Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

21. September 2012

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	10	6	10	14	20	60
Note:	Ist:						

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Für eine Messung mit $N = 20.000$ Messwerten und einer Abtastfrequenz von $f_0 = 0,5\,\text{kHz}$ wird eine DFT durchgeführt. Welche Frequenzauflösung ergibt sich?

- ☐ $\Delta f = \frac{1}{20}\text{Hz}$.
- ☐ $\Delta f = \frac{1}{40}\text{Hz}$.
- ☐ $\Delta f = \frac{1}{80}\text{Hz}$.

b) Wie lässt sich eine hohe Frequenzauflösung erreichen?

- ☐ Indem die DFT mit möglichst vielen Messpunkten durchgeführt wird.
- ☐ Indem die DFT mit möglichst wenigen Messpunkten durchgeführt wird.
- ☐ Indem die Abtastfrequenz f_0 bei gleicher Messdauer niedriger gewählt wird.

c) Der sogenannte Leckeffekt kann reduziert werden durch die ...

- ☐ ... Multiplikation mit einem Rechteck-Fenster im Zeitbereich.
- ☐ ... Multiplikation mit einem Hann-Fenster im Zeitbereich.
- ☐ ... Faltung mit einem Hann-Fenster im Zeitbereich.

d) Eine Kurzzeit-DFT ...

- [ ] ... ist insbesondere bei instationären Signalen sinnvoll.
- [ ] ... ist insbesondere bei stationären Signalen sinnvoll.
- [ ] ... hat den Nachteil, dass Zeit- und Frequenzauflösung durch die Fensterbreite miteinander gekoppelt sind.

e) Die parametrische Frequenzanalyse ...

- [ ] ... erlaubt die Anwendung von Vorwissen über das Systemverhalten, indem ein Signalmodell vorgegeben wird.
- [ ] ... führt auf ein diskretes Amplitudenspektrum.
- [ ] ... hat so viele Parameter wie Messwerte.

f) Welche Aussage(n) bezüglich Filter ist/sind richtig?

- [ ] Bei FIR-Filtern sind die Parameter identisch mit der gefensterten Impulsantwort.
- [ ] Bei IIR-Filtern sind die Parameter identisch mit der gefensterten Impulsantwort.
- [ ] Die Parameteradaption ist bei FIR-Filtern unproblematisch, da diese nicht instabil werden können.

g) Für ein FIR-Filter mit der Grenzfrequenz f_g ist die Abtastfrequenz f_0 festzulegen. Kreuzen Sie Zutreffendes an.

- [ ] f_0 sollte so groß wie möglich gewählt werden.
- [ ] f_0 sollte so klein wie möglich gewählt werden.
- [ ] f_0 sollte in jedem Fall mindestens doppelt so groß sein wie die gewünschte Grenzfrequenz f_g.

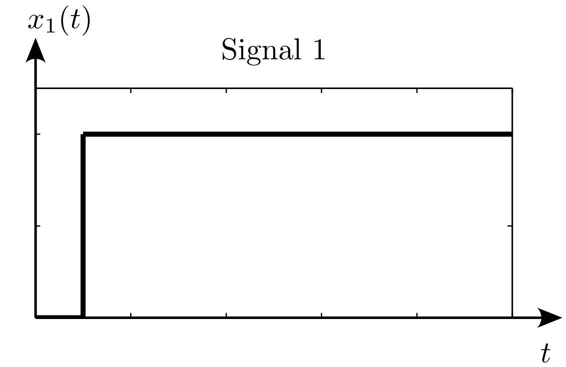
Aufgabe 2: Aliasing

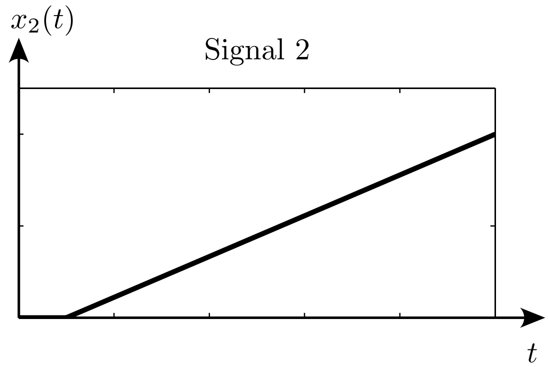
In den unten stehenden Diagrammen sind zwei Signalverläufe $x_1(t)$ und $x_2(t)$ gezeigt. Außerdem sind zwei Amplitudenspektren dargestellt.

a) Ordnen Sie beide Signale dem jeweiligen Amplitudenspektrum zu. Tragen Sie dazu die zugehörige Ziffer in die vorgesehenen Quadrate ein. Erläutern Sie Ihre Zuordnung.

