Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

29. August 2018

Name:	
Matr.-Nr.:	
Note:	

Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Gesamt
Soll:	17	8	11	14	10	60
Ist:						

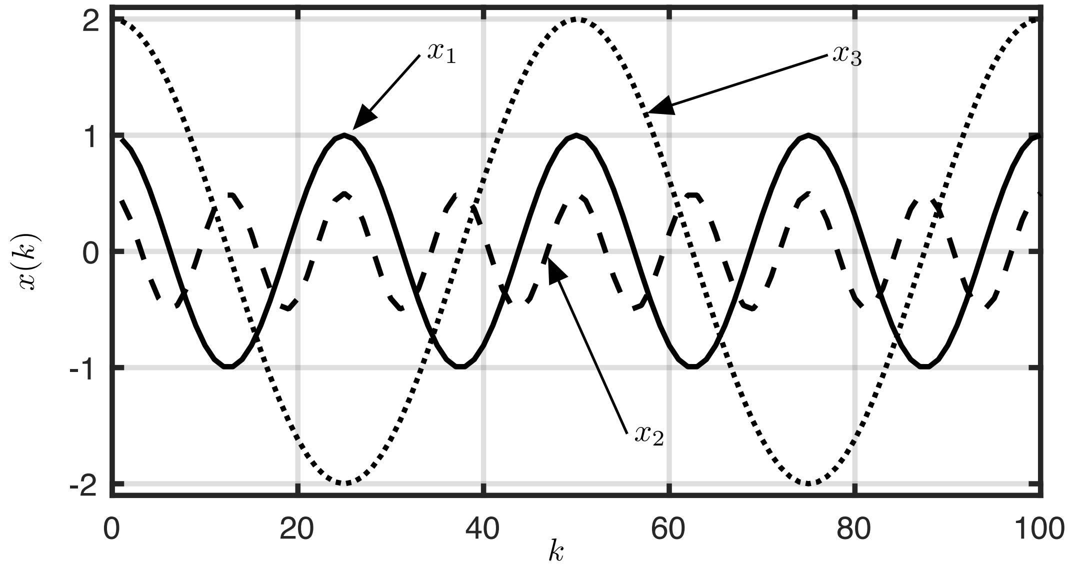
Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

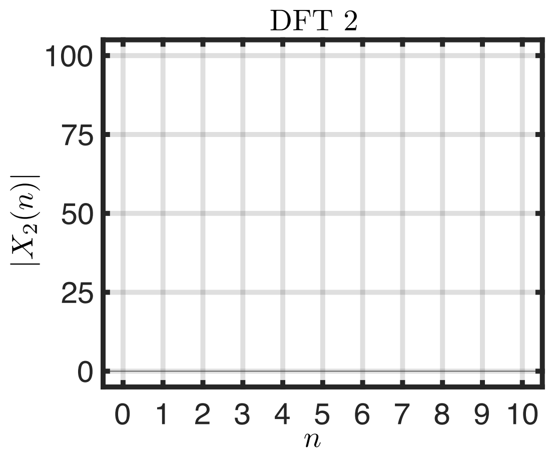
Aufgabe 1: Signalanalyse (17 Punkte)

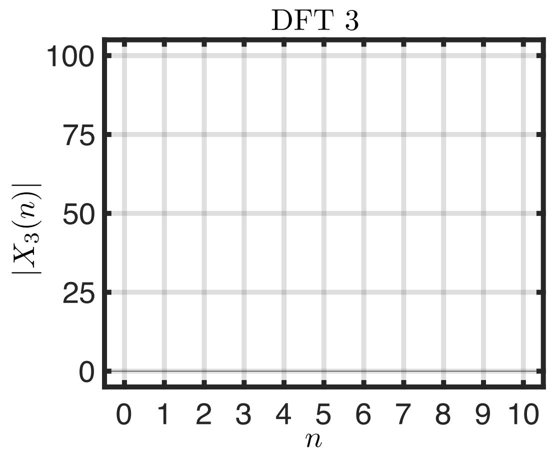
Nachfolgend sehen Sie drei Sinussignale (x_1, x_2 und x_3) mit je N=100 Datenpunkte. Für Signal x_1 ergibt sich der Absolutwert der DFT transformierten zu

$$|X_1(n)| = \begin{cases} 50 & \text{für} \quad n = 4 \\ 0 & \text{für} \quad n = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, ..., 49\,. \end{cases} \tag{1}$$

