Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

01.09.2021

Name:	
Mat.-Nr.	
Note:	

Aufgabe:	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Punkte:	13	9	11	14	13	60
Erreicht:						

Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: **Filter (13 Punkte)**

Gegeben ist das System $G(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$.

a) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Prozesses.

b) Nehmen Sie an, dass der Rückkopplungsteil wegfällt. Stellen Sie die Differenzengleichung $G_1(z)$ auf und zeichnen Sie das Blockschaltbild.

c) Wie wird der Filtertyp aus Aufgabenteil b) bezeichnet?

d) Mit welchem Faktor muss die Differenzengleichung $G_1(z)$ aus Aufgabenteil b) multipliziert werden, um auf die gleiche Verstärkung wie $G(z)$ zu kommen? Nutzen Sie die folgenden Parameter:

$$b_0 = 0.7$$
$$b_1 = 0.7$$
$$b_2 = 0.6$$
$$a_1 = 0.6$$
$$a_2 = 0.4$$

Aufgabe 2: Bilineare Transformation (9 Punkte)

Gegeben ist folgende Übertragungsfunktion im s-Bereich:

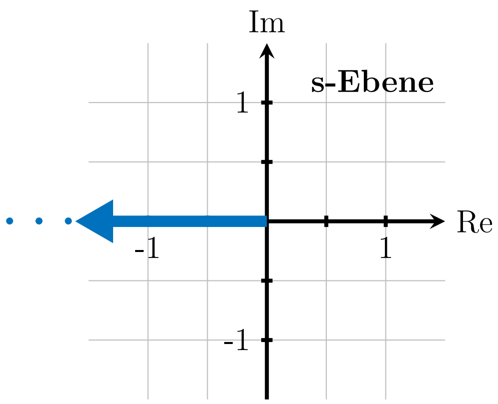
$$G(s) = \frac{s-b}{s-a}.$$

a) Wie groß ist die Verstärkung K_s und wo liegt der Pol p_s und die Nullstelle n_s des Systems im s-Bereich?

b) Transformieren Sie die Übertragungsfunktion mithilfe der bilinearen Transformation in den z-Bereich. Nehmen Sie hierfür $T_0 = 1\,\mathrm{sec}$ an.

c) Wie groß ist die neue Verstärkung K_z und wo liegt der Pol p_z und die Nullstelle n_z des Systems im z-Bereich nach der Transformation?

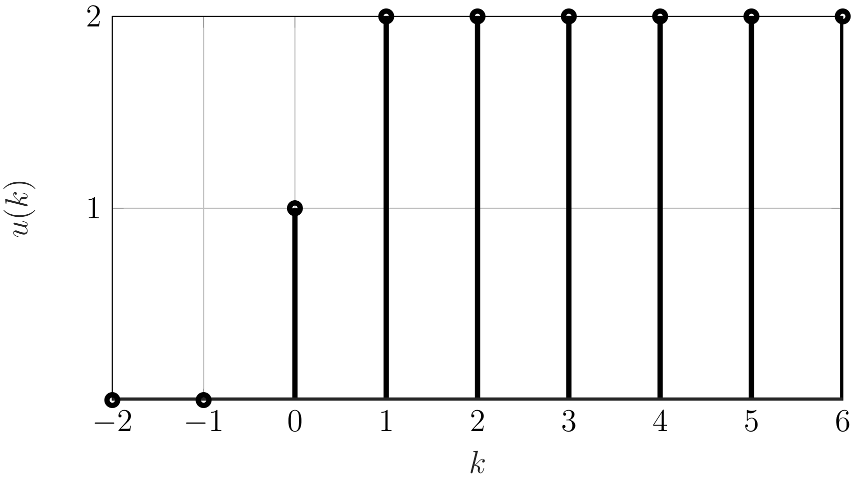
Die folgende Abbildung zeigt die Position möglicher stabiler Polstellen für ein System im s-Bereich. Beachten Sie, dass die Pole sich zwischen 0 und $-\infty$ befinden.

