Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

15. März 2014

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	6	10	12	14	18	60
Note:	Ist:						

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Bewerten Sie folgende Aussage zu digitalen Signalen.
- ☐ Durch Erhöhung der Abtastfrequenz vermeidet man Aliasing.
- ☐ Veränderungen der Abtastfrequenz beeinflussen den Quantisierungsfehler nicht.
- ☐ Die Abtastfrequenz muss mindestens doppelt so groß sein, wie die höchste Frequenzkomponente.

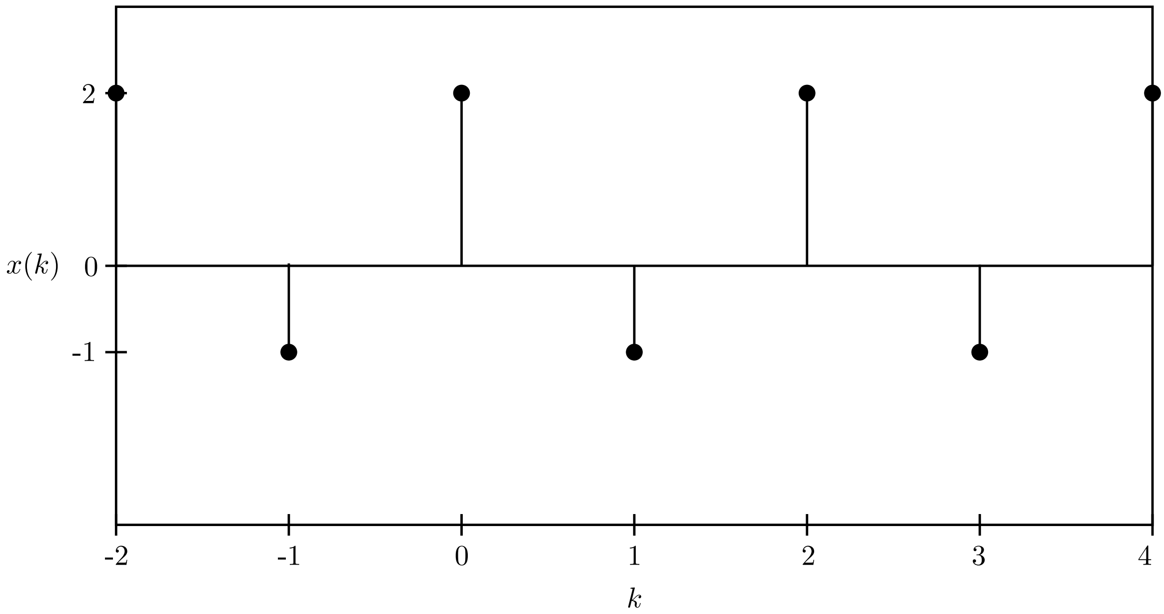
b) Leitet man ein rauschbehaftetes Signal nach der Zeit ab ...
- ☐ ... wird das System instabil.
- ☐ ... verändert sich die Verstärkung der Übertragungsfunktion.
- ☐ ... verstärkt sich das Rauschen.

c) Bewerten Sie folgende Aussage zur Hauptkomponentenanalyse (PCA).
- ☐ Es handelt sich dabei um ein überwachtes Lernverfahren.
- ☐ Das Verfahren dient der Datenvorverarbeitung.
- ☐ Mit der Methode lassen sich die Koeffizienten eines FIR-Filters ermitteln.

d) Bewerten Sie folgende Aussage zum K-Means-Clustering.
- ☐ Es handelt sich dabei um ein unüberwachtes Lernverfahren.
- ☐ Es findet immer das globale Optimum.
- ☐ Die Anzahl der Cluster muss vorab festgelegt werden.

Aufgabe 2: Diskrete Fourier-Transformation

Gegeben ist die unten abgebildete periodische Folge $x(k)$.



a) Welche Periodendauer N hat das Signal?

b) Stellen Sie das zu lösende Gleichungssystem zur diskreten Fourier-Transformierten $X(n)$ auf und formulieren Sie es in Matrix-Vektor-Schreibweise $\underline{X} = \underline{F}\,\underline{x}$. Beschränken Sie sich dabei zunächst auf die allgemeine Formulierung mithilfe der Abkürzung $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ und einem allgemeinen Signal $\underline{x}$ bzw. $x(k)$.

c) Setzen Sie in das Gleichungssystem das vorliegende Signal $x(k)$ ein und lösen Sie es nach $X(n)$ auf.