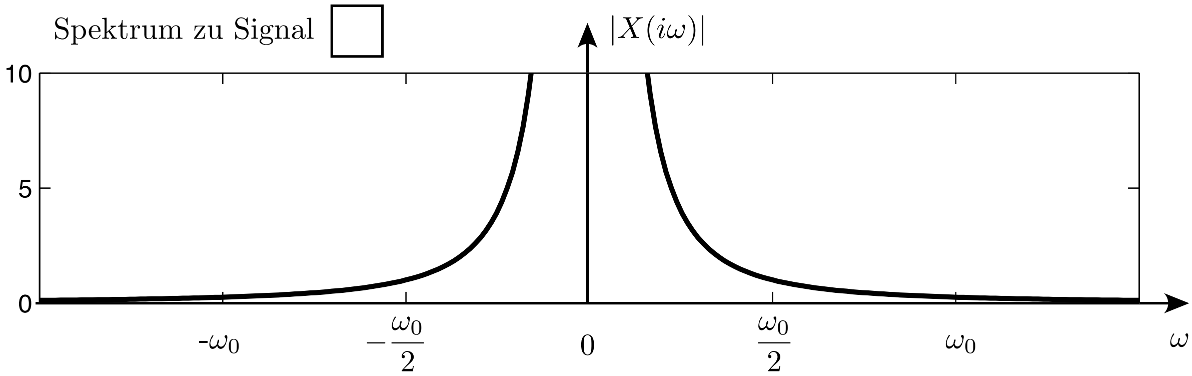
b) Zeichnen Sie qualitativ die Schattenspektren ein.

c) Bei welchem Signal bzw. Spektrum ist eine höhere Gefahr bezüglich Aliasing zu erwarten und warum? Welche Punkte im Spektrum sind ausschlaggebend?

