Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

16. März 2016

Name:	
Matr.-Nr.:	
Note	

Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Gesamt
Soll:	11	7	6	7	10	14	5	60
Ist:								

Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Markowitz Optimierung

In Bild 1 sind die 6 Aktienverläufe der Aktien 1 (A1, B1, C1) und Aktien 2 (A2, B2, C2) zu sehen. Bild 2 stellt 8 verschiedene Kombinationen aus je 2 Aktien dar.

a) Welchen Gewinn haben die folgenden Aktien nach einem Jahr?

	jeweils Aktie 1	jeweils Aktie 2
Gewinn in %		

b) Ordnen Sie die 3 Aktienpaare aus Bild 1 jeweils einer Kombination aus Bild 2 zu. Tragen Sie Ihr Ergebnis in folgende Tabelle ein:

	A1 und A2	B1 und B2	C1 und C2
Kombination			

c) Markieren Sie für die zugehörige Kombination von A1 und A2 in Bild 2 folgende Werte deutlich:

- 100% A1 und 0% A2
- 50% A1 und 50% A2
- 0% A1 und 100% A2

d) Welche Korrelation weißen die folgenden Aktienpaare zueinander auf? Mögliche Antworten sind: ≈ -1, ≈ 0 oder ≈ 1. Beachten Sie, dass hier auch Aktien aus verschiedenen Diagrammen von Bild 1 verglichen werden sollen.