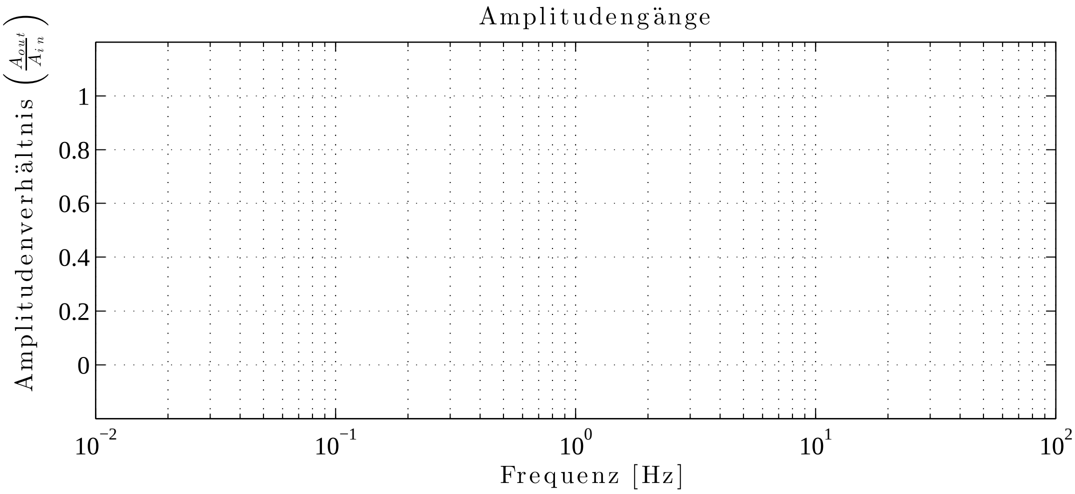
d) Berechnen Sie die benötigten Fourier-Koeffizienten W_N^{nk} und stellen Sie diese in der komplexen Ebene dar.

e) Setzen Sie die Fourier-Koeffizienten ein und berechnen Sie das diskrete Amplitudenspektrum $|X(n)|$.

Aufgabe 3: Filter

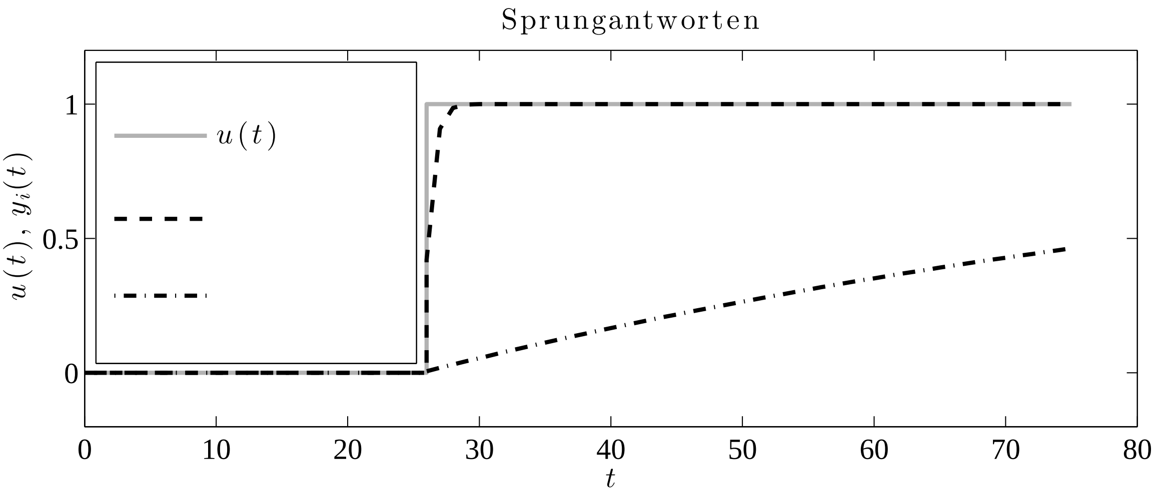
Es sollen zwei Filter G_1 und G_2 miteinander verglichen werden. Bei beiden Filtern handelt es sich um Tiefpassfilter. Die Grenzfrequenz des ersten Filters G_1 ist $f_1 = 0.05$ Hz, die des zweiten Filters G_2 beträgt $f_2 = 5$ Hz.

a) Zeichnen Sie die **idealisierten** Amplitudengänge der beiden Filter G_1 und G_2 in das unten stehende Diagramm und kennzeichnen Sie, welcher Amplitudengang zu Filter G_1 und welcher zu Filter G_2 gehört.

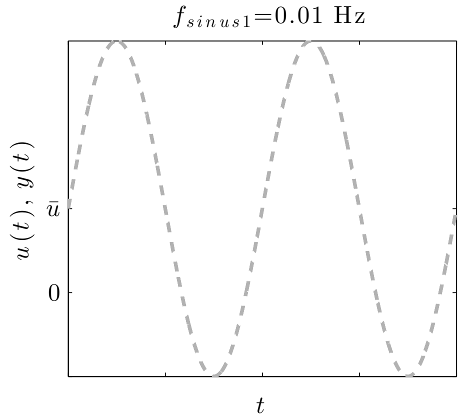


Gehen Sie von nun an davon aus, dass die idealisierten Filter jeweils durch ein System erster Ordnung angenähert sind.