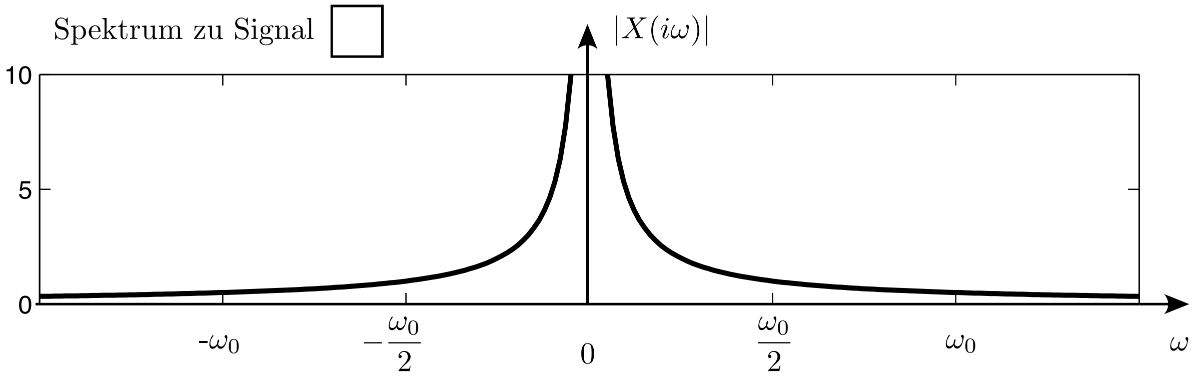




Spektrum zu Signal ☐

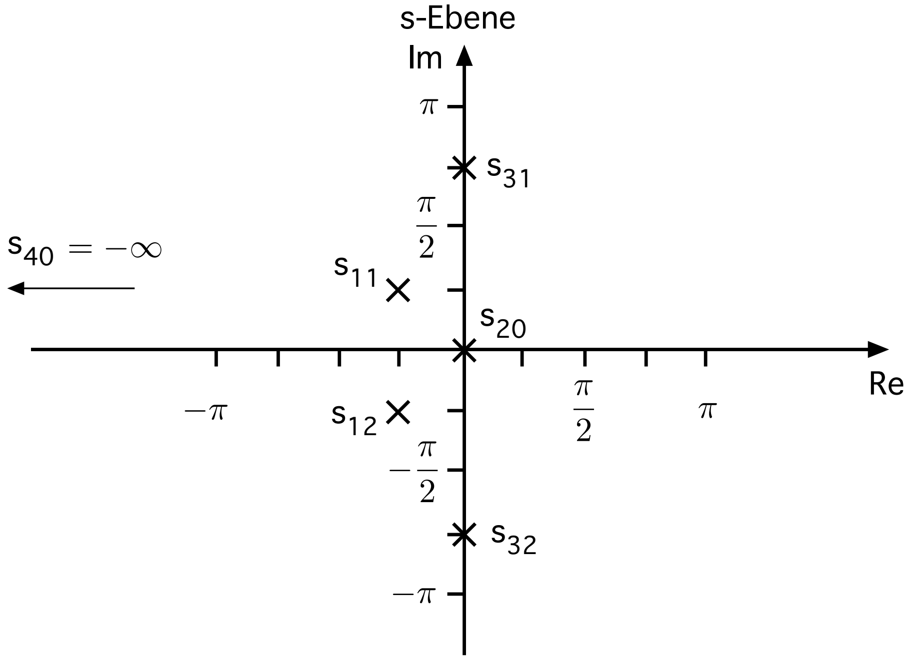


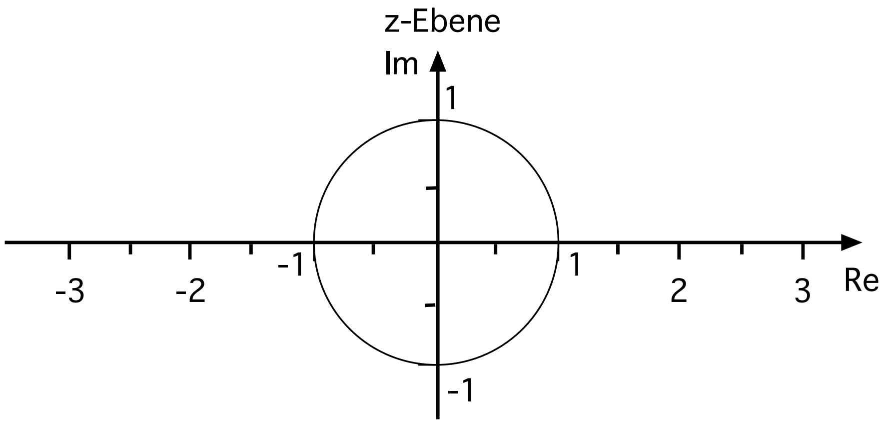
Spektrum zu Signal ☐



Aufgabe 3: Beziehung zwischen s-Ebene und z-Ebene

Berechnen Sie die Lage der Punkte s_{ij} (insgesamt vier Pole!) in der z-Ebene z_{ij} und zeichnen Sie diese in die z-Ebene ein. Benutzen Sie dazu in der z-Ebene die gleichen Indizes wie im s-Bereich. Nehmen Sie zur Umrechnung ein Abtastintervall von $T_0 = 1$ Sekunde an.





Aufgabe 4: Filter

Gegeben ist das unten gezeigte Signal $u(k)$, welches gefiltert werden soll. Für Werte von k, die kleiner als -2 oder größer als 10 sind, sei das Eingangssignal Null. Zur Filterung dient zum einen ein Median-Filter:

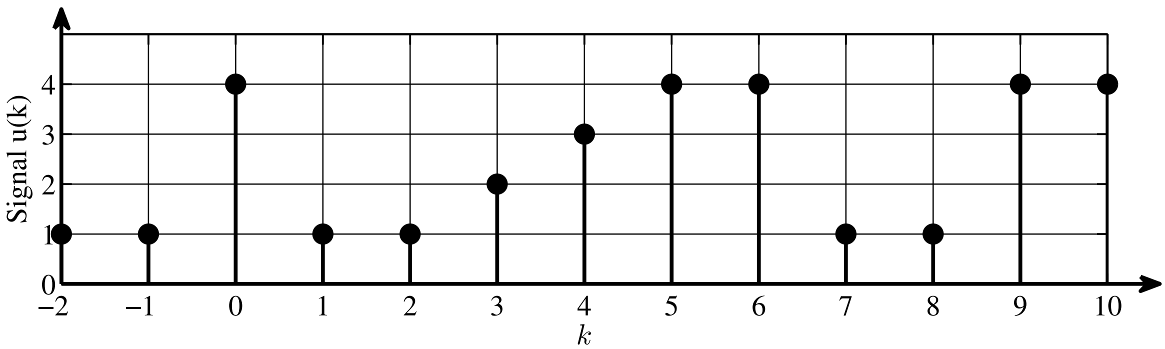
$$G_1(z) \quad = \quad \text{median}\{u(k), u(k-1), u(k-2)\} \ .$$

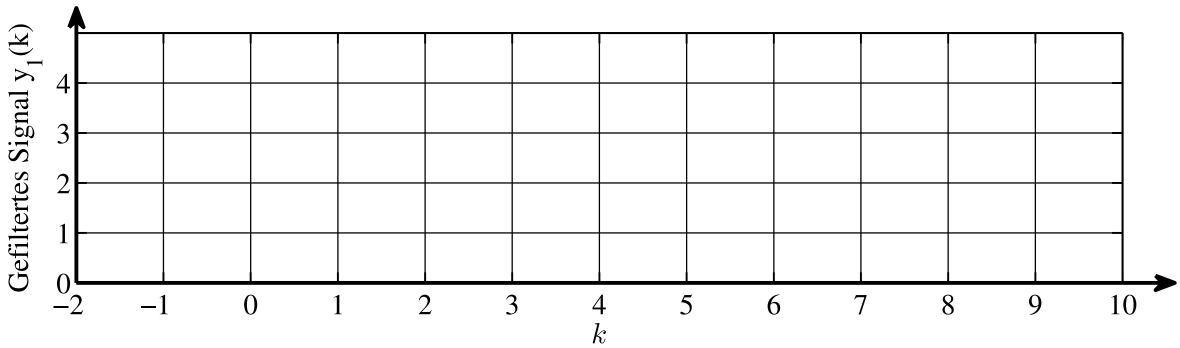
Zum anderen soll ein kausales Mittelwertfilter 2. Ordnung $G_2(z)$ Verwendung finden.