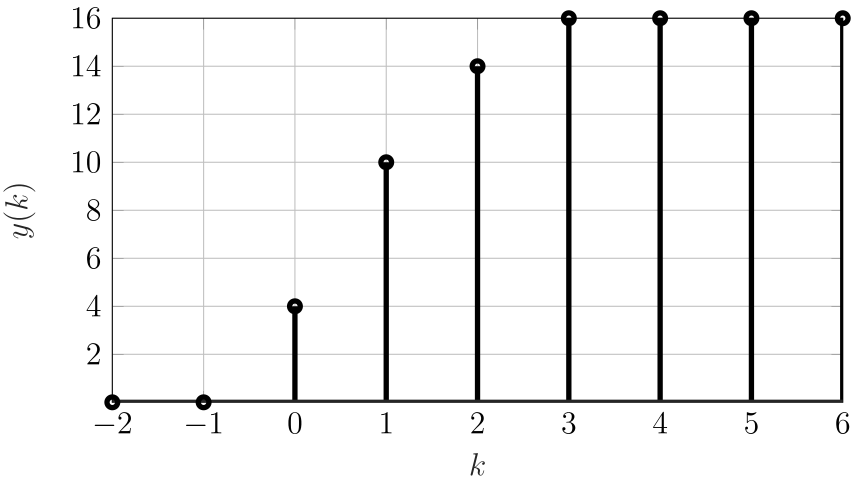


d) Zeichnen Sie ein Diagramm der z-Ebene. Markieren Sie den Bereich in der z-Ebene, in der diese stabilen Polstellen nach Anwendung der bilinearen Transformation liegen.

Aufgabe 3: Systemidentifikation FIR (11 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt die Systemantwort $y(k)$ auf das Eingangssignal $u(k)$.





Dabei lässt sich das System durch einen FIR-Filter endlicher Ordnung beschreiben. Ziel der Aufgabe ist es, die Koeffizienten des FIR-Filters anhand der gegebenen Systemantwort zu identifizieren.

a) Besitzt das System einen Durchgriff? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Das gezeigte System lässt sich in Form eines FIR-Filters darstellen. Wie hoch ist die Ordnung des FIR-Filter zu wählen, damit die dargestellte Systemantwort erzeugt werden kann? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie die Differenzengleichung eines FIR-Filters der in Aufgabenteil b) bestimmten Ordnung an und bestimmen Sie die Koeffizienten dieses Filters anhand der gegebenen Systemantwort.

d) Geben Sie die Übertragungsfunktion des ermittelten Filters an.
Falls Sie keinen Filter ermitteln konnten, nutzen Sie die folgende Differenzengleichung für die Bestimmung der Übertragungsfunktion:

$$y(k) = 3u(k-1) + 5u(k-2) + 2u(k-3)$$

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen und Stichproben (14 Punkte)

a) Zeichnen Sie die folgende Verteilung in ein Diagramm. Schätzen Sie den Mittelwert $\bar{x}$, die Varianz s_x^2 und die Standardabweichung s_x. Zeichnen Sie Stichproben aus dieser Verteilung in ein weiteres Diagramm. Zeichnen Sie zusätzlich den Mittelwert als eine Linie in das Diagramm. Achten Sie darauf, dass markante Eigenschaften der Verteilung anhand der Stichproben erkennbar sind (mindestens 10 Stichproben).

$$p(x) = \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-5}{1}\right)^2}$$

b) Zeichnen Sie die folgende Verteilung in ein Diagramm. Schätzen Sie den Mittelwert $\bar{x}$. Zeichnen Sie Stichproben aus dieser Verteilung in ein weiteres Diagramm. Zeichnen Sie zusätzlich den Mittelwert als eine Linie in das Diagramm. Achten Sie darauf, dass markante Eigenschaften der Verteilung anhand der Stichproben erkennbar sind (mindestens 10 Stichproben).

$$p(x) = \frac{0.5}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-3}{0.5}\right)^2} + \frac{0.5}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-6}{0.5}\right)^2}$$

Aufgabe 5: Bodeplot im Digitalen (13 Punkte)

Gegeben ist folgende diskrete Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{1}{z+0.5}$. Die verwendete Abtastzeit beträgt $T_0 = 1\,\mathrm{sec}$.

a) Berechnen Sie für die angegebne Abtastzeit die vorliegende Shannon-Frequenz ω_S.

b) Berechnen Sie den Amplitudengang $\mid G(i\omega) \mid_{\mathrm{dB}}$ explizit für $\omega = 0.1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}, \omega = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$ und $\omega = 2\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$.

c) Berechnen Sie die Phase $\varphi(\omega)$ explizit für $\omega = 0.1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}, \omega = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$ und $\omega = 2\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$.

d) Skizzieren Sie ein Bode-Diagramm für das Frequnzintervall $\omega \in [0.1, 10]\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$ und kennzeichnen Sie die zuvor berechneten Werte eindeutig.

e) Wie ändert sich die Shannon-Frequenz, wenn sich die Abtastzeit verdoppelt?

