Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

27. Juli 2012

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Gesamt
Mat.-Nr.:	Soll:	10	6	24	20	60
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Verständnisfragen zur Fourier-Transformation

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Was kann mit der diskreten Fourier Transformation (DFT) erreicht werden?
- ☐ Die Transformation eines Signals aus dem diskreten Frequenzbereich in den diskreten Zeitbereich.
- ☐ Die Transformation eines diskreten Signals aus dem Zeitbereich in den diskreten Frequenzbereich.
- ☐ Die Transformation eines diskreten Signals aus dem Zeitbereich in den kontinuierlichen Frequenzbereich.

b) Die diskrete Fourier Transformation ist periodisch...
- ☐ ... nur in der Zeit.
- ☐ ... nur in der Frequenz.
- ☐ ... in der Zeit und der Frequenz.

c) Aus einer zeitlichen Abfolge von N Messwerten, die mit DFT transformiert werden, ergibt sich eine Anzahl von ...
- ☐ ... N diskreten Frequenzen.
- ☐ ... $N/2$ diskreten Frequenzen.
- ☐ ... 2^N diskreten Frequenzen.

d) Eine Erhöhung der Anzahl der Messungen hat auf die Frequenzauflösung folgende Auswirkung:
- ☐ Sie wird feiner.
- ☐ Sie wird grober.
- ☐ Sie bleibt unberührt.

e) Der sogenannte Leckeffekt kann reduziert werden durch die...
- ☐ ... Faltung mit einem Fenster im Zeitbereich.
- ☐ ... Subtraktion eines Fensters im Zeitbereich.
- ☐ ... Multiplikation mit einem Fenster im Zeitbereich.

f) Stationäre Signale...
- ☐ ... sind zeitvariant.
- ☐ ... können als instationär angesehen werden, wenn sie nur über einen kurzen Zeitraum betrachtet werden.
- ☐ ... sind zeitinvariant.

g) Um eine sinnvolle Aussage über die in einem instationären Signal enthaltenen Frequenzen zu treffen, ...
- ☐ ... kann das Signal mit einer Kurzzeit-DFT untersucht werden.
- ☐ ... kann das Signal nicht mit einer Kurzzeit-DFT untersucht werden.
- ☐ ... kann das Signal mit einer Wavelet-Transformation untersucht werden.

h) Die parametrische Frequenzanalyse...
- ☐ ... führt auf ein kontinuierliches Amplitudenspektrum.
- ☐ ... führt auf ein diskretes Amplitudenspektrum.
- ☐ ... ist unempfindlicher bezüglich Messrauschen als nicht-parametrische Verfahren.

Aufgabe 2: Aliasing

Gegeben ist das periodische Signal $y(t) = \sin(2\pi \cdot 7\text{Hz} \cdot t)$.