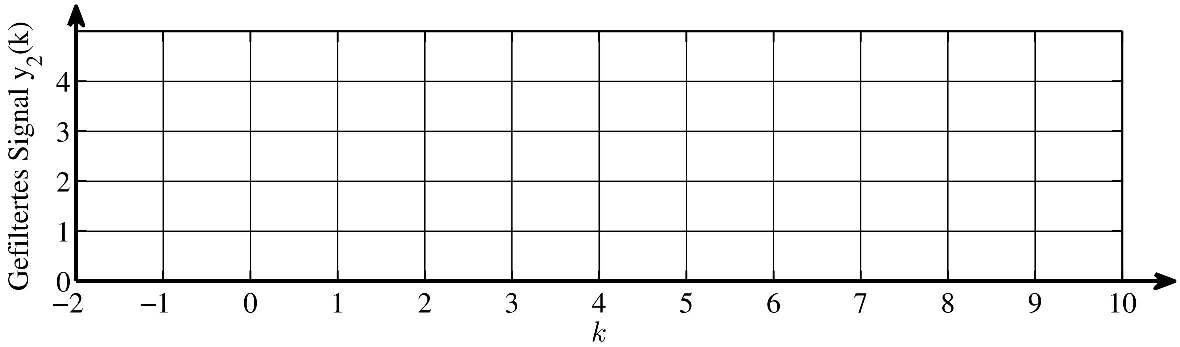
a) Stellen Sie die Differenzengleichung für das kausale Mittelwertfilter 2. Ordnung auf.

b) Berechnen und skizzieren Sie sowohl das mit $G_1(z)$ gefilterte Signal $y_1(k)$ als auch das mit $G_2(z)$ gefilterte Signal $y_2(k)$. Benutzen Sie für die Skizzen die vorbereiteten Diagramme und geben Sie die Ausgangsfolgen in folgender Form an:
$y(k) = \{y(-2), y(-1), y(0), \ldots, y(10)\}$.

c) Handelt es sich bei $G_1(z)$ und $G_2(z)$ jeweils um einen Tiefpass- oder um einen Hochpass-Filter?







Aufgabe 5: Zeitdiskrete Systeme

Ein System wird durch folgende Übertragungsfunktion beschrieben:

$$y(k) = b_0\, u(k) - a_1\, y(k-1)$$

a) Zeichnen Sie das dazugehörige Blockschaltbild, das darstellt wie $y(k)$ aus $u(k)$ entsteht.

b) Begründen Sie kurz, ob es sich um ein FIR oder IIR System handelt.

c) Begründen Sie kurz, ob das System sprungfähig ist.

d) Begründen Sie kurz, ob die Stabilität des Systems von b_0 oder a_1 abhängt. Für welche Werte von b_0 bzw. a_1 ist das System

   1) Stabil.
   2) Grenzstabil.
   3) Instabil.

e) Skizzieren sie die Impulsantwort für die Fälle $a_1 = -\frac{1}{2}$ und $a_1 = -2$.

f) Welcher Effekt tritt für $a_1 > 0$ auf? Skizzieren Sie qualitativ die daraus resultierende Impulsantwort.

g) Wie lautet die z-Transformierte der Übertragungsfunktion, wenn die Invarianz der Impulsantwort gefordert wird?

h) Begründen Sie kurz, ob das System totzeitbehaftet ist.

i) Begründen Sie kurz, ob es sich um ein kausales oder akausales System handelt.

j) Wie lautet die Verstärkung des Systems?

Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Für eine Messung mit $N = 20.000$ Messwerten und einer Abtastfrequenz von $f_0 = 0,5\,\text{kHz}$ wird eine DFT durchgeführt. Welche Frequenzauflösung ergibt sich?

- ☐ $\Delta f = \frac{1}{20}$Hz.
- ■ $\Delta f = \frac{1}{40}$Hz.
- ☐ $\Delta f = \frac{1}{80}$Hz.

b) Wie lässt sich eine hohe Frequenzauflösung erreichen?

- ■ Indem die DFT mit möglichst vielen Messpunkten durchgeführt wird.
- ☐ Indem die DFT mit möglichst wenigen Messpunkten durchgeführt wird.
- ☐ Indem die Abtastfrequenz f_0 bei gleicher Messdauer niedriger gewählt wird.

c) Der sogenannte Leckeffekt kann reduziert werden durch die ...