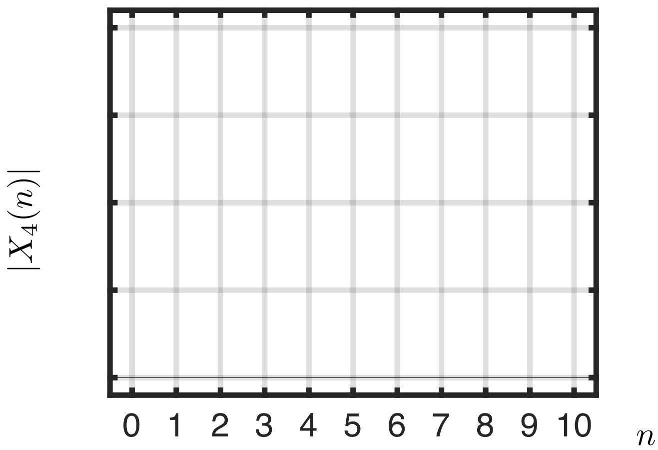


a) Skizzieren Sie in die nachfolgenden Diagramme den Absolutwert der DFTs ($|X_2(n)|$ und $|X_3(n)|$) der Signale x_2 und x_3 für $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Die Signale wurden so gewählt, dass kein Leckeffekt auftritt!

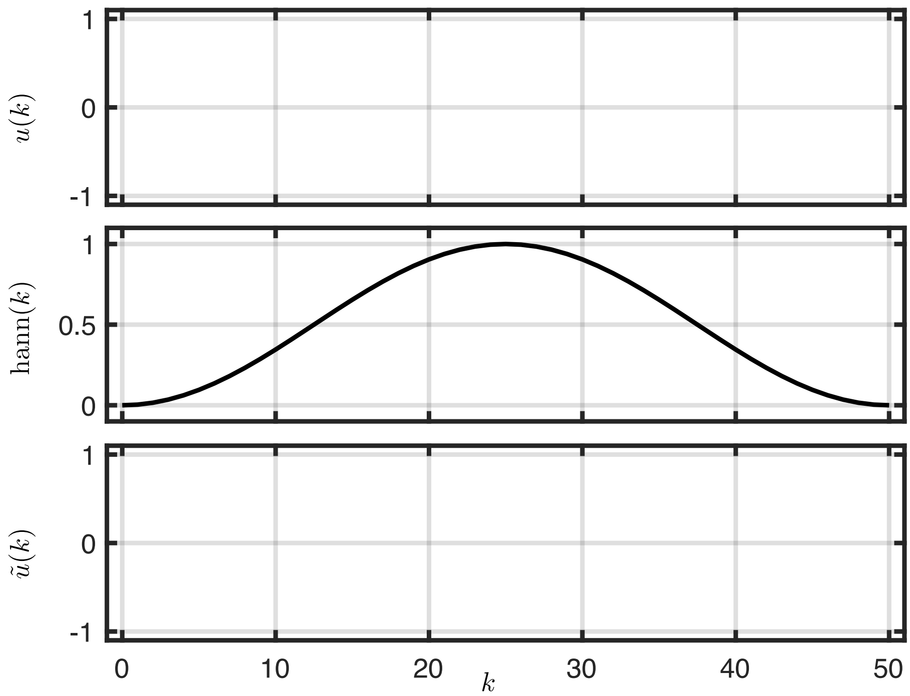




b) Skizzieren Sie für das Signal $x_4(k) = -x_2(k) - x_3(k)$ die Absolutwerte der DFT transformierten $|X_4(n)|$ in das vorbereitete Diagramm für $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Ergänzen Sie hierzu die Beschriftung an der Hochachse!



c) Skizzieren Sie in das nachfolgende Diagramm ein cosinusförmiges Signal bei dem der Leckeffekt deutlich auftritt. Das Signal muss folgende Eigenschaften besitzen: 1. $k = 0, 1, 2, \ldots 50$, 2. monofrequent, 3. maximal 3 Schwingungen und 4. Amplitude gleich eins.



