Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

09.03.2022

Name:	
Mat.-Nr.	
Note:	

Aufgabe:	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Punkte:	13	10	13	12	12	60
Erreicht:						

Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Filter (13 Punkte)

Gegeben ist die Differenzengleichung eines zeitdiskreten Systems

$$a_0 y(k) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) - a_2 y(k-2)$$

mit $a_0 = 0.5$, $a_2 = 0.2$, $b_1 = 0.5$ und $b_2 = 0.6$.

a) Leiten Sie die Übertragungsfunktion im z-Bereich her.

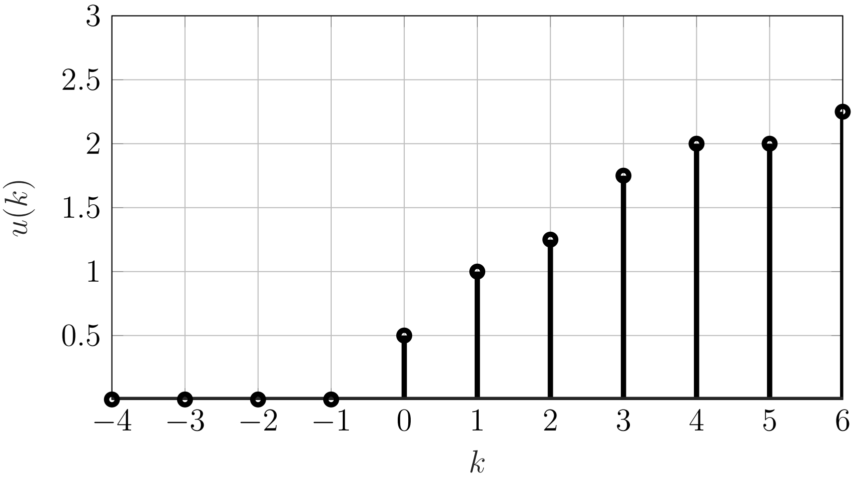
b) Zeichnen Sie das Blockschaltbild.

c) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion. Setzen Sie dafür die gegebenen Koeffizienten $(a_0, ..., b_2)$ ein.

d) Gegeben ist ein FIR-Filter mit Nullstellen $n_1 = -1$, $n_2 = -2$, einer Abtastzeit von $T_0 = 1\,\mathrm{s}$ und einer Totzeit von $3\,\mathrm{s}$. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion und zeichnen Sie das Blockschaltbild.

Aufgabe 2: Median-Filter (10 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt das Eingangssignal $u(k)$.



Es soll ein kausaler Median-FIR-Filter 3. Ordnung auf das Signal $u(k)$ angewendet werden.

a) Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y_1(k)$ des Filters und zeichnen Sie dieses.

b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G_1(z)$ eines linearen Filters an, der ebenfalls mit dem gegebenen Eingang $u(k)$ den in Aufgabenteil a) berechneten Ausgang $y_1(k)$ bestimmt. Begründen Sie, wie es möglich ist, dass zwei unterschiedliche Filter die selbe Ausgangsgrößenfolge liefern können.

In den folgenden Teilaufgaben soll ein kausaler Median-FIR-Filter 5. Ordnung untersucht werden.

c) Bestimmen Sie das neue Ausgangssignal $y_2(k)$ des Filters und zeichnen Sie dieses.

d) Welche andere Übertragungsfunktion $G_2(z)$ berechnet aus dem gegebenen Eingang $u(k)$ den in Aufgabenteil c) berechneten Ausgangsgrößenverlauf $y_2(k)$.

Aufgabe 3: Bodeplot im Digitalen (13 Punkte)

Gegeben ist folgende diskrete Übertragungsfunktion $G(z) = 1 + 0.5z^{-1} + z^{-2}$. Die verwendete Abtastzeit beträgt $T_0 = 1\,\mathrm{sec}$.

a) Berechnen Sie für die angegebene Abtastzeit die vorliegende Shannon-Frequenz ω_S in $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$.

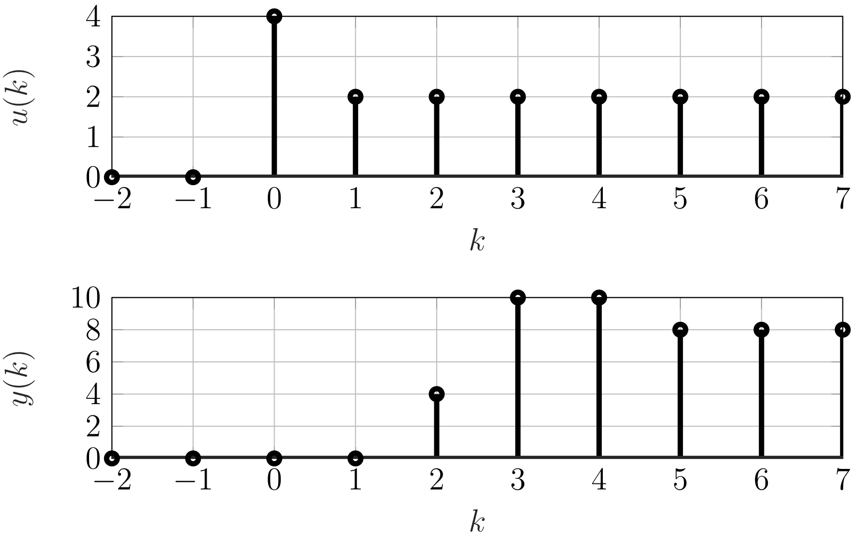
b) Berechnen Sie den Amplitudengang $|G(i\omega)|_{\mathrm{dB}}$ explizit für $\omega = 0.1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}, \omega = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$, $\omega = 2\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$ sowie $\omega = 3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$. Teilen Sie dazu die Übertragungsfunktion in einen Term für die frequenzabhängige Verstärkung und die Phase. Existiert ein nicht definierter Punkt für $|G(i\omega)|_{\mathrm{dB}}$ im Intervall $\omega \in [0, \omega_S]\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$?

c) Berechnen Sie die Phase $\varphi(\omega)$ in für die oben angegebenen ω. Achten Sie ggf. auf das Vorzeichen der frequenzabhängige Verstärkung.

d) Skizzieren Sie ein Bode-Diagramm für das Frequnzintervall $\omega \in [0.1, 10]\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$. Kennzeichnen Sie die zuvor berechneten Werte eindeutig. Was unterscheided das Bode-Diagramm einer kontinuierlichen Übertragungsfunktion von dem einer disktreten Übertragungsfunktion bezüglich ω?

