Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

6. September 2017

Name:	
Matr.-Nr.:	
Note	

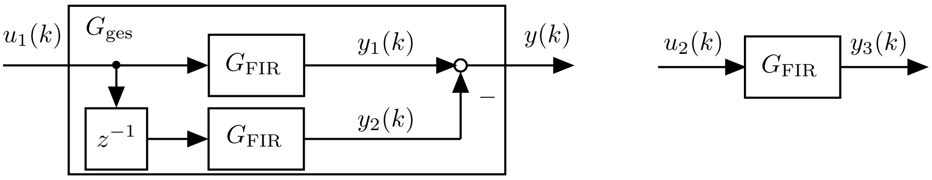
Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Gesamt
Soll:	13	11	12	15	9	60
Ist:						

Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: FIR System (13 Punkte)

a) Geben Sie die allgemeine Struktur eines FIR Systems m-ter Ordnung im **Zeitbereich** an!



b) Die FIR Koeffizienten sollen für die folgenden Aufgabenteile zu $b_0 = 4$, $b_1 = 2$ und $b_2 = 1$ gewählt werden ($b_i = 0$ für alle $i > 2$).
Geben Sie die Sprungantworten für $y_1(k)$ und $y_2(k)$ für $k = 0, 1, \ldots, 4$ an!

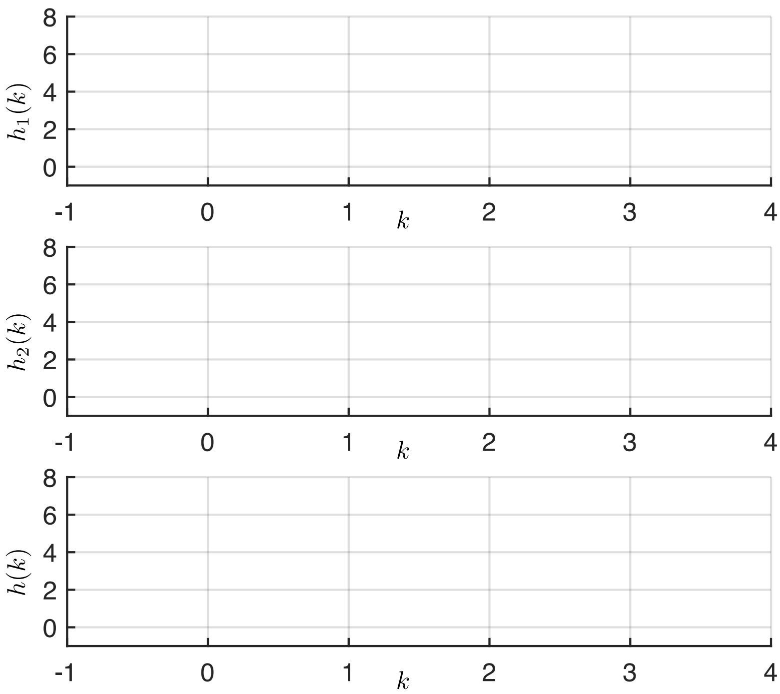
c) Bestimmen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G_{\mathrm{ges}}(z)$ im z-Bereich. Benutzen Sie hierfür die vorgegebenen Koeffizienten.

d) Wie lautet die Sprungantwort von dem Gesamtsystem $y(k)$ für $k = 0, 1, \ldots, 4$?

e) Skizzieren Sie die Sprungantworten von $y_1(k)$, $y_2(k)$ und $y(k)$ in die vorbereiteten Diagramme.

f) Wie muss das Eingangssignal ($u_2(k)$) für G_{FIR} gewählt werden, damit das Ausgangssignal mit der Sprungantwort des Gesamtsystems G_{ges} identisch ist ($y_3(k) = y(k)$ mit $u_1(k) = \sigma(k)$)?

g) Welche Beziehung haben die Signale $u_1(k)$ und $u_2(k)$ zueinander, wenn die Ausgangssignale $y_3(k)$ und $y(k)$ identisch sind? Zeigen Sie den Zusammenhang $\frac{U_1(z)}{U_2(z)}$ im z-Bereich.



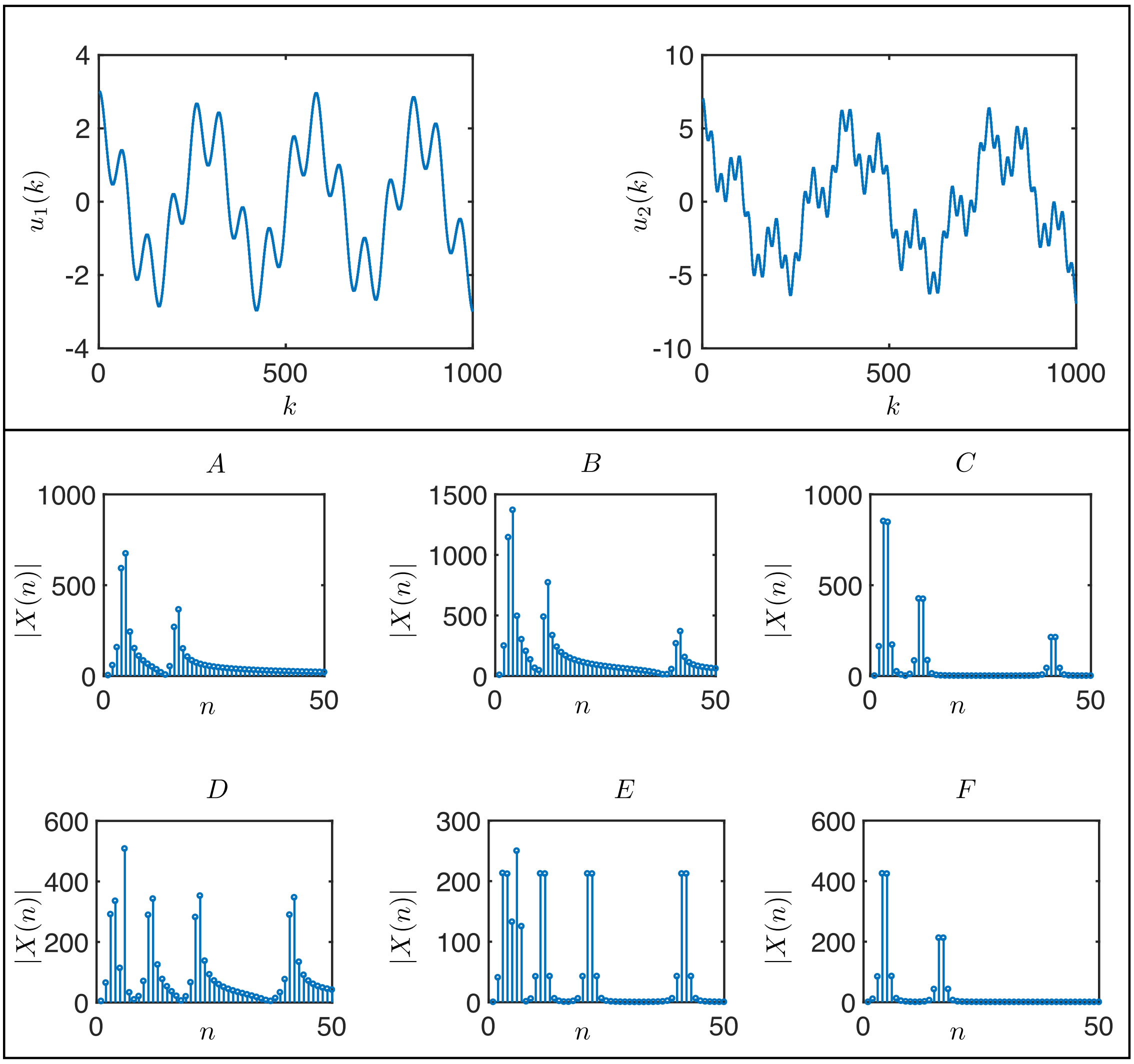
Aufgabe 2: DFT und Fensterung (11 Punkte)