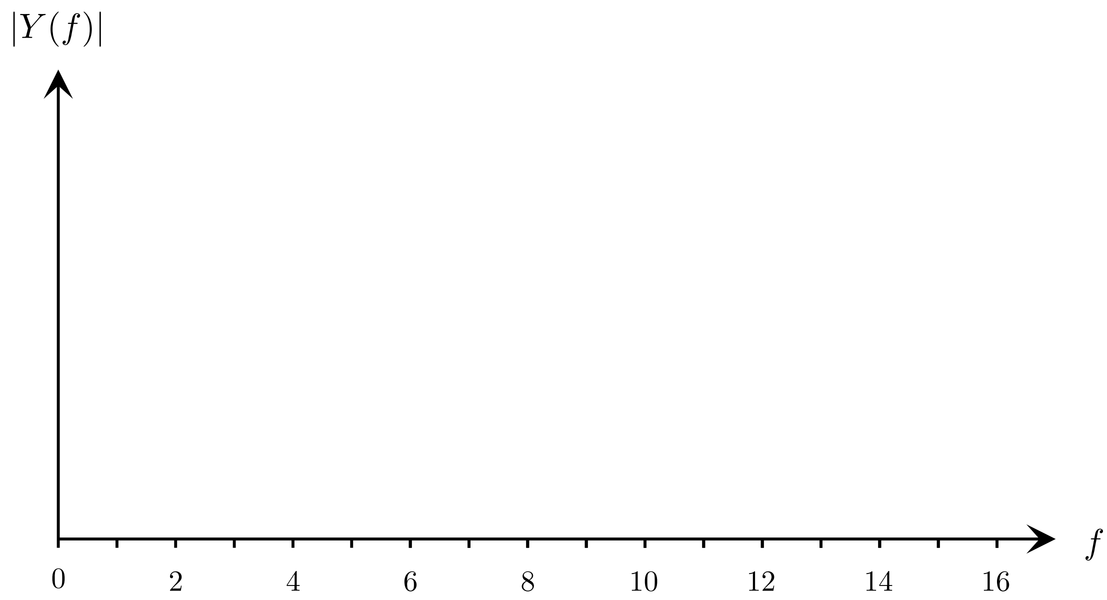
a) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum für das gegebene Signal in das unten stehende Diagramm.

b) Das Signal wird mit einer Abtastfrequenz von $f_0 = 6\text{Hz}$ gemessen. Erklären Sie, warum in diesem Fall Aliasing auftritt.

c) Kennzeichnen Sie im unten stehenden Diagramm die Shannon-Frequenz.

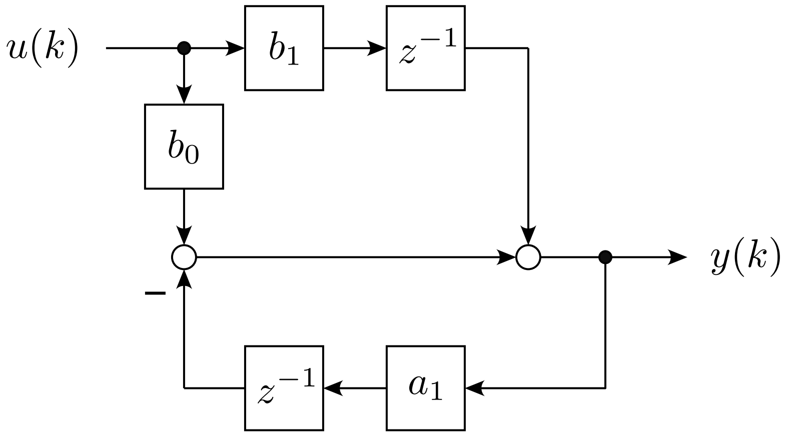
d) Zeichnen Sie die durch das Aliasing entstehenden Schattenspektren.

e) Welche Frequenz würde man fälschlicherweise anhand des abgetasteten Signals vermuten?



Aufgabe 3: Zeitdiskretes System

Gegeben ist das Blockschaltbild eines allgemeinen zeitdiskreten Systems 1. Ordnung. Gehen Sie zunächst davon aus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind, d.h. $a_1, b_0, b_1 \neq 0$.



a) Stellen Sie die zugehörige Differenzengleichung auf.

b) Handelt es sich beim gezeigten System um ein IIR- oder ein FIR-System? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Erklären Sie, ob das System sprungfähig ist oder nicht. Woran lässt sich das erkennen?

d) Wie lautet die zugehörige Übertragungsfunktion im z-Bereich, d.h. $G(z)$?

e) Berechnen Sie die Gewichtsfolge $g(k)$ (Anfangsbedingung: $y(k < 0) = 0$).

f) Berechnen Sie die z-Transformierte der Sprungantwort $H(z)$.

g) Auf welchen Wert stellt sich die Sprungantwort $h(k)$ ein für $k \to \infty$? Wie lautet die Sprungantwort für $k = 0$?

h) Nehmen Sie nun an, dass die Koeffizienten folgende Werte aufweisen: $b_0 = 0$, $b_1 = 0,5$ und $a_1 = -0,95$. Stellen Sie die Gleichung für die Sprungantwort $h(k)$ auf.

i) Was würde mit der Impulsantwort passieren, wenn a_1 ein positives Vorzeichen hätte, d.h. $a_1 = +0.95$ wäre? Hätte die Vorzeichenänderung des Pols Einfluss auf die Stabilität?

