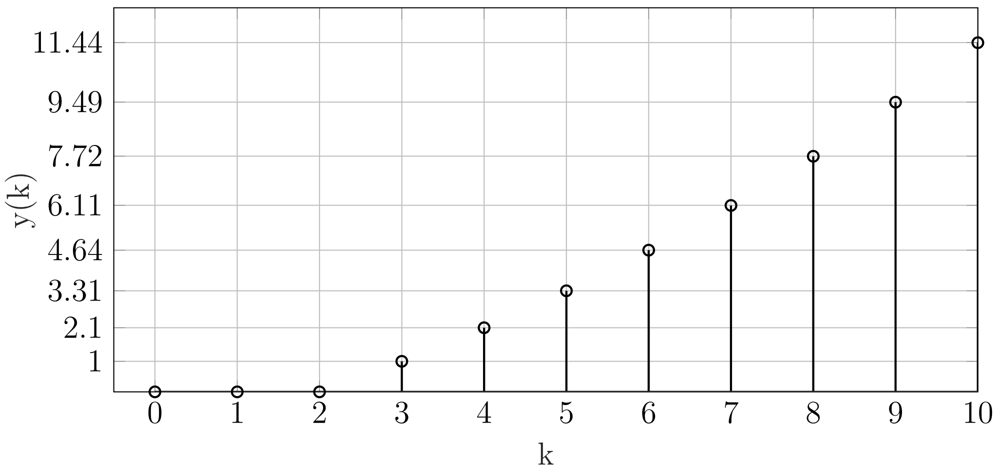
Antwort: FIR akausal: $G(z) = 0.3z^1 + 0.3 + 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2}$ 2

b) Filter 2



Antwort: Lineare Phase: $G(z) = \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}$ 2

c) Filter 3



Antwort: Instabil: $G(z) = \frac{z^{-1}}{1-1.1z^{-1}}$ 4

d) Duplizieren Sie die Tabelle auf Ihr Lösungsblatt und markieren Sie anschließend die Eigenschaften der jeweiligen Filter.
Antwort:

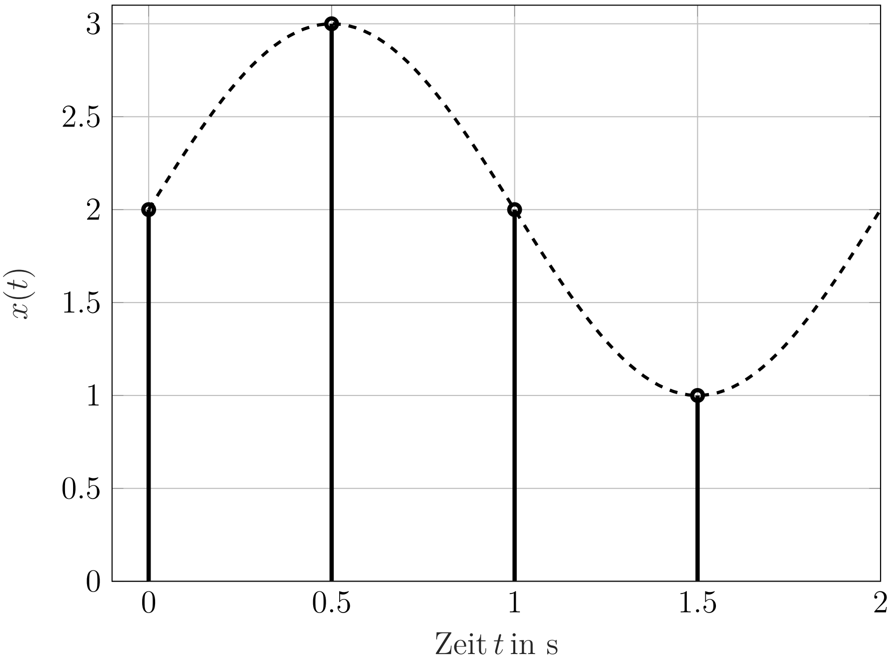
Filter	FIR	Akausal	Lineare Phase	Instabil	Verstärkung = 1
1	X	X			
2	X		X		X
3				X	

5

$\sum 13$

Aufgabe 3: Diskrete Fourier Transformation (13 Punkte)

In der folgenden Abbildung sehen Sie ein Sinus-Signal $x(t)$ im kontinuierlichen Zeitbereich und das abgetastete Signal $x(k)$ für $k = 0, 1, 2, 3$:



a) Wie hoch ist die Frequenz f_x des Signals $x(t)$? Wie hoch ist die Abtastfrequenz f_s?
Antwort:$f_x = 0.5\,\mathrm{Hz}$ und $f_s = 2\,\mathrm{Hz}$. 2

b) Berechnen Sie die Matrix $\underline{W}_N$ mit den diskreten Frequenzzeigern W_N^{nk} für das Gleichungssystem $\underline{X}(n) = \underline{W}_N\, \underline{x}(k)$.
Hinweis: $\mathrm{DFT}\{x(k)\} = \underline{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\mathrm{e}^{-i2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{nk}$
$W_N = \mathrm{e}^{-i2\pi/N}$
Antwort:

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \tag{1}$$

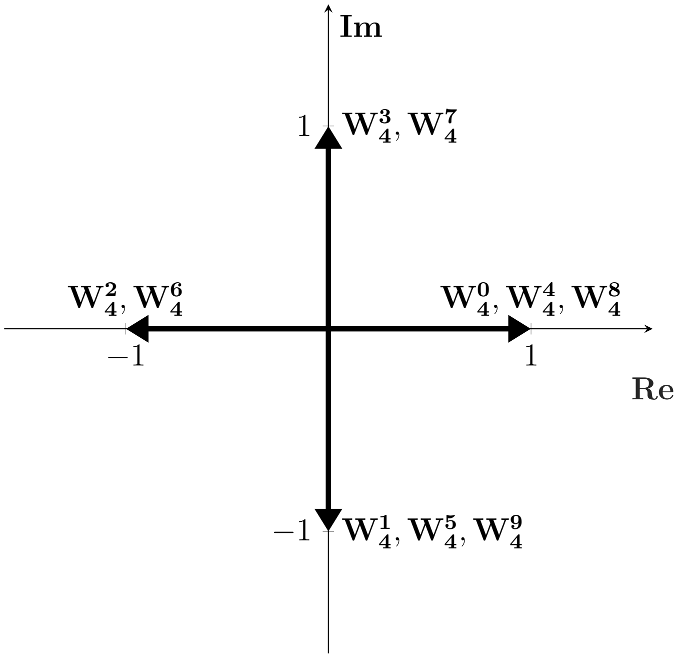
4

c) Berechnen Sie $\underline{X}(n)$.
Antwort:

$$\underline{X}(n) = \begin{bmatrix} 8 \\ -2i \\ 0 \\ 2i \end{bmatrix} \tag{2}$$

2

d) Zeichnen Sie die diskreten Frequenzzeigern W_N^{nk} aus Aufgabenteil **b)** in der gaußschen Ebene (komplexe Zahlenebene).
Antwort:



4

e) Wie steigt der Aufwand für die Berechnung der DFT, wenn man die Abtastfrequenz f_{s} verdoppelt?
Antwort: Die Matrix W_N wird um den Faktor 4 größer, wenn die Anzahl der abgetasteten Punkte sich verdoppelt. Der Rechenaufwand entwickelt sich damit etwa quadratisch im Verhältnis zur Anzahl der Datenpunkte. 1

Aufgabe 4: Phase eines Filters (12 Punkte)

a) Gegeben ist das System

$$G(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2}.$$

Berechnen Sie das Filter $F(z)$, wobei gilt

$$F(z) = G(z) \cdot G(z^{-1}).$$

Antwort:

$$\begin{aligned} F(z) &= G(z) \cdot G(z^{-1}) \\ &= (\frac{1}{2} + \frac{z^{-1}}{2}) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{z^{1}}{2}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{z^{1}}{4} + \frac{z^{-1}}{4} + \frac{z^{1}z^{-1}}{4} \\ &= \frac{z}{4} + \frac{1}{2} + \frac{z^{-1}}{4} \\ F(z) &= \frac{z + 2 + z^{-1}}{4} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$

b) Berechnen Sie die Phase des zuvor berechneten Filters $F(z)$.
Hinweis: Setzen Sie $z = e^{i\omega T_0}$
Antwort:

$$\begin{aligned} F(z = e^{i\omega T_0}) &= \frac{e^{i\omega T_0} + 2 + e^{-i\omega T_0}}{4} \\ &= \frac{(\cos(\omega T_0) + i\sin(\omega T_0)) + 2 + (\cos(-\omega T_0) + i\sin(-\omega T_0))}{4} \\ &= \frac{\cos(\omega T_0) + 2 + \cos(-\omega T_0)}{4} \end{aligned}$$

$F(z = e^{i\omega T_0})$ ist reell, daher Nullphase $\boxed{3}$

c) Passen Sie, falls nötig, $F(z)$ so an, dass das Filter kausal und sprungfähig wird.
Antwort:
$\tilde{F}(z) = z^{-1}F(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{4}$ $\boxed{2}$