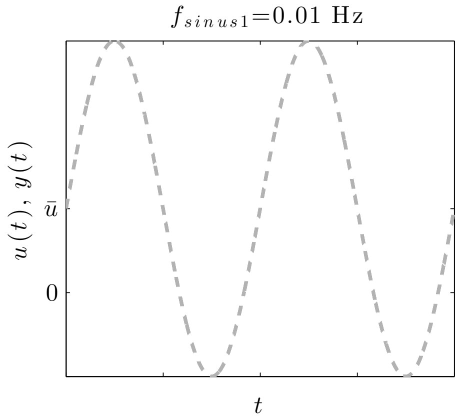
b) Nun wird ein Einheitssprung $u(t) = \sigma(t)$ durch beide Filter geschickt. Der gefilterte Ausgang von Filter G_1 soll mit y_1 und der gefilterte Ausgang von Filter G_2 mit y_2 bezeichnet werden. Weisen Sie den unten dargestellten Sprungantworten jeweils den richtigen gefilterten Ausgang zu.



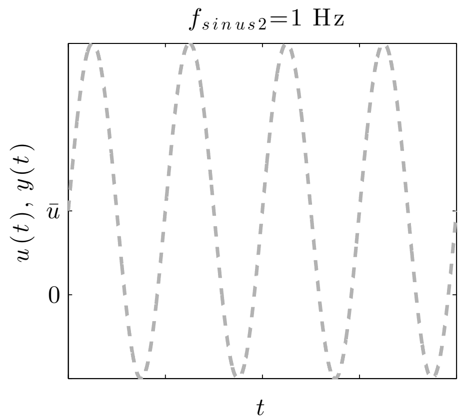
c) Nun sollen Sinusverläufe mit drei unterschiedlichen Frequenzen, $f_{sinus1} = 0.01$ Hz, $f_{sinus2} = 1$ Hz and $f_{sinus3} = 100$ Hz, mit den Filtern G_1 und G_2 gefiltert werden. Die Sinusverläufe sind unten in jeder Spalte einmal dargestellt. Skizzieren Sie **qualitativ** in der linken Spalte das mit G_1 gefilterte Signal und in der rechten Spalte das mit G_2 gefilterte Signal. Gehen Sie davon aus, dass die Filterantworten bereits eingeschwungen sind. Bei dem mit $\bar{u}$ bezeichneten Wert handelt es sich um den Mittelwert des Eingangssignals $u(t)$.



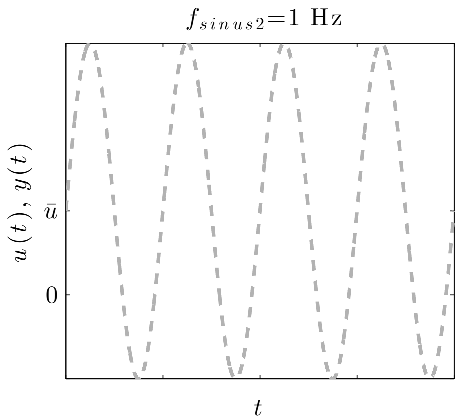
(a) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_1 im eingeschwungenen Zustand.



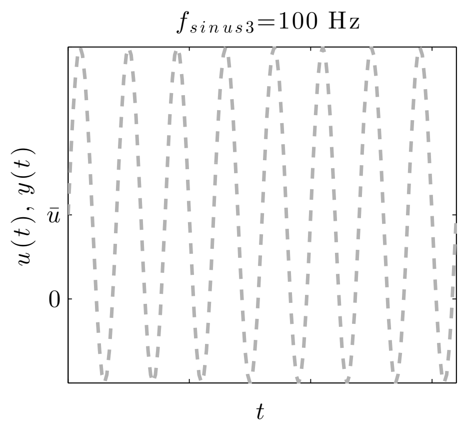
(b) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_2 im eingeschwungenen Zustand.



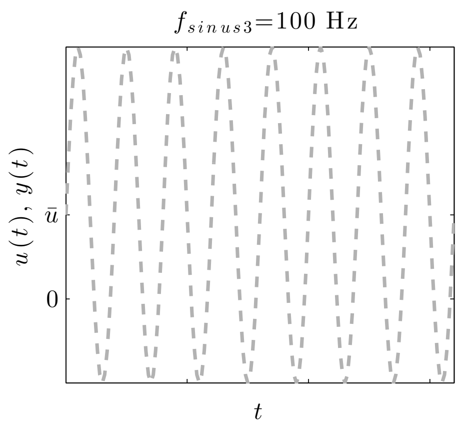
(c) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_1 im eingeschwungenen Zustand.



(d) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_2 im eingeschwungenen Zustand.



(e) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_1 im eingeschwungenen Zustand.



(f) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_2 im eingeschwungenen Zustand.