Aufgabe 4: Systemidentifikation FIR (12 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt die Systemantwort $y(k)$ auf das Eingangssignal $u(k)$.



Dabei lässt sich das System durch einen FIR-Filter endlicher Ordnung beschreiben. Ziel der Aufgabe ist es, die Koeffizienten des FIR-Filters anhand der gegebenen Systemantwort zu identifizieren.

a) Das System ist kausal und nicht sprungfähig. Zusätzlich besitzt es eine Totzeit. Wie groß ist die Totzeit des Systems? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Das gezeigte System lässt sich in Form eines FIR-Filters darstellen. Wie hoch ist die Ordnung des FIR-Filter zu wählen, damit die dargestellte Systemantwort erzeugt werden kann? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie die Differenzengleichung eines FIR-Filters der in Aufgabenteil b) bestimmten Ordnung an und bestimmen Sie die Koeffizienten dieses Filters anhand der gegebenen Systemantwort.

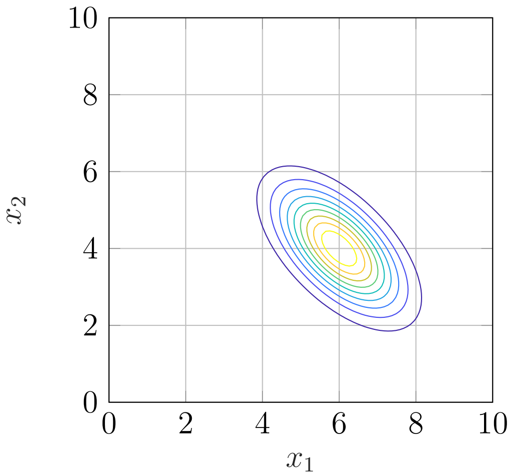
d) Geben Sie die Übertragungsfunktion des ermittelten Filters an.
Falls Sie keinen Filter ermitteln konnten, nutzen Sie die folgende Differenzengleichung für die Bestimmung der Übertragungsfunktion:

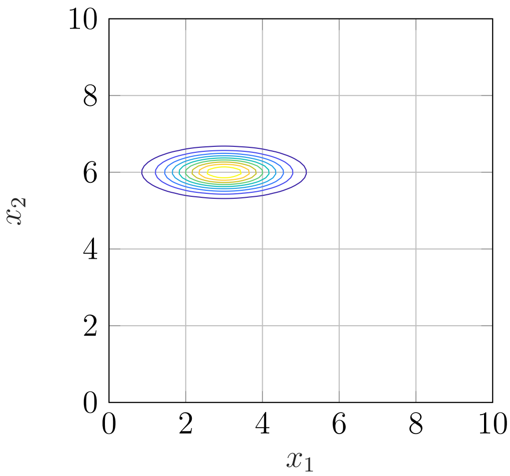
$$y(k) = 3u(k) + 3u(k-1) + 5u(k-2) + 2u(k-3)$$

e) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des ermittelten FIR-Filters.

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsverteilung und Stichproben (12 Punkte)

a) Im Folgenden sind Höhenlinien von zweidimensionalen Normalverteilungen abgebildet. Zeichnen Sie zu jeder Verteilung passende Stichproben für x_1 und x_2 in ein Koordinatensystem über der Nummer der Stichproben auf. Zeichnen Sie zudem die Mittelwerte der Stichproben ein. Achten Sie darauf, dass die Signale voneinander unterschieden werden können und wichtige Eigenschaften erkenntlich sind.





b) Gegeben ist ein perfekter Würfel. Dieser Würfel besitzt je zwei mal die Zahlen 1, 2 und 3 auf seiner Oberfläche. Zeichnen Sie die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_1(x)$ für die Ereignisse '1', '2' und '3'. Wie wird eine solche Verteilung genannt?

c) Nun werden zwei dieser Würfel geworfen und die Ergebnisse addiert. Was sind die möglichen Ereignisse? Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_2(x)$ für die möglichen Ereignisse. Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur vorigen Verteilung $p_1(x)$.

Lösung:

Aufgabe 1: Filter (13 Punkte)

Gegeben ist die Differenzengleichung eines zeitdiskreten Systems

$$a_0 y(k) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) - a_2 y(k-2)$$

mit $a_0 = 0.5$, $a_2 = 0.2$, $b_1 = 0.5$ und $b_2 = 0.6$.

a) Leiten Sie die Übertragungsfunktion im z-Bereich her.

