Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

24. August 2019

Name:	
Matr.-Nr.:	
Note:	

Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Gesamt
Soll:	9	11	12	14	14	60
Ist:						

Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Statistik (9 Punkte)

Bild 1 zeigt Höhenlinien von zweidimensionalen Gaußschen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p(u_1, u_2)$. Jede dieser Funktionen wird beschrieben durch ihren Mittelwert $\underline{\mu} = (\mu_1\ \mu_2)$ und ihre Kovarianzmatrix ($\underline{\Sigma}$).

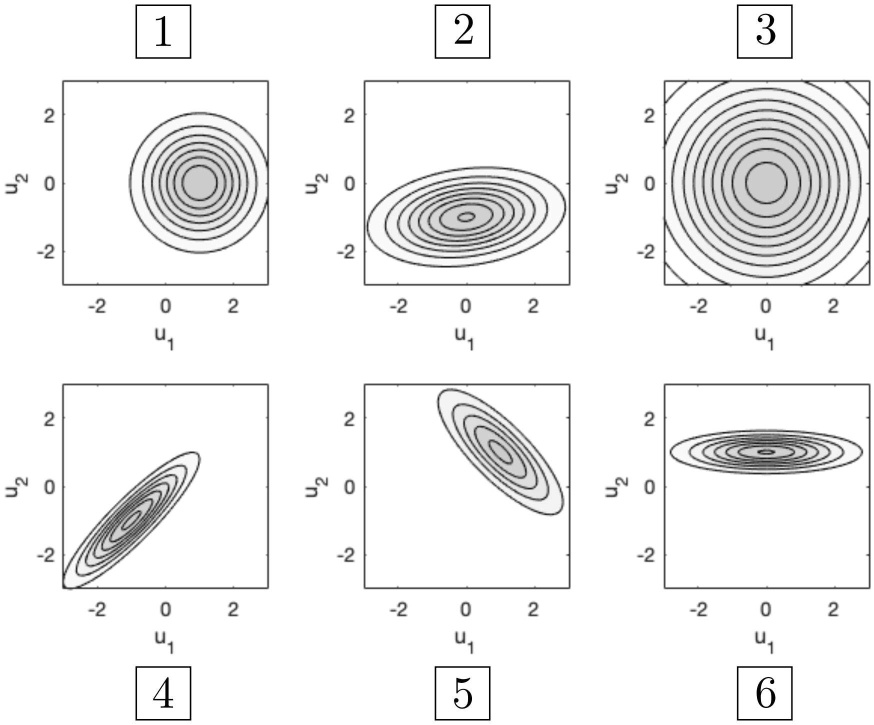


Bild 1: Höhenlinien von zweidimensionalen Gaußverteilungen

a) Schätzen Sie den Mittelwert $\underline{\mu} = (\mu_1\ \mu_2)$ für jede der 6 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p(u_1, u_2)$ und tragen Sie die Werte in die nachfolgende Tabelle ein.

b) Ordnen Sie aus den folgenden Matrizen $\underline{A}$ bis $\underline{L}$ die passenden Kovarianzmatrizen $\underline{\Sigma}$ den dazugehörigen Wahrscheinlichkeitdichtefunktionen (1-6) aus Bild 1 zu. Tragen Sie ihr Ergebnis in die nachfolgende Tabelle ein.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \underline{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}$$

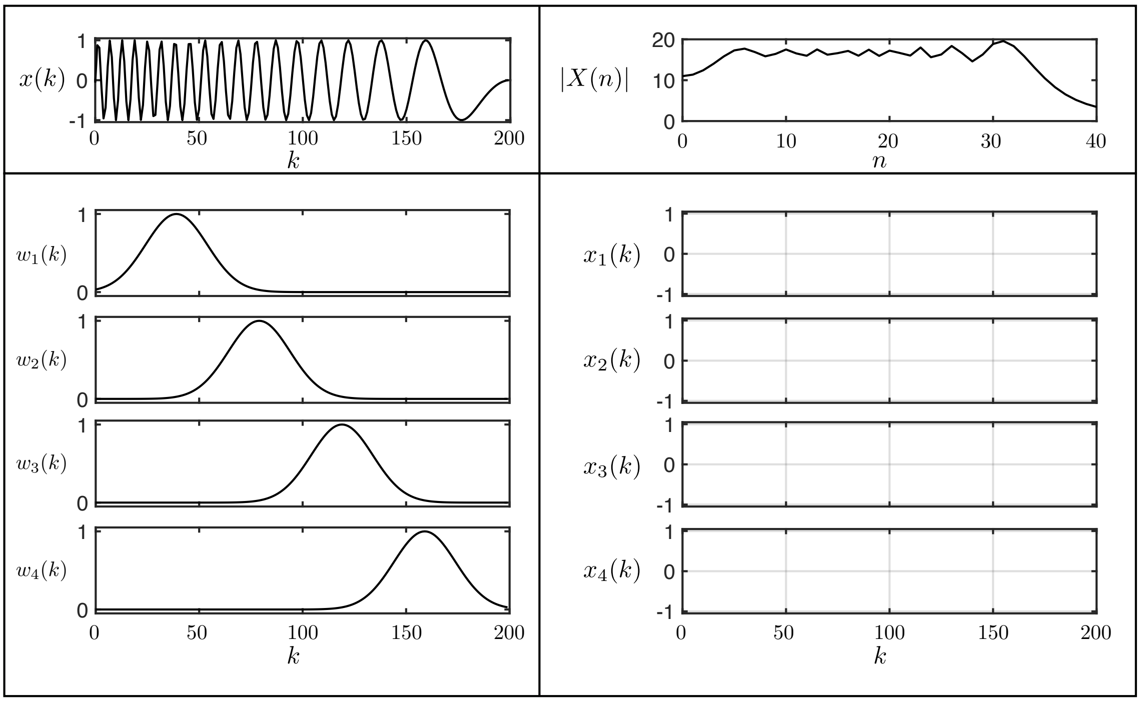
$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad \underline{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Plot	μ_1	μ_2	Σ
1			
2			
3			
4			
5			
6			