Lösung:

Aufgabe 1: Filter (13 Punkte)

Gegeben ist das System $G(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$.

a) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Prozesses.
Antwort:

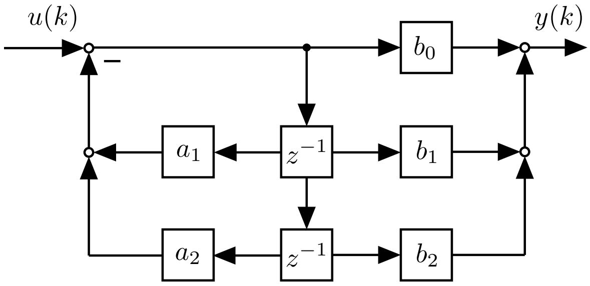


Bild 1: Blockschaltbild des Systems.

3

b) Nehmen Sie an, dass der Rückkopplungsteil wegfällt. Stellen Sie die Differenzengleichung $G_1(z)$ auf und zeichnen Sie das Blockschaltbild. **Antwort**:

$$G_1(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

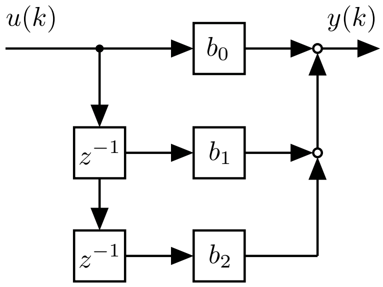


Bild 2: Blockschaltbild des Systems ohne Rückkopplung.

4

c) Wie wird der Filtertyp aus Aufgabenteil b) bezeichnet?
Antwort:
FIR-Filter 1

d) Mit welchem Faktor muss die Differenzengleichung $G_1(z)$ aus Aufgabenteil b) multipliziert werden, um auf die gleiche Verstärkung wie $G(z)$ zu kommen? Nutzen

Sie die folgenden Parameter:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 0.7\\
b_1 &= 0.7\\
b_2 &= 0.6\\
a_1 &= 0.6\\
a_2 &= 0.4
\end{aligned}
$$

Antwort:

$$
\begin{aligned}
h(t \to \infty) &= \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \frac{z}{z-1} = \frac{2}{2} = 1\\
h_1(t \to \infty) &= \lim_{z \to 1}(z-1) b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \frac{z}{z-1} = 2
\end{aligned}
$$

$G_1(z)$ muss mit dem Faktor 0.5 multipliziert werden, um auf die gleiche Verstärkung wie $G(z)$ zu kommen.

$\boxed{5}$

$\boxed{\sum 13}$

Aufgabe 2: Bilineare Transformation (9 Punkte)

Gegeben ist folgende Übertragungsfunktion im s-Bereich:

$$G(s) = \frac{s-b}{s-a}.$$

a) Wie groß ist die Verstärkung K_s und wo liegt der Pol p_s und die Nullstelle n_s des Systems im s-Bereich?

Antwort:
$K_\mathrm{s} = \lim\limits_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} G(s) = \frac{b}{a}$
$p_\mathrm{s} = a$
$n_\mathrm{s} = b$ 2

b) Transformieren Sie die Übertragungsfunktion mithilfe der bilinearen Transformation in den z-Bereich. Nehmen Sie hierfür $T_0 = 1\,\mathrm{sec}$ an.

Antwort:

$$s = \frac{2}{T_0}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = 2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$G(z) = \frac{2\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - b}{2\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - a} = \frac{2-2z^{-1}-b-bz^{-1}}{2-2z^{-1}-a-az^{-1}} = \frac{(2-b)-(2+b)z^{-1}}{(2-a)-(2+a)z^{-1}}$$

$$= \frac{(2-b)z-(2+b)}{(2-a)z-(2+a)} = \frac{(2-b)}{(2-a)}\frac{z-\dfrac{2+b}{2-b}}{z-\dfrac{2+a}{2-a}}$$

2

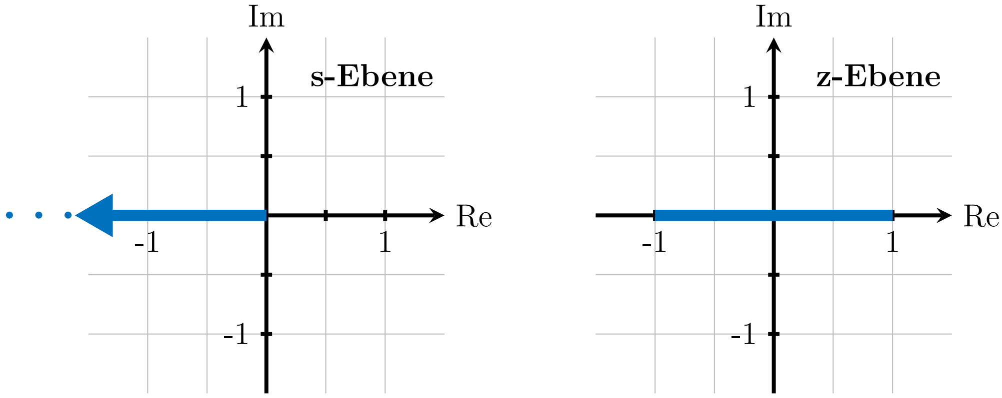
c) Wie groß ist die neue Verstärkung K_z und wo liegt der Pol p_z und die Nullstelle n_z des Systems im z-Bereich nach der Transformation?