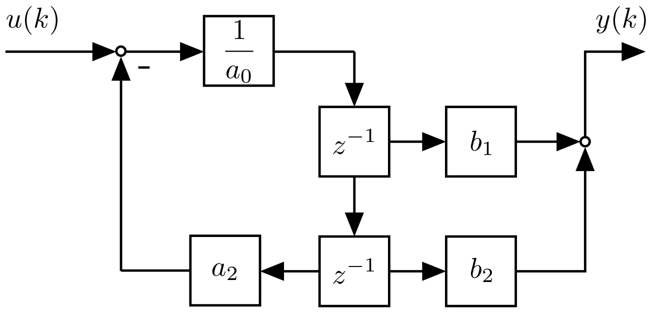
Antwort: Die Übertragungsfunktion leitet sich aus der Differenzengleichung wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
a_0 y(k) &= b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) - a_2 y(k-2) \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet \\
a_0 Y(z) &= b_1 \cdot U(z) \cdot z^{-1} + b_2 \cdot U(z) \cdot z^{-2} - a_2 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} \\
Y(z) \cdot \left(a_0 + a_2 \cdot z^{-2}\right) &= U(z) \cdot \left(b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}\right) \\
G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{a_0 + a_2 \cdot z^{-2}}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

b) Zeichnen Sie das Blockschaltbild.

Antwort:



$\boxed{3}$

c) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion. Setzen Sie dafür die gegebenen Koeffizienten $(a_0, ..., b_2)$ ein.

Antwort:

$$\begin{aligned}
G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{a_0 + a_2 \cdot z^{-2}} \\
&= \frac{b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_2} = \frac{\frac{b_1}{a_0} z + \frac{b_2}{a_0}}{z^2 + \frac{a_2}{a_0}} \\
&\rightarrow n_1 = -1.2;\ p_{1,2} = \pm 0.63i
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

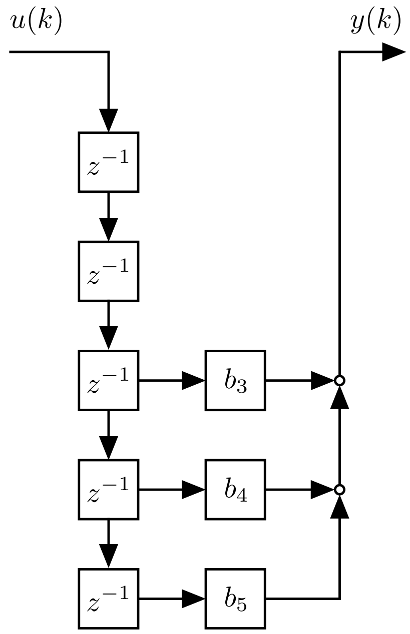
d) Gegeben ist ein FIR-Filter mit Nullstellen $n_1 = -1$, $n_2 = -2$, einer Abtastzeit von $T_0 = 1\,\mathrm{s}$ und einer Totzeit von $3\,\mathrm{s}$. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion und zeichnen Sie das Blockschaltbild.

Antwort:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = (z+1)(z+2)z^{-5} \\
&= (z^2+3z+2)z^{-5} \\
&= z^{-3} + 3z^{-4} + 2z^{-5}
\end{aligned}
$$

Alternativ:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= (1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})z^{-3} \\
&= (1-\frac{3}{2}z^{-1} + 0.5z^{-2})z^{-3} \\
&= z^{-3} - \frac{3}{2}z^{-4} + 0.5z^{-5}
\end{aligned}
$$

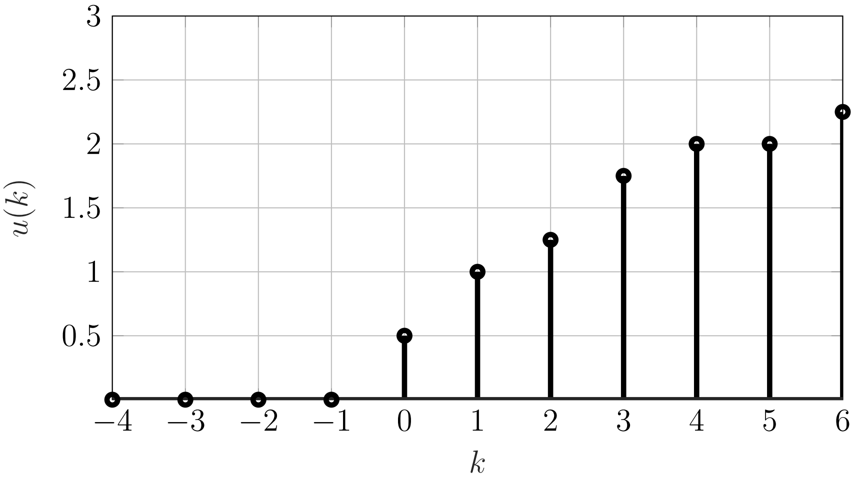


$\boxed{5}$

$\boxed{\sum 13}$

Aufgabe 2: Median-Filter (10 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt das Eingangssignal $u(k)$.

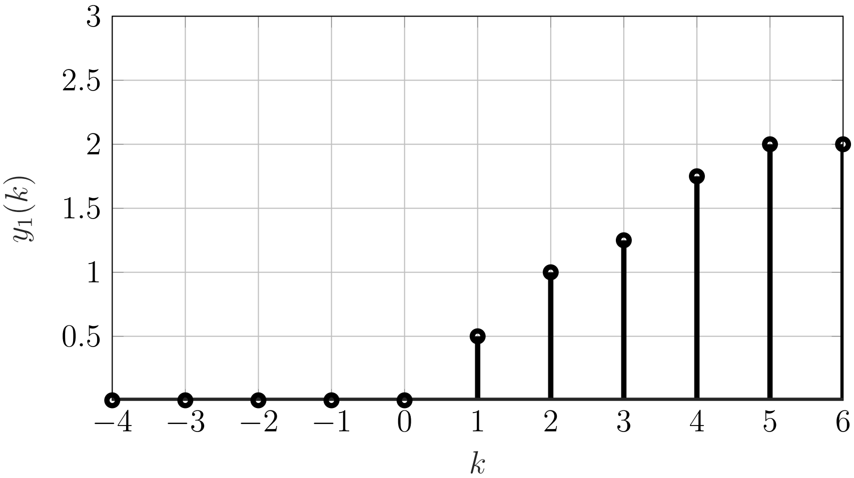


Es soll ein kausaler Median-FIR-Filter 3. Ordnung auf das Signal $u(k)$ angewendet werden.

a) Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y_1(k)$ des Filters und zeichnen Sie dieses.
Antwort: Der Ausgang des Median-Filter 3. Ordnung lässt sich durch

$$y_1(k) = \text{median}(u(k), u(k-1), u(k-2))$$

berechnen.