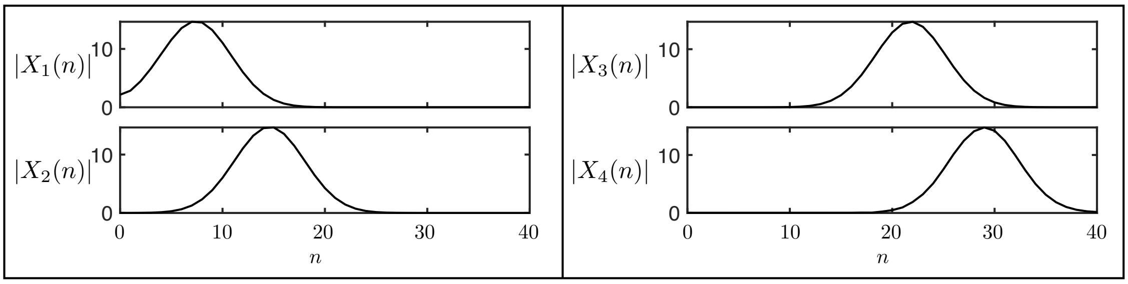
Aufgabe 2: DFT (11 Punkte)

Gegeben ist ein sinusförmiges Signal $x(k)$, welches die Frequenz linear mit der Zeit verändert. Die ersten 40 Absolutwerte der zugehörigen DFT sind mit $|X(n)|$ dargestellt. Darüber hinaus sind vier unterschiedliche Fensterfunktionen $(w_1(k), \ldots, w_4(k))$ gegeben.

a) Wenden Sie jede Fensterfunktionen $(w_1(k), \ldots, w_4(k))$ auf das Signal $x(k)$ an und skizzieren Sie die resultierenden Signale $x_1(k), \ldots, x_4(k)$.



b) Ordnen Sie jedem Signal $x_i(k)$ die zugehörigen Absolutwerte der DFT $|X_j(n)|$ zu.



Signal $x_i(k)$	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$
Zugehöriges $\lvert X_j(n)\rvert$				

c) Welche Information erhält man, wenn man diese zeitlich verschobenen Fensterfunktionen vor einer DFT auf das Ursprungssignal anwendet? Wie nennt man dieses Verfahren?

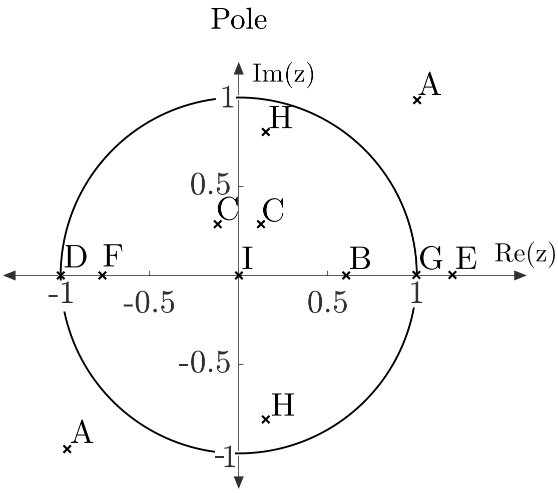
d) Angenommen das Signal $x(k)$ ist stark verrauscht. Wie ist die Fensterbreite der Fenster $w_i(k)$ zu wählen, damit das Verfahren möglichst unempfindlich bzgl. des Rauschens ist?

Aufgabe 3: Sprungantworten (12 Punkte)