	A1 und A2	B1 und B2	C1 und C2	B1 und C1
Korrelation				

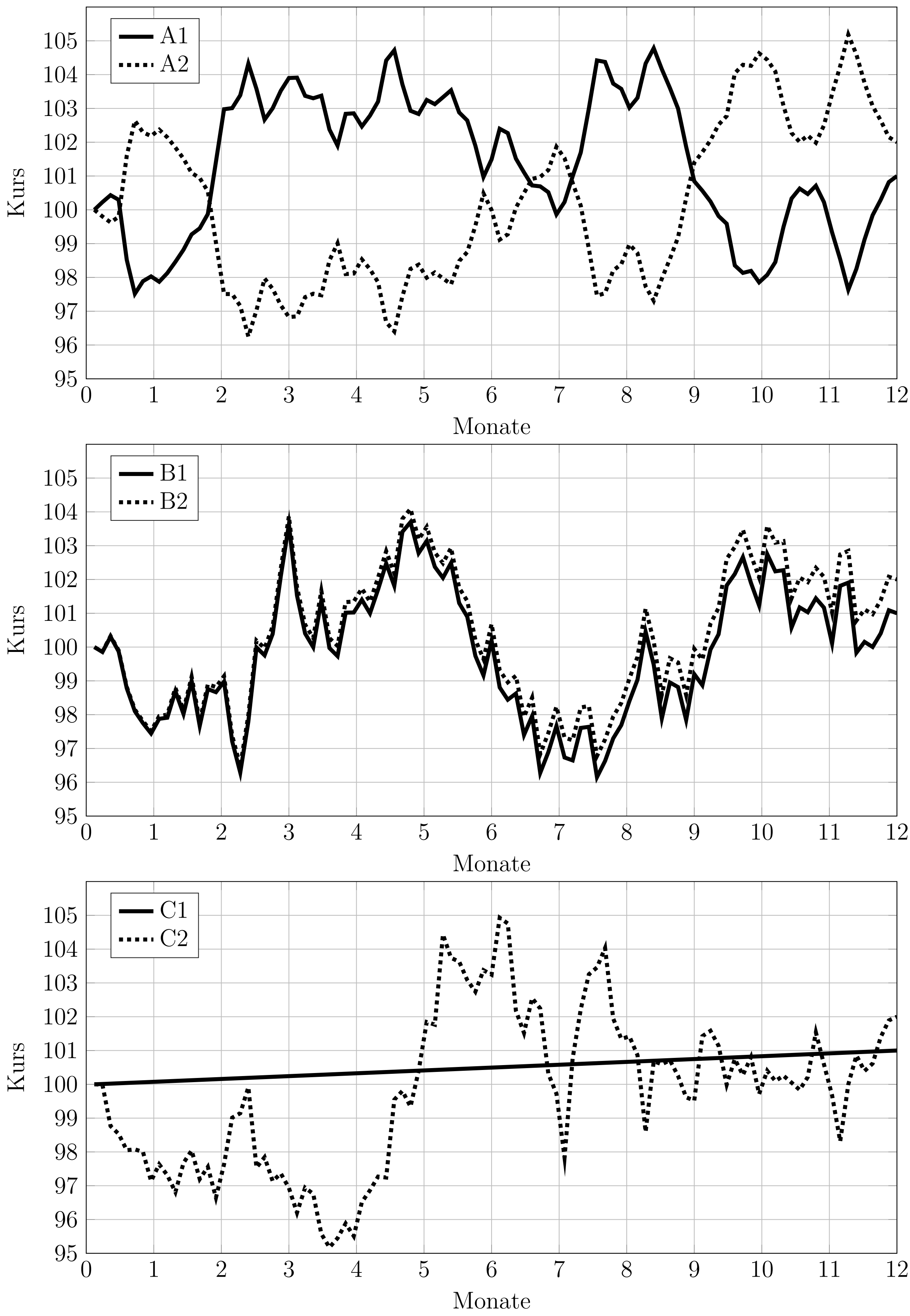


Bild 1: Aktienkurse

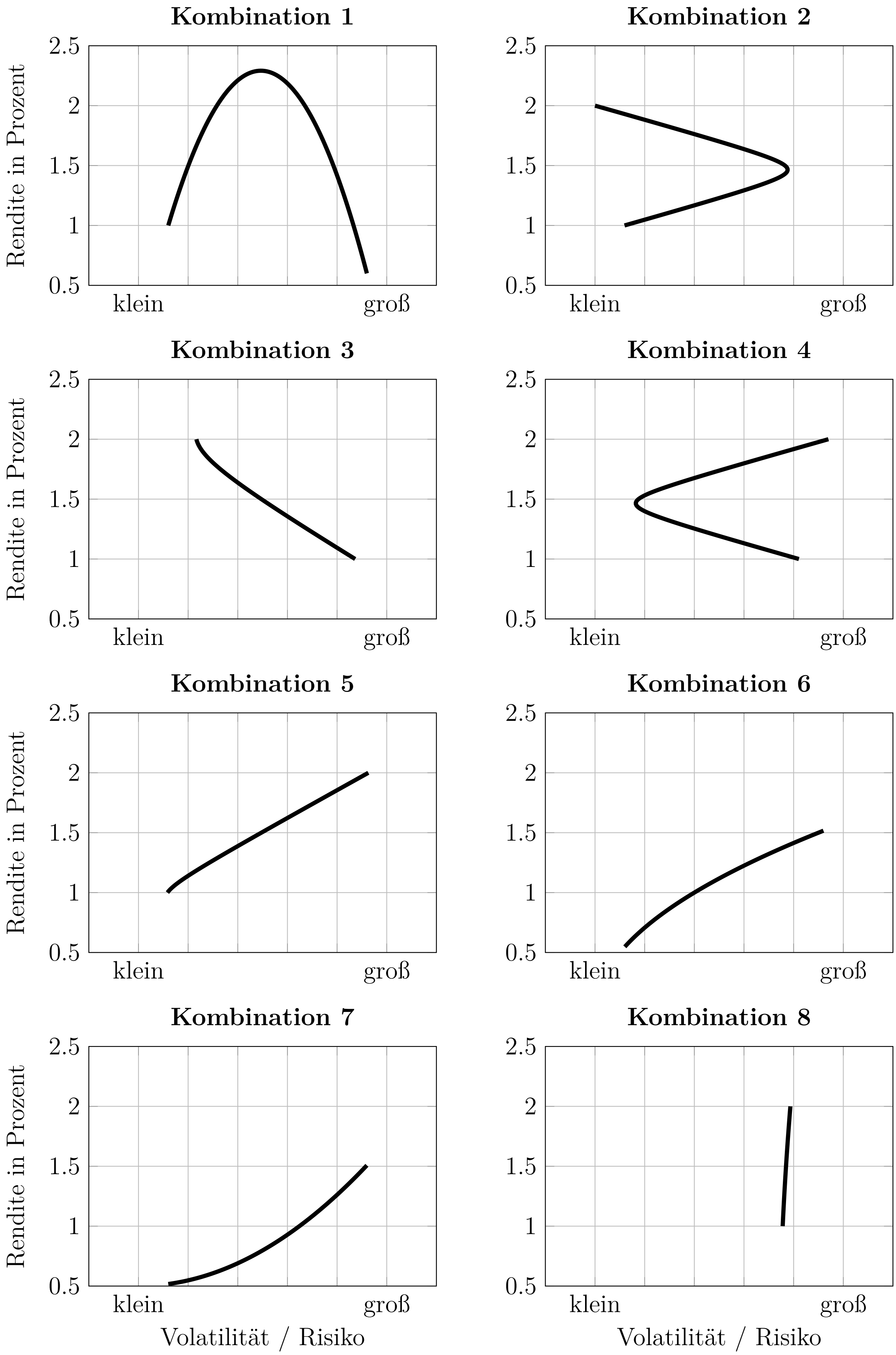


Bild 2: Verschiedene Aktien Portfolios

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitsdichte

Auf der Nachfolgenden Seite Sind in Bild 3 vier verschiedene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen abgebildet.

a) Um welche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen handelt es sich hier?

b) Welche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus Bild 3 schließt im Bereich

$$u \in [-\infty, \ldots, \infty] \tag{1}$$

die größte Fläche ein?

c) Ordnen Sie jeder Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus Bild 3 ein Signal aus Bild 4 $(u_A(k), u_B(k), \ldots, u_H(k))$ zu. Beachten Sie die Skalierung der Hochachse in Bild 4!

	PDF 1	PDF 2	PDF 3	PDF 4
Signal				

d) Begründen Sie Ihre Wahl aus Aufgabenteil c) kurz.

