Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

27. August 2014

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	24	10	20	12	14	80
Note:	Ist:						

In dieser Klausur sind maximal 80 Punkte zu erreichen. Das Erreichen von 60 Punkten führt garantiert zur bestmöglichen Note (1.0).

Aufgabe 1: Zeitdiskrete Systeme

Gegeben sind die folgenden beiden Filter-Übertragungsfunktionen

$$G_1(z) = \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z^2} \quad \text{und}$$
$$G_2(z) = \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z} \; .$$

Gehen Sie für alle folgenden Untersuchungen von einer Abtastzeit von $T_0 = 1/4$ Sekunde aus.

a) Bestimmen Sie die Differenzengleichungen zu den beiden Filtern $G_1(z)$ und $G_2(z)$.

b) Zeichnen Sie für die beiden Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ jeweils das entsprechende Blockschaltbild.

c) Berechnen Sie die Pole der Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ in der z-Ebene.

d) Berechnen Sie mithilfe der Beziehung zwischen s- und z-Ebene, die Lage der Pole in der s-Ebene.

e) Berechnen Sie die Endwerte der Sprungantworten (Verstärkungen) sowohl für $G_1(z)$ als auch für $G_2(z)$, indem Sie den Endwertsatz anwenden. Im Allgemeinen lautet der Endwertsatz für ein Signal $x(k)$:

$$x(k \to \infty) = (z-1) \lim_{z \to 1} X(z) \; .$$

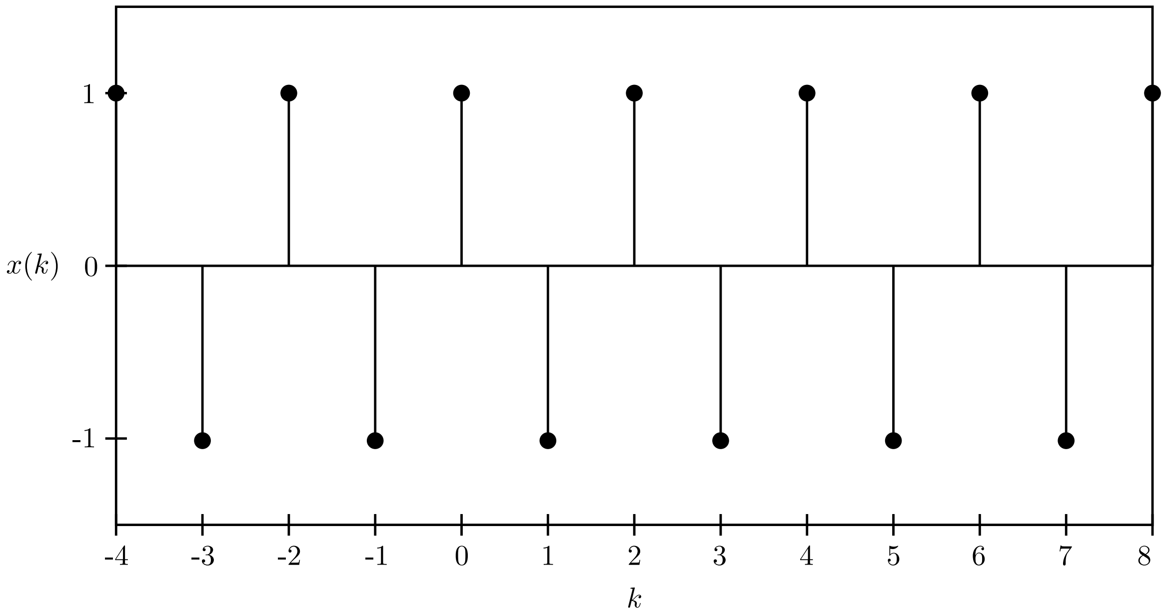
f) Entscheiden Sie für die beiden Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ jeweils, ob es sich um ein kausales oder akausales System handelt. Begründen Sie kurz.

g) Berechnen Sie für beide Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ deren Phase in Abhängigkeit der Frequenz ω.

h) Zeichnen Sie für beide Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ den jeweiligen Phasengang. Bis zu welcher Frequenz ω_{grenz} zeichnet man den Phasengang eines abgetasteten Systems üblicherweise?

Aufgabe 2: Diskrete Fourier-Transformation

Gegeben ist die unten abgebildete periodische Folge $x(k)$.



a) Welche Periodendauer N hat das Signal?

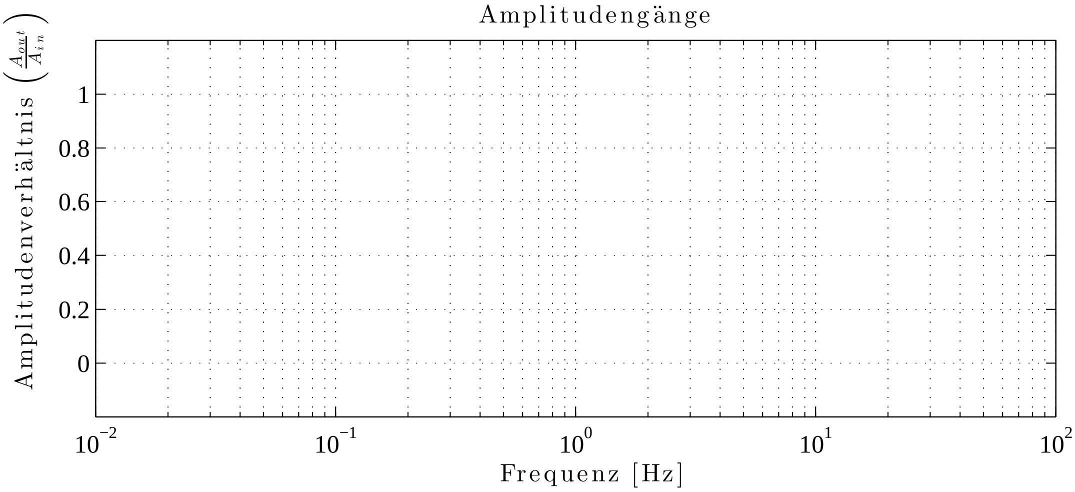
b) Stellen Sie das zu lösende Gleichungssystem zur diskreten Fourier-Transformierten $X(n)$ auf und formulieren Sie es in Matrix-Vektor-Schreibweise $\underline{X} = \underline{F}\,\underline{x}$. Beschränken Sie sich dabei zunächst auf die allgemeine Formulierung mithilfe der Abkürzung $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ und einem allgemeinen Signal $\underline{x}$ bzw. $x(k)$.

c) Berechnen Sie die benötigten Fourier-Koeffizienten W_N^{nk} und stellen Sie diese in der komplexen Ebene dar.

d) Setzen Sie in das Gleichungssystem das vorliegende Signal $x(k)$ und die Fourier-Koeffizienten ein und berechnen Sie das diskrete Amplitudenspektrum $|X(n)|$.