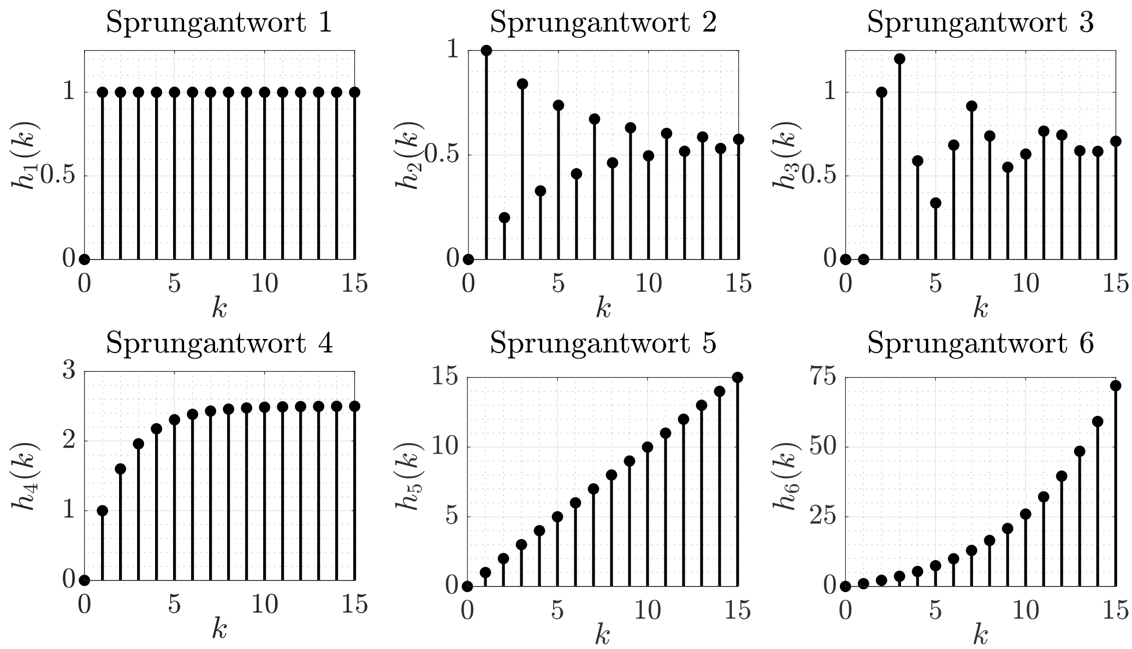
Gegeben sind die Lagen der Pole von 9 unterschiedlichen Systemen (A-I) im Pol/Nullstellen-Diagramm und 6 unterschiedliche Sprungantworten (1-6).

Ordnen Sie die Pole den Sprungantworten in der gegebenen Tabelle richtig zu.

(Hinweis: Drei Pollagen sind keiner Sprungantwort zurechenbar. Alle Übertragungsfunktion haben die Struktur $G(z) = \frac{1}{A(z)}$ mit $A(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - p_i)$)



Sprung-antwort	Pole
1	
2	
3	
4	
5	
6	



Aufgabe 4: Kamm-Filter (14 Punkte)

Das lineare Filter

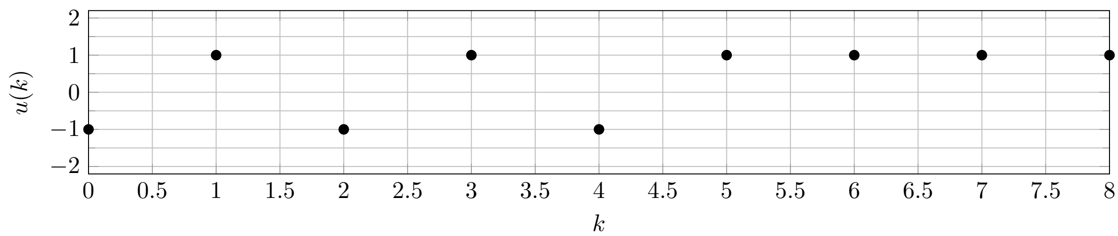
$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^m + a}{z^m}$$

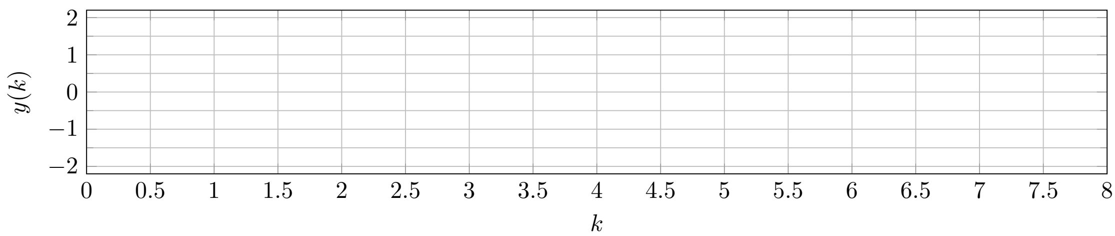
ist gegeben.

a) Handelt es sich um ein FIR oder ein IIR Filter? Geben Sie eine kurze Begründung (1 Satz).

b) Ermitteln Sie die zughörige Differenzengleichung.

c) Sei nun $a = -\mathbf{1}$ und $m = 2$. Zeichnen Sie in die unten dargestellten Diagramme die Filterantwort für das dargestellte Eingangssignal ein. Nutzen Sie $u(k) = 0$ für alle $k < 0$ als Anfangsbedingung.





Jetzt sei $a = -1$ und m eine beliebige positive Zahl.

d) Berechnen Sie den Frequenzgang des Filters, nutzen Sie T_0 für die Abtastzeit. Der Betrag des Frequenzgangs muss **nicht** berechnet werden.

e) Wie ist der Wert des Frequenzgangs bei $\omega = 0$. Berechnen Sie die Dämpfung bei dieser Frequenz in dB.

f) Entscheiden Sie, ob es sich bei dem Filter um einen Tief- oder einen Hochpassfilter handelt. Geben Sie eine kurze Begründung (1 Satz).

Aufgabe 5: Zeitdiskrete Systeme (14 Punkte)

Ein System mit dem Ausgang $y(k) = b_0 \cdot u(k) - a_1 \cdot y(k-1)$ ist gegeben mit $a_1 = -1$ und $b_0 = 0.3$.

a) Berechnen Sie die Wertefolge des Systemausgangs mit dem gegebenen Eingangssignal für $k = 0, 1, ..., 5$. Skizzieren Sie die Ergebnisse in der Abbildung. Nutzen Sie $y(k) = 0$ für alle $k < 0$ als Anfangsbedingung.

b) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Systems.

c) Berechnen Sie die Polstelle des Systems.

d) Berechnen Sie den Endwert der Impulsantwort.