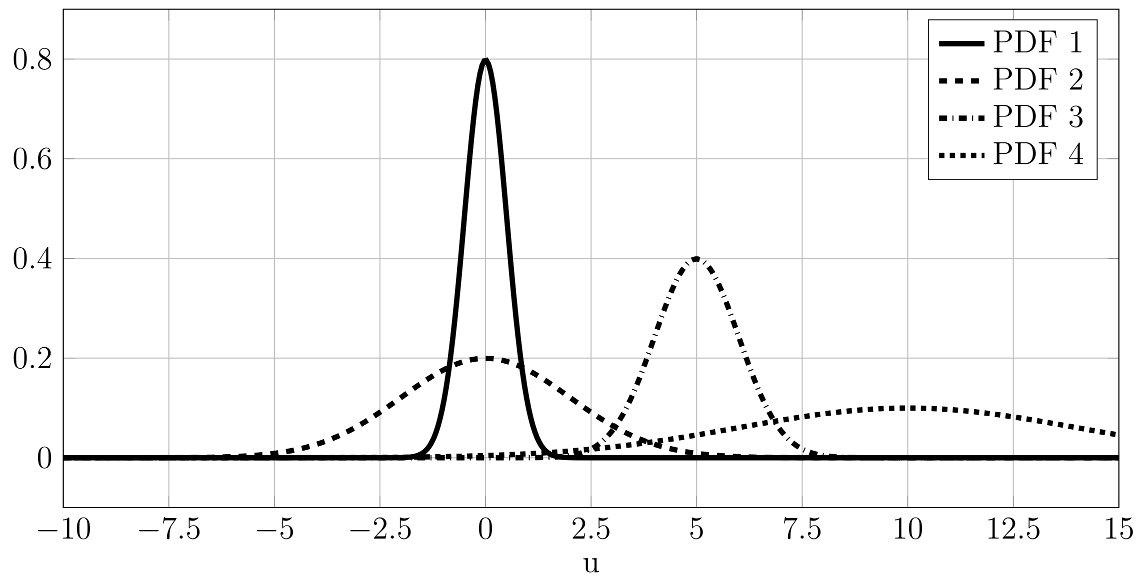


Bild 3: Verschiedene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

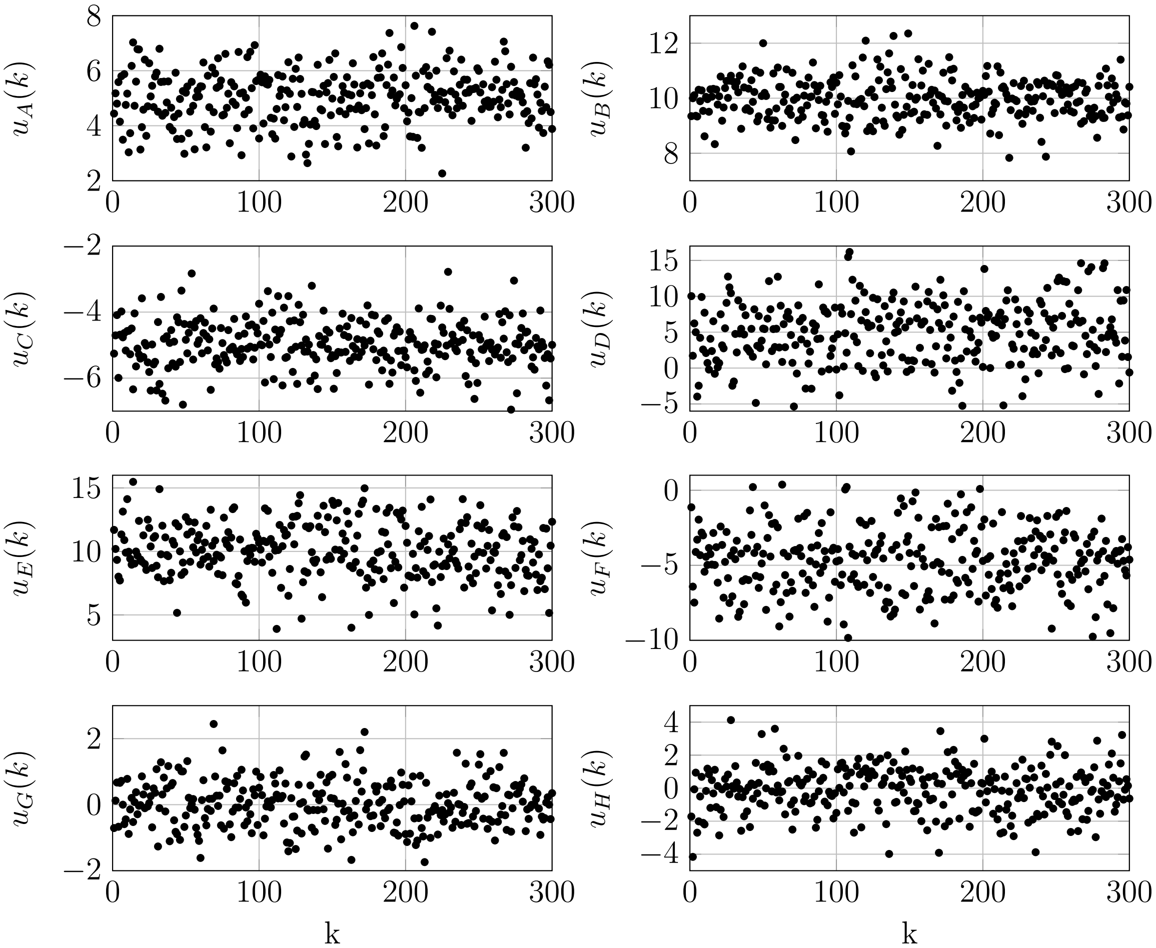


Bild 4: Signale aus Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

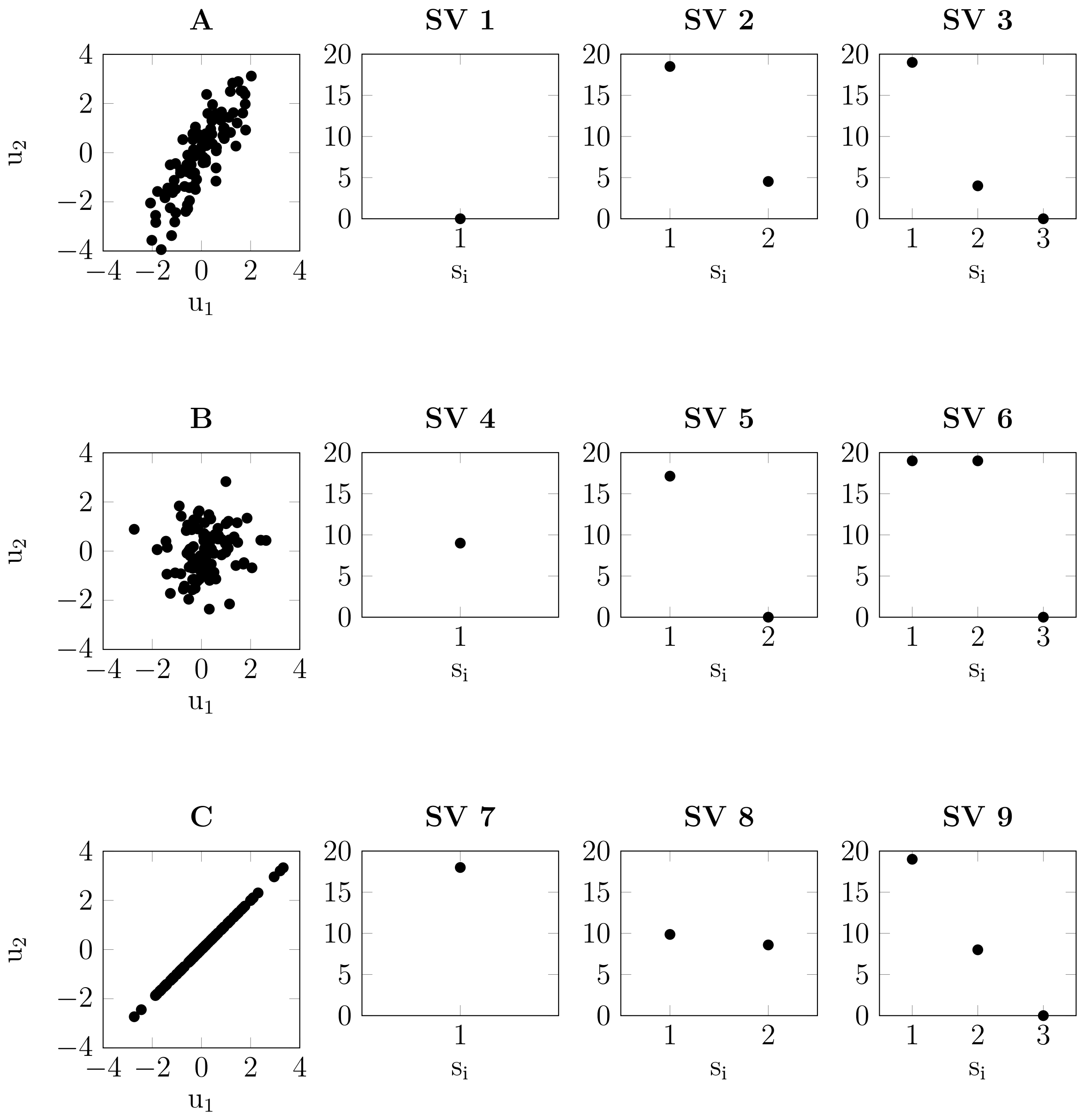
Aufgabe 3: PCA

Aus verschiedenen Eingangsdaten u_1 und u_2 ergeben sich die multivariaten Verteilungen A, B und C.

a) Ordnen Sie diese Cluster den korrekten Singulärwertkombinationen aus einer Hauptkomponentenanalyse SV 1 bis SV 9 zu und tragen Sie dieses Ergebnis in unten stehende Tabelle ein.

b) Begründen Sie Ihre Wahl mit einem Satz.

Cluster	A	B	C
Singulärwert			



Aufgabe 4: Downsampling

Gegeben ist ein zeitdiskretes Signal $u(k)$ mit Abtastzeit T_0 in Bild 5. Das Signal soll nun durch einfaches Downsampling komprimiert werden.