Aufgabe 4: Zeitdiskretes System

Gegeben ist die zeitkontinuierliche Sprungantwort eines PT_1-Systems

$$h(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) ,$$

mit der Verstärkung $K = 4$ und der Zeitkonstanten $T = 2$ sec.

a) Leiten Sie die Impulsantwort (Gewichtsfunktion) $g(t)$ des PT_1-Systems her.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ mittels Invarianz der Sprungantwort. Verwenden Sie hierfür die Abtastzeit $T_0 = 0{,}25$ sec.

c) Ist das System sprungfähig? Welche Verstärkung ergibt sich?

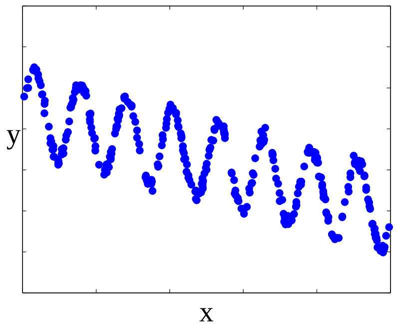
d) Ermitteln Sie die Anfangswerte des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems.

Aufgabe 5: Stochastische Signale

Alle Aufgabenteile können komplett unabhängig voneinander gelöst werden.

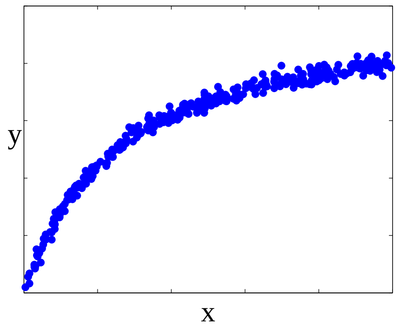
a) Ordnen Sie die folgenden Korrelationskoeffizienten den Bildern (a) bis (d) zu: $-0{,}7$; 0; 0,2; 0,9. Tragen Sie dazu den entsprechenden Koeffizienten direkt über dem jeweiligen Bild ein.

$\rho_{xy} =$



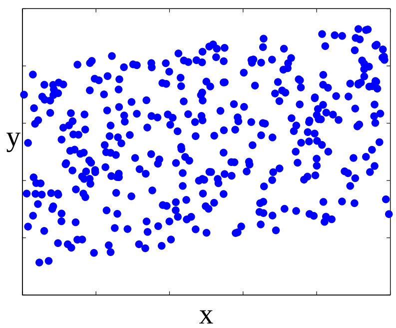
(g)

$\rho_{xy} =$



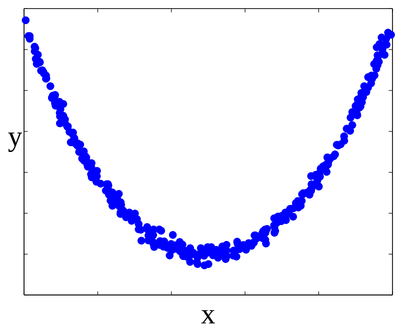
(h)

$\rho_{xy} =$



(i)

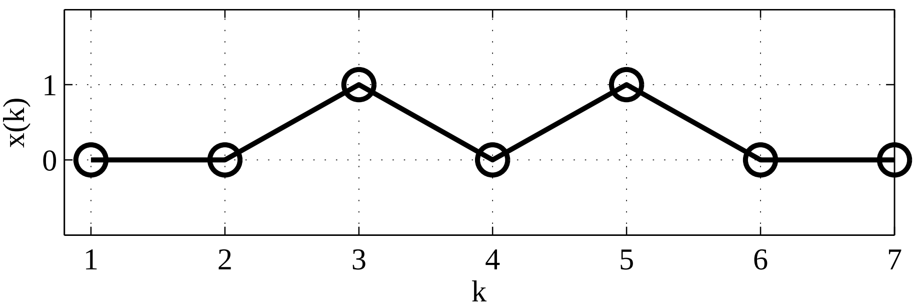
$\rho_{xy} =$



(j)

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion für das unten abgebildete Signal $x(k)$. Benutzen Sie dazu folgende Schätzformel und variieren Sie die Zeitverschiebung um $\kappa = 0 \ldots 6$:

$$r_{xx}(\kappa) = \frac{1}{N - |\kappa|} \sum_{k=1}^{N-|\kappa|} x(k)x(k+\kappa) \ . \tag{1}$$



Geben Sie an, ob es sich bei Gleichung 1 um die biasfreie oder die biasbehaftete Schätzformel handelt.

c) Wahrscheinlichkeitsdichten

1) Skizzieren Sie in **einem** Koordinatensystem qualitativ **zwei** Normalverteilungen, mit folgenden Eigenschaften:
   - Erwartungswert $\mu_1 = 0$, Varianz $\sigma_1^2 = 1$.
   - Erwartungswert $\mu_2 = 0$, Varianz $\sigma_2^2 = 9$.

   Kennzeichnen Sie, welche der gezeichneten Normalverteilungen welcher Varianz entsprechen soll.

2) Zeichnen Sie die exakte Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichtefunktion, bei der alle Werte zwischen 2 und 6 gleich wahrscheinlich sind (Gleichverteilung). Achten Sie dabei auf die Achsskalierung!