Gegeben sind die beiden Signale $u_1(k)$ und $u_2(k)$ mit identischer Länge $N = 1000$ und ausschließlich positiven Koeffizienten c_i:

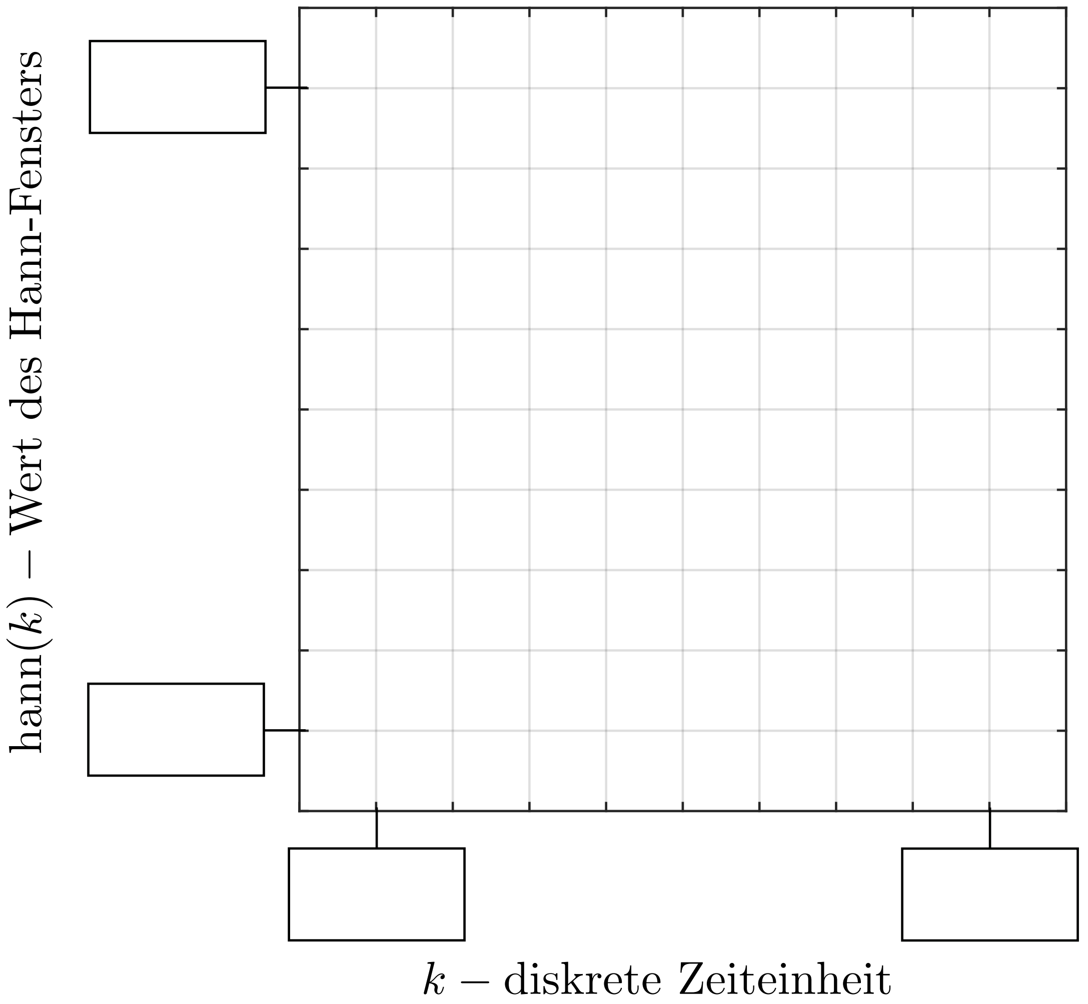
$$u_1(k) = c_1 \cos(\omega_1 k T_0) + c_2 \cos(\omega_2 k T_0)$$
$$u_2(k) = c_3 \cos(\omega_3 k T_0) + c_4 \cos(\omega_4 k T_0) + c_5 \cos(\omega_5 k T_0)\,.$$

a) Mit welchem Effekt muss man rechnen wenn von den dargestellten Signalen u_1 und u_2 eine DFT erstellt wird? Betrachten Sie hierfür die Signale im unten stehenden Bild. Benennen Sie den Effekt und erläutern Sie warum dieser auftritt.

b) Ordnen Sie $u_1(k)$ und $u_2(k)$ jeweils einer DFT zu.
Hinweis: Es sind nur die ersten 50 Werte von $|X(n)|$ dargestellt



c) Die Signale $u_1(k)$ und $u_2(k)$ werden nun mit einem Hann-Fenster multipliziert. Es ergeben sich die Signale $u_{1,h}(k)$ und $u_{2,h}(k)$. Zeichen Sie das Hann-Fenster in das vorbereitete Diagramm. Füllen Sie außerdem die Textfelder aus (Minimal- und Maximalwerte für beide Koordinatenachsen).



d) Ordnen Sie die beiden Signale $u_{1,h}(k)$ und $u_{2,h}(k)$ jeweils einer DFT zu.

e) Wie verändern sich die *Amplituden* der Frequenzen des gefensterten Signals im Vergleich zum Ursprungssignal? Erläutern Sie diesen Effekt!