Aufgabe 4: Filter

Gegeben ist das unten gezeigte Signal $u(k)$, welches gefiltert werden soll. Zwei mögliche Filter stehen zur Auswahl:

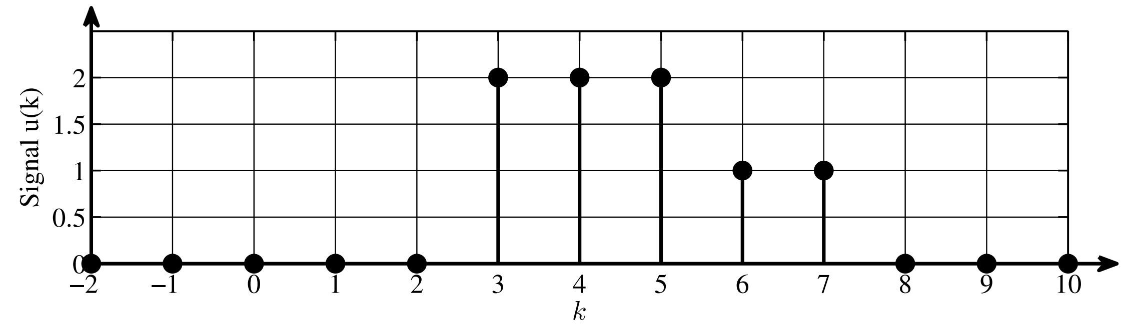
$$G_1(z) = \frac{1}{3}(z^{-1} + 1 + z)$$
$$G_2(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2})$$

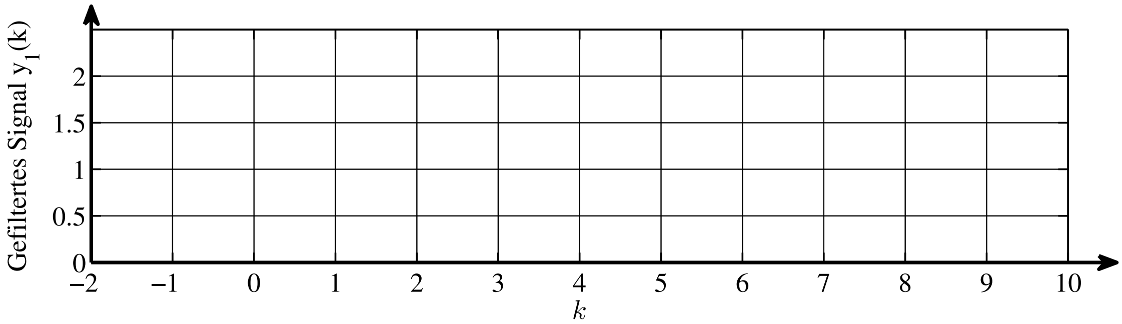
a) Handelt es sich bei $G_1(z)$ und $G_2(z)$ jeweils um Tiefpass- oder um Hochpass-Filter? Sind die Filter kausal oder akausal?