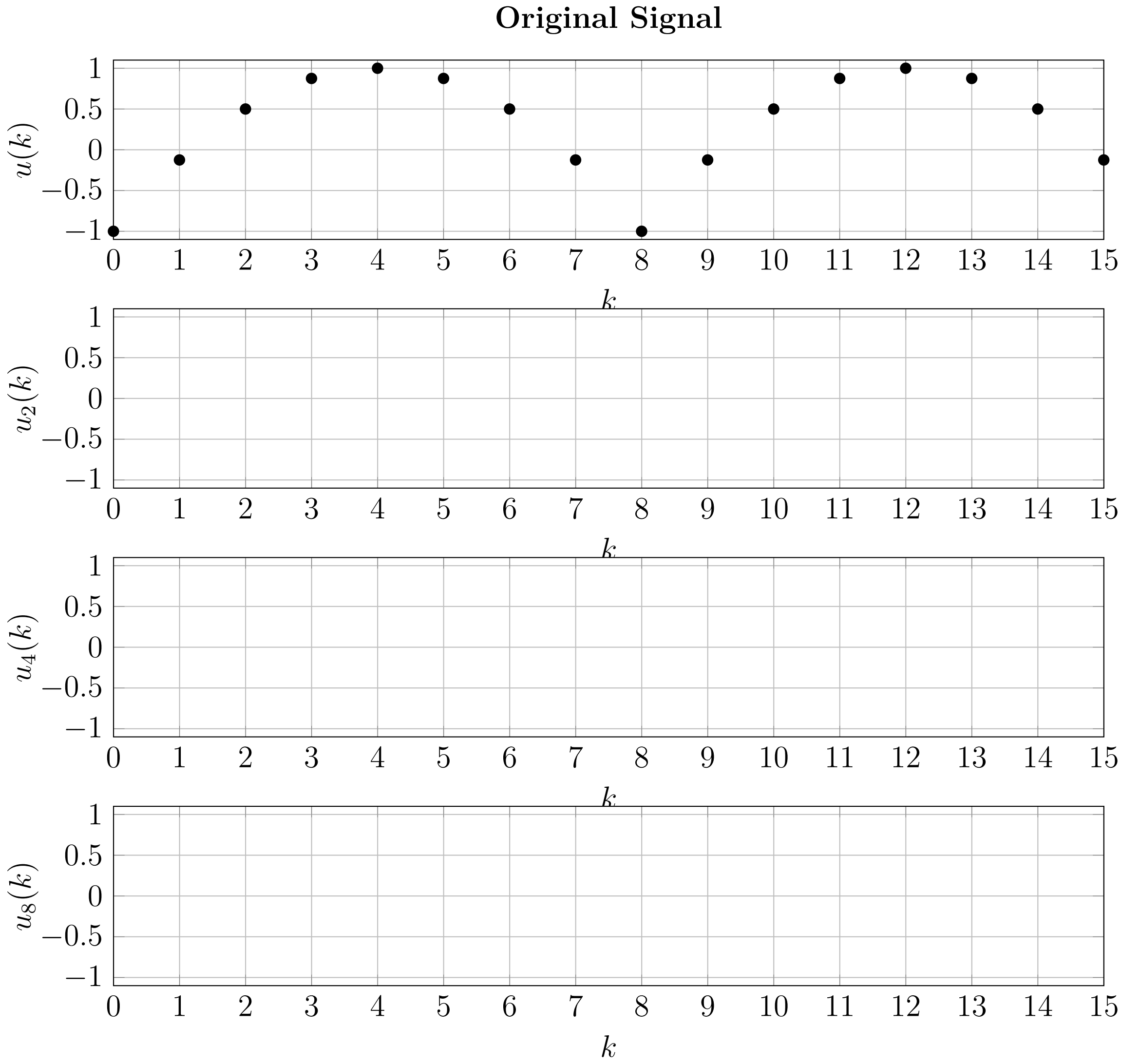


Bild 5: Zeitdiskretes Signal

a) Komprimieren Sie $u(k)$ um die Faktoren 2, 4 und 8. Wie verändert sich die Abtastzeit? Tragen Sie die Ergebnisse ($u_2(k)$,$u_4(k)$ und $u_8(k)$) oben ein. Tipp: Der erste Wert wird jeweils behalten. Beachten Sie, die Bedeutung von k für verschiedene T_0.

b) Bei welcher der oben genannten Komprimierungen ergeben sich Probleme? Wie nennt man dieses Phänomen?

c) Welche Möglichkeit gibt es, das Problem aus Aufgabenteil b) zu umgehen?

d) Welcher Signalverlauf ergibt sich, wenn man die Lösung aus Aufgabenteil c) auf das Signal anwendet?

Aufgabe 5: Dynamisches System

Gegeben ist das folgende zeitdiskrete System:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z - 0.5} \tag{2}$$

a) Wie lautet ein diskreter Impuls im z-Bereich?

b) Wie lautet das Signal $Y(z)$ für die Impulsantwort des obigen Systems im z-Bereich?

c) Bestimmen Sie den Endwert der Impulsantwort für $G(z)$ mit Hilfe des Endwertsatzes.

d) Transformieren Sie dieses Signal aus Aufgabenteil b) ins Zeit diskrete und bestimmen Sie $y(k)$ für die Zeitschritte $k = \{0, 1, \ldots, 5\}$ (Anfangsbedingung $y(k) = 0$ für $k < 0$). Alternativ können Sie auch das System $G(z)$ ins Zeit diskrete transformieren und anschließend das Signal ermitteln.

e) Wie lautete die Übertragungsfunktion eines allgemeinen FIR Filters 4. Ordnung im z-Bereich?

f) Wie müssen die Koeffizienten des FIR Systems gewählt werden, wenn hiermit das System aus Gleichung (2) approximiert werden soll?

Aufgabe 6: Filter

In Bild 6 sind zwei unterschiedliche Filter dargestellt.

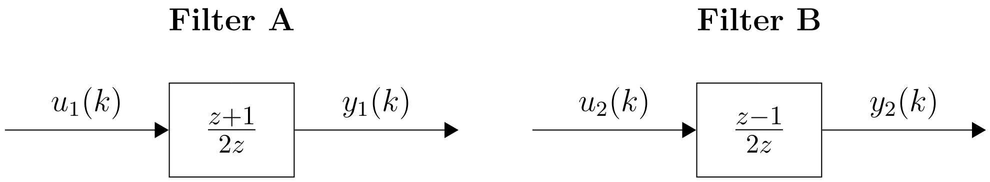
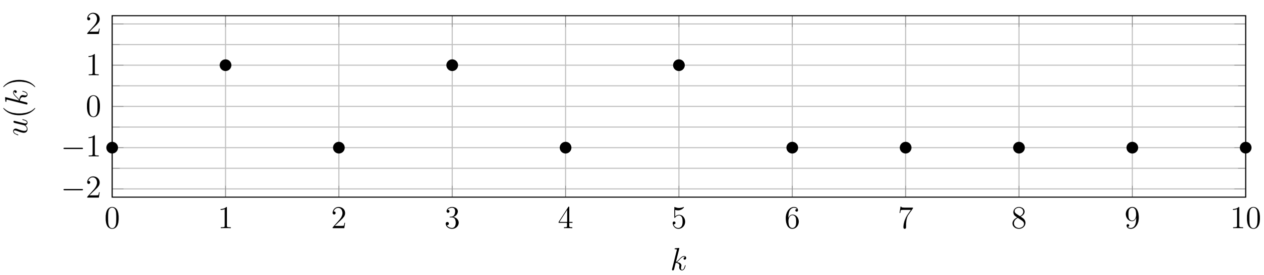