Achten Sie bei sämtlichen Skizzen auf vorhandene Achsbeschriftungen!

Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Bewerten Sie folgende Aussage zu digitalen Signalen.

- [ ] Durch Erhöhung der Abtastfrequenz vermeidet man Aliasing.
- [x] Veränderungen der Abtastfrequenz beeinflussen den Quantisierungsfehler nicht.
- [x] Die Abtastfrequenz muss mindestens doppelt so groß sein, wie die höchste Frequenzkomponente.

b) Leitet man ein rauschbehaftetes Signal nach der Zeit ab ...

- [ ] ... wird das System instabil.
- [ ] ... verändert sich die Verstärkung der Übertragungsfunktion.
- [x] ... verstärkt sich das Rauschen.

c) Bewerten Sie folgende Aussage zur Hauptkomponentenanalyse (PCA).

- [ ] Es handelt sich dabei um ein überwachtes Lernverfahren.
- [x] Das Verfahren dient der Datenvorverarbeitung.
- [ ] Mit der Methode lassen sich die Koeffizienten eines FIR-Filters ermitteln.

d) Bewerten Sie folgende Aussage zum K-Means-Clustering.

- [x] Es handelt sich dabei um ein unüberwachtes Lernverfahren.
- [ ] Es findet immer das globale Optimum.
- [x] Die Anzahl der Cluster muss vorab festgelegt werden.

$\boxed{\sum 6}$

Aufgabe 2: Diskrete Fourier-Transformation

Allgemein: $\text{DFT}\{x(k)\} = X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W_N^{nk}$ mit $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$.

a) Die Periodendauer ist $N = 2$. $\boxed{1}$

b) Diskretes Zeitsignal ist periodisch mit $N = 4$ Abtastwerten:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} .$$

Somit ergibt sich die Rechenvorschrift zu:

$$\text{DFT}\{x(k)\} = X(n) = \sum_{k=0}^{1} x(k) \cdot W_2^{nk} .$$

Das zu lösende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} X(0) &= W_2^0 \cdot x(0) + W_2^0 \cdot x(1) \\ X(1) &= W_2^0 \cdot x(0) + W_2^1 \cdot x(1) . \end{aligned}$$ $\boxed{2}$

In Matrix-Vektor-Schreibweise umgeformt folgt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_2 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}}_{\underline{x}} . \qquad (2)$$ $\boxed{1}$

c) Das gegebene Signal mit der Periodendauer $N = 4$ ist:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

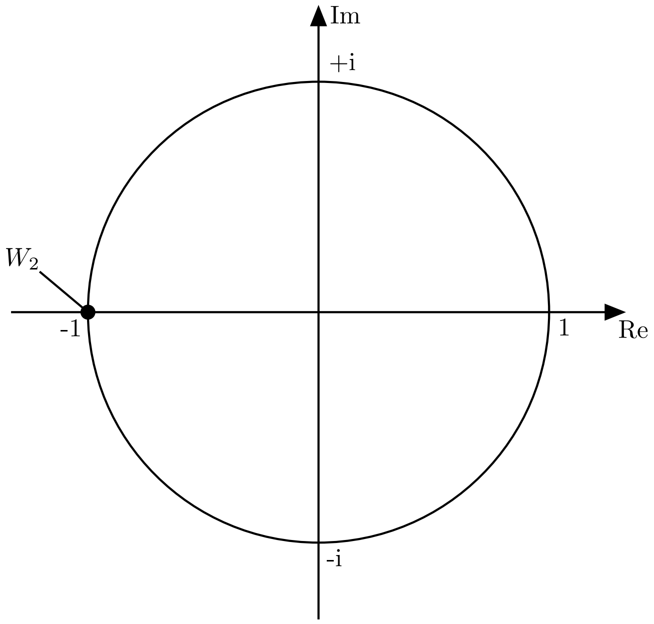
Eingesetzt in Gleichung 2 ergibt sich für $\underline{X}$:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 2-W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-W_2 \end{bmatrix} .$$ $\boxed{1}$

d) Es ist lediglich der Fourier-Koeffizienten W_2 zu berechnen:

$$W_2 = e^{-i\frac{2\pi}{2}\cdot 1} = \cos(-\pi) + i \cdot \sin(-\pi) = -1 \ .$$ 1

Fourier-Koeffizient W_2 in der Komplexe Ebene:



3

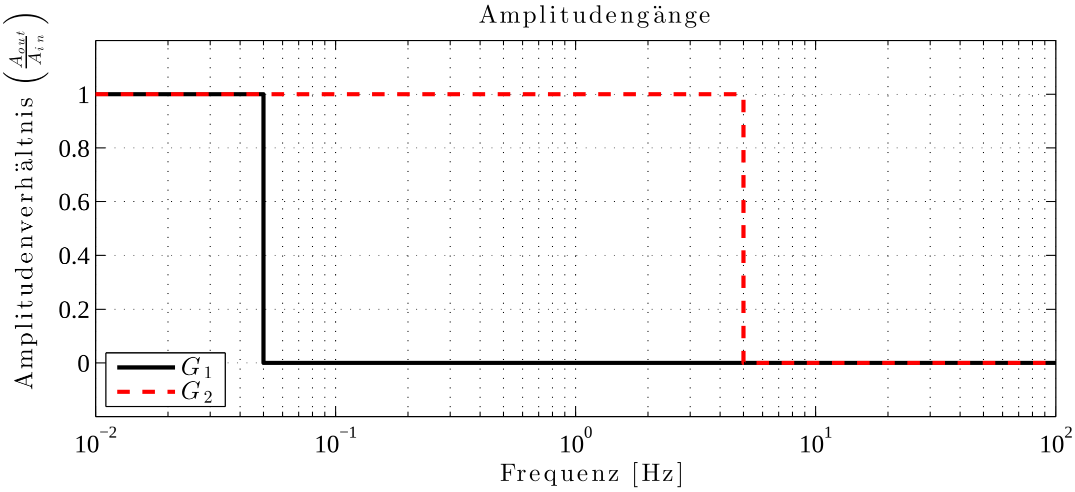
e) Eingesetzt ergibt sich das Amplitudenspektrum $|\underline{X}|$:

$$|\underline{X}| = \begin{bmatrix} |1| \\ |2-(-1)| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |1| \\ |3| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \ .$$ 1

$\sum 10$

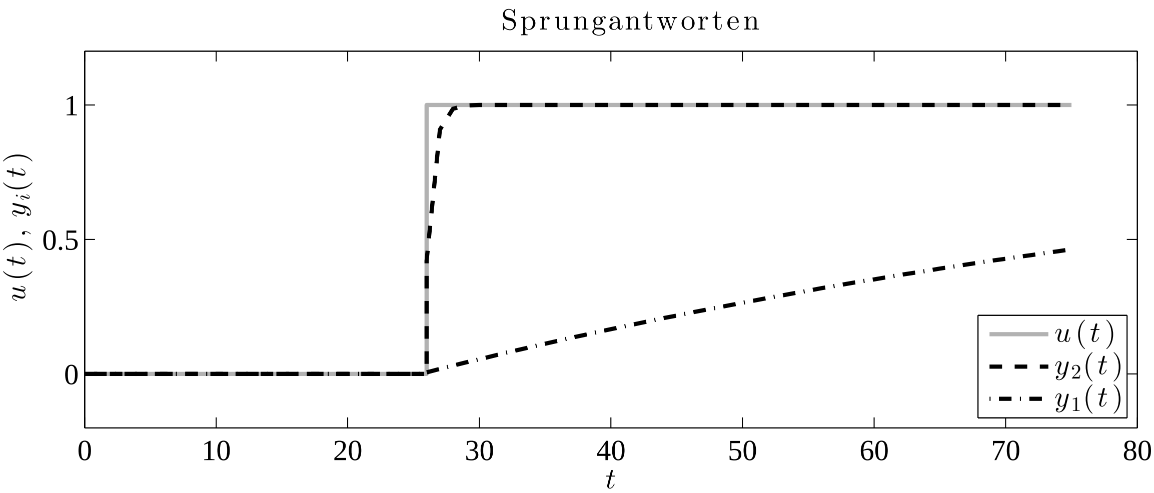
Aufgabe 3: Filter

a) Zeichnen Sie die idealisierten Amplitudengänge der beiden Filter G_1 und G_2.



4

b) Weisen Sie den unten dargestellten Sprungantworten jeweils den richtigen gefilterten Ausgang zu.

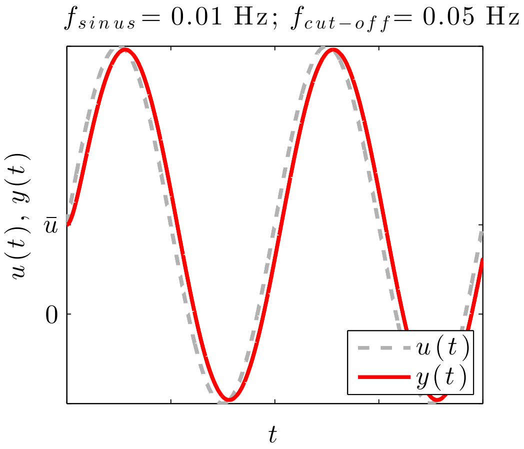


2

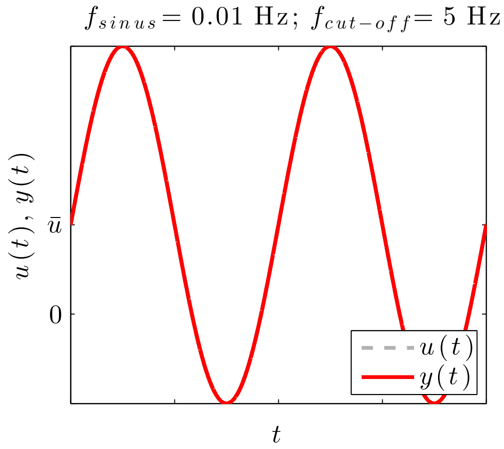
c) Skizzieren Sie **qualitativ** in der linken Spalte das mit G_1 gefilterte Signal und in der rechten Spalte das mit G_2 gefilterte Signal.
Die im Folgenden gezeigten Lösungen sind die exakten Lösungen, wenn man die Eingangssignale mit einem Butterworth Filter erster Ordnung filtert. Um die volle Punktzahl zu erhalten reichen an der richtigen Stelle horizontale Linien oder das gefilterte Signal liegt exakt über dem Eingangssignal.