Antwort:
$K_\mathrm{z} = G(z=1) = \frac{(2-b)1-(2+b)}{(2-a)1-(2+a)} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$
$p_\mathrm{z} = \frac{2+a}{2-a}$
$n_\mathrm{z} = \frac{2+b}{2-b}$ 3

Die folgende Abbildung zeigt die Position möglicher stabiler Polstellen für ein System im s-Bereich. Beachten Sie, dass die Pole sich zwischen 0 und $-\infty$ befinden.

d) Zeichnen Sie ein Diagramm der z-Ebene. Markieren Sie den Bereich in der z-Ebene, in der diese stabilen Polstellen nach Anwendung der bilinearen Transformation liegen.

Antwort:
Beispiele für verschiedene Pole sind in der Tabelle aufgeführt:



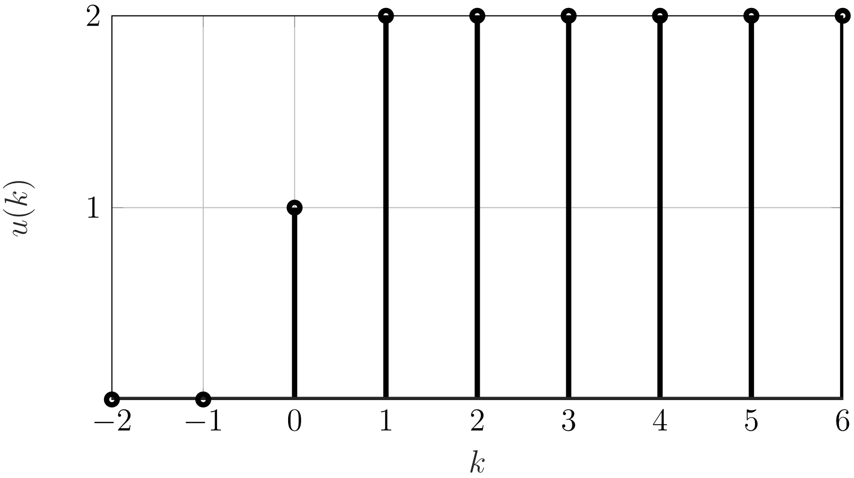
p_s	p_z
a	$\frac{2+a}{2-a}$
0	1
-1	$\frac{1}{3}$
-2	0
-10	$-\frac{8}{12}$
$-\infty$	-1

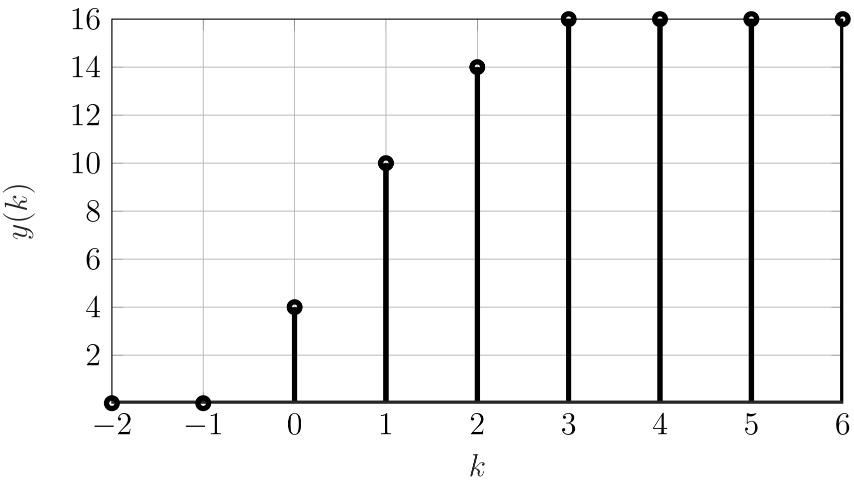
Damit ergeben sich, die neuen Pole p_z nach der Abbildung oben. $\boxed{2}$

$\boxed{\sum 9}$

Aufgabe 3: **Systemidentifikation FIR (11 Punkte)**

Die folgende Abbildung zeigt die Systemantwort $y(k)$ auf das Eingangssignal $u(k)$.