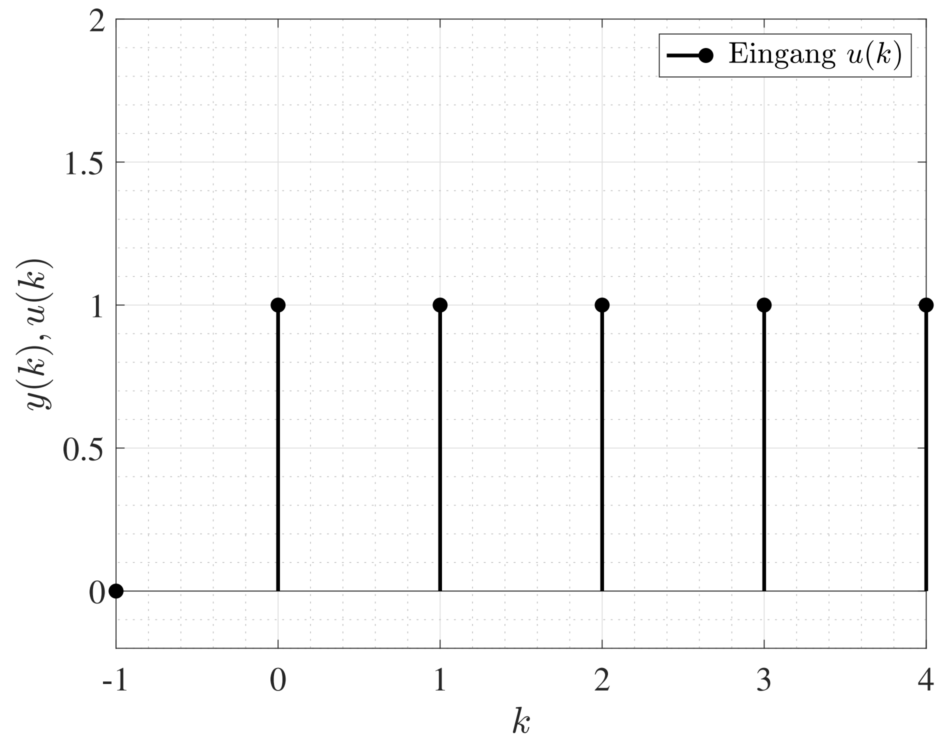
e) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

☐ Das System ist stabil.

☐ Das System ist instabil.

☐ Das System ist grenzstabil.

f) Wie kann man das gegebene System modifizieren, damit die beiden nicht angekreuzten Aussagen aus Teil e) zutreffen?



Lösungen:

Aufgabe 1: **Statistik (9 Punkte)**

Bild 2 zeigt Kontur-Plots von zweidimensionalen Gaußschen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p(u_1, u_2)$. Jede dieser Funktionen wird beschrieben durch ihren Mittelwert $(\mu_1\ \mu_2)$ und ihre Kovarianzmatrix $(\underline{\Sigma})$.