6

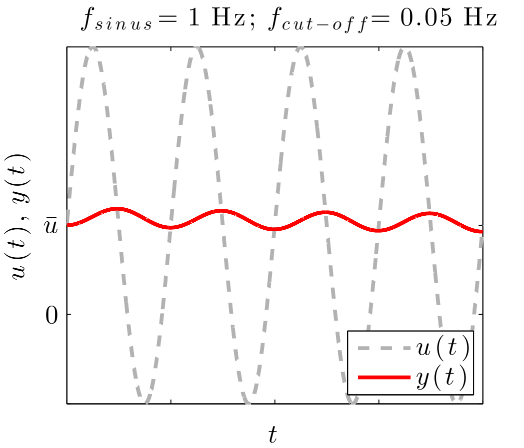
$\sum 12$



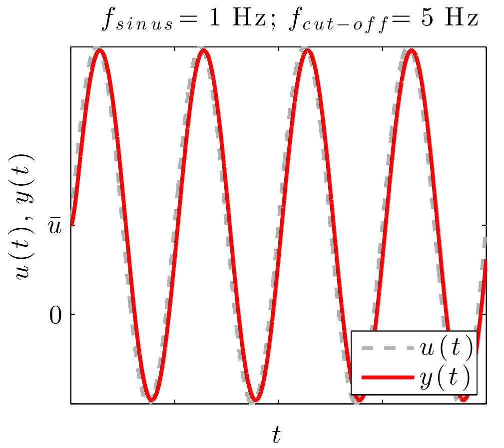
(a) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_1 im eingeschwungenen Zustand.



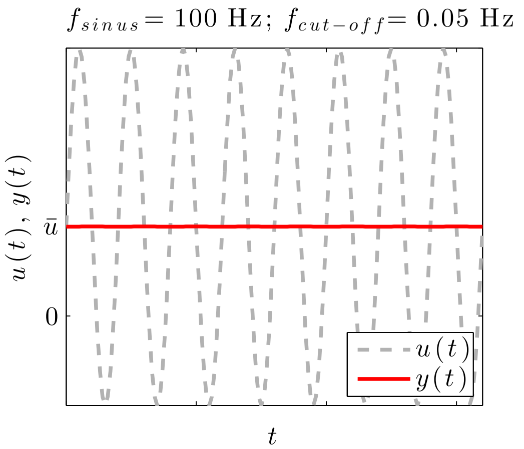
(b) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_2 im eingeschwungenen Zustand.



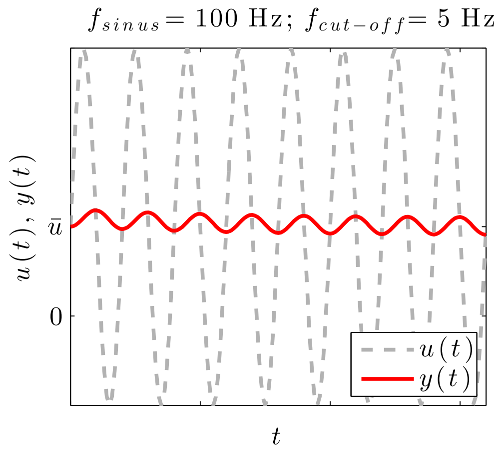
(c) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_1 im eingeschwungenen Zustand.



(d) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_2 im eingeschwungenen Zustand.



(e) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_1 im eingeschwungenen Zustand.



(f) Skizzieren Sie qualitativ die Filterantwort von G_2 im eingeschwungenen Zustand.

Aufgabe 4: Zeitdiskretes System

a) Um aus der Sprungantwort die Impulsantwort zu erhalten, muss die Sprungantwort abgeleitet werden:

$$g(t) = \frac{d}{dt}h(t) = \frac{d}{dt}\left(K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right) = K \cdot (-\frac{1}{T}) \cdot -e^{-\frac{t}{T}} = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \ . \qquad \boxed{2}$$

Setzt man die vorgegebenen Werte ein erhält man:

$$g(t) = \frac{4}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2sec}} = 2 \cdot e^{-\frac{t}{2sec}} \ .$$

b) Zunächst muss die Sprungantwort mit der Abtastzeit $T_0 = 0{,}25$ sec diskretisiert werden:

$$h(k) = h(t = T_0 \cdot k) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_0 \cdot k}{T}}\right) = 4 \cdot \left(1 - e^{-\frac{0{,}25sec \cdot k}{2sec}}\right) = 4 \cdot \left(1 - e^{-0{,}125k}\right) \ . \qquad \boxed{1}$$