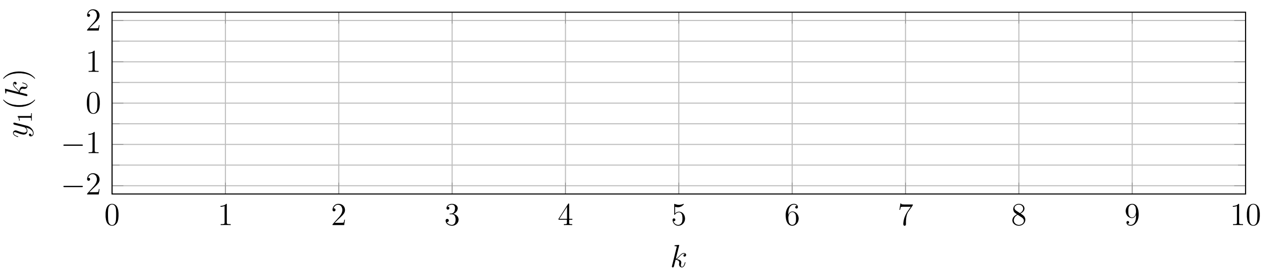
Bild 6: Filterübertragungsfunktionen

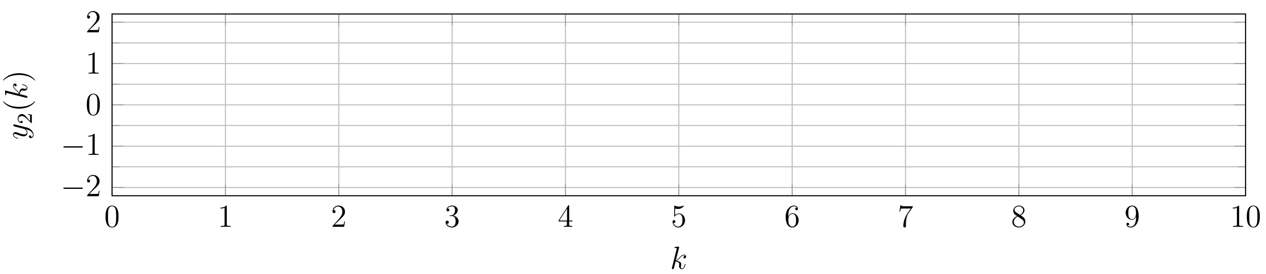
a) Berechnen Sie für jeden Filter den Amplitudengang. Setzen Sie dabei für die Abtastzeit allgemein T_0 an.

b) Handelt es sich bei den einzelnen Filtern um einen Hoch-, Tief-, Bandpass- oder Bandsperrfilter? Tipp: Setzen Sie $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{T_0}$ in die Lösung aus Aufgabenteil a) ein.

c) Die Filter werden mit dem dargestellten gleichen Eingangssignal ($u(k) = u_1(k) = u_2(k)$) beaufschlagt. Zeichnen Sie die Systemantworten $y_1(k)$ und $y_2(k)$ jeweils in das entsprechende untere Diagram ein (Angabe von Nebenrechnungen ist nicht erforderlich). Es gilt $u(k) = 0$ für $k < 0$.







d) Die beiden Filter werden nun wie in der unteren Abbildung 7 dargestellt parallel geschaltet. Das System wird mit dem gleichen Eingangssignal wie in Aufgabenteil c) beaufschlagt. Zeichnen Sie die Systemantwort in das Diagramm. Begründen Sie das Beobachtete kurz anhand des Übertragungsverhaltens.

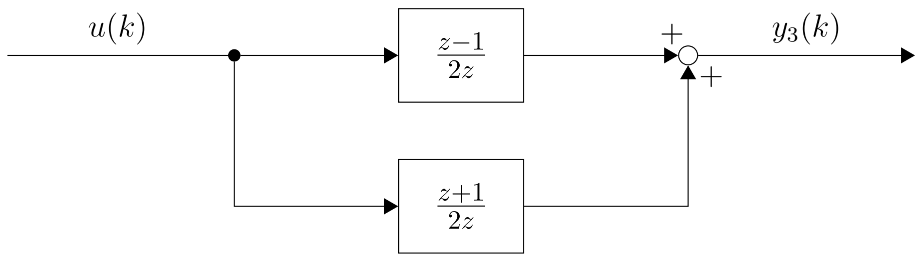
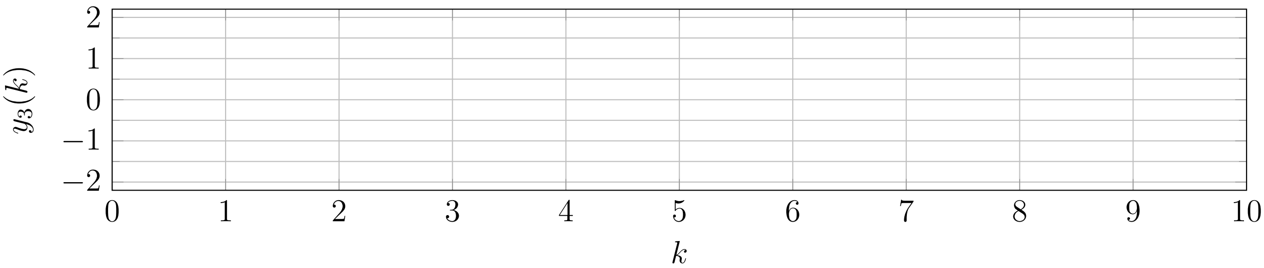


Bild 7: Parallelschaltung der Filter



Aufgabe 7: Blockschaltbild

Zeichnen Sie ein Blockschaltbild zu der Differenzengleichung mit zwei Eingängen u_1 und u_2.

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_1 u_1(k) + c_1 u_2(k-1).$$

Lösungen:

Aufgabe 1: Markowitz Optimierung (11 Punkte)

a) Die Renditen lassen sich leicht aus den Diagrammen ablesen, da jede Aktie bei 100 startet

	A1	B2
Gewinn in %	1	2

1

b) Jede der hier vorgestellten Aktienkurse haben einen Ertrag von 1% bzw. 2%. Somit ergeben sich die Anfangs- und Endstellen der Kombination aus Bild 2. Das Risiko für A1 bzw. A2 alleine ist recht hoch (Kurs schwankt sehr). Zusammen mit dem Ertrag erhält man zwei Punkte in der Portfolio Kombination. Eine Kombination von 50/50 von A1/A2 hingegen ergibt ein geringes Risiko mit einem mittleren Ertrag von 1.5. Lediglich Kombination 4 hat genau diese Charakteristik.

Für die Aktienverläufe B ergibt sich jeweils ein hohes Risiko aus der starken Kursschwankung. Auch jede Mischung von B1 und B2 weißt eine gleichbleibend große Schwankung auf. Lediglich Kombination 8 bildet genau dies ab.