- ☐ ... Multiplikation mit einem Rechteck-Fenster im Zeitbereich.
- ■ ... Multiplikation mit einem Hann-Fenster im Zeitbereich.
- ☐ ... Faltung mit einem Hann-Fenster im Zeitbereich.

d) Eine Kurzzeit-DFT ...

- ■ ... ist insbesondere bei instationären Signalen sinnvoll.
- ☐ ... ist insbesondere bei stationären Signalen sinnvoll.
- ■ ... hat den Nachteil, dass Zeit- und Frequenzauflösung durch die Fensterbreite miteinander gekoppelt sind.

e) Die parametrische Frequenzanalyse...

- ■ ... erlaubt die Anwendung von Vorwissen über das Systemverhalten, indem ein Signalmodell vorgegeben wird.
- ☐ ... führt auf ein diskretes Amplitudenspektrum.
- ☐ ... hat so viele Parameter wie Messwerte.

f) Welche Aussage(n) bezüglich Filter ist/sind richtig?

- ■ Bei FIR-Filtern sind die Parameter identisch mit der gefensterten Impulsantwort.
- ☐ Bei IIR-Filtern sind die Parameter identisch mit der gefensterten Impulsantwort.
- ■ Die Parameteradaption ist bei FIR-Filtern unproblematisch, da diese nicht instabil werden können.

g) Für ein FIR-Filter mit der Grenzfrequenz f_g ist die Abtastfrequenz f_0 festzulegen. Kreuzen Sie Zutreffendes an.

☐ f_0 sollte so groß wie möglich gewählt werden.

■ f_0 sollte so klein wie möglich gewählt werden.

■ f_0 sollte in jedem Fall mindestens doppelt so groß sein wie die gewünschte Grenzfrequenz f_g.

$\boxed{\sum 10}$

Aufgabe 2: Aliasing

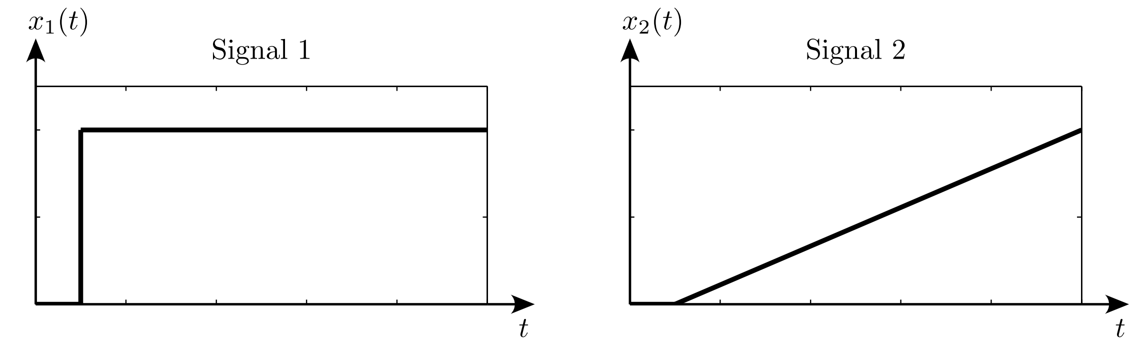
In den unten stehenden Diagrammen sind zwei Signalverläufe $x_1(t)$ und $x_2(t)$ gezeigt. Außerdem sind zwei Amplitudenspektren dargestellt.

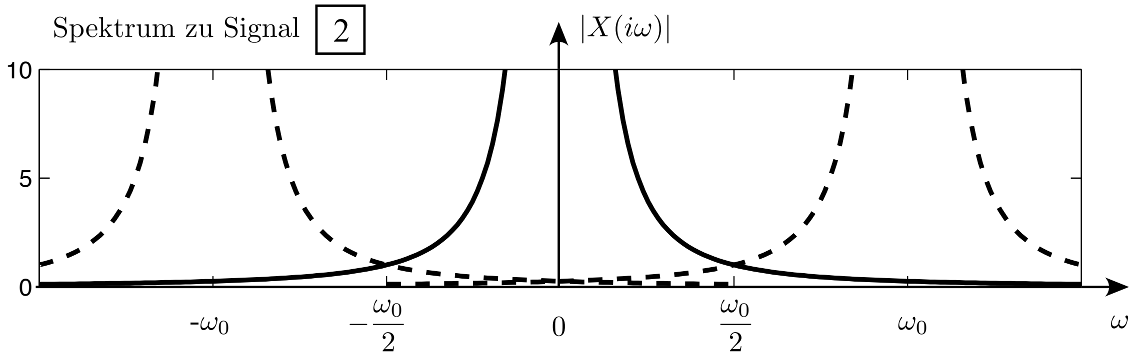
a) Ordnen Sie beide Signale dem jeweiligen Amplitudenspektrum zu. Tragen Sie dazu die zugehörige Ziffer in die vorgesehenen Quadrate ein. Erläutern Sie Ihre Zuordnung.