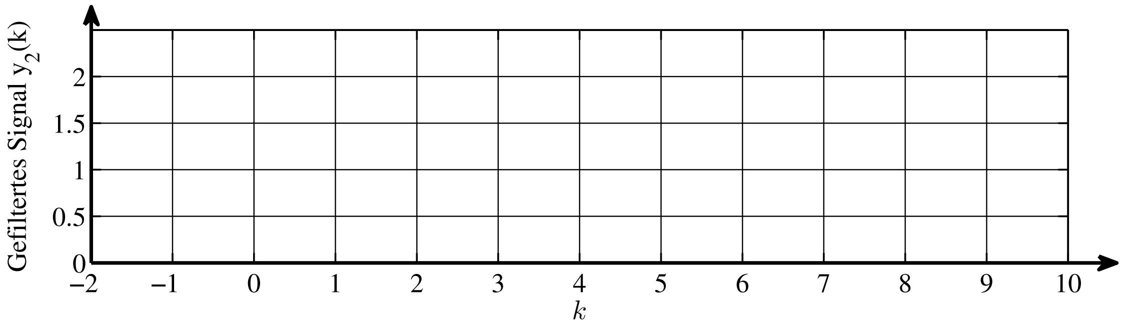
b) Welche Phasenverschiebung erzeugen die Filter (Nullphase, lineare Phase, verallg. lineare Phase)? Bestimmen Sie $\varphi_1(\omega)$ und $\varphi_2(\omega)$.

c) Berechnen und skizzieren Sie sowohl das mit $G_1(z)$ gefilterte Signal $y_1(k)$ als auch das mit $G_2(z)$ gefilterte Signal $y_2(k)$. Benutzen Sie für die Skizzen die vorbereiteten Diagramme und geben Sie die Ausgangsfolgen in folgender Form an:
$y(k) = \{y(-2), y(-1), y(0), \ldots, y(10)\}$.

d) Eines der beiden Filter soll im Online-Betrieb eingesetzt werden. Eine Datenpufferung ist dabei nicht möglich. Welches Filter ist dafür geeignet und warum?







Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Was kann mit der diskreten Fourier Transformation (DFT) erreicht werden?

- ☐ Die Transformation eines Signals aus dem diskreten Frequenzbereich in den diskreten Zeitbereich.
- ■ Die Transformation eines diskreten Signals aus dem Zeitbereich in den diskreten Frequenzbereich.
- ☐ Die Transformation eines diskreten Signals aus dem Zeitbereich in den kontinuierlichen Frequenzbereich.

b) Die diskrete Fourier Transformation ist periodisch...

- ☐ ... nur in der Zeit.
- ☐ ... nur in der Frequenz.
- ■ ... in der Zeit und der Frequenz.

c) Aus einer zeitliche Abfolge von N Messwerten, die mit DFT transformiert werden, ergibt sich eine Anzahl von ...

- ■ ... N diskreten Frequenzen.
- ☐ ... $N/2$ diskreten Frequenzen.
- ☐ ... 2^N diskreten Frequenzen.

d) Eine Erhöhung der Anzahl der Messungen hat auf die Frequenzauflösung folgende Auswirkung:

- ■ Sie wird feiner.
- ☐ Sie wird grober.
- ☐ Sie bleibt unberührt.

e) Der sogenannte Leckeffekt kann reduziert werden durch die ...

- ☐ Faltung mit einem Fenster im Zeitbereich.
- ☐ Subtraktion eines Fensters im Zeitbereich.
- ■ Multiplikation mit einem Fenster im Zeitbereich.

f) Stationäre Signale...

- ☐ sind zeitvariant.
- ☐ können als instationär angesehen werden, wenn sie nur über einen kurzen Zeitraum betrachtet werden.

■ sind zeitinvariant.

g) Um eine sinnvolle Aussage über die in einem instationären Signal enthaltenen Frequenzen zu treffen, ...

■ kann das Signal mit einer Kurzzeit-DFT untersucht werden.

□ kann das Signal nicht mit einer Kurzzeit-DFT untersucht werden.

■ kann das Signal mit einer Wavelet-Transformation untersucht werden.

h) Die parametrische Frequenzanalyse...

■ führt auf ein kontinuierliches Amplitudenspektrum.

□ führt auf ein diskretes Amplitudenspektrum.