4

b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G_1(z)$ eines linearen Filters an, der ebenfalls mit dem gegebenen Eingang $u(k)$ den in Aufgabenteil a) berechneten Ausgang $y_1(k)$ bestimmt. Begründen Sie, wie es möglich ist, dass zwei unterschiedliche Filter die selbe Ausgangsgrößenfolge liefern können.
Antwort: Durch das monoton steigende Eingangssignal wird beim Median-Filter immer der Eingangswert von $u(k-1)$ als Ausgang $y(k)$ bestimmt. Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G_1(z) = z^{-1}.$$

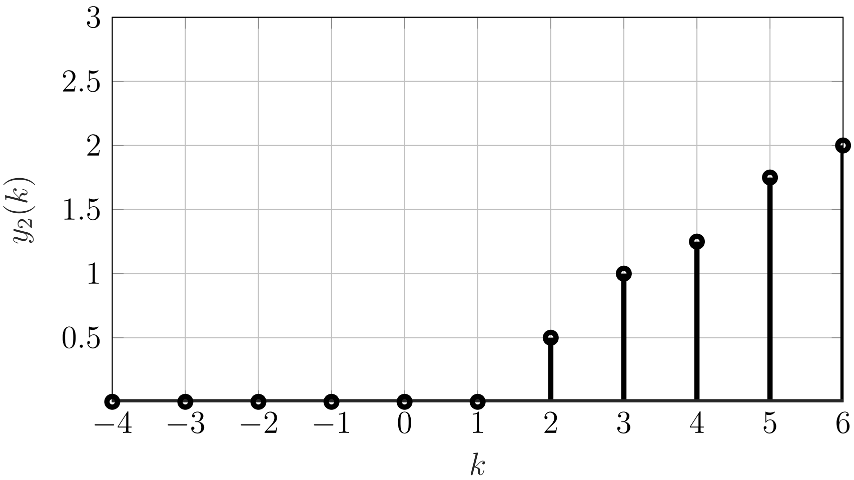
Zwei verschiedene lineare Filter können nicht den selben Ausgangsverlauf zum gleichen Eingangssignal aufweisen. Dies ist nur möglich, da der Median-Filter ein nichtlinear Filter ist. 2

In den folgenden Teilaufgaben soll ein kausaler Median-FIR-Filter 5. Ordnung untersucht werden.

c) Bestimmen Sie das neue Ausgangssignal $y_2(k)$ des Filters und zeichnen Sie dieses.
Antwort: Der Ausgang des Median-Filter 5. Ordnung lässt sich durch

$$y_2(k) = \text{median}(u(k), u(k-1), u(k-2), u(k-3), u(k-4))$$

berechnen.



3

d) Welche andere Übertragungsfunktion $G_2(z)$ berechnet aus dem gegebenen Eingang $u(k)$ den in Aufgabenteil c) berechneten Ausgangsgrößenverlauf $y_2(k)$.
Antwort: Nun gilt: $y(k) = u(k-2)$, somit lautet die Übertragungsfunktion

$$G_2(z) = z^{-2}.$$

1

$\sum$ 10

Aufgabe 3: Bodeplot im Digitalen (13 Punkte)

Gegeben ist folgende diskrete Übertragungsfunktion $G(z) = 1 + 0.5z^{-1} + z^{-2}$. Die verwendete Abtastzeit beträgt $T_0 = 1\,\text{sec}$.

a) Berechnen Sie für die angegebene Abtastzeit die vorliegende Shannon-Frequenz ω_S in $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.
Antwort:

$$\omega_S = \frac{\pi}{T_0}$$
$$\omega_S = \pi\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

1

b) Berechnen Sie den Amplitudengang $|G(i\omega)|_{\text{dB}}$ explizit für $\omega = 0.1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \omega = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\omega = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ sowie $\omega = 3\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Teilen Sie dazu die Übertragungsfunktion in einen Term für die frequenzabhängige Verstärkung und die Phase. Existiert ein nicht definierter Punkt für $|G(i\omega)|_{\text{dB}}$ im Intervall $\omega \in [0, \omega_S]\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$?
Antwort:

- Gleichung umformen

$$\begin{aligned} G(z) &= 1 + 0.5z^{-1} + z^{-2} \\ &= z^{-1}\left(0.5 + z^{1} + z^{-1}\right) \\ G(i\omega) &= \left(2\cos(\omega T_0) + 0.5\right)e^{-i\omega T_0} \text{ mit } z = e^{i\omega T_0} \text{ und } z^1 + z^{-1} = 2\cos(\omega T_0) \end{aligned}$$

- Frequenzabhängige Verstärkung und Phase

$$G(i\omega) = \underbrace{\left(2\cos(\omega T_0) + 0.5\right)}_{\text{frequenzabhängige Verstärkung}} \quad e^{\overbrace{-i\omega T_0}^{\text{Phase}}}$$

Rein reelle Phase.