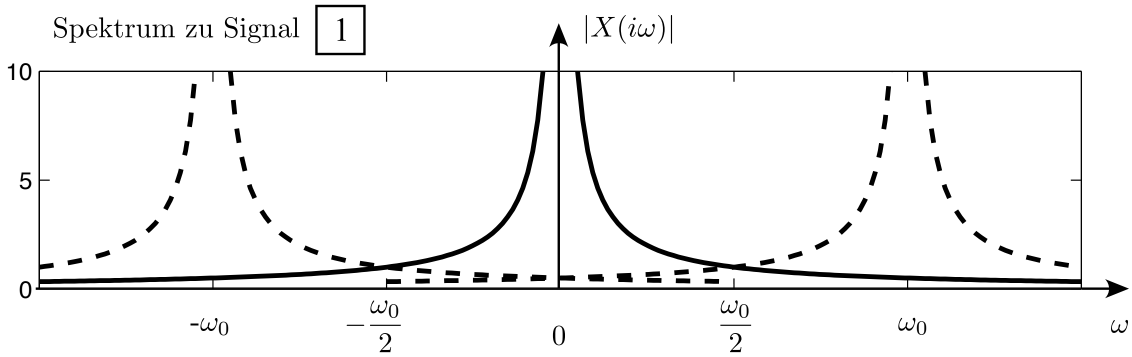
b) Zeichnen Sie qualitativ die Schattenspektren ein.

c) Bei welchem Signal bzw. Spektrum ist eine höhere Gefahr bezüglich Aliasing zu erwarten und warum? Welche Punkte im Spektrum sind ausschlaggebend?

Ausschlaggebend sind die Amplitudenwerte bei der Shannon-Frequenz $\frac{\omega_0}{2}$. Bei Überlagerung des Hauptspektrums mit den Schattenspektren sollte die Amplitude an diesem Schnittpunkt möglichst klein sein. Damit ist bezüglich Aliasing das Signal 2 dem Signal 1 vorzuziehen, weil die Aliasing-Gefahr bei Signal 1 höher ist.







$\sum 6$

Aufgabe 3: Beziehung zwischen s-Ebene und z-Ebene

Allgemein: $z = e^{sT_0}$ mit $T_0 = 1$ folgt $z = e^s$

$z_{11} = e^{-\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}}[cos(\frac{\pi}{4}) + isin(\frac{\pi}{4})] \approx 0.32 + i0.32;$ 1