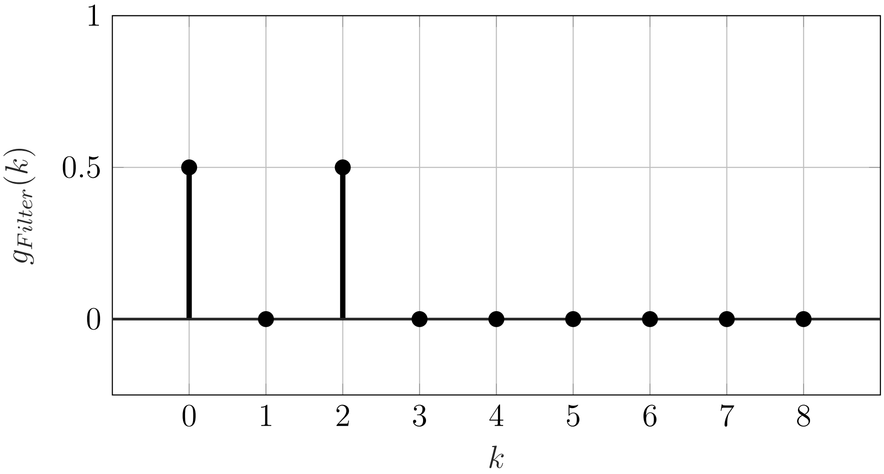
d) Wie wird ein Filter mit der zuvor berechneten Phase bezeichnet?
Antwort:
Filter mit linearer Phase / Nullphasenfilter $\boxed{2}$

e) Was sind die Vorteile eines solchen Filtertypes?
Antwort:
Keine Phasenverzerrung und konstante Gruppenlaufzeit $\boxed{2}$

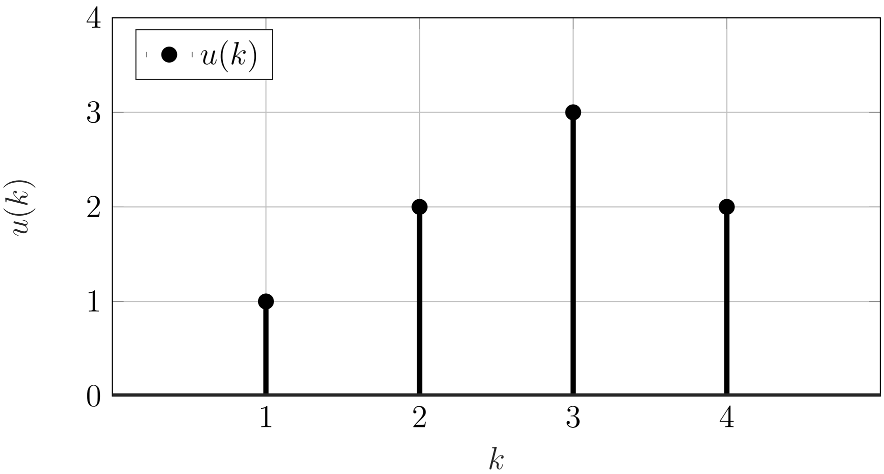
$\boxed{\sum 12}$

Aufgabe 5: Lineare Filter (10 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt die Impulsantwort eines linearen Filters $g_{Filter}(k)$:



Dieses Filter kann zu Filterung von Signalen eingesetzt werden. Das für diese Aufgabe zu betrachtende Signal $u(k)$ besitzt den folgend dargestellten Verlauf:



a) Das Eingangssignal $u(k)$ soll nun gefiltert werden. Berechnen Sie die Wertefolge $y(k)$ des Filterausgangs für $k = 1, 2, \ldots, 8$. Nutzen Sie dafür $u(k) = 0$ für alle $k < 1$.
Antwort: Der Filterausgang lässt sich einfach über de Differenzengleichung ausrechnen:

$$y(k) = \frac{1}{2}u(k) + \frac{1}{2}u(k-2) = \frac{1}{2}\left(u(k) + u(k-2)\right)$$

k	$0.5 \cdot u(k)$	$0.5 \cdot u(k-2)$	$y(k)$
1	0.5	0	0.5
2	1	0	1
3	1.5	0.5	2
4	1	1	2

$\boxed{4}$

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Filters $G_{Filter}(z)$.
Antwort:
Die Übertragungsfunktion des Filters lässt sich aus der in Aufgabenteil a) angegebenen Differenzengleichung berechnen.

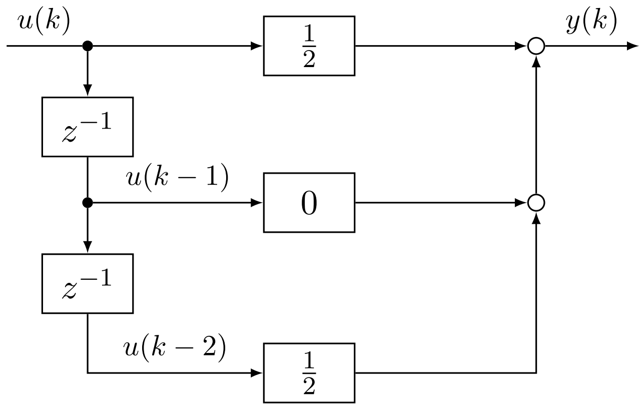
$$y(k) = \frac{1}{2}u(k) + \frac{1}{2}u(k-2) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)U(z)$$

$$G_{Filter}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1}$$

2

c) Um was für einen Filter handelt es sich?
Antwort:
Es handelt sich um einen FIR Filter. 1

d) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Filters.
Antwort:
Eine mögliches Blockschaltbild zeigt die folgende Abbildung.



3

∑ 10