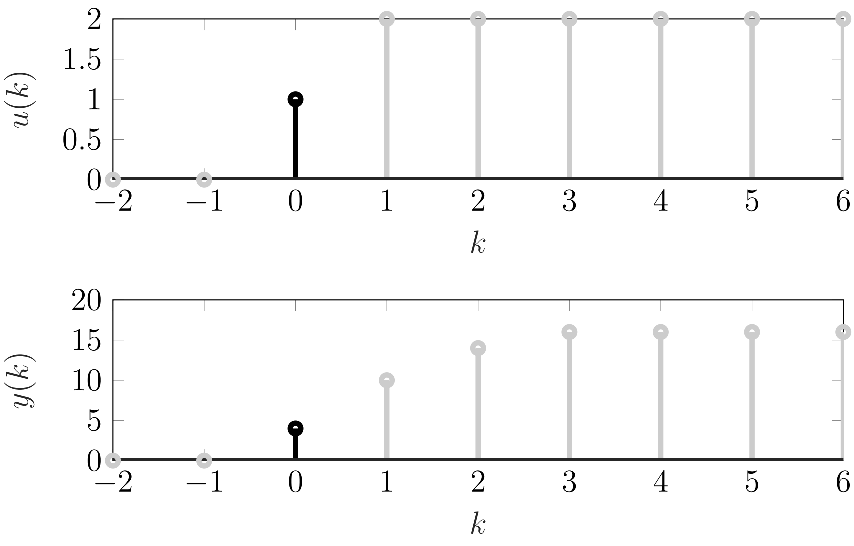




Dabei lässt sich das System durch einen FIR-Filter endlicher Ordnung beschreiben. Ziel der Aufgabe ist es, die Koeffizienten des FIR-Filters anhand der gegebenen Systemantwort zu identifizieren.

a) Besitzt das System einen Durchgriff? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort: Ob ein System einen Durchgriff besitzt lässt sich daran erkennen, dass das System im gleichen Zeitschritt auf eine Änderung der Eingangsgröße reagiert.

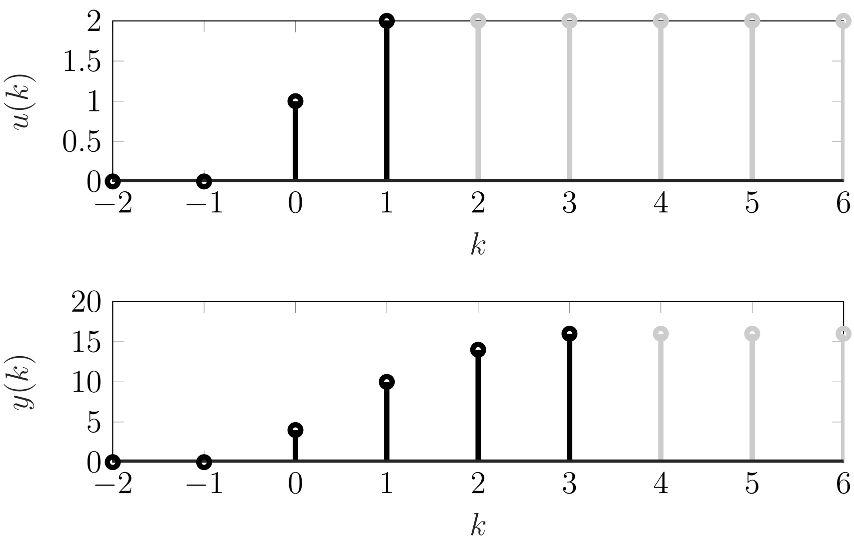


Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass der Systemausgang $y(k=0)$ direkt auf die Eingangsgrößenänderung $u(k=0)$ reagiert. Damit besitzt das System einen Durchgriff.

$\boxed{2}$

b) Das gezeigte System lässt sich in Form eines FIR-Filters darstellen. Wie hoch ist die Ordnung des FIR-Filter zu wählen, damit die dargestellte Systemantwort erzeugt werden kann? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort: Die Ordnung des FIR-Filters, der das System beschreibt, lässt sich anhand der Zeitschritte feststellen, die der Systemausgang benötigt um einen konstanten Wert zu erreichen, nachdem die Eingangsgröße des Systems nicht mehr verändert wird.



Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass das System ab Zeitschritt $k=3$ seinen Systemausgang $y(k=3)=16$ nicht mehr verändert. Die Eingangsgröße $u(k)$ ist ab Zeitschritt $k=1$ konstant. Somit muss der FIR-Filter eine Ordnung von 2 besitzen.

$\boxed{2}$

c) Geben Sie die Differenzengleichung eines FIR-Filters der in Aufgabenteil b) bestimmten Ordnung an und bestimmen Sie die Koeffizienten dieses Filters anhand der gegebenen Systemantwort.