Aufgabe 3: Filter

a) Es sollen zwei Filter G_{TP} und G_{HP} miteinander verglichen werden. Bei G_{TP} handelt es sich um ein Tiefpassfilter, bei G_{HP} um ein Hochpassfilter. Die Grenzfrequenz des ersten Filters G_{TP} ist $f_{TP} = 2$ Hz, die des zweiten Filters G_{HP} beträgt $f_{HP} = 1$ Hz. Zeichnen Sie die **idealen** Amplitudengänge der beiden Filter G_{TP} und G_{HP} in das unten stehende Diagramm und kennzeichnen Sie, welcher Amplitudengang zu Filter G_{TP} und welcher zu Filter G_{HP} gehört.



Die folgenden Teilaufgaben sind vollkommen unabhängig von Aufgabenteil a), d.h. die im folgenden erwähnten Filter haben nichts mit denen aus Aufgabenteil a) zu tun.

b) Es sind die folgenden beiden Filter-Übertragungsfunktionen im z-Bereich gegeben:

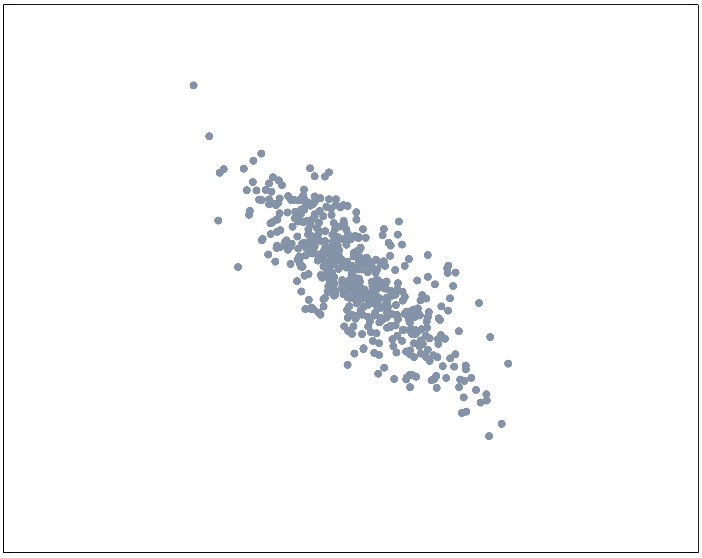
$$G_1(z) = \frac{1}{3}\left(z^{-2} + z^{-5} + z^{-8}\right) \quad \text{und}$$
$$G_2(z) = \frac{1}{3}\left(z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-5} - \frac{1}{2}z^{-8}\right) \; .$$

Berechnen und zeichnen Sie die Sprungantworten der beiden Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ für eine Abtastzeit von $T_S = 1/8$ Sekunde.

c) Weisen Sie den Filtern $G_1(z)$ und $G_2(z)$ aus Aufgabenteil b) jeweils die korrekte Bezeichnung zu und begründen Sie kurz Ihre Wahl. Zur Auswahl stehen die folgenden Bezeichnungen: Tiefpass und Hochpass.

Aufgabe 4: Hauptkomponentenanalyse und Clustering

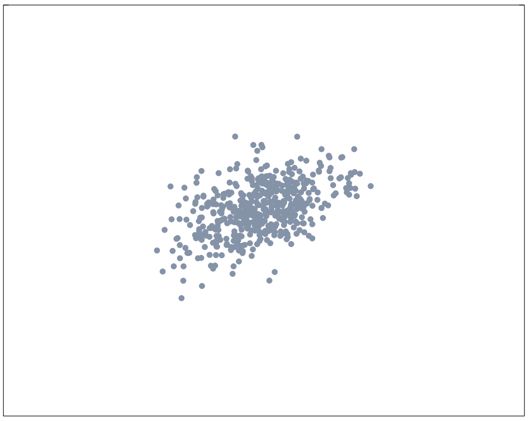
a) Gegeben ist folgende Datenverteilung:



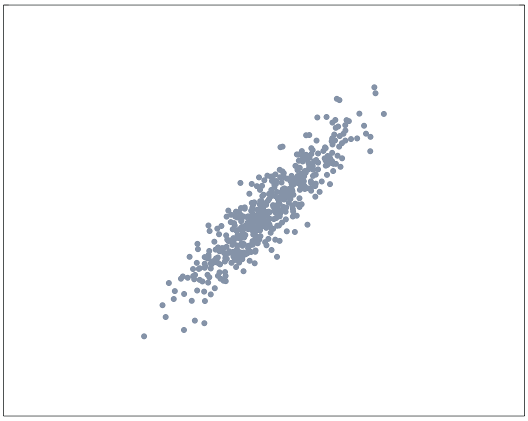
Zeichnen Sie **qualitativ** die erste und zweite Hauptkomponente ein und kennzeichnen Sie diese **deutlich** innerhalb des Bildes.

b) Als nächstes sind zwei Datenverteilungen gegeben:

a)



b)

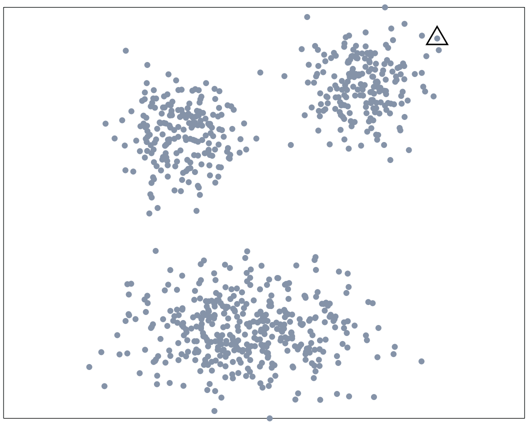


Welche eignet sich besser zur Dimensionsreduktion, a) oder b) ? Begründen Sie kurz ihre Antwort.