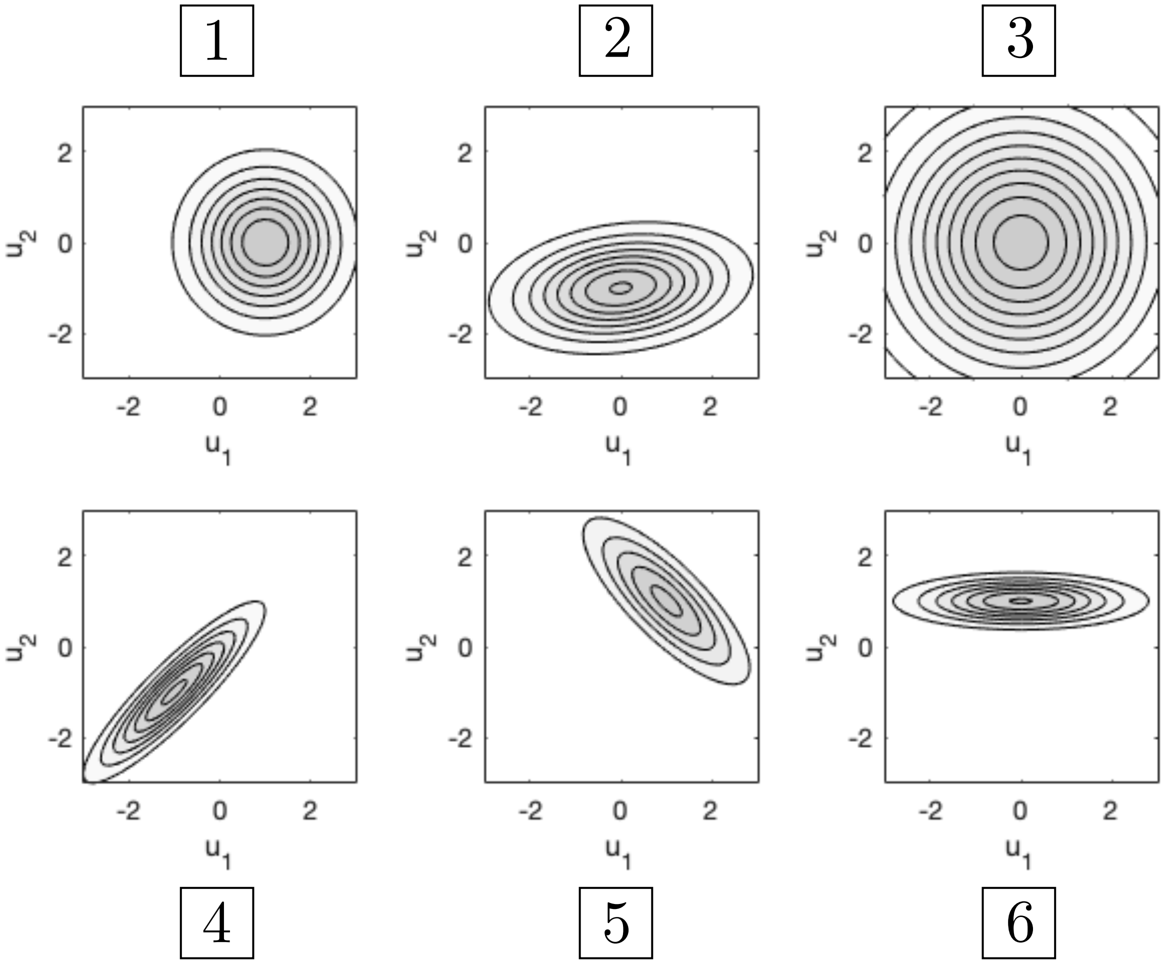


Bild 2: Kontur-Plots von zweidimensionalen Gaußverteilungen

a) Schätzen Sie den Mittelwert $(\mu_1\ \mu_2)$ für jede der 6 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p(u_1, u_2)$ und tragen Sie die Werte in die unten stehende Tabelle ein. 3

b) Ordnen Sie aus den folgenden Matrizen $\underline{A}$ bis $\underline{L}$ die passenden Kovarianzmatrizen $\underline{\Sigma}$ den dazugehörigen Wahrscheinlichkeitdichtefunktionen (1-6) aus Bild 2 zu. Tragen Sie ihr Ergebnis in die unten stehende Tabelle ein. 6

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \underline{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad \underline{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Antwort:

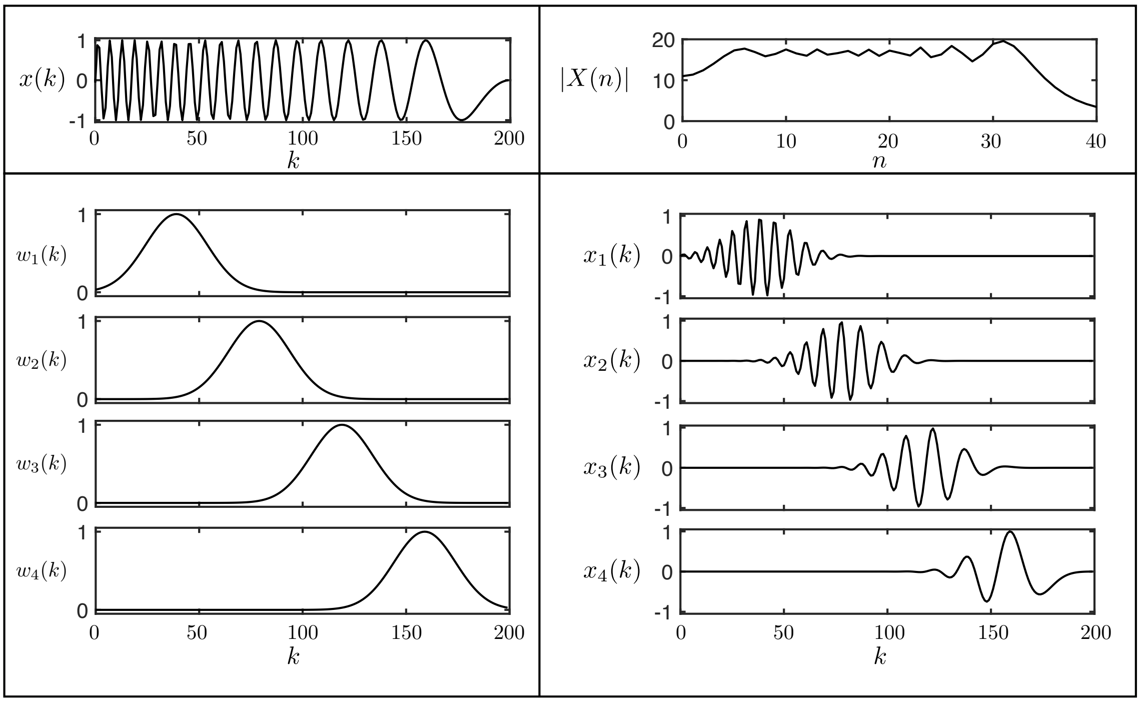
Plot	μ_1	μ_2	Σ
1	1	0	$\underline{K}$
2	0	-1	$\underline{G}$
3	0	0	$\underline{E}$
4	-1	-1	$\underline{B}$
5	1	1	$\underline{F}$
6	0	1	$\underline{J}$

$\boxed{\sum 9}$

Aufgabe 2: DFT (11 Punkte)