Aufgabe 3: Kreuzkorrelation (12 Punkte)

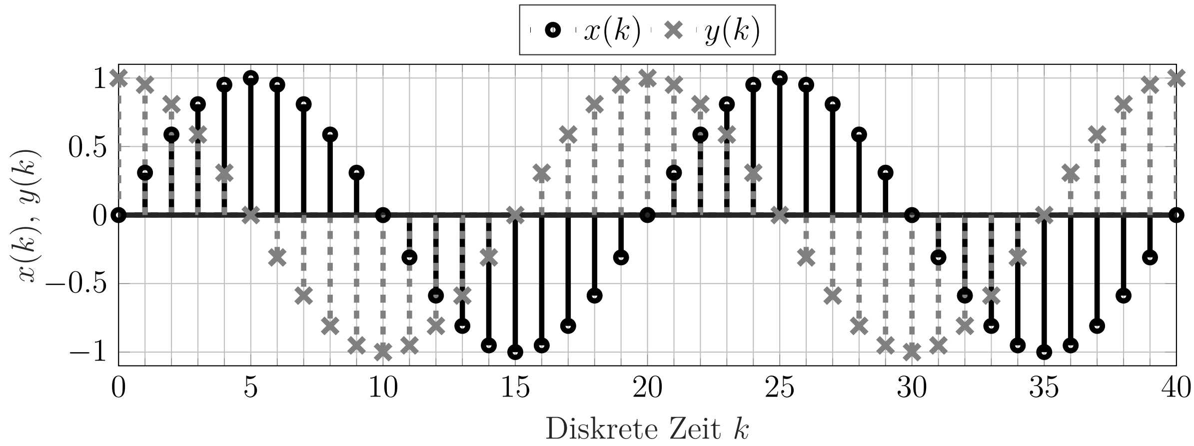


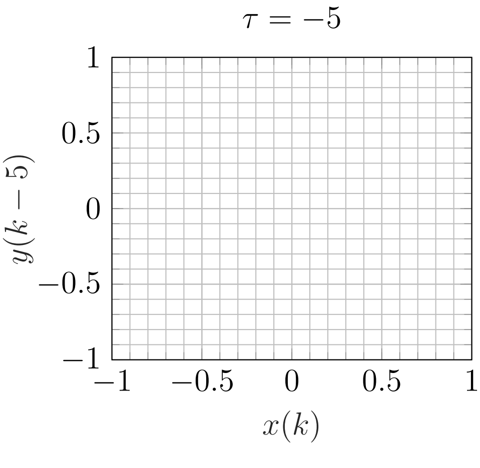
Bild 1: Zwei vollständige Schwingungen der periodischen Signale $x(k)$ und $y(k)$.

Die Kreuzkorrelation zweier Signale $x(k)$ und $y(k)$, beide bestehend aus $N = 41$ Datenpunkten, kann für eine Zeitverschiebung τ wie folgt berechnet werden:

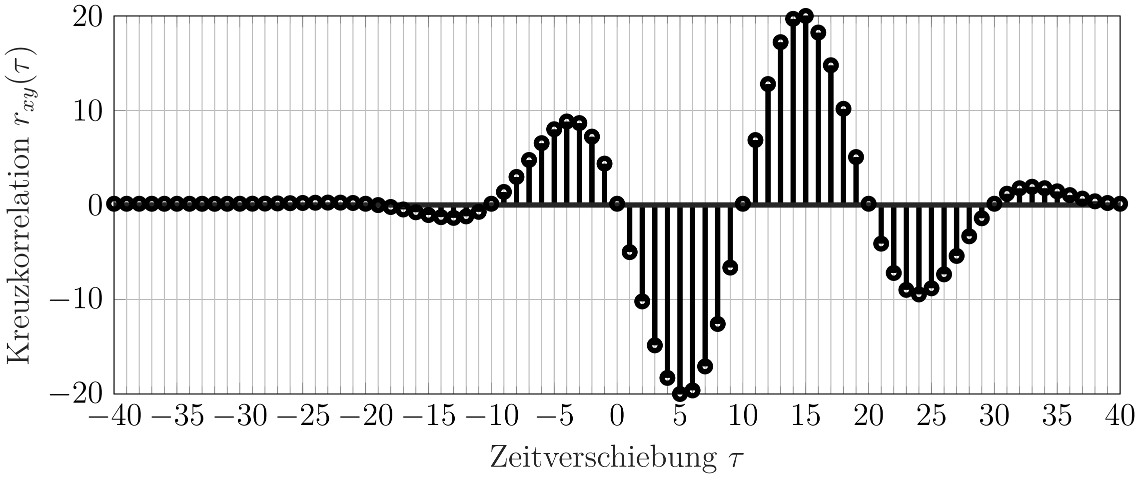
$$r_{xy}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1-\tau} x(k) \cdot y(k+\tau), & \text{if } \tau \geq 0 \\ \frac{1}{N} \sum\limits_{k=-\tau}^{N-1} x(k) \cdot y(k+\tau), & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

a) Welche der in Bild 2 gezeigten Kreuzkorrelationsfunktionen entspricht der Kreuzkorrelationsfunktion, die zu den gezeigten Signalen $x(k)$ und $y(k)$ aus Bild 1 gehört?

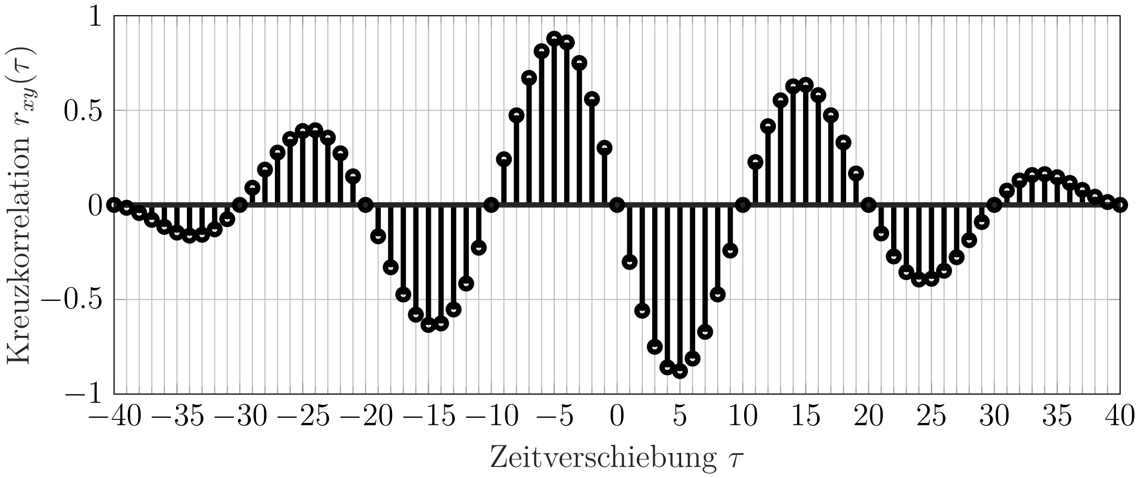
b) Zeichnen Sie das zeitlich verschobene Signal $y(k+\tau)$ über $x(k)$ in das unten vorbereitete Diagramm für $\tau = -5$.