Die Aktie C1 hat ein sehr kleines Risiko im Vergleich zu Aktie C2. Mit dem Ertrag verhält es sich genauso. Das Risiko und der Ertrag steigt also an, je mehr die Aktie C2 in der Kombination vertreten ist. Dieses Verhalten weißt nur Kombination 5 auf

	A1 und A2	B1 und B2	C1 und C2
Kombination	4	8	5

6

c) Korrekt ist Kombination 4

- 100% A1 und 0% A2
  Anfang der Kurve (unten rechts)
- 50% A1 und 50% A2
  Scheitelpunkt (links bei Rendite ≈ 1.5)
- 0% A1 und 100% A2
  Ende der Kurve (oben rechts)

2

d)

	A1 und A2	B1 und B2	C1 und C2	B1 und C1
Korrelation	-1	1	0	0

2

$\sum 11$

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitsdichte (7 Punkte)

Auf der Nachfolgenden Seite Sind in Bild 3 vier verschiedene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen abgebildet.

a) Es handelt sich um eine Normalverteilung. 1

b) Keine bzw. alle. Aufgrund der Normierungsbedindung ist die Fläche unter jeder Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gleich eins. 1

c)

	PDF 1	PDF 2	PDF 3	PDF 4
Signal	$u_G(k)$	$u_H(k)$	$u_A(k)$	$u_E(k)$

4

d) Begründung:

PDF 1 Mittelwert $\mu = 0 \Rightarrow u_G$ oder u_H. Die PDF fällt bei ≈ 2 auf Werte Nahe Null. Werte > 2 oder < 2 sind somit sehr unwahrscheinlich. Somit bleibt nur u_G.

PDF 2 Mittelwert $\mu = 0 \Rightarrow u_G$ oder u_H. Die PDF fällt bei ≈ 5 auf Werte Nahe Null. Werte im Bereich $2 < u < 5$ haben eine Wahrscheinlichkeit, welche deutlich größer Null ist. Das Signal u_G weißt in diesem Bereich nur eine geringe Anzahl Datenpunkte auf, u_H hingegen hat in diesem Bereich deutlich dichtere Daten $\Rightarrow u_H$.

PDF 3 Mittelwert $\mu = 5 \Rightarrow u_A$ oder u_D. Die PDF fällt bei ≈ 8 auf Werte Nahe Null. Werte > 8 oder < 2 sind somit sehr unwahrscheinlich. Somit bleibt nur u_A, da u_D häufig auch Werte bei $u \approx 10$ aufweist.

PDF 4 Mittelwert $\mu = 10 \Rightarrow u_E$ oder u_B. Die PDF fällt bei ≈ 0 auf Werte Nahe Null. Werte im Bereich $0 < u < 6$ haben eine Wahrscheinlichkeit, welche deutlich größer Null ist. Das Signal u_B weißt in diesem Bereich keine Datenpunkte auf, u_E hingegen hat in diesem Bereich deutlich dichtere Daten $\Rightarrow u_E$. 1

$\boxed{\sum 7}$

Aufgabe 3: PCA (6 Punkte)

a)

Cluster	A	B	C
Singulärwert	SV 2	SV 8	SV 5

3

b) Die abgebildeten Punktverteilungen werden durch zwei Eingangsgrößen beschrieben. Somit haben die Verteilungen auch genau zwei Singulärwerte. SV 1, SV 3, SV 4, SV 6, SV 7 und SV 9 sind somit falsch, da hier entweder ein oder drei Singulärwerte vorhanden sind. Die Singulärwerte sind ein Maß, für die Wichtigkeit der Eingänge.

In Verteilung B sind beide Eingänge annähernd gleich wichtig, da aufgrund eines Wertes in u_1 nicht auf einen Wert u_2 geschlossen werden kann. Dies spiegelt sich auch in den Singulärwerten wider. Somit kommt nur SV 8 in Frage.

Im Gegensatz hierzu steht Punktverteilung C. Die lineare Abhängigkeit von u_1 und u_2 führt dazu, dass mit einem Eingang der andere berechnet werden kann. Somit muss ein Singulärwert gleich Null sein. Dies ist bei SV 5 der Fall.

In Punktverteilung A lässt sich durch Vorgabe von einem u_1 ein gewisser kleiner Bereich für u_2 bestimmen. Dieser Zusammenhang der beiden Eingänge ergibt einen großen Singulärwert und einen wesentlich kleineren, welcher jedoch nicht bei Null liegt $\Rightarrow$ SV 2.

3

$\sum 6$

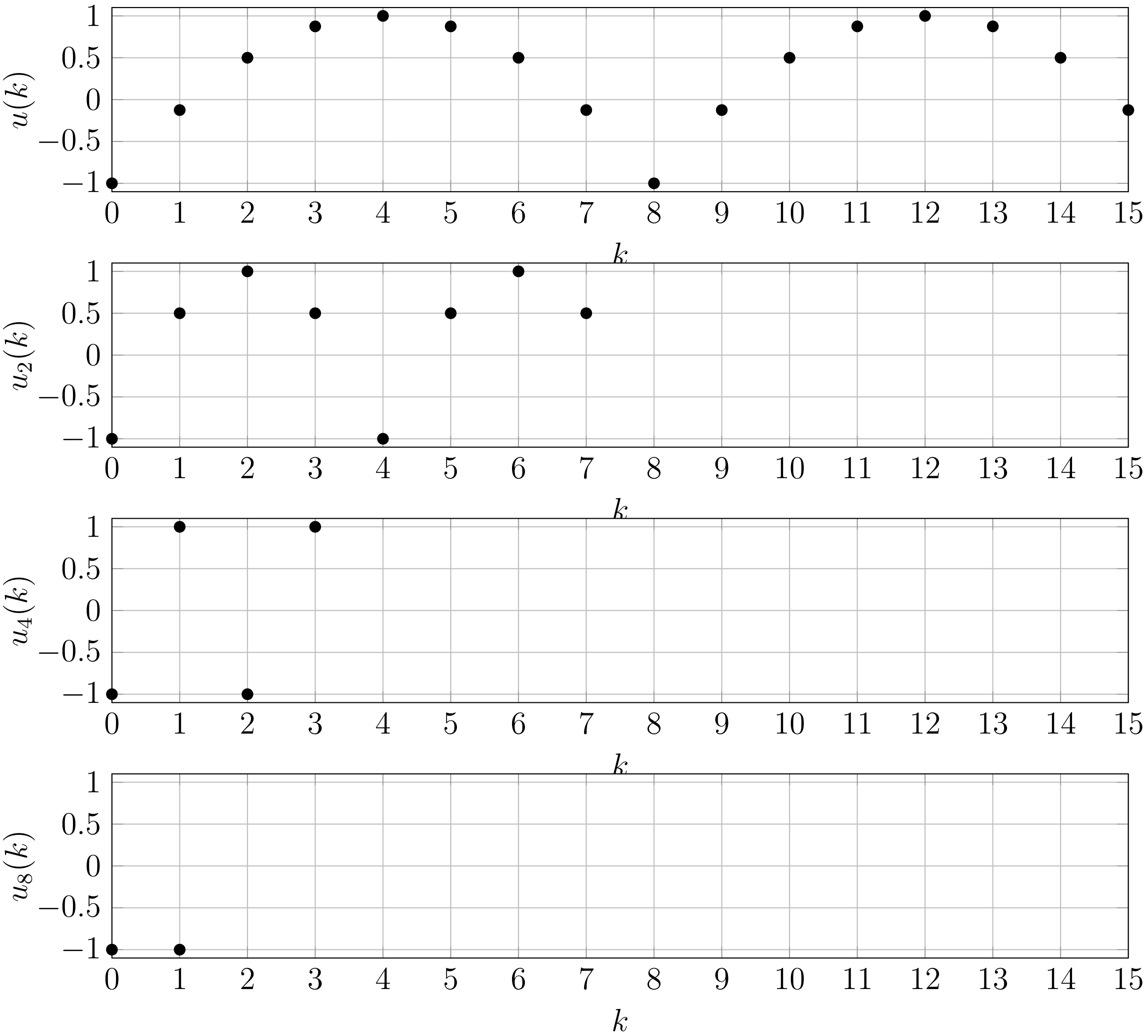
Aufgabe 4: Downsampling (7 Punkte)