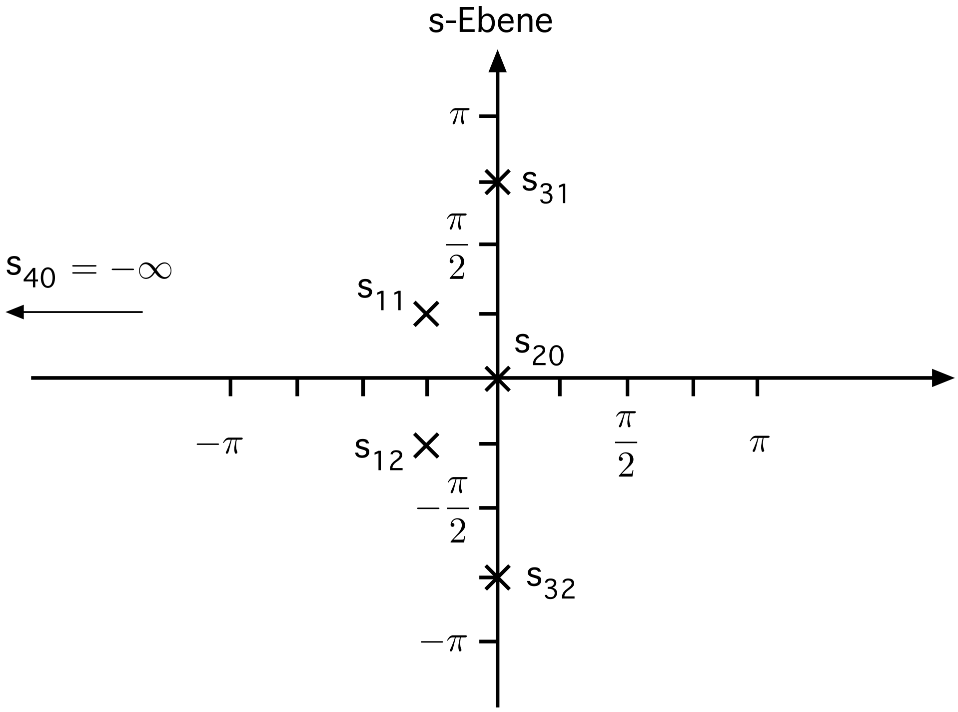
$z_{12} \approx 0.32 - i0.32;$ 1

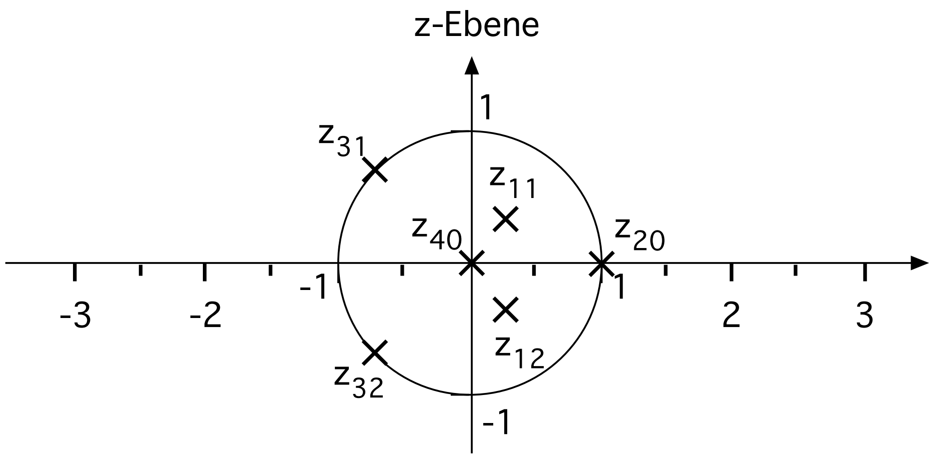
$z_{20} = e^0 = 1;$ 2

$z_{31} = e^0 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \approx -0.71 + i0.71;$ 1