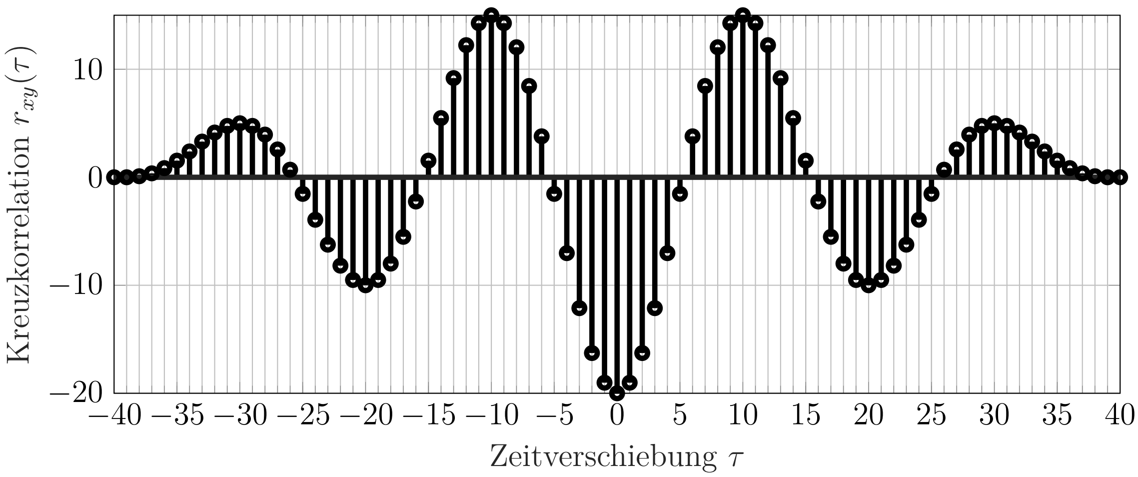
c) Nehmen Sie nun an, dass die Abtastzeit halbiert wird. Wie ändert sich in diesem Fall die Zeitverschiebung $\tau^* = r_{xy,max}^{-1}$ bei der das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion erreicht wird?



(a)



(b)



(c)

Bild 2: Welche dieser Kreuzkorrelationsfunktionen gehört zu den Signalen aus Bild 1?

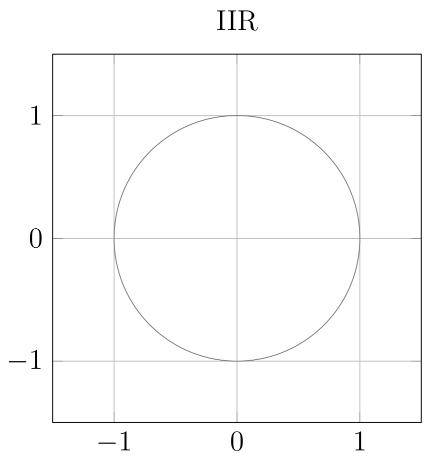
Aufgabe 4: FIR and IIR (15 Points)

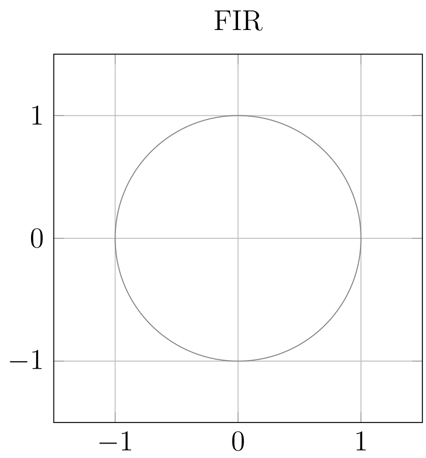
Ein IIR System soll mit einem FIR system approximiert werden.

a) Berechnen Sie im Zeitbereich ein FIR System, dass das dynamische Verhalten des IIR Systems $y(k) = 0.5y(k-1)+u(k)$ approximiert. Benutzen Sie hierfür die Koeffizienten der Impulsantwort, die größer als 0.2 sind.

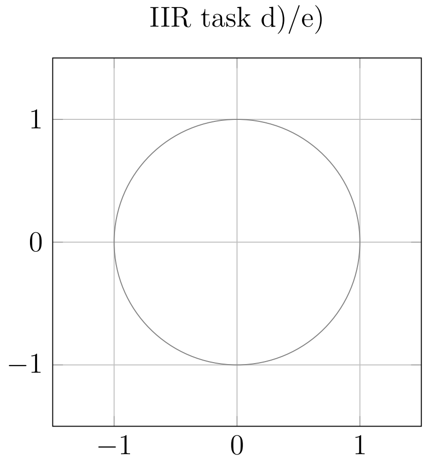
b) Transformieren Sie beide System (IIR und FIR) in den z-Bereich.

c) Zeichnen Sie Pole (Symbol $\times$) und Nullstellten (Symbol $\circ$) für das IIR System in das linke und für das FIR System in das rechte Diagramm ein. Kennzeichnen Sie mehrfache Pole, indem Sie die Anzahl der zugehörigen Null- oder Polstellen daneben schreiben.





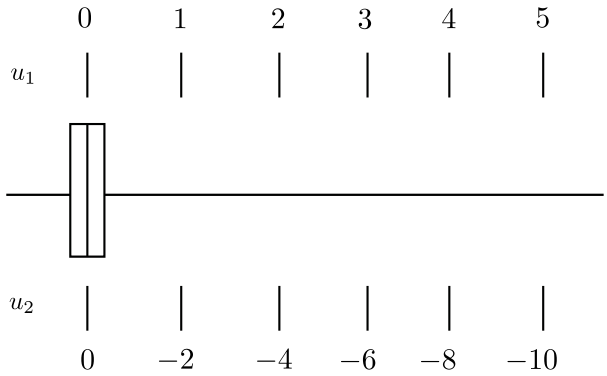
d) Berechnen Sie für das System $y(k) = 1.5y(k-1) - 0.5y(k-2) + u(k)$ Pole und Nullstellen und zeichen Sie diese in das Diagramm ein. Kennzeichnen Sie auch hier mehrfache Pole oder Nullstellen.



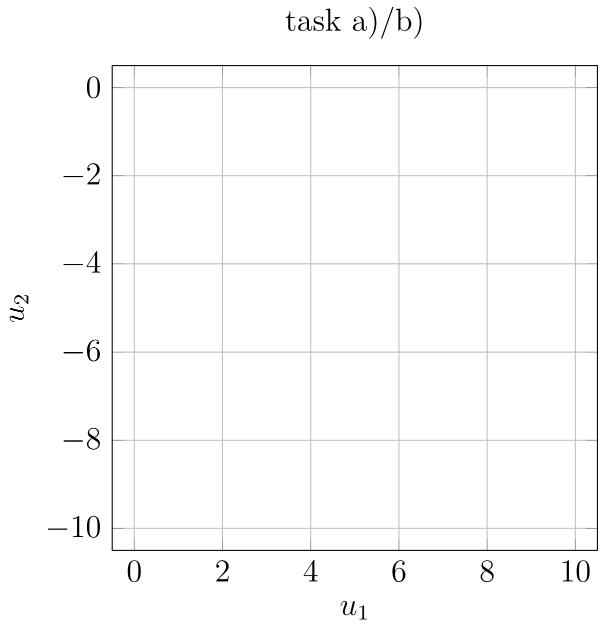
e) Lässt sich das System aus Aufgabenteil d) sinnvoll durch ein FIR System approximieren? (kurze Begründung)

Aufgabe 5: Singular Value Decomposition (14 Points)

Eine technische Anlage hat zwei Eingänge u_1 und u_2, die mithilfe des dargestellten Schiebepotentiometer verstellt werden können. Bei der dargestelten Stellung gilt $u_1 = u_2 = 0$.