a) Die Abtastzeiten ergeben sich zu:

$$T_{0,2} = 2 \cdot T_0 \quad ; \quad T_{0,4} = 4 \cdot T_0 \quad ; \quad T_{0,8} = 8 \cdot T_0 \tag{3}$$

Unten sind die korrekten Lösungen der komprimierten Signal zu sehen. 1

Original Signal



3

b) Bei einer Datenreduktion um Faktor 8 wird die Frequenz des Signals nicht mehr korrekt wiedergegeben. Die Abtastfrequenz ist gleich der Signalfrequenz. Das Abtasttheorem wird verletzt, es entsteht Aliasing. 1

c) Durch Aliasing ergibt sich hier ein konstantes Signal mit Mittelwert $\mu = 1$. Das original Signal hat jedoch $\mu = 0$. Um dies zu umgehen, muss das Signal vor dem Downsampling Tiefpass gefiltert werde (Anti Aliasing Filter). 1

d) Hier würde im idealen Fall der Mittelwert des Signals herauskommen. 1

$\sum 7$

Aufgabe 5: Dynamisches System

a) Ein zeit diskreter Impuls lautet:

$$U(z) = 1 \tag{4}$$

$\boxed{1}$

b) Die Impulsantwort in z entspricht der Multiplikation des Systems mit dem Impuls:

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) \tag{5}$$
$$Y(z) = \frac{z}{z - 0.5} \cdot 1 \tag{6}$$
$$Y(z) = \frac{z}{z - 0.5} \tag{7}$$

$\boxed{1}$

c) Der Endwert berechnet sich allgemein wie folgt:

$$y(k \to \infty) = \lim_{z \to 1} \left((z - 1) \cdot G(z) \cdot U(z) \right) \tag{8}$$
$$y(k \to \infty) = \lim_{z \to 1} \left((z - 1) \cdot Y(z) \right) \tag{9}$$

Für das hier gegebene System ergibt sich:

$$y(k \to \infty) = \lim_{z \to 1} \left((z - 1) \cdot \frac{z}{z - 0.5} \right) \tag{10}$$
$$y(k \to \infty) = 0 \cdot \frac{z}{z - 0.5} \tag{11}$$
$$y(k \to \infty) = 0 \cdot \frac{1}{1 - 0.5} \tag{12}$$
$$\Rightarrow y(k \to \infty) = 0 \tag{13}$$

$\boxed{2}$

d) Die Transformation lautet wie folgt:

$$Y(z) = \frac{z}{z - 0.5} \tag{14}$$
$$Y(z) = \frac{1}{1 - 0.5 \cdot z^{-1}} \tag{15}$$
$$\Leftrightarrow \quad Y(z) - 0.5 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) = 1 \tag{16}$$
$$\bullet\!\!-\!\!\circ \tag{17}$$
$$y(k) = 0.5 y(k - 1) + \delta_k(k) \tag{18}$$

Die ersten 5 Zeitschritte des Signals lauten: $\boxed{2}$

$$
\begin{aligned}
y(k=0) &= 0.5y(k=-1) + \delta_k(k=0) && (19)\\
&= 0.5 \cdot 0 + 1 = 1 && (20)\\
y(k=1) &= 0.5y(k=0) + \delta_k(k=1) && (21)\\
&= 0.5 \cdot 1 + 0 = 0.5 && (22)\\
y(k=2) &= 0.5y(k=1) + \delta_k(k=2) && (23)\\
&= 0.5 \cdot 0.5 + 0 = 0.25 && (24)\\
y(k=3) &= 0.5y(k=2) + \delta_k(k=3) && (25)\\
&= 0.5 \cdot 0.25 + 0 = 0.125 && (26)\\
y(k=4) &= 0.5y(k=3) + \delta_k(k=4) && (27)\\
&= 0.5 \cdot 0.125 + 0 = 0.0625 && (28)\\
y(k=5) &= 0.5y(k=4) + \delta_k(k=5) && (29)\\
&= 0.5 \cdot 0.0625 + 0 = 0.03125 && (30)
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$

e) Die Übertragungsfunktion lautet allgemein:

$$G(z) = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + b_3 \cdot z^{-3} + b_4 \cdot z^{-4} \quad (31)$$

$\boxed{1}$

f) Als Koeffizienten des FIR Filters werden die Antwort des IIR Systems auf einen Impuls genutzt:

$$
\begin{aligned}
&b_i = y(k=i) && (32)\\
&b_0 = y(k=0) \quad ; \quad b_1 = y(k=1) \quad ; \quad b_2 = y(k=2) && (33)\\
&b_3 = y(k=3) \quad ; \quad b_4 = y(k=4) && (34)
\end{aligned}
$$

$\boxed{1}$

$\boxed{\sum 10}$

Aufgabe 6: Filter

a) Berechneter Amplitudengang für **Filter A:**

$$\begin{aligned}
G_1(z) &= \frac{1}{2}\left(1+z^{-1}\right) && (35)\\
G_1(i\omega) &= \frac{1}{2}\left(1+e^{-i\omega T_0}\right) && (36)\\
G_1(i\omega) &= \frac{1}{2}\left(1+\cos(\omega T_0) - i\sin(\omega T_0)\right) && (37)\\
\|G_1(i\omega)\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\omega T_0)\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2(\omega T_0)} && (38)\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\omega T_0)} && (39)
\end{aligned}$$

für **Filter B:** $\boxed{3}$

$$\begin{aligned}
G_2(z) &= \frac{1}{2}\left(1-z^{-1}\right) && (40)\\
G_2(i\omega) &= \frac{1}{2}\left(1-e^{-i\omega T_0}\right) && (41)\\
G_2(i\omega) &= \frac{1}{2}\left(1-\cos(\omega T_0) - i\sin(\omega T_0)\right) && (42)\\
\|G_2(i\omega)\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(\omega T_0)\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2(\omega T_0)} && (43)\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(\omega T_0)} && (44)
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