Eingesetzt in die allgemein Gleichung für die z-Transformation H(z) folgt:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(h(k) \cdot z^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[4 \cdot \left(1 - e^{-0{,}125k}\right) \cdot z^{-k}\right] \\ &= 4 \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-k}\right) - \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-0{,}125k} \cdot z^{-k}\right)\right] \qquad \boxed{2} \\ &= 4 \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-1}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-0{,}125} \cdot z^{-1}\right)^k\right] \ . \end{aligned}$$

Mit der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ folgt:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-0{,}25} \cdot z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1 - e^{-0{,}25} \cdot z^{-1}} \qquad \boxed{2} \\ &\Rightarrow H(s) = 4 \cdot \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-0{,}25} \cdot z^{-1}}\right] \ . \end{aligned}$$

Nun folgt die Umformung von H(z) in G(z) durch ableiten:

$$\begin{aligned} H(z) &= G(z) \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - z^{-1}}}_{\text{Sprung } \sigma(k)} \\ G(z) &= H(z) \cdot \left(1 - z^{-1}\right) \\ G(z) &= 4 \cdot \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-0.125} \cdot z^{-1}}\right) \cdot \left(1 - z^{-1}\right) \qquad \boxed{3} \\ G(z) &= 4 \cdot \frac{\cancel{1} - e^{-0.125} \cdot z^{-1} \cancel{-1} + z^{-1}}{1 - e^{-0.125} \cdot z^{-1}} \\ G(z) &= 4 \cdot \frac{(1 - e^{-0.125}) \cdot z^{-1}}{1 - e^{-0.125} \cdot z^{-1}} \ . \end{aligned}$$

c) Das System ist nicht sprungfähig, da $u(k)$ keinen direkten Einfluss auf $y(k)$ hat.

Die Verstärkung lautet: $\boxed{2}$

$$G(z=1) = 4 \cdot \frac{(1-e^{-0.125}) \cdot 1}{1-e^{-0.125} \cdot 1} = 4 \cdot \frac{1-e^{-0.125}}{1-e^{-0.125}} = 4 \; .$$

d) Anfangswert des zeitkontinuierlichen Systems: $g(t \to 0sec) = 2 \cdot e^{-\frac{0sec}{2sec}} = 2$. $\boxed{2}$

Anfangswert des zeitdiskreten Systems:

$$g(k \to 0) = 2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 0} = 4 \; ,$$

oder

$$g(k \to 0) = \lim_{z \to \infty} G(z) = \frac{4}{1} = 4 \; .$$

$\boxed{\sum 14}$

Aufgabe 5: Stochastische Signale

a) Ordnen Sie die folgenden Korrelationskoeffizienten den Bildern (a) bis (d) zu: −0,7; 0; 0,2; 0,9.

(a): -0.7
(b): 0.9
(c): 0.2
(d): 0

4

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion für das unten abgebildete Signal $u(k)$.

Die Autokorrelationsfunktion ist nur für zwei Zeitverschiebungen ungleich Null: Für $\kappa = 0$ und $\kappa = 2$.

$$r_{xx}(\kappa = 0) = \frac{2}{7}$$
$$r_{xx}(\kappa = 2) = \frac{1}{5}\ .$$

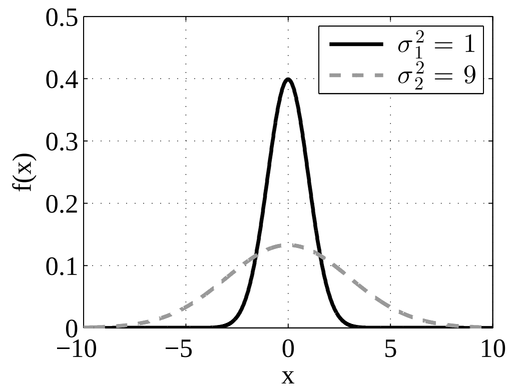
Es handelt sich um die biasfreie Variante.

7

c) Wahrscheinlichkeitsdichten

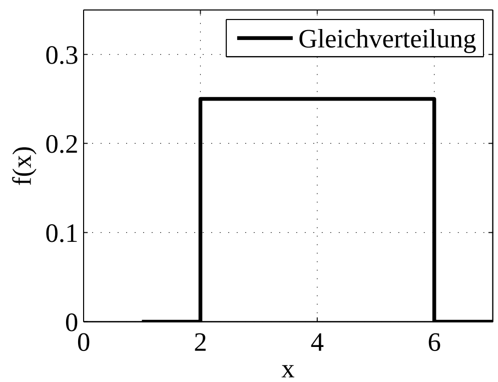
1

1) Normalverteilungen



4

2) Gleichverteilung



2

$\sum$ 18