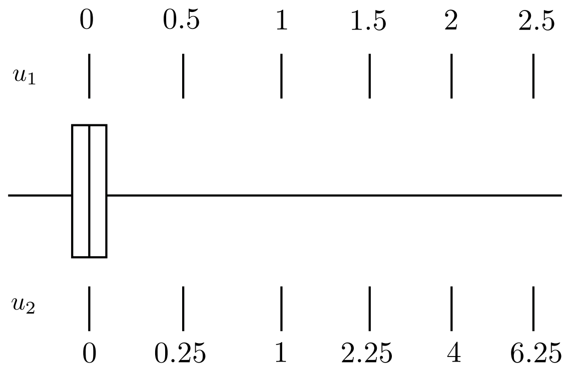


a) Zeichnen Sie die möglichen Kombination für $u_1 = 1, 2, 3, 4, 5$ in das Diagramm.

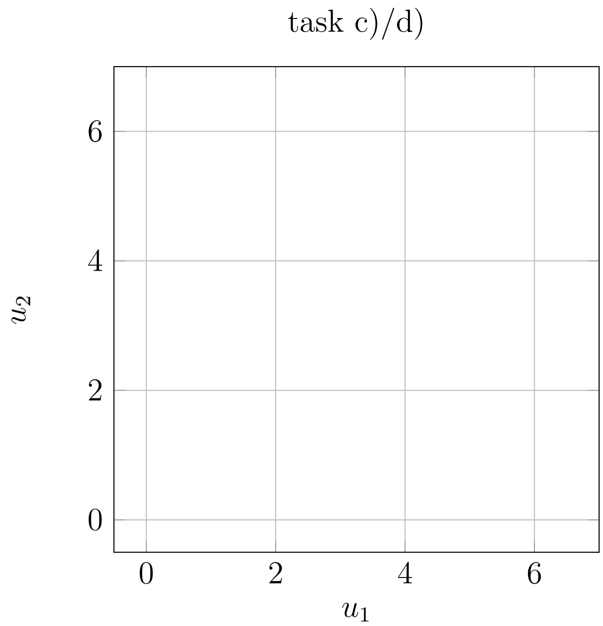


b) Führen Sie geometrisch eine PCA durch und skizzieren Sie dazu die Hauptachsen im Diagramm. Markieren Sie die Hauptachse mit dem Singulärwert 0.

c) An einer anderen Anlage können u_1 and u_2 mit dem unten dargestellten Schiebepotentiometer verstellt werden.



Zeichnen Sie die möglichen Kombinationen für $u_1 = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ in das Diagramm.

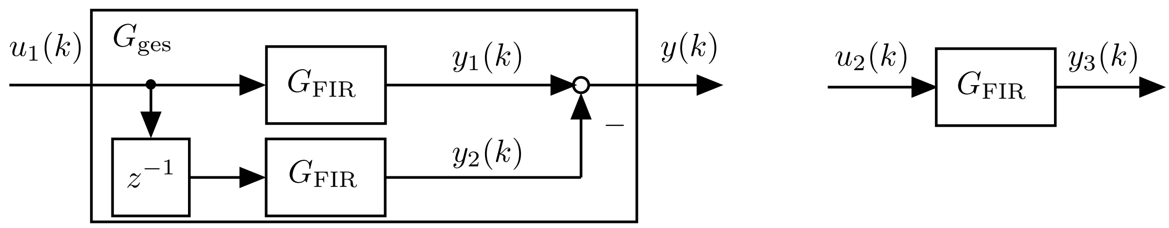


d) Führen Sie geometrisch eine PCA durch und zeichnen Sie dazu die Hauptachsen in das Diagramm ein.

e) Warum ist keiner der Singulärwerte 0, obwohl durch den Schieber des Potentiometers nur eine Eingangsdimension verstellt wird?

Lösungen:

Aufgabe 1: FIR System (13 Punkte)



a) Geben Sie die allgemeine Struktur eines FIR Systems m-ter Ordnung im **Zeitbereich** an!

$$y(k) = b_0u(k) + b_1u(k-2) + b_2u(k-2) + \ldots + b_mu(k-m) \tag{2}$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{m} b_iu(k-i) \tag{3}$$

1

b) Die FIR Koeffizienten sollen für die folgenden Aufgabenteile zu $b_0 = 4$, $b_1 = 2$ und $b_2 = 1$ gewählt werden ($b_i = 0$ für alle $i > 2$).
Geben Sie die Sprungantworten für $y_1(k)$ und $y_2(k)$ für $k = 0, 1, \ldots, 4$ an!

	$h_1(k)$	$h_2(k)$	$h(k)$
$k=0$	b_0	0	b_0
	$h_1(0) = 4$	$h_2(0) = 0$	$h(0) = 4$
$k=1$	$b_0 + b_1$	b_0	b_1
	$h_1(1) = 6$	$h_2(1) = 4$	$h(1) = 2$
$k=2$	$b_0 + b_1 + b_2$	$b_0 + b_1$	b_2
	$h_1(2) = 7$	$h_2(2) = 6$	$h(2) = 1$
$k=3$	$b_0 + b_1 + b_2$	$b_0 + b_1 + b_2$	0
	$h_1(3) = 7$	$h_2(3) = 7$	$h(3) = 0$
$k=4$	$b_0 + b_1 + b_2$	$b_0 + b_1 + b_2$	0
	$h_1(4) = 7$	$h_2(4) = 7$	$h(4) = 0$

2

c) Bestimmen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G_{\text{ges}}(q)$. Benutzen Sie hierfür die vorgegebenen Koeffizienten.

$$G_{\text{ges}} = G_{\text{FIR}} - G_{\text{FIR}}z^{-1} \tag{4}$$

$$G_{\text{ges}} = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} - \left(b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}\right)z^{-1} \tag{5}$$

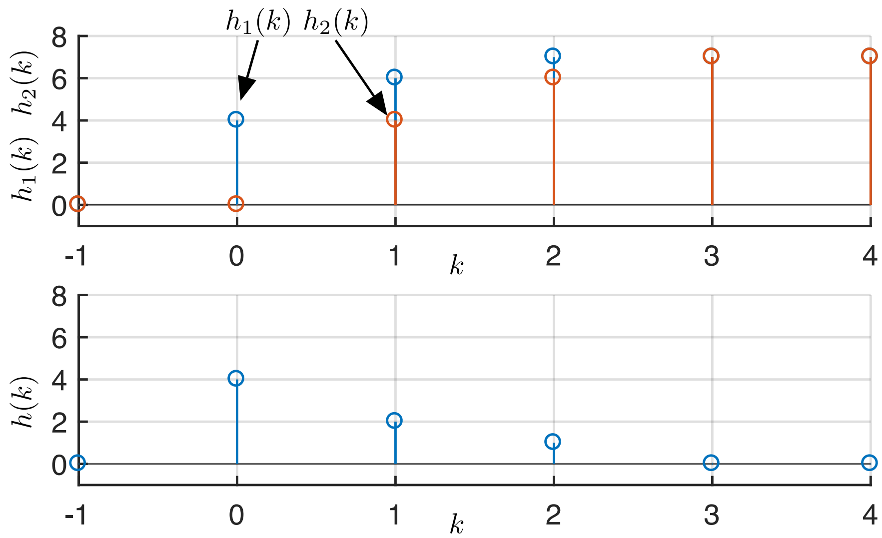
$$G_{\text{ges}} = b_0 + (b_1 - b_0)z^{-1} + (b_2 - b_1)z^{-2} - b_2z^{-3} \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

2

d) Wie lautet die Sprungantwort von dem Gesamtsystem $y(k)$ für $k = 0, 1, \ldots, 4$?
Die Sprungantwort $h(k)$ kann einfach aus dem vorherigen Aufgabenteil berechnet werden (siehe Lösung Aufgabenteil b)). $\boxed{1}$

e) Skizzieren Sie die Sprungantworten von $y_1(k)$, $y_2(k)$ und $y(k)$ in die vorbereiteten Diagramme.