■ ist unempfindlicher bezüglich Messrauschen als nicht-parametrischen Verfahren.

$\sum$ 10

Aufgabe 2: Abtasttheorem

Ein Signal $y(t) = \sin(2\pi \cdot 7\text{Hz} \cdot t)$ soll mit einer Abtastfrequenz von $f_0 = 6\text{Hz}$ gemessen werden.

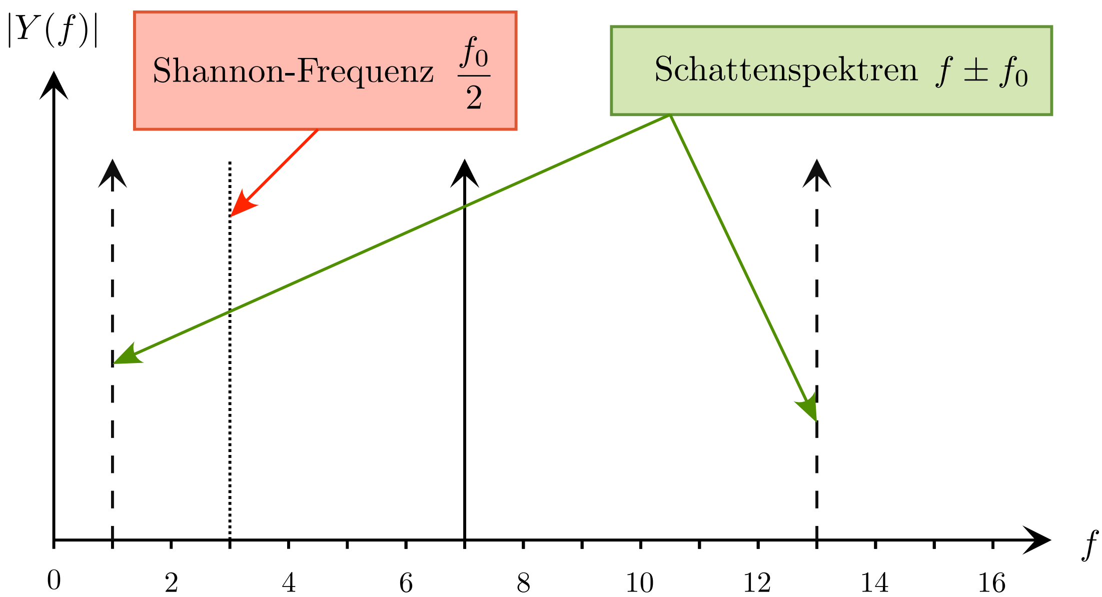
a) Signalspektrum. Siehe Diagramm. $\boxed{1}$

b) Das Signal müsste nach dem Shannonschen Abtasttheorem mit mindestens dem Doppelten der höchsten Signalfrequenz abgetastet werden, d.h. mit mindestens 14Hz. In diesem Fall ist $f_0 = 6\text{Hz}$ und daher viel zu niedrig für gegebenes Signal. Dadurch tritt Aliasing auf. $\boxed{1}$

c) Shannon-Frequenz $= \frac{f_0}{2} = 3\text{Hz}$. $\boxed{1}$

d) Schattenspektren. Siehe Diagramm. $\boxed{1}$

e) Nach dem Abtasttheorem sind Signale nur bis $f = \frac{f_0}{2}$ ohne Informationsverlust rekonstruierbar. In diesem Fall wäre durch das entstandene Schattenspektrum ein falsches Sinus-Signal mit der Frequenz 1Hz statt des wahren Signals mit 7Hz sichtbar. $\boxed{2}$