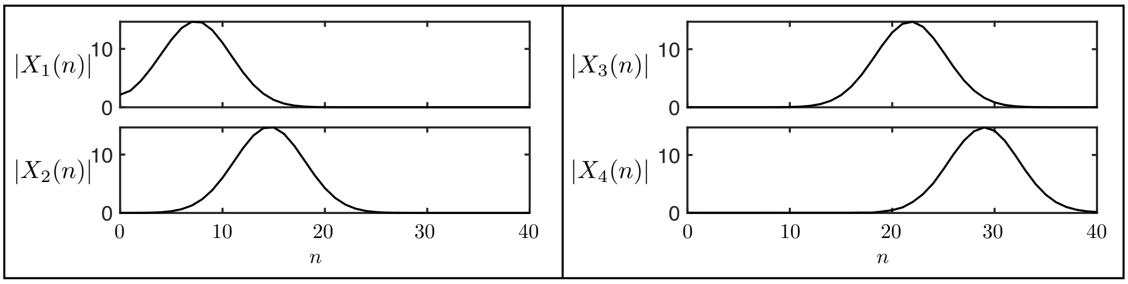
Gegeben ist ein sinusförmiges Signal $x(k)$. Die Frequenz des Signals ändert sich linear mit der Zeit. Die ersten 40 Absolutwerte der zugehörigen DFT sind ebenfalls mit $|X(n)|$ gegeben, sowie vier unterschiedliche Fensterfunktionen $(w_1(k), \ldots, w_4(k))$.

a) Wenden Sie jede Fensterfunktion $(w_1(k), \ldots, w_4(k))$ auf das Signal $x(k)$ an und skizzieren Sie die resultierenden Signale $x_1(k), \ldots, x_4(k)$.



4

b) Ordnen Sie jedem Signal $x_i(k)$ die zugehörigen Absolutwerte der DFTs $|X_j(n)|$ zu.



Signal	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$
Zugehöriges $\lvert X_j(n)\rvert$	$\lvert X_4(n)\rvert$	$\lvert X_3(n)\rvert$	$\lvert X_2(n)\rvert$	$\lvert X_1(n)\rvert$

4

c) Welche Information erhält man, wenn man diese zeitlich verschobenen Fensterfunktionen vor einer DFT auf das Ursprungssignal anwendet? Wie nennt man dieses Verfahren?

Gefensterte Signale: Die DFT hängt nun nicht mehr nur von der Frequenz ab, sondern auch noch von einer zweiten Variablen: der Zeitverschiebung des Fensters. Sie gibt den Zeitpunkt an, für den die Kurzzeit-DFT gültig ist.

Das Verfahren nennt man Kurzzeit-DFT (Short-Time Discrete Fourier Transform (STDFT)). 2

d) Angenommen das Signal $x(k)$ ist stark verrauscht. Wie ist die Fensterbreite der Fenster $w_i(k)$ zu wählen, damit das Verfahren möglichst Unempfindlich bzgl. des Rauschens ist?
   Die Fensterbreite bestimmt die Robustheit bzgl. des Rauschens im Originalsignal. Je breiter das Fenster, umso unempfindlicher ist die Auswertung bzgl. des Rauschens. 1

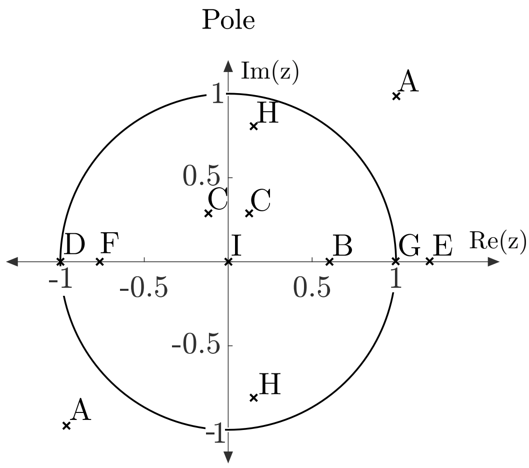
$\sum 11$

Aufgabe 3: Sprungantworten (12 Punkte)

Gegeben sind die Lagen der Pole von 9 unterschiedlichen Systemen (A-I) im Pol/Nullstellen-Diagramm und 6 unterschiedliche Sprungantworten (1-6).

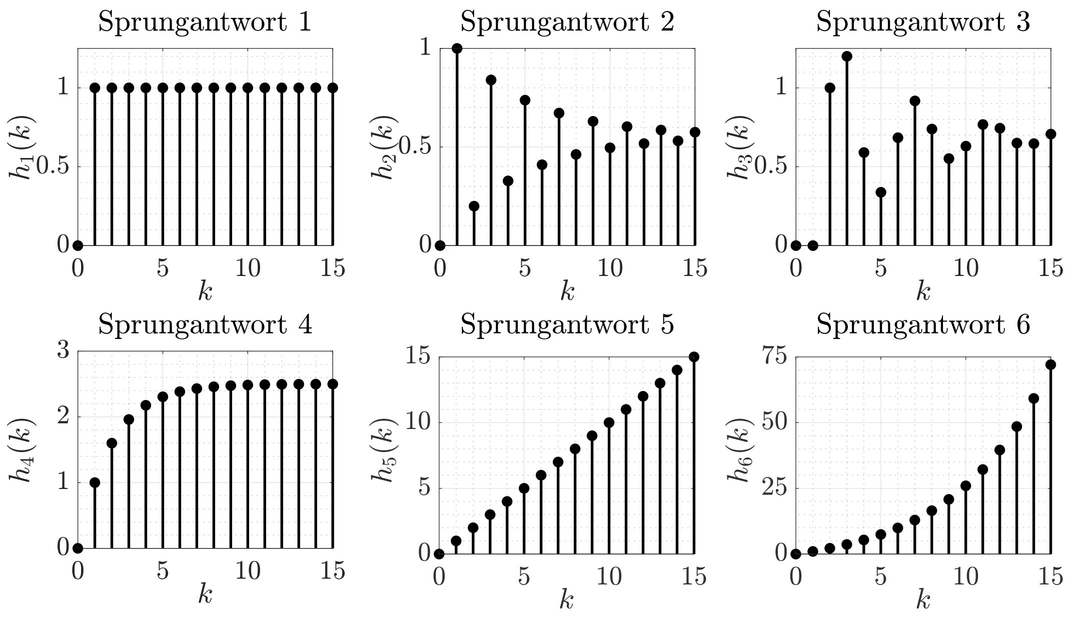
Ordnen Sie die Pole den Sprungantworten in der gegebenen Tabelle richtig zu.