- Amplitudengang berechnen

$$\begin{aligned} |G(i\omega)| &= |2\cos(\omega T_0) + 0.5| \\ |G(i\omega)|_{\text{dB}} &= 20\log|2\cos(\omega T_0) + 0.5| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = 0.1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} &: |G(i\omega)|_{\text{dB}} = 7.92\,\text{dB} \\ \omega = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} &: \quad |G(i\omega)|_{\text{dB}} = 3.98\,\text{dB} \\ \omega = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} &: \quad |G(i\omega)|_{\text{dB}} = -9.57\,\text{dB} \\ \omega = 3\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} &: \quad |G(i\omega)|_{\text{dB}} = 3.41\,\text{dB} \end{aligned}$$

- Frequenzabhängige Verstärkung = 0?

$$\begin{aligned}
0 &= 2\cos(\omega T_0) + 0.5 \\
-\frac{1}{4} &= \cos(\omega T_0) \\
\omega &= \frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{T_0} \\
\omega &\approx 1.82
\end{aligned}$$

  Für $\omega = \frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{T_0}$, $\log(0)$ ist nicht definiert.
  Amplitude für $\omega > \frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{T_0}$ ist negativ. 4

c) Berechnen Sie die Phase $\varphi(\omega)$ in für die oben angegebenen ω. Achten Sie ggf. auf das Vorzeichen der frequenzabhängige Verstärkung.
Antwort:

- Unter Verwendung der berechneten Beziehung
  Amplitude ist real, daher kein Effekt auf Phase

$$\begin{aligned}
\angle G(i\omega) &= \angle e^{-i\omega T_0} \\
\varphi(\omega) &= T_0\omega
\end{aligned}$$

  Wenn frequenzabhängige Verstärkung negativ, addiere π zu φ. Daher:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} T_0\omega & \omega < \frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{T_0} \\ T_0\omega + \pi & \omega > \frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{T_0} \end{cases}$$

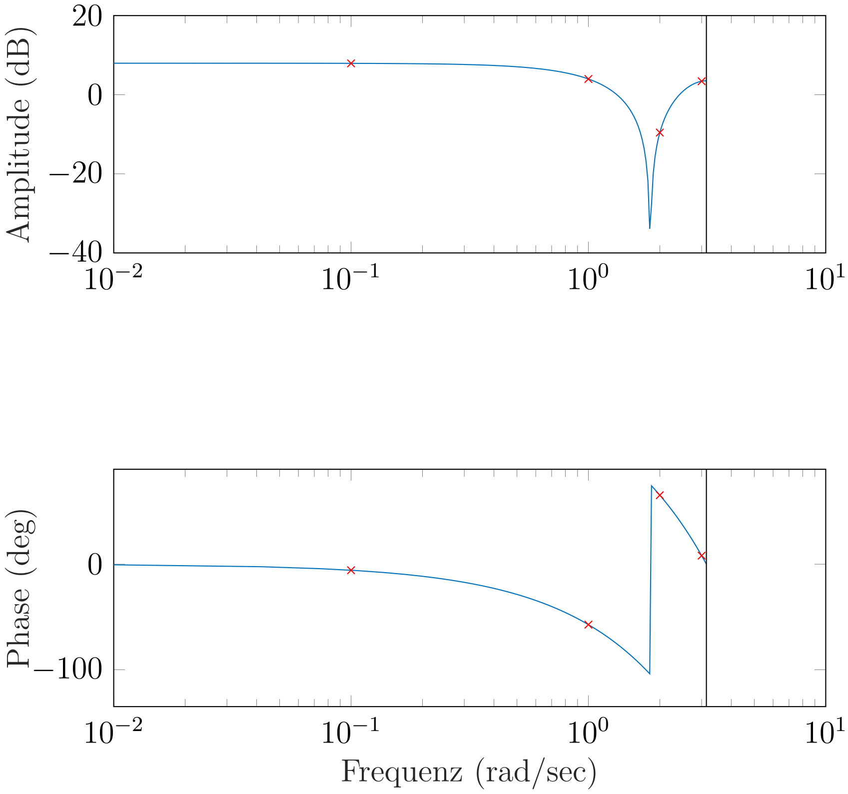
$$\begin{aligned}
\omega &= 0.1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} : \varphi(\omega) = -5.73\,^\circ \\
\omega &= 1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} : \quad \varphi(\omega) = -57.3\,^\circ \\
\omega &= 2\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} : \quad \varphi(\omega) = 65.41\,^\circ \\
\omega &= 3\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} : \quad \varphi(\omega) = 8.11\,^\circ
\end{aligned}$$

4

d) Skizzieren Sie ein Bode-Diagramm für das Frequnzintervall $\omega \in [0.1, 10]\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Kennzeichnen Sie die zuvor berechneten Werte eindeutig. Was unterscheided das Bode-Diagramm einer kontinuierlichen Übertragungsfunktion von dem einer disktreten Übertragungsfunktion bezüglich ω?

Antwort:

Um die Interpretierbarkeit einer diskreten Übertragungsfunktion zu vereinfachen wird ausschließlich die obere Hälfte des Einheiskreises aufgetragen.