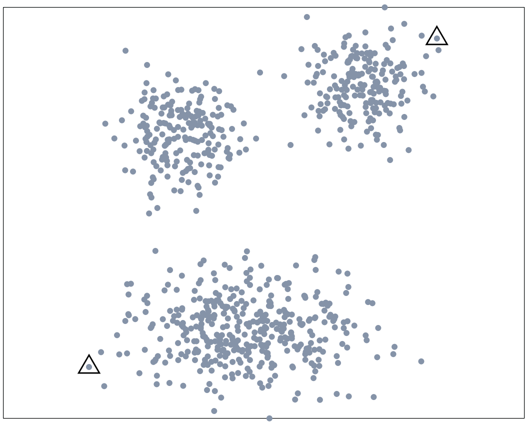
c) Gegeben ist nun eine Datenverteilung. Sie soll nun mit unterschiedlichen Anzahlen von Clustern mit Hilfe des k-means-Algorithmus gruppiert werden. Die mit Dreiecken versehenden Punkte sind die Initialwerte der Zentren für das Clustering.

Zeichnen Sie nun in die gegebenen Bilder die resultierenden Zentren der Cluster ein. Warum ist es notwendig die Startpunkte der Berechnung vorzugeben?

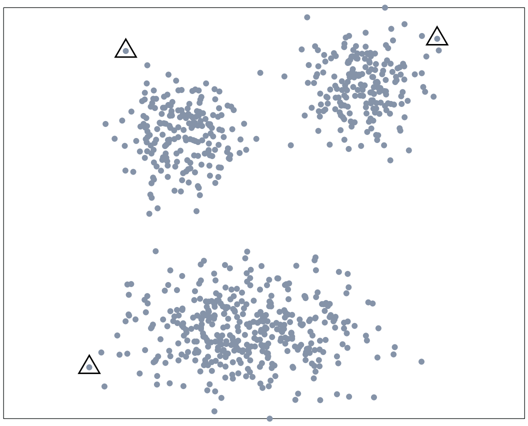
1)



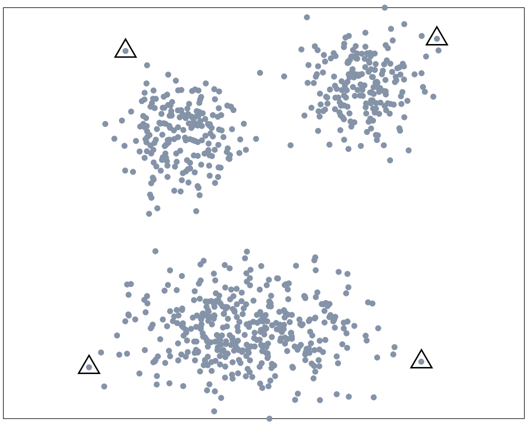
2)



3)

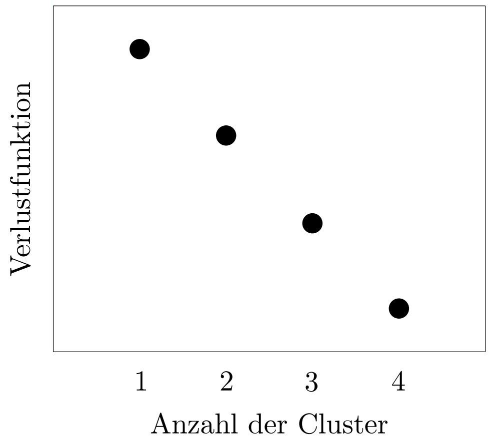


4)

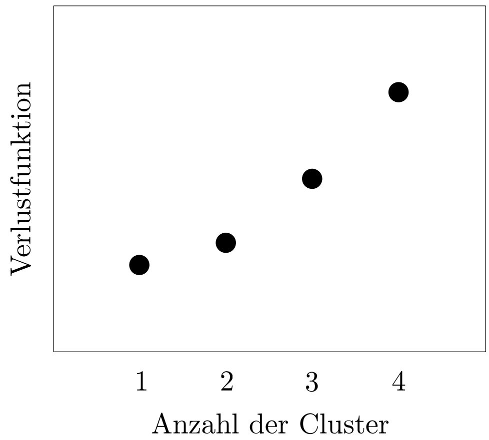


d) Gegeben sind vier mögliche Verläufe der Verlustfunktion des k-means-Algorithmus über der Anzahl der Cluster. Wählen Sie aus diesen Verläufen denjenigen aus, die zu der Datenverteilung aus c) passt.

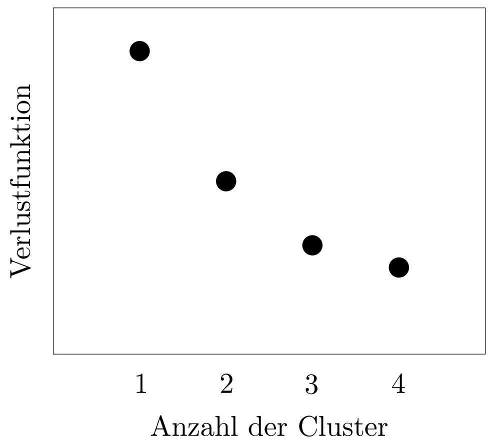
1)



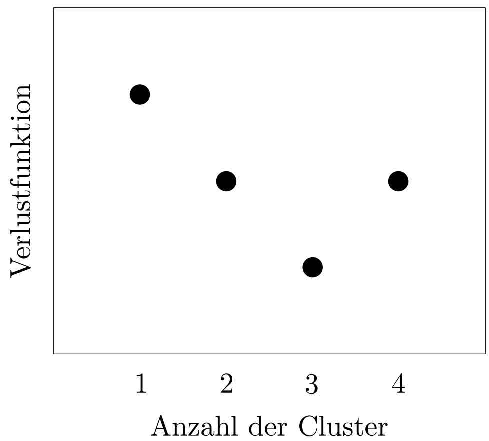
2)



3)



4)



Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

a) Skizzieren Sie in **einem** Koordinatensystem qualitativ **drei** Normalverteilungen, mit folgenden Eigenschaften:

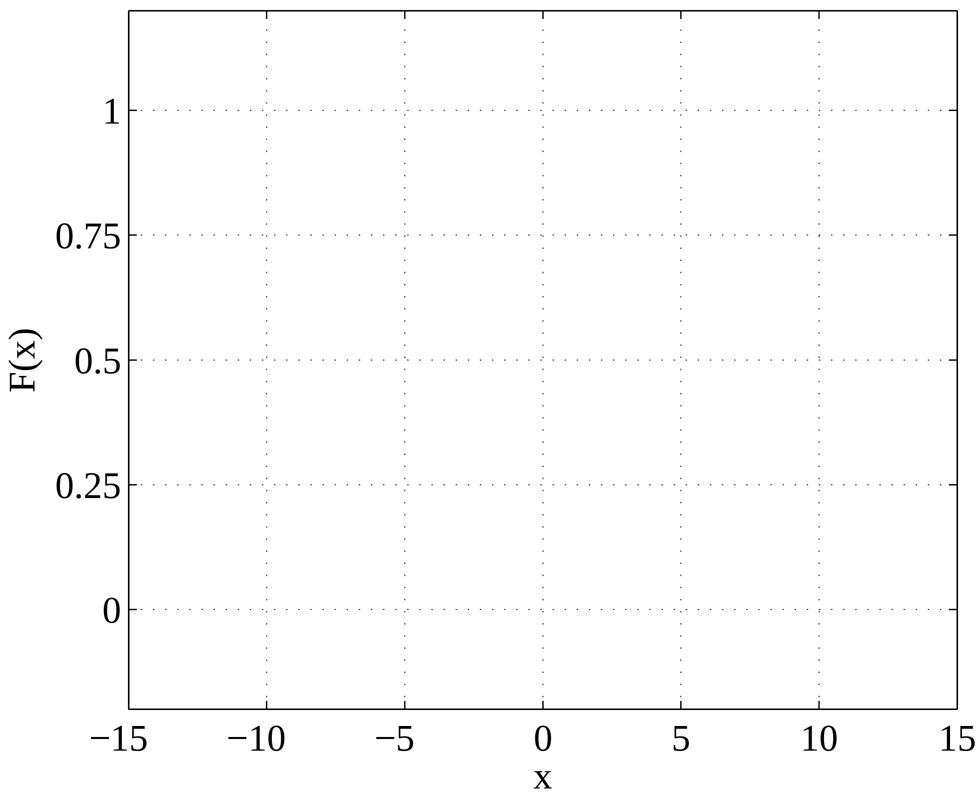
I Erwartungswert $\mu_1 = 0$, Standardabweichung $\sigma_1 = 1$.

II Erwartungswert $\mu_2 = -5$, Standardabweichung $\sigma_2 = 2$.

III Erwartungswert $\mu_3 = 5$, Standardabweichung $\sigma_3 = 4$.

Kennzeichnen Sie, welche der gezeichneten Normalverteilungen welcher der drei oben aufgeführten Normalverteilungen entsprechen soll.

b) Zeichnen Sie nun in das unten vorgegebene Koordinatensystem die kumulierten Verteilungsfunktionen (Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen) zu den drei Normalverteilungen I, II und III aus Aufgabenteil a) ein.



Generell genügt es die Verläufe qualitativ zu zeichnen - es sollten jedoch charakteristische Punkte möglichst exakt wiederzuerkennen sein. Zudem gilt es die relativen Unterschiede der Verläufe herauszuarbeiten.

Lösungen:

Aufgabe 1: Zeitdiskrete Systeme

a) Bestimmen Sie die Differenzengleichungen zu den beiden Filtern $G_1(z)$ und $G_2(z)$.

$$G_1(z) = \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z^2}$$
$$\Leftrightarrow G_1(z) = \frac{1}{3}\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$y_1(k) = \frac{1}{3}u(k) + \frac{1}{3}u(k-1) + \frac{1}{3}u(k-2)$$

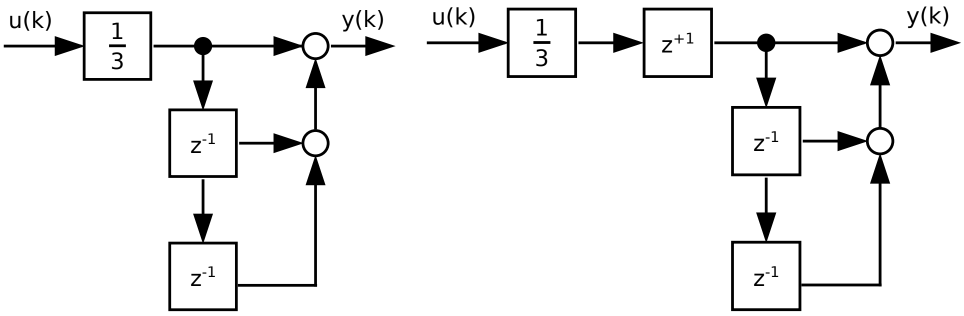
$$G_2(z) = \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z}$$
$$\Leftrightarrow G_2(z) = \frac{1}{3}\left(z + 1 + z^{-1}\right)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$y_2(k) = \frac{1}{3}u(k+1) + \frac{1}{3}u(k) + \frac{1}{3}u(k-1)$$

$\boxed{4}$

b) Zeichnen Sie für die beiden Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ jeweils das entsprechende Blockschaltbild.



(a) Blockschaltbild $G_1(z)$ (b) Blockschaltbild $G_2(z)$

$\boxed{4}$

c) Berechnen Sie die Pole der Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ in der z-Ebene.

$$\Leftrightarrow G_1(z) = \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z^2}$$

$\Rightarrow$ Doppelpol bei $z_{pG1} = 0$.

$$\Leftrightarrow G_2(z) = \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z}$$

$\Rightarrow$ Einfachpol bei $z_{pG2} = 0$. $\boxed{2}$

d) Berechnen Sie mithilfe der Beziehung zwischen s- und z-Ebene, die Lage der Pole in der s-Ebene.

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{e}^{sT_0} \\ \Leftrightarrow s &= \frac{1}{T_0} \ln z \end{aligned}$$

$\Rightarrow s_{pG1} = s_{pG2} = -\infty.$ $\boxed{1}$

e) Berechnen Sie die Endwerte der Sprungantworten (Verstärkungen) sowohl für $G_1(z)$ als auch für $G_2(z)$, indem Sie den Endwertsatz anwenden.

$$\begin{aligned} h_1(t \to \infty) &= \lim_{z \to 1} (z-1) G_1(z) \qquad \underbrace{\Sigma(z)}_{z\text{-transformierter Einheitssprung}} \\ &= \lim_{z \to 1} \cancel{(z-1)} \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z^2} \frac{z}{\cancel{z-1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(t \to \infty) &= \lim_{z \to 1} (z-1) G_2(z) \Sigma(z) \\ &= \lim_{z \to 1} \cancel{(z-1)} \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z} \frac{z}{\cancel{z-1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

f) Entscheiden Sie für die beiden Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ jeweils, ob es sich um ein kausales oder akausales System handelt. Begründen Sie kurz.
$G_1(z)$: Kausales Filter, da nur aktuelle Werte des Eingangssignals u und vergangene Werte von u zur Berechnung des aktuellen Filterausgangs benötigt werden.
$G_2(z)$: Akausales Filter, da nur neben aktuellen und vergangenen Werten des Eingangssignals u zusätzlich zukünftige Werte bentïgt werden. $\boxed{2}$

g) Berechnen Sie für beide Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ deren Phase.
Berechnung der Phase von $G_1(z)$:

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z^2} \\ \Leftrightarrow G_1(z) &= \frac{1}{3} \left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right) \\ \Leftrightarrow G_1(z) &= \frac{1}{3} z^{-1} \left(z + 1 + z^{-1}\right) \\ \Leftrightarrow G_1(z) &= \frac{1}{3} z^{-1} \left(1 + z + z^{-1}\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

Zur Phasenberechnung setzt man nun $s = i\omega$. Dabei ergeben sich folgende Beziehungen: $\boxed{1}$

$$\begin{aligned} z^{\pm n} &= \mathrm{e}^{\pm nsT_0} \\ \Leftrightarrow z^{\pm n} &= \mathrm{e}^{\pm in\omega \cdot T_0} \\ \Leftrightarrow z^{\pm n} &= \cos(n\omega T_0) \pm i \sin(n\omega T_0) \ . \end{aligned}$$

Damit lässt sich Gl. 1 umschreiben zu: $\boxed{1}$

$$G_1(i\omega) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-i\omega T_0}\left(1 + \underbrace{\mathrm{e}^{i\omega T_0} + \mathrm{e}^{-i\omega T_0}}_{=2\cos(\omega T_0)}\right) .$$

Somit besitzt der Ausdruck in Klammern nur noch einen positiven Realteil. Die Phase lässt sich somit direkt ablesen:

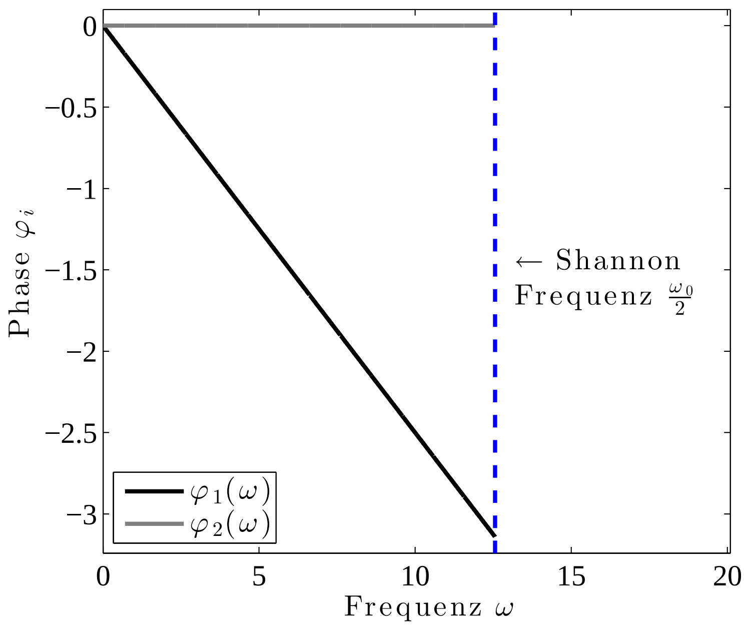
$$\varphi_1(\omega) = -\omega T_0 .$$

Berechnung der Phase von $G_2(z)$: $\boxed{2}$

$$G_2(z) = \frac{(z^2 + z^1 + 1)}{3z}$$
$$\Leftrightarrow G_2(z) = \frac{1}{3}\left(z + 1 + z^{-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow G_2(i\omega) = \frac{1}{3}\left(1 + \underbrace{\mathrm{e}^{i\omega T_0} + \mathrm{e}^{-i\omega T_0}}_{=2\cos(\omega T_0)}\right)$$

Da hier keinerlei Imaginärteil übrig bleibt, besitzt der Filter $G_2(z)$ eine Phasenverschiebung von $\varphi_2(\omega) = 0$. $\boxed{2}$

h) Zeichnen Sie für beide Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$ den jeweiligen Phasengang. Bis zu welcher Frequenz ω_{grenz} zeichnet man den Phasengang eines abgetasteten Systems üblicherweise?



Es gilt hier zu beachten, dass die Abszisse (x-Achse) in der Lösung linear skaliert ist. Üblicherweise ist diese Achse in der Darstellung des Phasengangs logarithmisch skaliert. $\boxed{2}$

Das zeichnen des Phasenganges zeitdiskreter Systeme macht nur bis zur Shannon-Frequenz Sinn $\omega_{\text{grenz}} = \frac{\omega_0}{2}$. $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 24}$

Aufgabe 2: Diskrete Fourier-Transformation

Allgemein: $\mathrm{DFT}\{x(k)\} = X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W_N^{nk}$ mit $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$.

a) Die Periodendauer ist $N = 2$. 1

b) Diskretes Zeitsignal ist periodisch mit $N = 2$ Abtastwerten:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} .$$

Somit ergibt sich die Rechenvorschrift zu:

$$\mathrm{DFT}\{x(k)\} = X(n) = \sum_{k=0}^{1} x(k) \cdot W_2^{nk} .$$

Das zu lösende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} X(0) &= W_2^0 \cdot x(0) + W_2^0 \cdot x(1) \\ X(1) &= W_2^0 \cdot x(0) + W_2^1 \cdot x(1) . \end{aligned}$$ 2

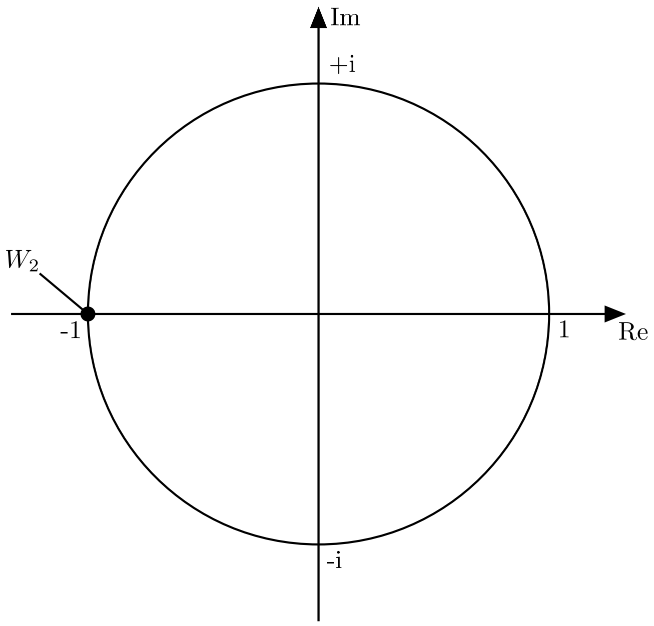
In Matrix-Vektor-Schreibweise umgeformt folgt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_2 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}}_{\underline{x}} . \quad (2)$$ 1

c) Es ist lediglich der Fourier-Koeffizienten W_2 zu berechnen:

$$W_2 = e^{-i\frac{2\pi}{2}\cdot 1} = \cos(-\pi) + i \cdot \sin(-\pi) = -1 .$$ 1

Fourier-Koeffizient W_2 in der Komplexe Ebene:



3

d) Das gegebene Signal mit der Periodendauer $N = 2$ ist:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Eingesetzt in Gleichung 2 ergibt sich mit $W_2 = -1$ für $\underline{X}$:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & (-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} .$$ 1

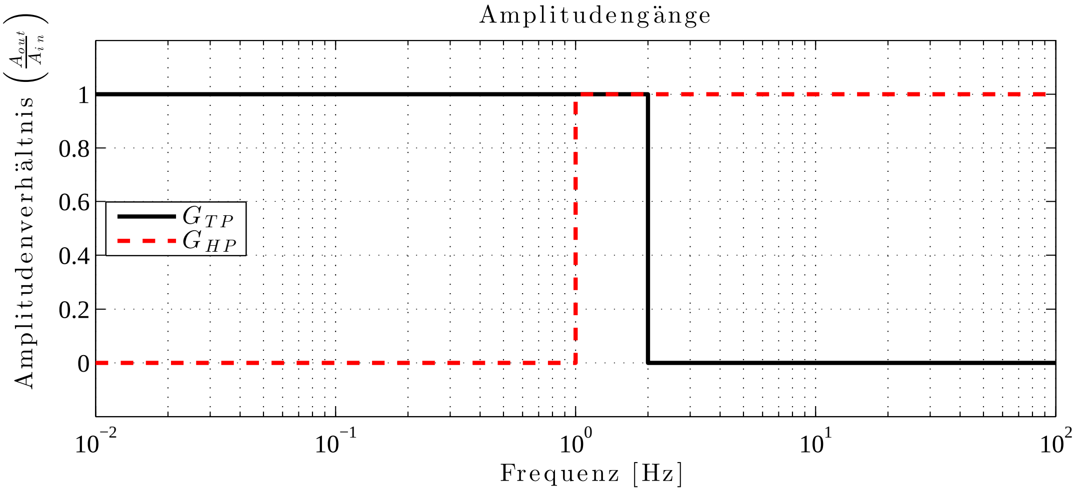
Eingesetzt ergibt sich das Amplitudenspektrum $|\underline{X}|$:

$$|\underline{X}| = \begin{bmatrix} |0| \\ |2| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} .$$ 1

$\sum 10$

Aufgabe 3: Filter

a) Zeichnen Sie die idealen Amplitudengänge der beiden Filter G_1 und G_2.



$\boxed{4}$

b) Berechnen und zeichnen Sie die Sprungantworten der beiden Filter $G_1(z)$ und $G_2(z)$.
Sprung: $\sigma(k) = 1$, für $k \geq 0$.
Berechnung der Sprungantwort für $G_1(z)$:

$$G_1(z) = \frac{1}{3}\left(z^{-2} + z^{-5} + z^{-8}\right)$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$y_1(k) = \frac{1}{3}\left(u(k-2) + u(k-5) + u(k-8)\right)$$

$$\Rightarrow h_1(k=0) = \frac{1}{3}\left(\sigma(-2) + \sigma(-5) + \sigma(-8)\right)$$
$$= 0$$

$$h_1(k = 2 \text{ bis } k = 4) = \frac{1}{3}$$
$$h_1(k = 4 \text{ bis } k = 7) = \frac{2}{3}$$
$$h_1(k = 8 \text{ bis } k = \infty) = 1$$

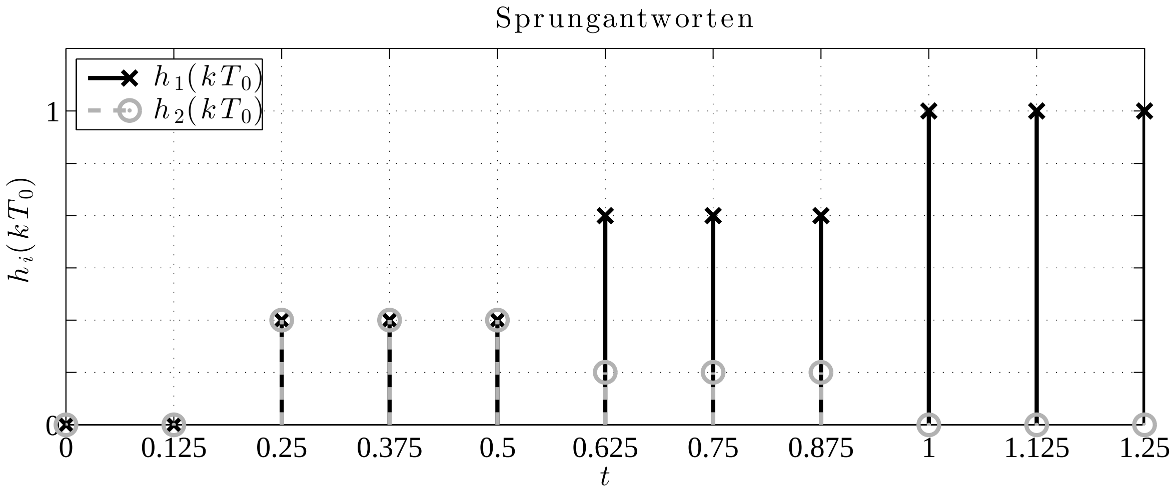
$\boxed{4}$

Berechnung der Sprungantwort für $G_2(z)$:

$$
\begin{aligned}
G_2(z) &= \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{6}z^{-5} - \frac{1}{6}z^{-8} \\
&\;\;\bullet\!\!-\!\!\circ \\
y_1(k) &= \frac{1}{3}u(k-2) - \frac{1}{6}u(k-5) - \frac{1}{6}u(k-8) \\
\Rightarrow h_2(k=0) &= \frac{1}{3}\sigma(-2) - \frac{1}{6}\sigma(-5) - \frac{1}{6}\sigma(-8) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_2(k=2 \text{ bis } k=4) &= \frac{1}{3} \\
h_2(k=4 \text{ bis } k=7) &= \frac{1}{6} \\
h_2(k=8 \text{ bis } k=\infty) &= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$