(Hinweis: Drei Pollagen sind keiner Sprungantwort zurechenbar. Alle Übertragungsfunktion haben die Struktur $G(z) = \frac{1}{A(z)}$ mit $A(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - p_i)$)



Sprung-antwort	Pole
1	I
2	F
3	H
4	B
5	G
6	E

2
2
2
2
2
2



$\sum$ 12

Aufgabe 4: Kamm-Filter (14 Punkte)

Das lineare Filter

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^m + a}{z^m}$$

ist gegeben.

a) Handelt es sich um ein FIR oder ein IIR Filter? Geben Sie eine kurze Begründung (1 Satz).
Das Filter ist ein FIR Filter, da alle Pole bei 0 liegen. 1

b) Ermitteln Sie die zughörige Differenzengleichung.
Die Übertragungsfunktion lässt sich als

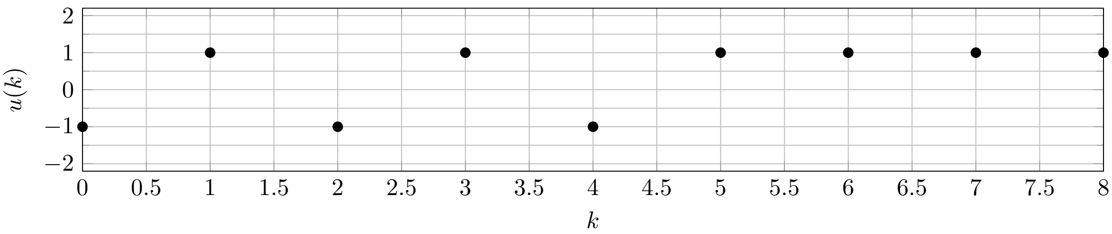
$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \frac{z^m + a}{z^m} = 1 + az^{-m}$$

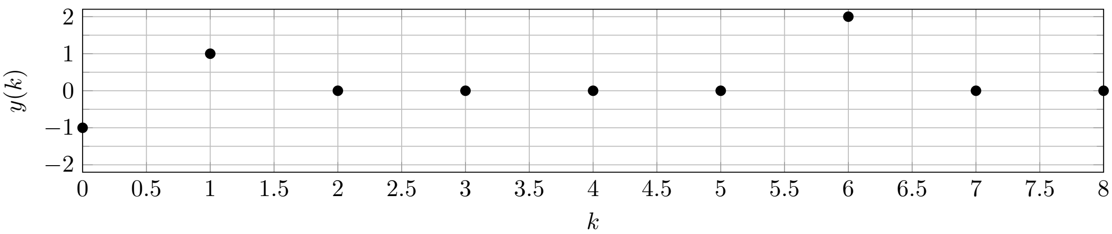
schreiben. Transformation in den diskreten Zeitbereich führt zu

$$y(k) = u(k) + au(k - m).$$

2

c) Sei $a = \mathbf{-1}$ und $m = 2$. Zeichnen Sie in die unten dargestellten Diagramme die Filterantwort ein für das dargestellte Eingangssignal. Nutzen Sie $u(k) = 0$ für alle $k < 0$ als Anfangsbedingung.
Die Differenzengleichung ist $y(k) = u(k) - u(k-2)$. **Jetzt sei $a = -1$ und m eine**





4

beliebige positive Zahl.

d) Berechnen Sie den Frequenzgang des Filters, nutzen Sie T_0 für die Abtastzeit. Der Betrag des Frequenzgangs muss **nicht** berechnet werden.
Der Frequenzgang des Filters ist

$$G(i\omega) = 1 - \left(e^{-i\omega T_0}\right)^m = 1 - (\cos(-\omega T_0) - i \sin(-\omega T_0))^m$$

3

e) Wie ist der Wert des Frequenzgangs bei $\omega = 0$. Berechnen Sie die Dämpfung bei dieser Frequenz in dB.
Bei $\omega = 0$ gilt

$$G(0) = 1 - (\cos(0) - i\sin(0))^m = 1 - 1^m = 0.$$

Die Dämpfung ist $-\infty$ dB. $\boxed{3}$

f) Entscheiden Sie, ob es sich bei dem Filter um einen Tief- oder einen Hochpassfilter handelt. Geben Sie eine kurze Begründung (1 Satz). Der Filter hat eine Hochpasscharakteristik, da bei $\omega = 0$ der Betrag des Frequenzgangs 0 ist. $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 18}$

Aufgabe 5: Zeitdiskrete Systeme (14 Punkte)

Der Ausgang eines Systems berechnet sich mit $y(k) = b_0 \cdot u(k) - a_1 \cdot y(k-1)$, dabei ist $a_1 = -1$ und $b_0 = 0.3$.