$\boxed{3}$

f) Wie muss das Eingangssignal ($u_3(k)$) für G_{FIR} gewählt werden, damit das Ausgangssignal mit der Sprungantwort des Gesamtsystems G_{ges} identisch ist ($y_3(k) = y(k)$ mit $u_1(k) = \sigma(k)$)?
Da hier $y(k) = b_k$ für alle positiven k gilt, entspricht $y(k)$ der Impulsantwort des Systems G_{FIR}. Das Eingangssignal $u_3(k)$ muss somit einem Impuls entsprechen! $\boxed{2}$

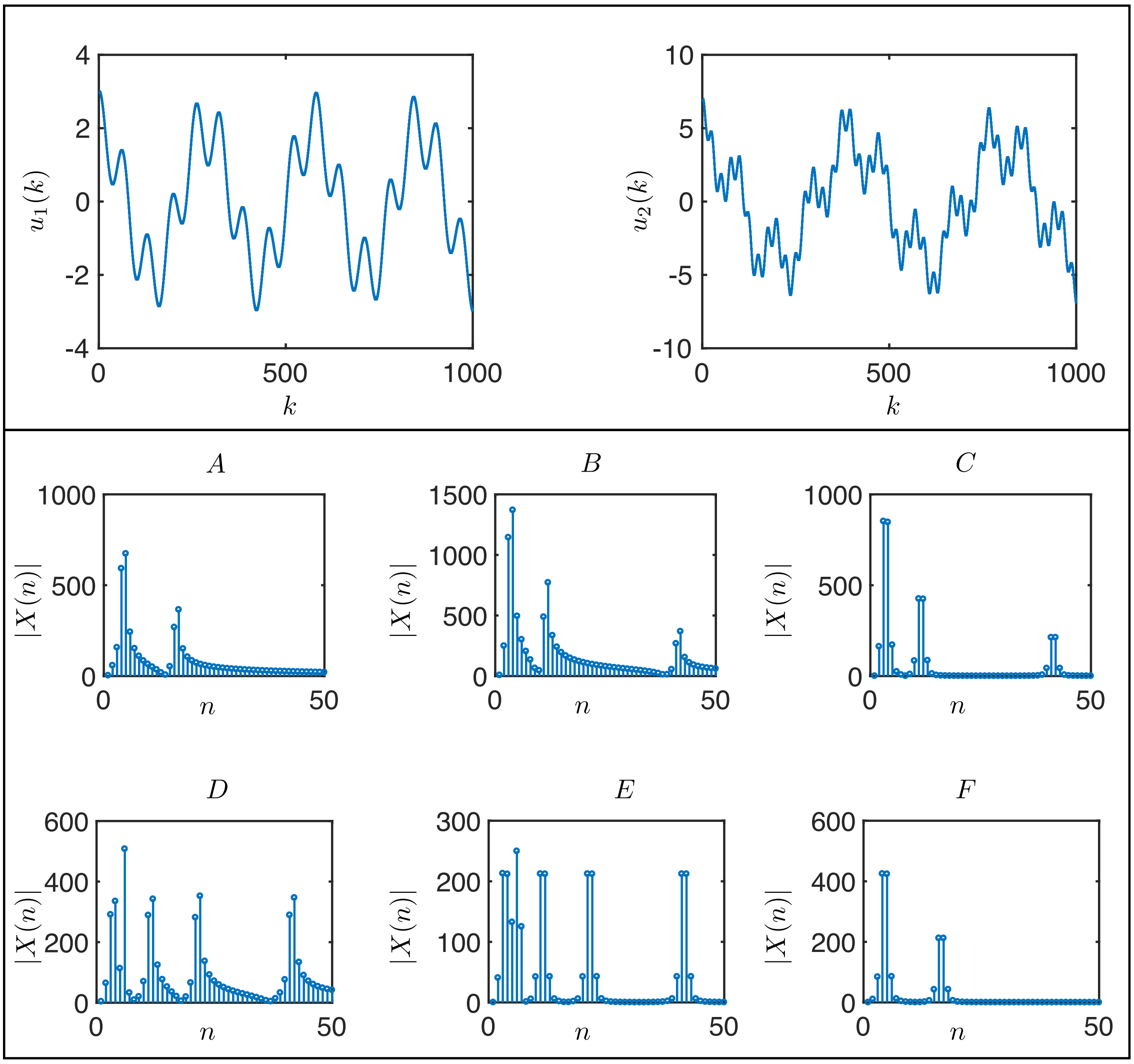
g) Welche Beziehung haben die Signale $u_1(k)$ und $u_2(k)$ zueinander, wenn die Ausgangssignale $y_3(k)$ und $y(k)$ identisch sind? Zeigen Sie den Zusammenhang $\frac{U_1(z)}{U_2(z)}$ im z-Bereich.

$$Y(z) = U_1(z)(G_{\text{FIR}} - G_{\text{FIR}}z^{-1}) \tag{8}$$
$$Y_3(z) = G_{\text{FIR}}U_2(z) \quad \text{gleichsetzen} \tag{9}$$
$$U_1(z)(G_{\text{FIR}} - G_{\text{FIR}}z^{-1}) = G_{\text{FIR}}U_2(z) \tag{10}$$
$$U_1(z)(1 - z^{-1}) = U_2(z) \tag{11}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{U1(z)}{U_2(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{12}$$

$\boxed{2}$

Aufgabe 2: DFT und Fensterung (11 Punkte)