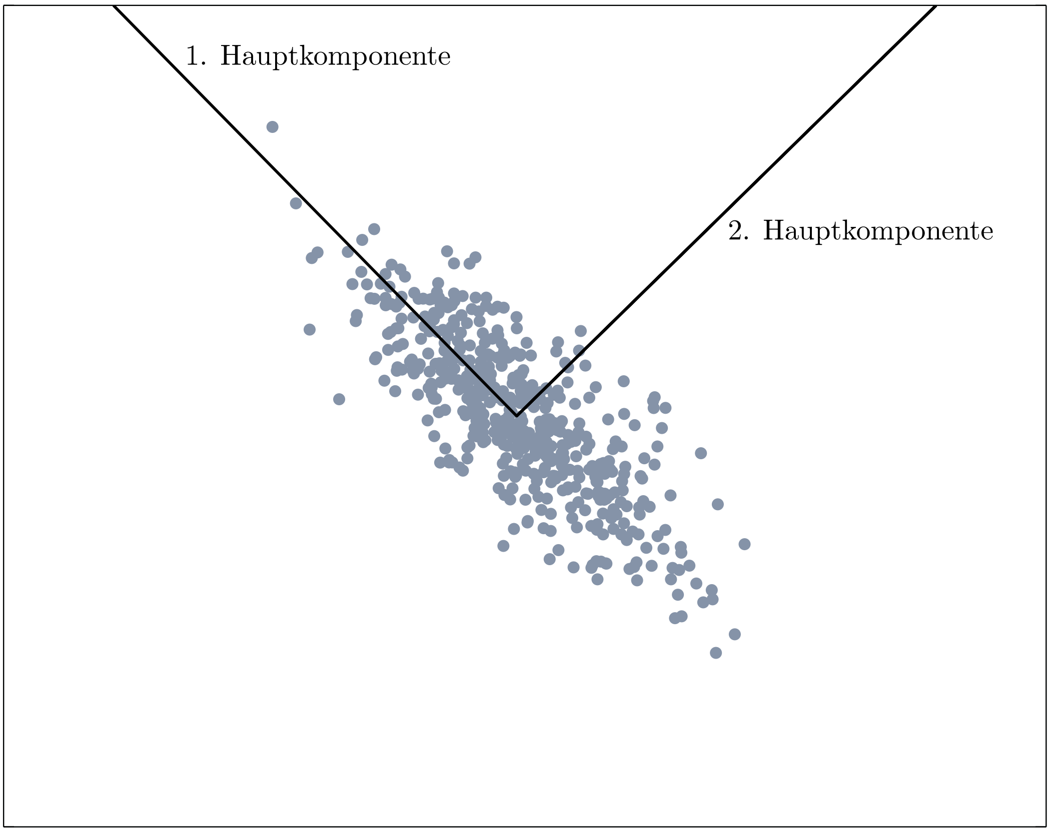
$\boxed{4}$

c) Weisen Sie den Filtern $G_1(z)$ und $G_2(z)$ aus Aufgabenteil b) jeweils die korrekte Bezeichnung zu.
$G_1(z)$: Tiefpass. Aus der Sprungantwort ist abzulesen, dass ein konstanter Wert für $t \to \infty$ gehalten wird $\Rightarrow$ Sehr langsame Frequenzen können das Filter passieren.
$G_2(z)$: Hochpass. Lediglich im Bereich, in dem sich der Filtereingang ändert, ist der Filterausgang ungleich Null $\Rightarrow$ Hohe Frequenzen können das Filter passieren. $\boxed{4}$

$\boxed{\sum 20}$

Aufgabe 4: Hauptkomponentenanalyse und Clustering

a) Folgende Lösung ist exakt. Eine qualitativ richtige Skizze ist ausreichend.