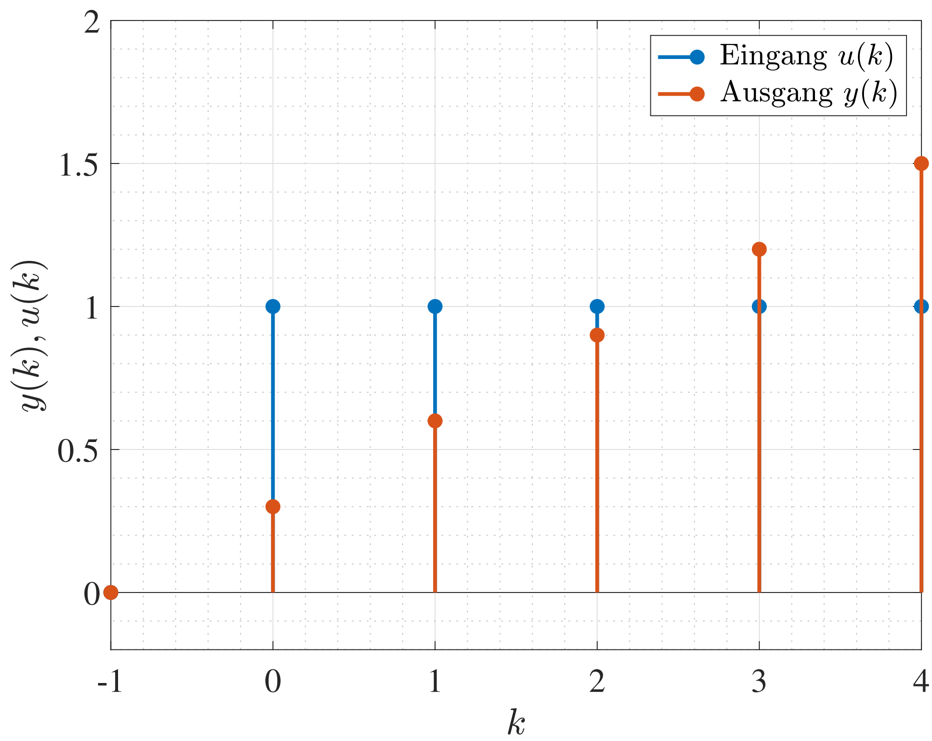
a) Berechnen Sie die Wertefolge des Systemausgangs mit dem gegebenen Eingangssignal für $k = 0, 1, ..., 5$. Skizzieren Sie die Ergebnisse in der Abbildung. Nutzen Sie $y(k) = 0$ für alle $k < 0$ als Anfangsbedingung.

Gegeben ist das Eingangssignal

$$u(k) = \begin{cases} 1, & \text{für } k \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit kann das Ausgangssignal berechnet werden zu 3

$$\begin{aligned} y(k=0) &= b_0 \cdot u(0) - a_1 \cdot y(0-1) = 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = 0.3 \\ y(k=1) &= 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0.3 = 0.6 \\ y(k=2) &= 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0.6 = 0.9 \\ y(k=3) &= 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0.9 = 1.2 \\ y(k=4) &= 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1.2 = 1.5 \\ y(k=5) &= 0.3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1.5 = 1.8 \end{aligned}$$



1

b) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Systems.

Siehe Bild 3. 2

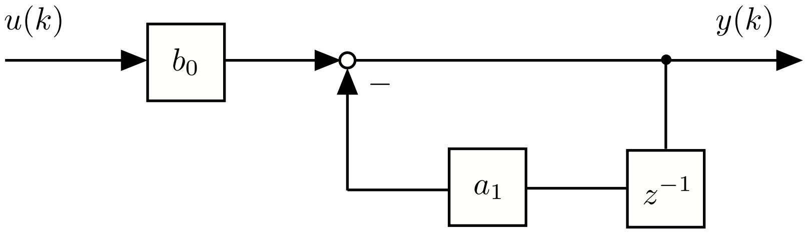


Bild 3: Blockschaltbild des gegebenen Systems

c) Berechnen Sie die Polstelle des Systems.

$$
\begin{aligned}
y(k) + a_1 \cdot y(k-1) &= b_0 \cdot u(k) \\
Y(z) + a_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} &= b_0 \cdot U(z) \\
G(z) &= \frac{b_0}{1 + a_1 \cdot z^{-1}} \\
p &= 1
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$

d)

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= G(z) \cdot U(z) \\
y(k \to \infty) &= \lim_{z \to 1} G(z) \cdot U(z) = (z-1) \cdot \frac{b_0}{1 + a_1 \cdot z^{-1}} \cdot \frac{z}{z} = \frac{b_0 \cdot z}{1} = b_0 = 0.3
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$

e) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- [ ] Das System ist stabil.
- [ ] Das System ist instabil.
- [x] Das System ist grenzstabil.

Es handelt sich um ein grenzstabiles System. $\boxed{1}$

f) Wie kann man das gegebene System modifizieren, dass es auf die beiden nicht angekreuzten Aussagen aus Teil e) zutrifft?

Um ein instabiles System zu erhalten, muss $|a_1| > 1$ gewählt werden. Um ein stabiles System zu erhalten, muss $|a_1| < 1$ gewählt werden. $\boxed{2}$