$\boxed{\sum 6}$

Aufgabe 3: Zeitdiskretes System

a) $y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) - a_1 y(k-1)$ $\boxed{3}$

b) Es handelt sich um ein IIR-System, weil $a_1 \neq 0$ und damit $y(k)$ rekursiv ausgerechnet werden muss. Die Impulsantwort ist daher unendlich lang. $\boxed{1}$

c) Das System ist sprungfähig, weil $b_0 \neq 0$, d.h. die Eingangsgröße $u(k)$ hat direkten Einfluss auf die Ausgangsgröße $y(k)$. Springt $u(k)$, dann springt gleichzeitig auch $y(k)$. $\boxed{1}$

d) Die Übertragungsfunktion $G(z)$ lautet:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$ $\boxed{2}$

e) Die Gewichtsfolge $g(k)$ ist gleichbedeutend mit der Impulsantwort, d.h. $y(k)$ für $u(k) = \delta_K(k)$. Die Gewichtsfolge lautet:

$$g(k) = (-a_1)^{k-1}\,(b_1 - a_1\,b_0) = (-a_1)^{k-1}\,b_1 + (-a_1)^k\,b_0$$ $\boxed{6}$

f) Die Sprungantwort im z-Bereich berechnet sich durch Multiplikation von $G(z)$ mit der z-Transformierten des Einheitssprungs:

$$H(z) = G(z)\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{b_0 + b_1\,z^{-1}}{(1 + a_1\,z^{-1})(1 - z^{-1})}$$ $\boxed{2}$

g) Endwert:

$$h(k \to \infty) = \lim_{z \to 1}(z-1)H(z) = \lim_{z \to 1} G(z) = \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1}\,.$$

Anfangswert:

$$h(k \to 0) = \lim_{z \to \infty} H(z) = b_0\,.$$ $\boxed{2}$

(Daher sprungfähig, wenn $b_0 \neq 0$!)

h) Mit gegebenen Koeffizienten ergibt sich die Sprungantwort für $k = 0$ zu:

$$h(0) = 0$$

Für k>0 ergibt sich:

$$h(k) = 0.5 \cdot \sum_{i=1}^{k} (0.95)^{k-1} = 10 \cdot (1 - 0.95^k)$$ $\boxed{6}$

i) Wenn $a_1 = +0.95$ wäre, ergäbe sich eine alternierende Impulsantwort. Die Stabilitätseigenschaften blieben unverändert. $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 24}$

Aufgabe 4: Filter

a) $G_1(z)$ und $G_2(z)$ sind Tiefpass-Filter. $G_1(z)$ ist akausal, $G_2(z)$ ist kausal. $\boxed{4}$

b) Bei $G_1(z)$ handelt es sich um einen Nullphasenfilter und daher $\varphi_1(\omega) = 0$. Filter $G_2(z)$ ist gegenüber $G_1(z)$ um einen Abtastschritt verzögert. Damit beträgt die lineare Phase $\varphi_2(\omega) = -\omega T_0$. Herleitung:

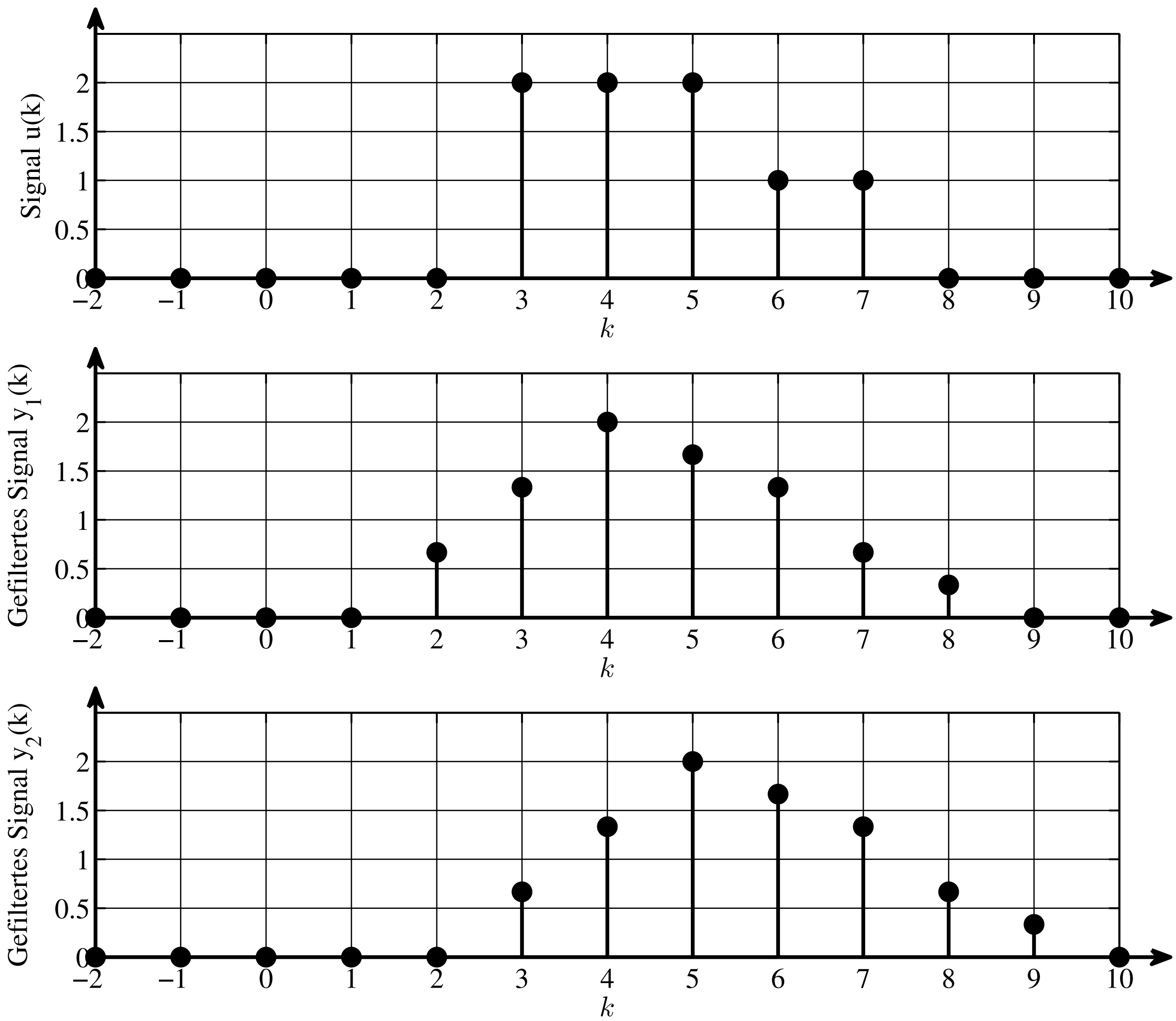
$$G_1(z) = \frac{1}{3}(z^{-1}+1+z) = \frac{1}{3}(e^{-sT_0}+1+e^{sT_0}) = \frac{1}{3}(e^{-i\omega T_0}+1+e^{i\omega T_0}) = \frac{1}{3}\cdot(1+2\cos(\omega T_0))$$

D.h. $G_1(z)$ ist rein reell und daher ohne Phasenverschiebung.

$$G_2(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2}) = \frac{1}{3}(z^{-1} + 1 + z)z^{-1} = \frac{1}{3} \cdot (1 + 2\cos(\omega T_0)) \cdot \underbrace{e^{-i\omega T_0}}_{\text{Phase } e^{i\varphi}}$$ $\boxed{4}$

c) Siehe Diagramme. $\boxed{10}$

d) Für einen Online-Einsatz ist $G_1(z)$ nicht anwendbar, weil dieses Filter akausal ist. Filter $G_2(z)$ benötigt wegen der Kausalität nur vergangene Signalwerte und ist damit im Online-Betrieb anwendbar. $\boxed{2}$



$\boxed{\sum 20}$