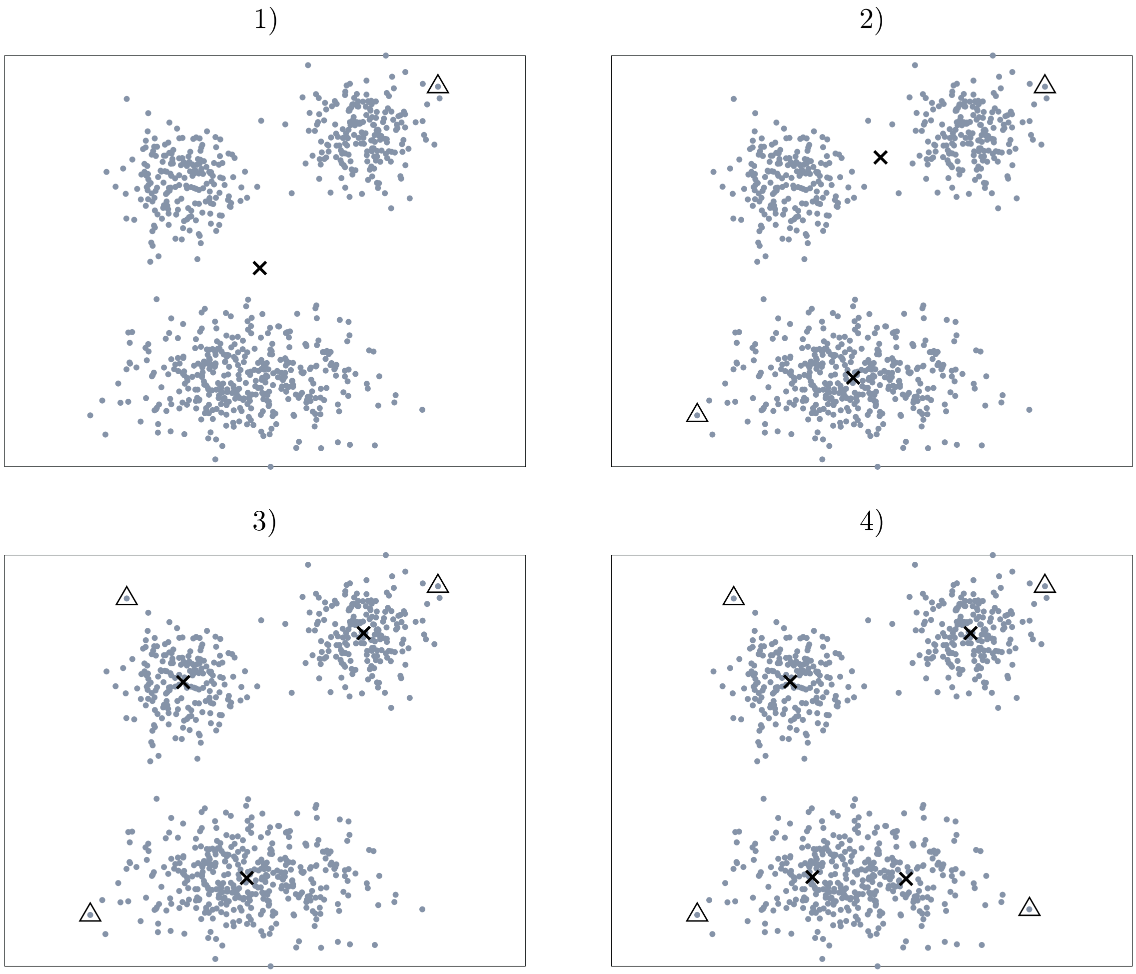


3

Hierbei ist der Winkel und die Reihenfolge wichtig. Außerdem treffen sich die Hauptkomponenten im Mittelwert/ Datenschwerpunkt.

b) Die Datenverteilung in Bild b) eignet sich besser zur Dimensionsreduktion, da die Ausdehnung entlang der ersten Hauptkomponente deutlich größer ist als die Ausdehnung entlang der zweiten Hauptkomponente. Bei Bild a) ist der Unterschied zwischen den Hauptkomponenten geringer. 2

c) Die Zufallsinitialisierung des k-means-Algorithmus kann dazu führen, dass er in ein lokales Optimum konvergiert. Da die Startwerte gegeben sind, ergeben sich qualitativ eindeutige Lösungen. 1



4

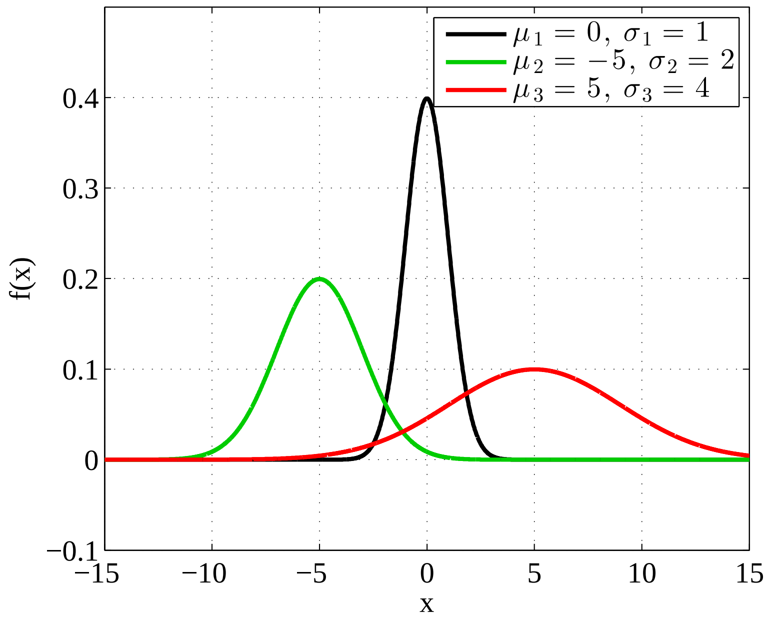
Bei einem Cluster gehört jeder Datenpunkt zu diesem Cluster und das Zentrum liegt im Datenschwerpunkt. Bei zwei Clustern und den gegeben Startwerten liegt das eine Zentrum in der oberen Hälfte, zwischen den Punktansammlungen, und das zweite Zentrum liegt in der unteren, großen Datenansammlung. Mit drei Startwerten ergeben sich drei Cluster. Die Zentren liegen innerhalb der Punktansammlungen. Bei 4 Clustern liegen zwei Zentren in den oberen Punktansammlungen und zwei Zentren liegen in der unteren Punktansammlung.

d) Ein Anstieg der Verlustfunktion über der Anzahl der Cluster ist bei k-means nicht möglich. Somit sind die Verläufe 2) und 4) falsch. Verlauf 1) fällt immer gleich ab. Das ist beim gegebenen Beispiel nicht gegeben, da die Verbesserung von drei zu vier Clustern geringer sein muss, als die Verbesserung von zwei zu drei Clustern. Verlauf 3) ist korrekt, da eine Verbesserung der Verlustfunktion mit steigender Anzahl der Cluster abnimmt. 2

$\sum 12$

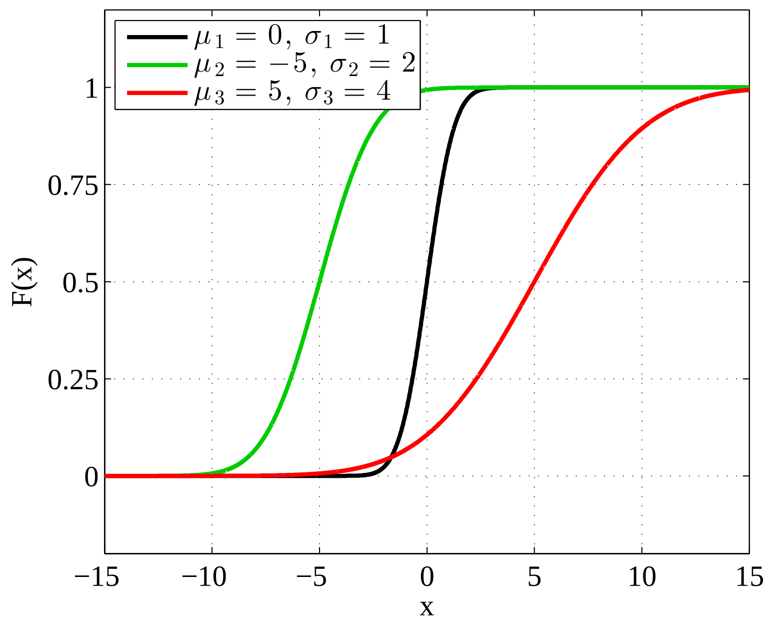
Aufgabe 5: Stochastische Signale

a) Skizzieren Sie in **einem** Koordinatensystem qualitativ **drei** Normalverteilungen.



7

b) Zeichnen Sie nun in das vorgegebene Koordinatensystem die kumulierten Verteilungsfunktionen (Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen) zu den drei Normalverteilungen I, II und III aus Aufgabenteil a) ein.



7

$\sum 14$