Antwort: Der FIR-Filter, der das System beschreibt, besitzt die Ordnung 2 und hat zusätzlich einen Durchgriff. Damit ergibt sich folgende Differenzengleichung des FIR-Filters:

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$$

Um die Koeffizienten des FIR-Filters zu bestimmen, lassen sich die Werte der Systemantwort in die Differenzengleichung einsetzen. Da die Werte der Eingangsgröße $u(k<0)=0$ sind, können die Koeffizienten schrittweise bestimmt werden.
Für $k=0$:

$$y(0) = 4 \qquad u(0) = 1 \qquad u(-1) = 0 \qquad u(-2) = 0$$

$$\begin{aligned} y(0) &= b_0 u(0) + b_1 u(-1) + b_2 u(-2) \\ &= b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 \\ &= b_0 \\ \rightarrow b_0 &= 4 \end{aligned}$$

Für $k=1$

$$y(1) = 10 \qquad u(1) = 2 \qquad u(0) = 1 \qquad u(-1) = 0$$

$$\begin{aligned} y(1) &= b_0 u(1) + b_1 u(0) + b_2 u(-1) \\ &= 4 \cdot 2 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 \\ &= 8 + b_1 \\ \rightarrow b_1 &= 10 - 8 = 2 \end{aligned}$$

Für $k=2$

$$y(2) = 14 \qquad u(2) = 2 \qquad u(1) = 2 \qquad u(0) = 1$$

$$\begin{aligned} y(2) &= b_0 u(2) + b_1 u(1) + b_2 u(0) \\ &= 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + b_2 \cdot 1 \\ &= 8 + 4 + b_2 \\ \rightarrow b_2 &= 14 - 12 = 2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Differenzengleichung:

$$y(k) = 4u(k) + 2u(k-1) + 2u(k-2)$$

$\boxed{5}$

d) Geben Sie die Übertragungsfunktion des ermittelten Filters an.
Falls Sie keinen Filter ermitteln konnten, nutzen Sie die folgende Differenzengleichung für die Bestimmung der Übertragungsfunktion:

$$y(k) = 3u(k-1) + 5u(k-2) + 2u(k-3)$$

Antwort: Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion lässt sich die Differenzengleichung in den z-Bereich transformieren.

$$y(k) = 4u(k) + 2u(k-1) + 2u(k-2)$$
$$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(z) = 4U(z) + 2U(z)z^{-1} + 2U(z)z^{-2}$$

Durch Umstellen der transformierten Gleichung ergibt sich die Übertragungsfunktion des FIR-Filters.

$$\rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 4 + 2z^{-1} + 2z^{-2}$$

$\boxed{2}$

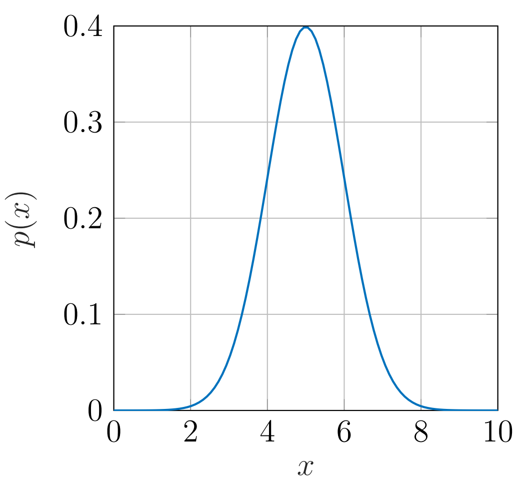
$\boxed{\sum 11}$

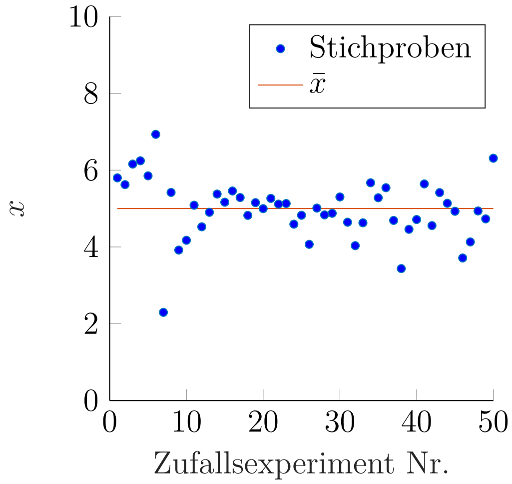
Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen und Stichproben (14 Punkte)

a) Zeichnen Sie die folgende Verteilung in ein Diagramm. Schätzen Sie den Mittelwert $\bar{x}$, die Varianz s_x^2 und die Standardabweichung s_x. Zeichnen Sie Stichproben aus dieser Verteilung in ein weiteres Diagramm. Zeichnen Sie zusätzlich den Mittelwert als eine Linie in das Diagramm. Achten Sie darauf, dass markante Eigenschaften der Verteilung anhand der Stichproben erkennbar sind (mindestens 10 Stichproben).