b) Die Filter sind von folgenden Typen:
Filter A: Tiefpass, da

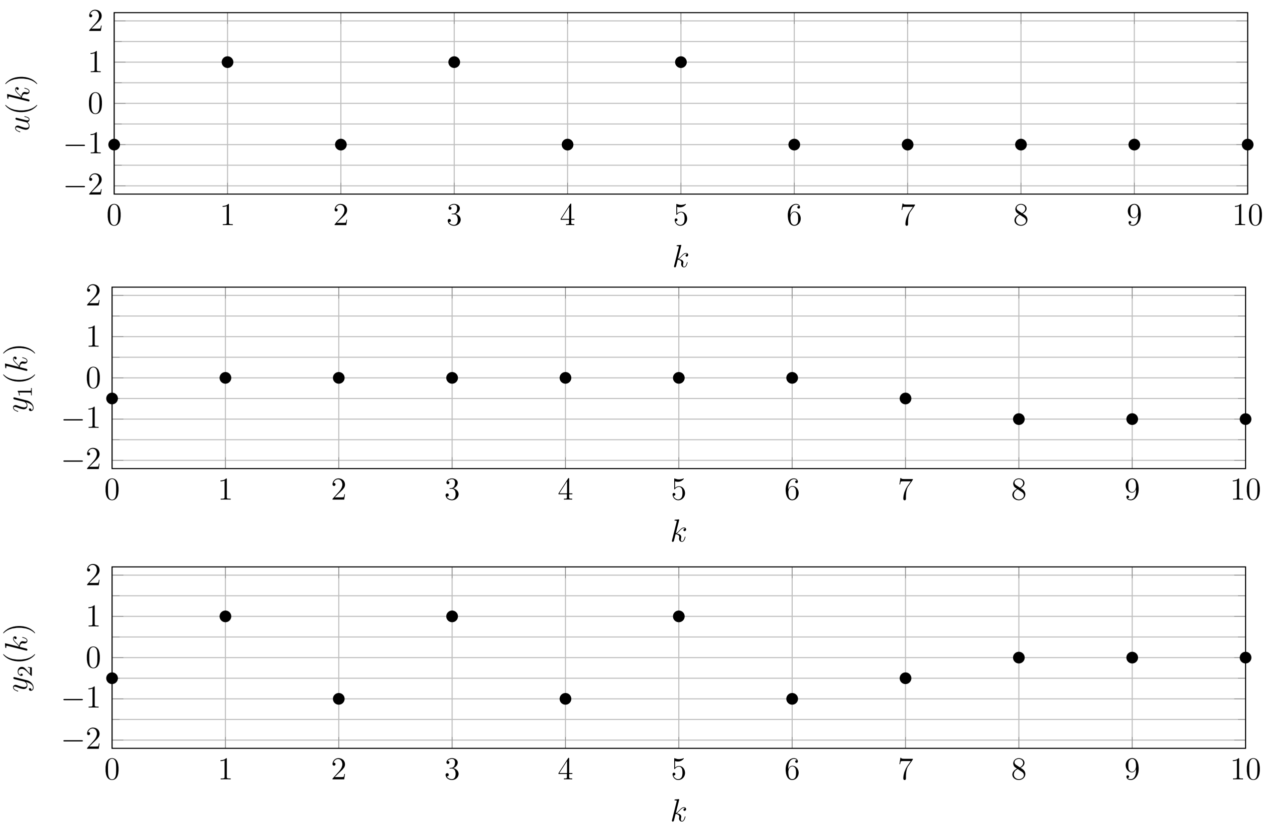
$$\|G_1(0)\| = 1 \qquad \left\|G_1\left(i\frac{\pi}{T_0}\right)\right\| = 0 \tag{45}$$

Filter B: Hochpass, da

$$\|G_2(0)\| = 0 \qquad \left\|G_2\left(i\frac{\pi}{T_0}\right)\right\| = 1 \tag{46}$$

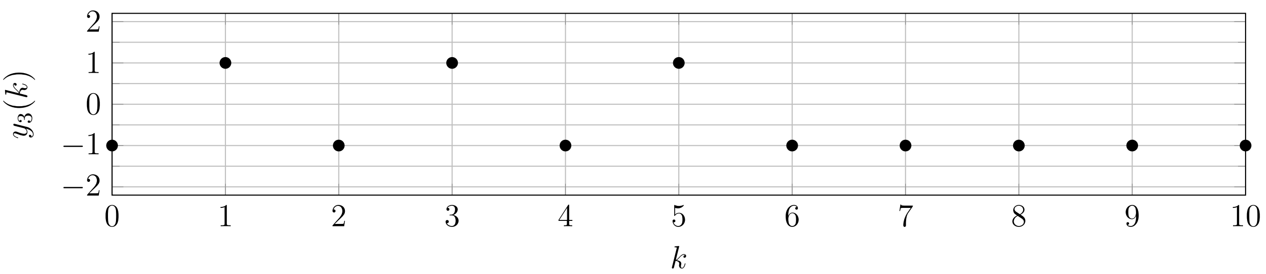
$\boxed{2}$

c) Der richtige Signalverlauf ist in der Abbildung dargestellt.



4

d) Die Summe der Übertragungsfunktionen ergibt 1, daher entspricht der Systemausgang der Parallelschaltung exakt dem Systemeingang.



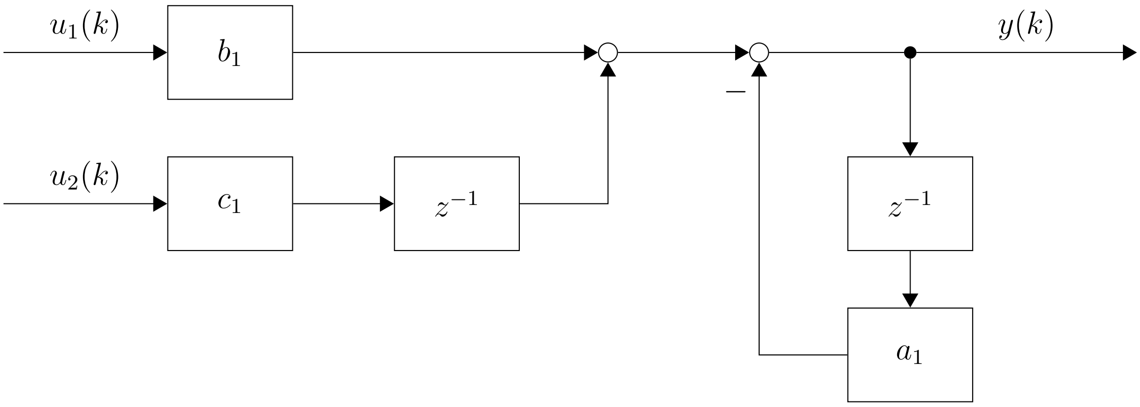
2

$\sum$ 14

Aufgabe 7: Blockschaltbild

Zeichnen Sie ein Blockschaltbild zu der Übertragungsfunktion

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_1 u_1(k) + c_1 u_2(k-1).$$



$\sum 5$