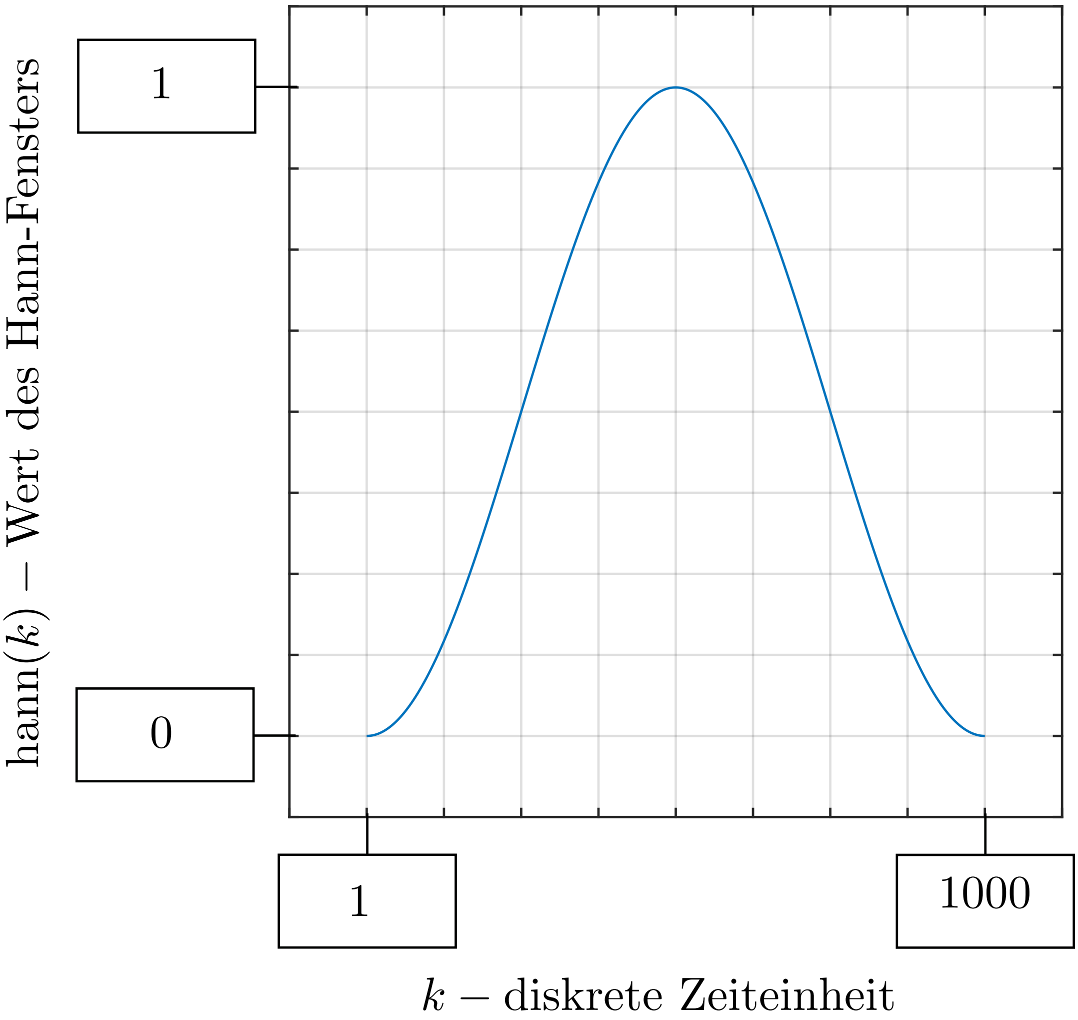
a) Mit welchem Effekt muss man rechnen wenn von den Signalen u_1 und u_2 eine DFT erstellt wird? Benennen Sie den Effekt und erläutern Sie warum dieser auftritt.
Beide Signale beginnen positiv und enden negativ. Bei periodischer Fortsetzung des Zeitsignals ergibt sich eine Unstetigkeit, welche bei der DFT zum Leckeffekt führt. 2



b) Gegeben sind die beiden Signale u_1 und u_2. Ordnen Sie die beiden Signale jeweils einer DFT zu.
$u_1 \to A$ und $u_2 \to B$ 2

c) Die Signale $u_1(k)$ und $u_2(k)$ werden nun mit einem Hann-Fenster multipliziert. Es ergeben sich die Signale $u_{1,h}(k)$ und $u_{2,h}(k)$. Zeichen Sie das Hann-Fenster in das vorbereitete Diagramm. Füllen Sie außerdem die sechs Textfelder aus (Minimal- und Maximalwerte für beide Koordinatenachsen). 3

d) Ordnen Sie die beiden Signale $u_{1,h}$ und $u_{2,h}$ jeweils einer DFT zu.
$u_{1,h} \to F$ und $u_{2,h} \to C$ 2



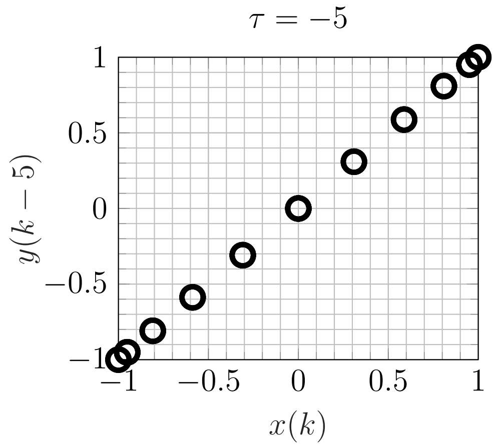
e) Wie verändern sich die Amplituden der Frequenzen des gefensterten Signals im Vergleich zum Ursprungssignal? Erläutern Sie diesen Effekt!
Der Wertebereich des Hanning Fensters ist im Bereich $[0, \ldots, 1]$ sodass die Amplituden des Original Signals verkleinert werden. Hierdurch hat das gefensterte Signal weniger Leistung was man auch in der DFT beobachten kann. 2

Aufgabe 3: Kreuzkorrelation

a) Welche der in Bild 2 gezeigten Kreuzkorrelationsfunktionen entspricht der Kreuzkorrelationsfunktion, die zu den gezeigten Signalen $x(k)$ und $y(k)$ aus Bild 1 gehört?

Die Kreuzkorrelationsfunktion aus Bild 2 b) gehört zu den in Bild 1 dargestellten Signalen $x(k)$ und $y(k)$. Das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion wird bei einer zeitlichen Verschiebung von $\tau = -5$ erreicht, da die Signale dann genau aufeinander liegen. $\boxed{5}$

b) Zeichnen Sie das zeitlich verschobene Signal $y(k + \tau)$ über $x(k)$ in das unten vorbereitete Diagramm für $\tau = -5$.



$\boxed{5}$

c) Nehmen Sie nun an, dass die Abtastzeit halbiert wird. Wie ändert sich in diesem Fall die Zeitverschiebung $\tau^* = r_{xy,max}^{-1}$ bei der das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion erreicht wird?

Die Zeitverschiebung $\tau^* = r_{xy,max}^{-1}$ an der das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion erreicht wird verdoppelt sich $\tau*_{new} = 2\tau^*_{old}$, da die Anzahl der Datenpunkte verdoppelt wird. $\boxed{2}$

$\boxed{\sum 12}$

Aufgabe 4: FIR and IIR

a) Mit dem Impuls

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1 \end{cases} \tag{13}$$

ergibt sich als Impulsantwort

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 && (14)\\ y(1) &= 0.5 && (15)\\ y(2) &= 0.25 && (16)\\ y(3) &= 0.125 && (17) \end{aligned}$$

Mit Koeffizienten größer als 0.25 errechnet man

$$y(k) = u(k) + 0.5u(k) + 0.25u(k). \tag{18}$$

$\boxed{3}$

b) Transformation in den z-Bereich für das FIR System

$$\frac{Y_{\text{app}}}{U_{\text{app}}} = 1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2} = \frac{z^2 + 0.5z + 0.25}{z^2}. \tag{19}$$

und das IIR System

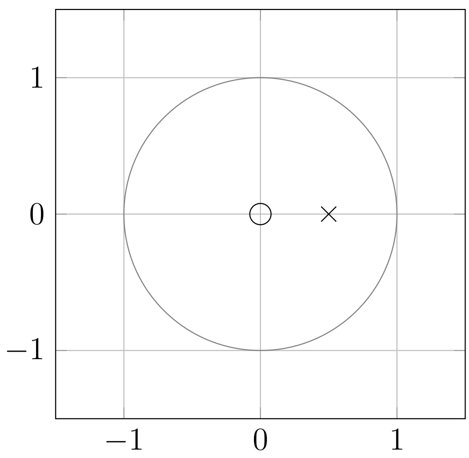
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{0.5 + z} \tag{20}$$