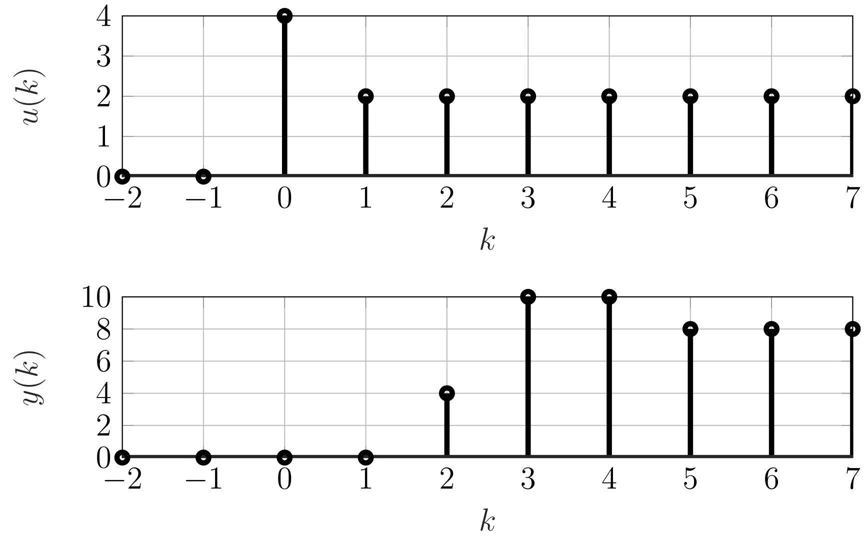


4

$\sum$ 15

Aufgabe 4: Systemidentifikation FIR (12 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt die Systemantwort $y(k)$ auf das Eingangssignal $u(k)$.



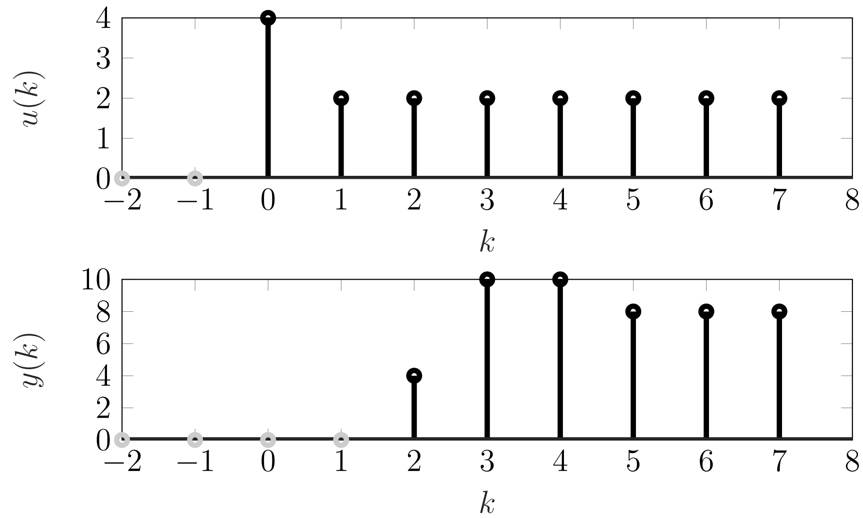
Dabei lässt sich das System durch einen FIR-Filter endlicher Ordnung beschreiben. Ziel der Aufgabe ist es, die Koeffizienten des FIR-Filters anhand der gegebenen Systemantwort zu identifizieren.

a) Das System ist kausal und nicht sprungfähig. Zusätzlich besitzt es eine Totzeit. Wie groß ist die Totzeit des Systems? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort:
Ein sprungfähiges System reagiert direkt im gleichen Zeitschritt auf eine Eingangssignaländerung. Ist es nicht sprungfähig, reagiert es erst im darauffolgenden Zeitschritt. Die gezeigte Systemantwort reagiert allerdings erst im zweiten Zeitschritt nach der Eingangssignaländerung. Das bedeutet es besitzt die Totzeit von einem Abtastschritt.

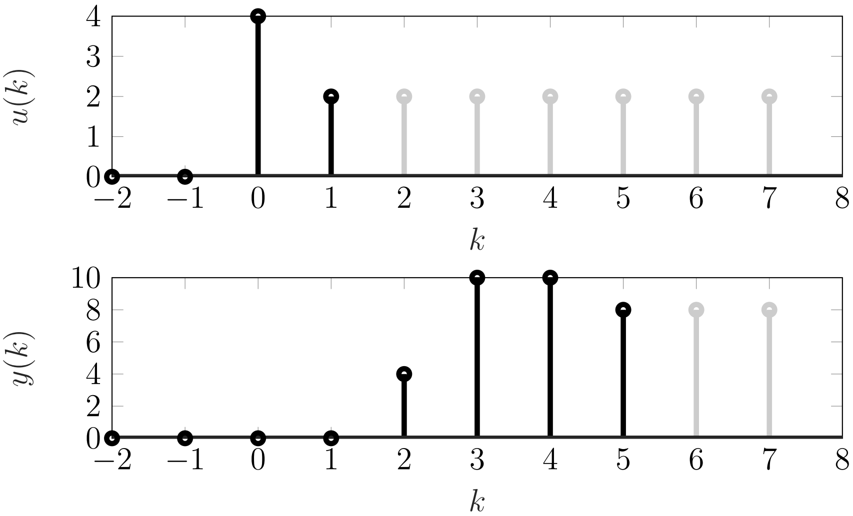
$$T_t = 1 \cdot T_0$$

Die folgender Abbildung macht deutlich ab welchen Zeitschritten die beiden Signal sich verändern.



b) Das gezeigte System lässt sich in Form eines FIR-Filters darstellen. Wie hoch ist die Ordnung des FIR-Filter zu wählen, damit die dargestellte Systemantwort erzeugt werden kann? Begründen Sie Ihre Antwort. 1

Antwort: Die Ordnung des FIR-Filters, der das System beschreibt, lässt sich anhand der Zeitschritte feststellen, die der Systemausgang benötigt um einen konstanten Wert zu erreichen, nachdem die Eingangsgröße des Systems nicht mehr verändert wird.



Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass das System ab Zeitschritt $k = 5$ seinen Systemausgang $y(k = 5) = 8$ nicht mehr verändert. Die Eingangsgröße $u(k)$ ist ab Zeitschritt $k = 1$ konstant. Da das System eine Totzeit von einem Zeitschritt besitzt, muss der FIR-Filter eine Ordnung von $n_{FIR} = 5 - 1 - 1 = 3$ besitzen. 2

c) Geben Sie die Differenzengleichung eines FIR-Filters der in Aufgabenteil b) bestimmten Ordnung an und bestimmen Sie die Koeffizienten dieses Filters anhand der gegebenen Systemantwort.