$$p(x) = \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-5}{1}\right)^2}$$

Antwort:
Mittelwert $\bar{x} = 5$, Varianz $s_x^2 = 1$ und Standardabweichung $s_x = 1$. Diese Werte können der Gleichung entnommen werden. 1





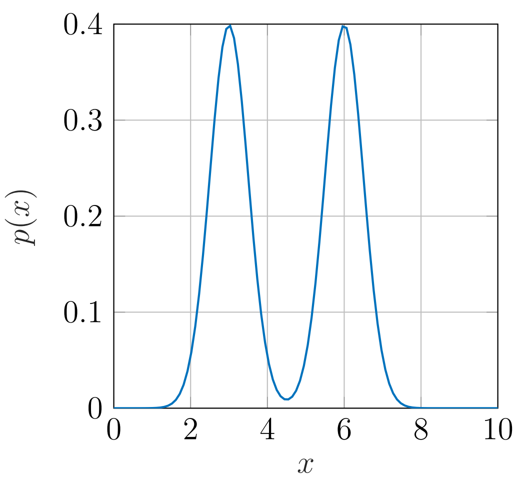
2

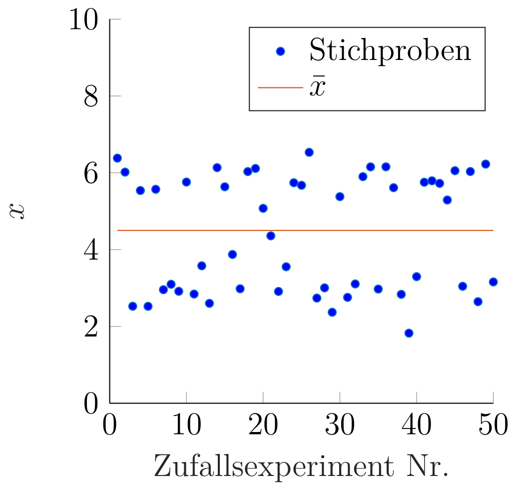
3

b) Zeichnen Sie die folgende Verteilung in ein Diagramm. Schätzen Sie den Mittelwert $\bar{x}$. Zeichnen Sie Stichproben aus dieser Verteilung in ein weiteres Diagramm. Zeichnen Sie zusätzlich den Mittelwert als eine Linie in das Diagramm. Achten Sie darauf, dass markante Eigenschaften der Verteilung anhand der Stichproben erkennbar sind (mindestens 10 Stichproben).

$$p(x) = \frac{0.5}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-3}{0.5}\right)^2} + \frac{0.5}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-6}{0.5}\right)^2}$$

Antwort:
$\bar{x} = \frac{6+3}{2} = 4.5$ Kann aus den Mittelwerten der Gaußkurven berechnet werden. 2


0.4
0.3
0.2
0.1
0
$p(x)$
0 2 4 6 8 10
x


Stichproben
$\bar{x}$
10
8
6
4
2
0
x
0 10 20 30 40 50
Zufallsexperiment Nr.

3

3

Aufgabe 5: Bodeplot im Digitalen (13 Punkte)

Gegeben ist folgende diskrete Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{1}{z+0.5}$. Die verwendete Abtastzeit beträgt $T_0 = 1\,\text{sec}$.

a) Berechnen Sie für die angegebne Abtastzeit die vorliegende Shannon-Frequenz ω_S.
Antwort:

$$\omega_S = \frac{\pi}{T_0}$$
$$\omega_S = \pi\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

1

b) Berechnen Sie den Amplitudengang $\mid G(i\omega) \mid_{\text{dB}}$ explizit für $\omega = 0.1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \omega = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ und $\omega = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

Antwort:

$$G(z) = \frac{1}{z+0.5}$$
$$G(i\omega) = \frac{1}{e^{i\omega T_0}+0.5}$$
$$\mid G(i\omega) \mid = \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\omega T_0) + (\cos(\omega T_0)+0.5)^2}}$$
$$\mid G(i\omega) \mid_{\text{dB}} = 20\log\frac{1}{\sqrt{\sin^2(\omega T_0) + (\cos(\omega T_0)+0.5)^2}}$$
$$\omega = 0.1\frac{\text{rad}}{\text{sec}} : \mid G(i\omega) \mid_{\text{dB}} = -3.5122\,\text{dB}$$
$$\omega = 1\frac{\text{rad}}{\text{sec}} : \mid G(i\omega) \mid_{\text{dB}} = -2.5293\,\text{dB}$$
$$\omega = 2\frac{\text{rad}}{\text{sec}} : \mid G(i\omega) \mid_{\text{dB}} = 0.7891\,\text{dB}$$