$z_{32} \approx -0.71 - i0.71;$ 1

$z_{40} = e^{-\infty} = 0$ 4





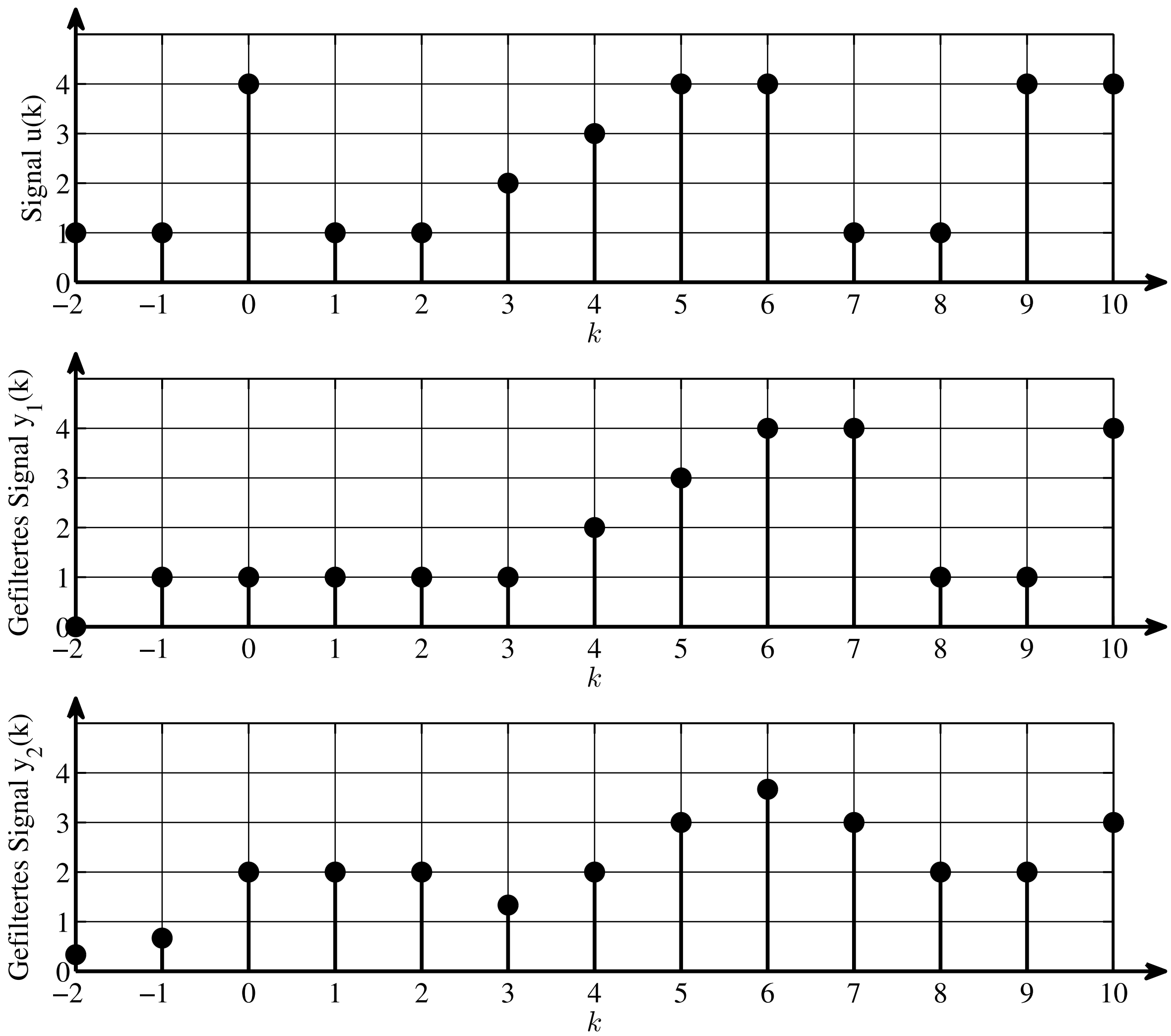
$\sum 10$

Aufgabe 4: Filter

a) $y_2(k) = \frac{1}{3}\left(u(k) + u(k-1) + u(k-2)\right)$. $\boxed{2}$

b) Siehe Diagramme. $\boxed{6}$
$y_1(k) = \{0; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 3; 4; 4; 1; 1; 4\}$ $\boxed{2}$
$y_2(k) = \{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 2; 2; 2; \frac{4}{3}; 2; 3; \frac{11}{3}; 3; 2; 2; 3\}$ $\boxed{2}$

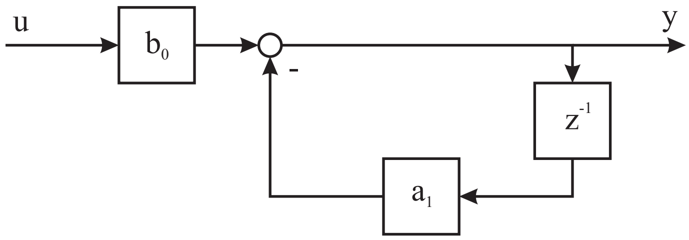
c) $G_1(z)$ und $G_2(z)$ sind Tiefpassfilter. $\boxed{2}$



$\boxed{\sum 14}$

Aufgabe 5: Zeitdiskrete Systeme

a)



2

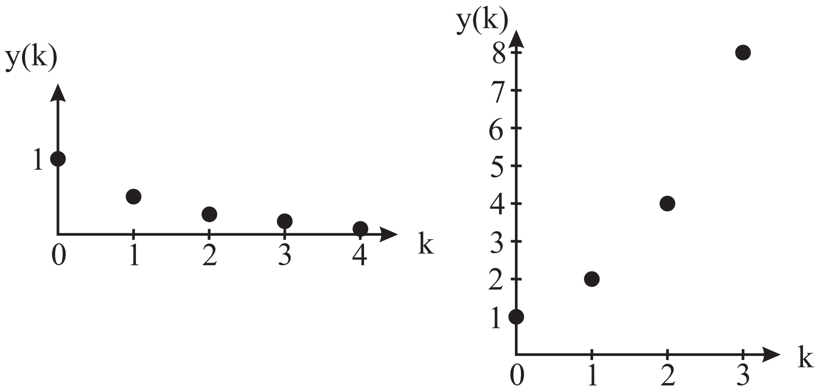
b) Es handelt sich um ein IIR System, da eine Rückkopplung des vergangenen Ausgangswertes $y(k-1)$ genutzt wird, um den aktuellen Ausgangswert $y(k)$ zu berechnen. 2

c) Das System ist sprungfähig, da der Eingang u ohne Zeitverzögerung auf den Ausgang y wirkt. 1

d) Die Stabilität des Systems hängt von a_1 ab, da die Rückkopplung von y ausschlaggebend für die Stabilität ist. 1

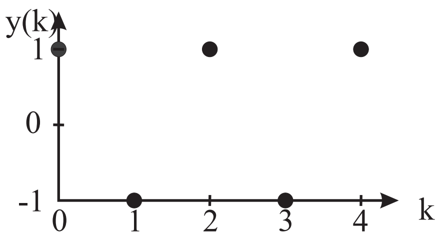
1) Das System ist für $|a_1| < 1$ stabil.
2) Das System ist für $|a_1| = 1$ grenzstabil.
3) Das System ist für $|a_1| > 1$ instabil. 1

e)



4

f) Es entsteht eine alternierende Folge, z.B. für $a_1 = 1$: 1



2

g)

$$\begin{aligned} Y(z) &= b_0 \cdot U(z) - a_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} \\ (1 + a_1 \cdot z^{-1})\, Y(z) &= b_0 \cdot U(z) \\ G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 \cdot z^{-1}} = \frac{b_0 \cdot z}{z + a_1} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

h) Nein, da kein Term z^{-1} ausklammerbar ist. $\boxed{1}$

i) Das System ist kausal, da keine Terme sich auf zukünftige Werte beziehen, d.h. es treten keine Terme $u(k+x)$ bzw $y(k+x)$ auf. $\boxed{1}$

j)

$$\begin{aligned} \text{Verstärkung:} \quad & \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot G(z) \cdot \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{\text{Sprung}} \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{b_0 \cdot z}{z + a_1} \cdot z = \frac{b_0}{1 + a_1} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

$\boxed{\sum 20}$