Antwort: Der FIR-Filter, der das System beschreibt, besitzt die Ordnung $n_{FIR} = 3$ und besitzt zusätzlich eine Totzeit von einem Zeitschritt. Damit ergibt sich folgende Differenzengleichung des FIR-Filters:

Standard Filter: $y(k) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + b_3u(k-3) + b_4u(k-4)$

Da kein Durchgriff: $b_0 = 0$

Da Totzeit von einem Zeitschritt: $b_1 = 0$

$\Rightarrow y(k) = b_2u(k-2) + b_3u(k-3) + b_4u(k-4)$

Um die Koeffizienten des FIR-Filters zu bestimmen, lassen sich die Werte der Systemantwort in die Differenzengleichung einsetzen. Da die Werte der Eingangsgröße $u(k < 0) = 0$ sind, können die Koeffizienten schrittweise bestimmt werden.

Für $k = 2$:

$$y(2) = 4 \qquad u(0) = 4 \qquad u(-1) = 0 \qquad u(-2) = 0$$

$$\begin{aligned} y(2) &= b_2 u(0) + b_3 u(-1) + b_4 u(-2) \\ &= b_2 \cdot 4 + b_3 \cdot 0 + b_4 \cdot 0 \\ &= b_2 \cdot 4 \\ \rightarrow b_2 &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Für $k = 3$

$y(3) = 10$ $u(1) = 2$ $u(0) = 4$ $u(-1) = 0$

$$\begin{aligned} y(3) &= b_2 u(1) + b_3 u(0) + b_4 u(-1) \\ &= 1 \cdot 2 + b_3 \cdot 4 + b_4 \cdot 0 \\ &= 2 + b_3 \cdot 4 \\ \rightarrow b_3 &= \frac{10-2}{4} = 2 \end{aligned}$$

Für $k = 4$

$y(4) = 10$ $u(2) = 2$ $u(1) = 2$ $u(0) = 4$

$$\begin{aligned} y(2) &= b_2 u(2) + b_3 u(1) + b_4 u(0) \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + b_2 \cdot 4 \\ &= 2 + 4 + b_4 \cdot 4 \\ \rightarrow b_4 &= \frac{10-2-4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Differenzengleichung:

$$y(k) = 1u(k-2) + 2u(k-3) + 1u(k-4)$$

$\boxed{5}$

d) Geben Sie die Übertragungsfunktion des ermittelten Filters an.
Falls Sie keinen Filter ermitteln konnten, nutzen Sie die folgende Differenzengleichung für die Bestimmung der Übertragungsfunktion:

$$y(k) = 3u(k) + 3u(k-1) + 5u(k-2) + 2u(k-3)$$

Antwort: Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion lässt sich die Differenzengleichung in den z-Bereich transformieren.

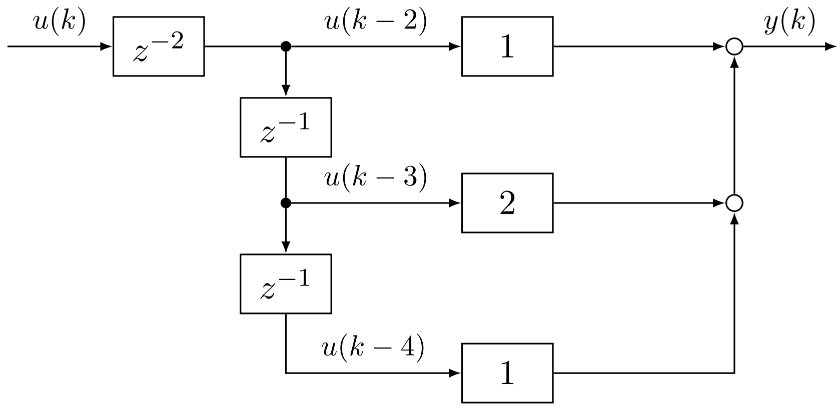
$$\begin{aligned} & y(k) = 1u(k-2) + 2u(k-3) + 1u(k-3) \\ & \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(z) = U(z)z^{-2} + 2U(z)z^{-3} + U(z)z^{-4} \end{aligned}$$

Durch Umstellen der transformierten Gleichung ergibt sich die Übertragungsfunktion des FIR-Filters.

$$\rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4} = z^{-2}(1 + 2z^{-1} + 1z^{-2})$$

$\boxed{1}$

e) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des ermittelten FIR-Filters.
Antwort: Ein mögliches Blockschaltbild zeigt die folgende Abbildung:

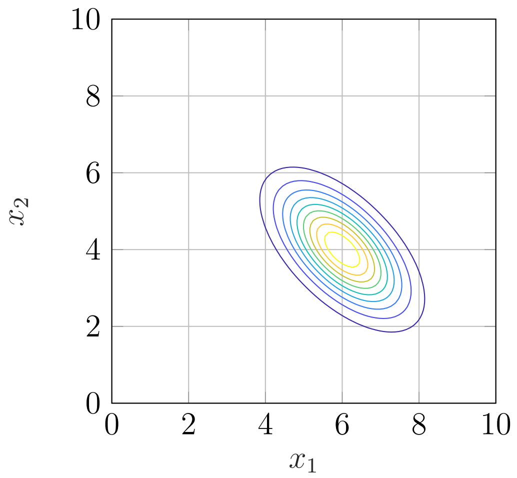


3

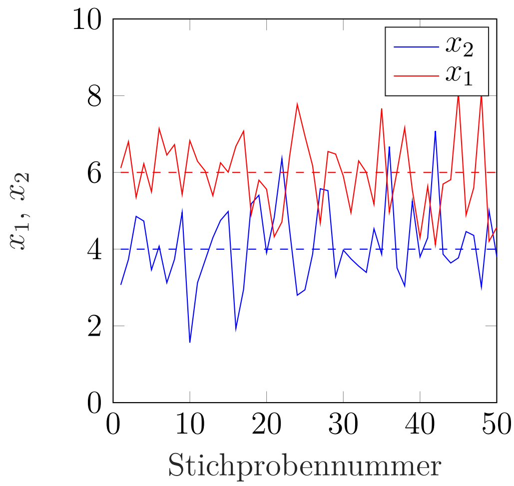
$\sum$ 12

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsverteilung und Stichproben (12 Punkte)