$\boxed{2}$

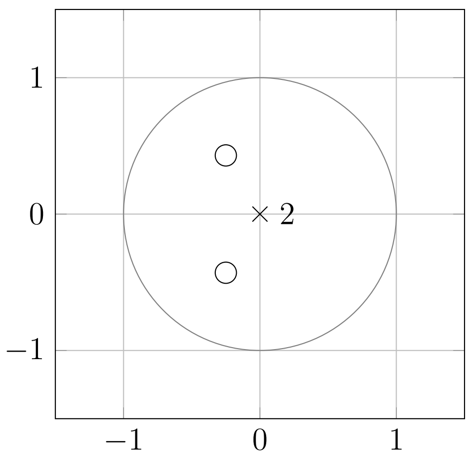
c) Aus den Übertragungsfunktionen werden Pole und Nullstellen berechnet
Pole IIR System: $p_1 = 0.5$.
Pole FIR System: $p_1 = p_2 = 0$
Nullstellen FIR System: $n_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4} \approx -0.25 \pm 0.43i$.
Nullstellen IIR System: $n_1 = 0$.

$\boxed{5}$

IIR



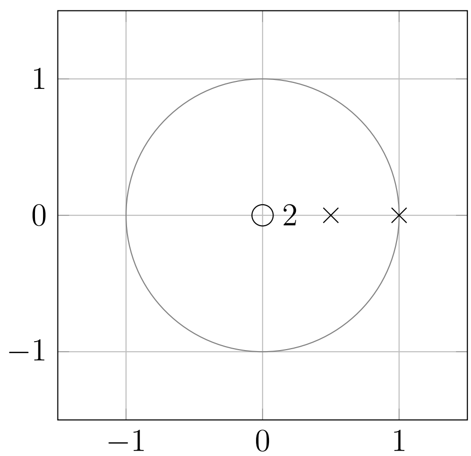
FIR



d) Die Übetragungsfunktion im z-Bereich lautet

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)}. \tag{21}$$

IIR task d)/e)

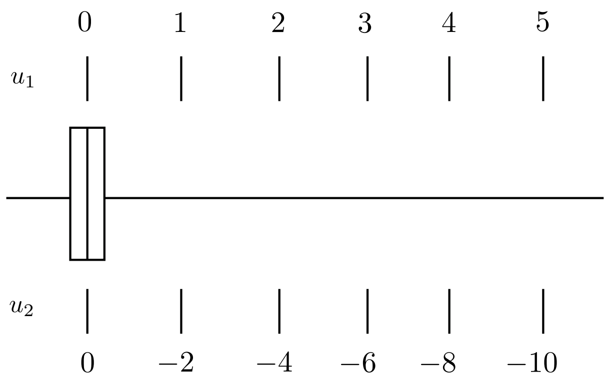


4

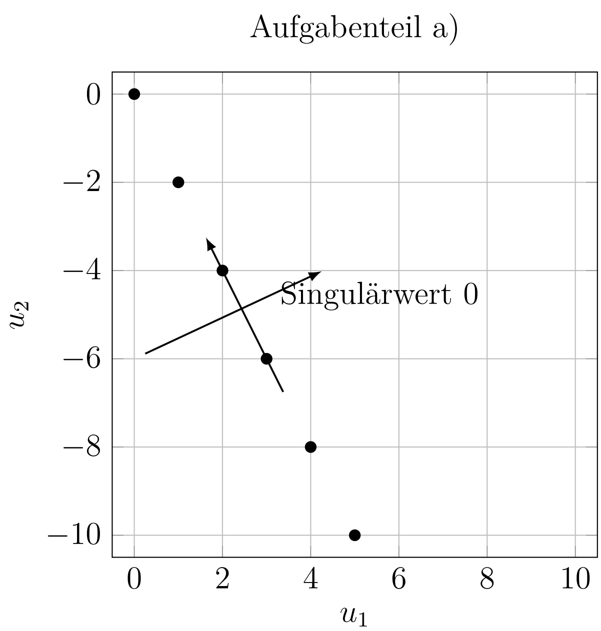
e) Das ist nicht möglich, da der Pol bei $z_1 = 1$ grenzstabil ist. 1

$\sum 15$

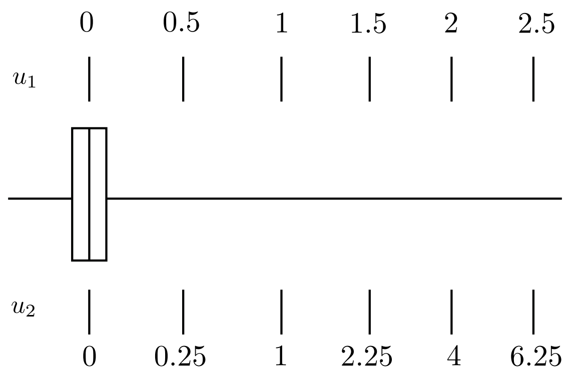
Aufgabe 5: Singulärwertzerlegung



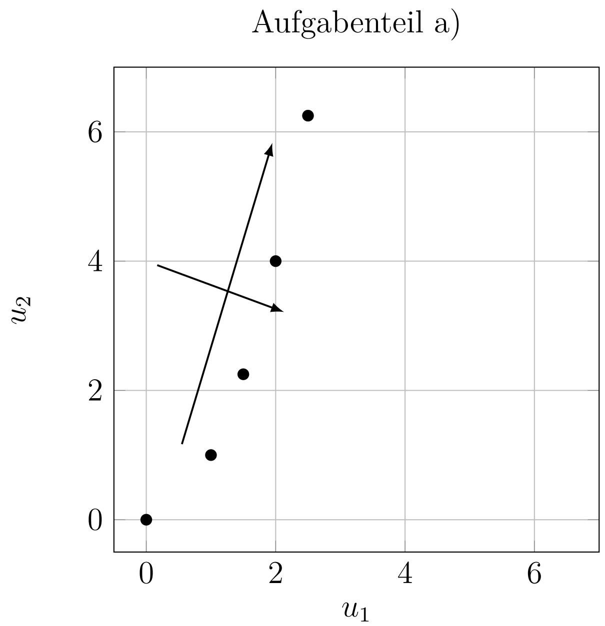
a) siehe Diagramm 1



b) siehe Diagramm 3



c) siehe Diagram $\boxed{1}$



d) siehe Diagramm $\boxed{2}$

e) Die Beziehung zwischen $u_2 = u_1^2$ ist nichtlinear. Daher entsteht auch eine Varianz senkrecht zur ersten Hauptachse. $\boxed{2}$

$\boxed{\sum 9}$