4

c) Berechnen Sie die Phase $\varphi(\omega)$ explizit für $\omega = 0.1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \omega = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ und $\omega = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.
Antwort:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{z + 0.5} \\
G(i\omega) &= \frac{1}{e^{i\omega T_0} + 0.5} \\
G(i\omega) &= \frac{1(e^{-i\omega T_0} + 0.5)}{(e^{i\omega T_0} + 0.5)(e^{-i\omega T_0} + 0.5)} \\
G(i\omega) &= \frac{e^{-i\omega T_0} + 0.5}{1.25 + 0.5e^{i\omega T_0} + 0.5e^{-i\omega T_0}} \\
G(i\omega) &= \frac{e^{-i\omega T_0} + 0.5}{1.25 + \cos(\omega T_0)} \\
G(i\omega) &= \frac{0.5 + \cos(\omega T_0) - i\sin(\omega T_0)}{1.25 + \cos(\omega T_0)} \\
\text{Re}\{G(i\omega)\} &= \frac{0.5 + \cos(\omega T_0)}{1.25 + \cos(\omega T_0)} \\
\text{Im}\{G(i\omega)\} &= \frac{-\sin(\omega T_0)}{1.25 + \cos(\omega T_0)} \\
\varphi(\omega) &= \arctan \frac{-\sin(\omega T_0)}{0.5 + \cos(\omega T_0)}
\end{aligned}
$$

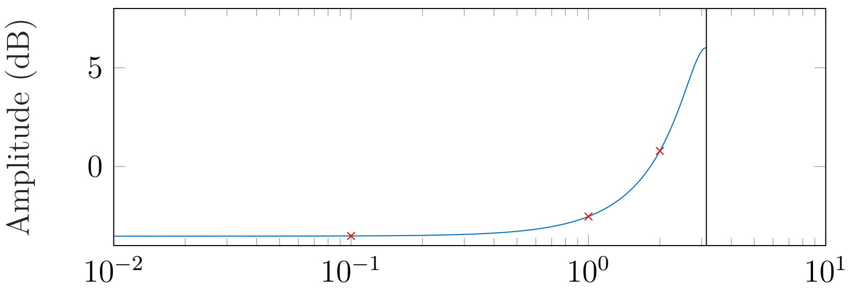
$$
\begin{aligned}
\omega = 0.1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} &: \varphi(\omega) = -3.8204\,^\circ \\
\omega = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} &: \varphi(\omega) = -38.9684\,^\circ \\
\omega = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} &: \varphi(\omega) = -84.7312\,^\circ
\end{aligned}
$$

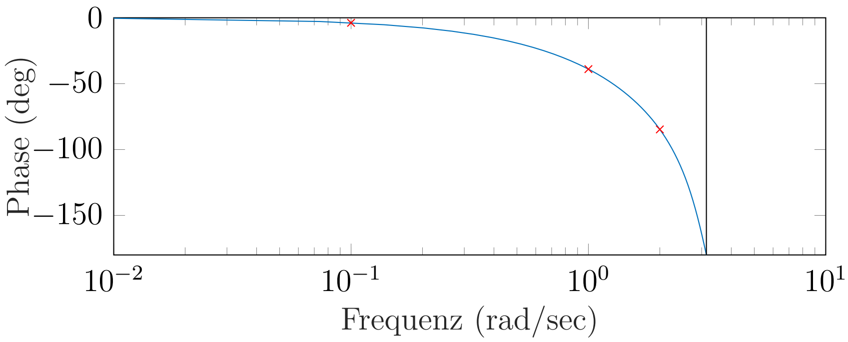
Oder mittels folgender Beziehung:

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{A}{B}\right) &= \varphi(A) - \varphi(B) \\
\varphi\left(\frac{1}{B}\right) &= -\varphi(B) \\
\varphi(\omega) &= -\arctan \frac{\sin(\omega T_0)}{0.5 + \cos(\omega T_0)}
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$

d) Skizzieren Sie ein Bode-Diagramm für das Frequnzintervall $\omega \in [0.1, 10]\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ und kennzeichnen Sie die zuvor berechneten Werte eindeutig.
Antwort:





3

e) Wie ändert sich die Shannon-Frequenz, wenn sich die Abtastzeit verdoppelt?
Antwort:

$$\omega_S = \frac{\pi}{T_0}$$
$$\omega_S = \frac{\pi}{2}$$
$$\omega_S = 1.571\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

1

$\sum 13$