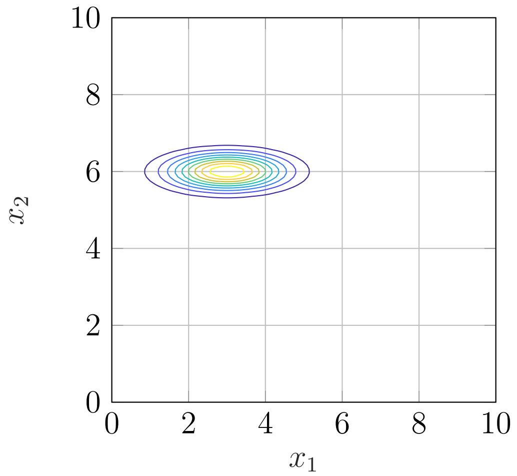
a) Im Folgenden sind Höhenlinien von zweidimensionalen Normalverteilungen abgebildet. Zeichnen Sie zu jeder Verteilung passende Stichproben für x_1 und x_2 in ein Koordinatensystem über der Nummer der Stichproben auf. Zeichnen Sie zudem die Mittelwerte der Stichproben ein. Achten Sie darauf, dass die Signale voneinander unterschieden werden können und wichtige Eigenschaften erkenntlich sind.



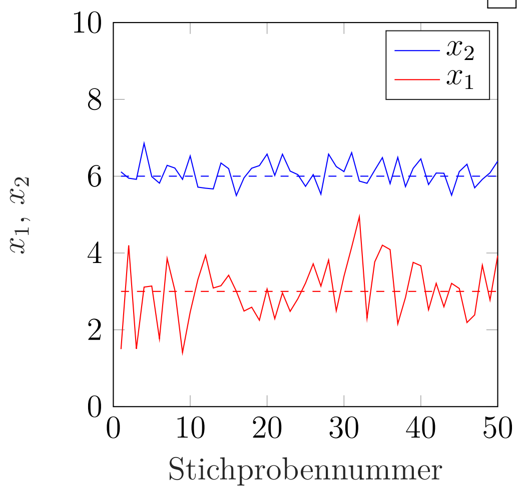
Antwort:



3



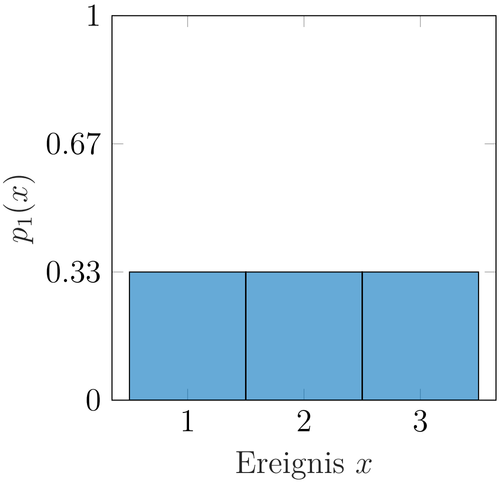
Antwort:



3

b) Gegeben ist ein perfekter Würfel. Dieser Würfel besitzt je zwei mal die Zahlen 1, 2 und 3 auf seiner Oberfläche. Zeichnen Sie die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_1(x)$ für die Ereignisse '1', '2' und '3'. Wie wird eine solche Verteilung genannt?

Antwort:Gleichverteilung.



2

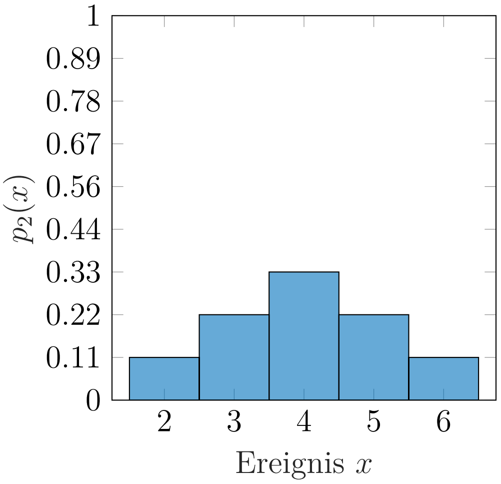
c) Nun werden zwei dieser Würfel geworfen und die Ergebnisse addiert. Was sind die möglichen Ereignisse? Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_2(x)$ für die möglichen Ereignisse. Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur vorigen Verteilung $p_1(x)$.

Antwort:Ereignisse: 2, 3, 4, 5, 6. 1

Kombinationen:

$$\begin{aligned} 1+1&=2\\ 2+1|1+2&=3\\ 1+3|2+2|3+1&=4\\ 2+3|3+2&=5\\ 3+3&=6 \end{aligned}$$

Die zweite Verteilung ist keine Gleichverteilung, sondern eine Binomialverteilung (Begriff muss nicht bekannt sein), daher haben nicht alle Ereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit. Beide Verteilungen sind symmetrisch.



3