d) Wenden Sie nun das dargestellte Hann-Fenster auf das von Ihnen gewählte Signal aus Aufgabenteil c) an. Skizzieren Sie das entstehende Signal $\tilde{u}(k)$ in das vorbereitete Diagramm.

e) Das Signal $u(t) = \sin(2\pi f t)$ mit $f = 2\,\text{Hz}$ wird mit einer Abtastfrequenz $f_0 = 100\,\text{Hz}$ abgetastet. Wie viele Abtastwerte N sollten aufgezeichnet werden um die Frequenz des Signals in einer DFT exakt widerspiegeln zu können.

f) Es seien zwei Signale $x_5(k) = -x_6(k)$ gegeben. Wie unterscheiden sich die dazugehörigen DFT transformierten $X_5(n)$ und $X_6(n)$ und wie unterscheiden sich die Absolutwerte der DFT transformierten?

Aufgabe 2: Statistik (8 Punkte)

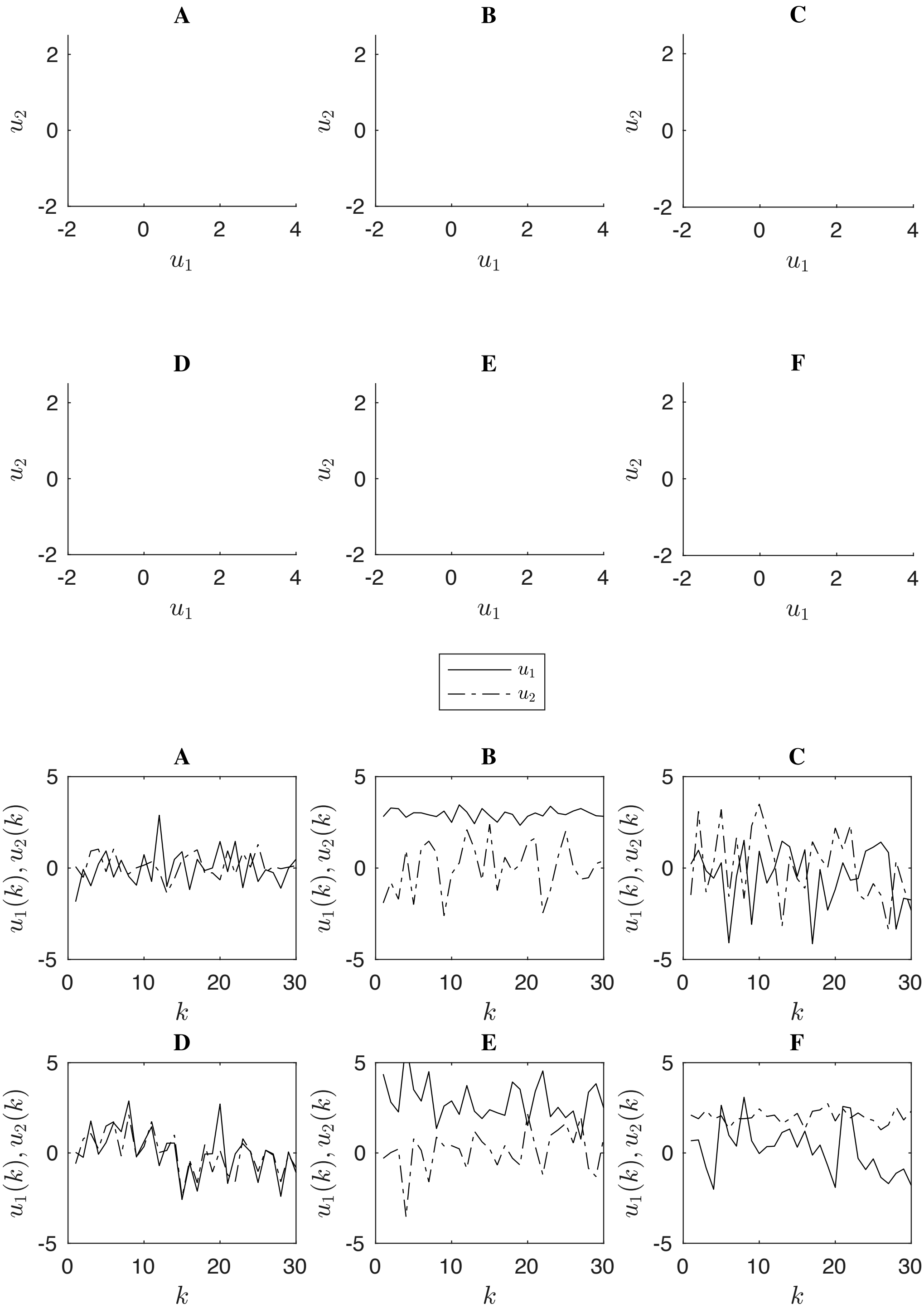


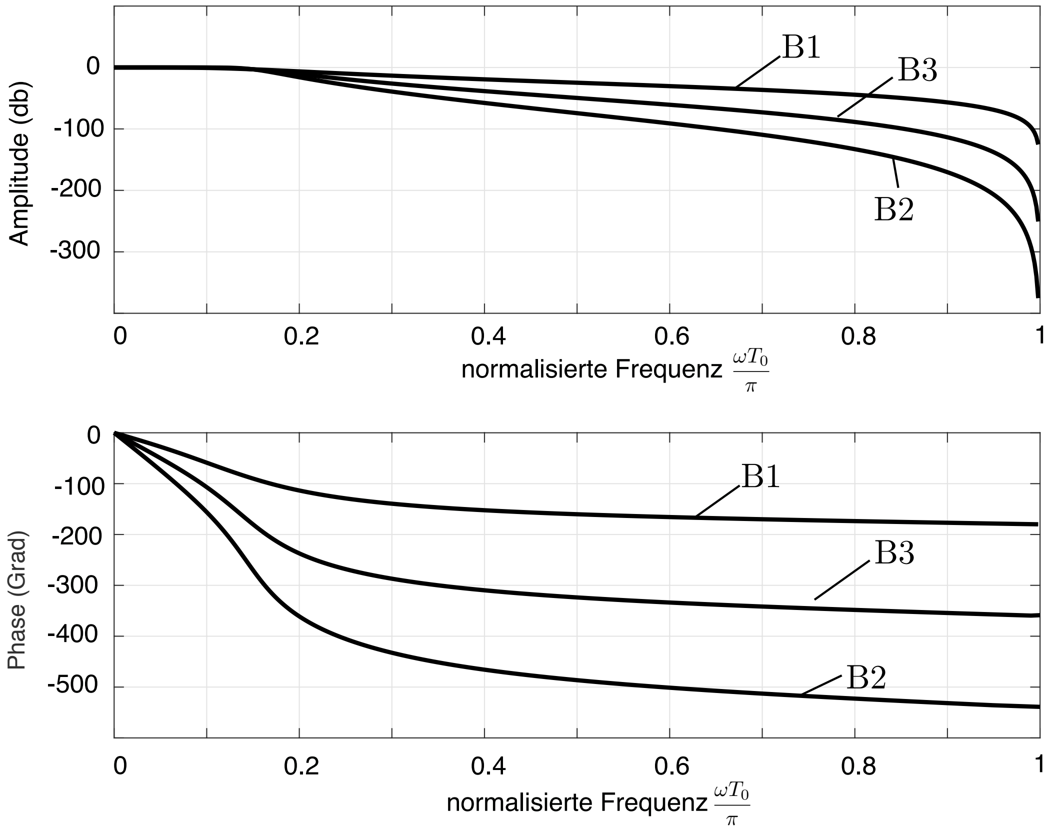
Bild 1: Signale u_1 und u_2 aus unterschiedlichen Verteilungen.

a) Skizzieren Sie grob die Höhenlinien der zweidimensionalen Normalverteilung für die gegebenen Signale in Bild 1.

b) Eine zweidimensionale Normalverteilung hat perfekt kreisförmige Höhenlinien. Welche Eigenschaften besitzt diese Verteilung?

Aufgabe 3: Filter (11 Punkte)

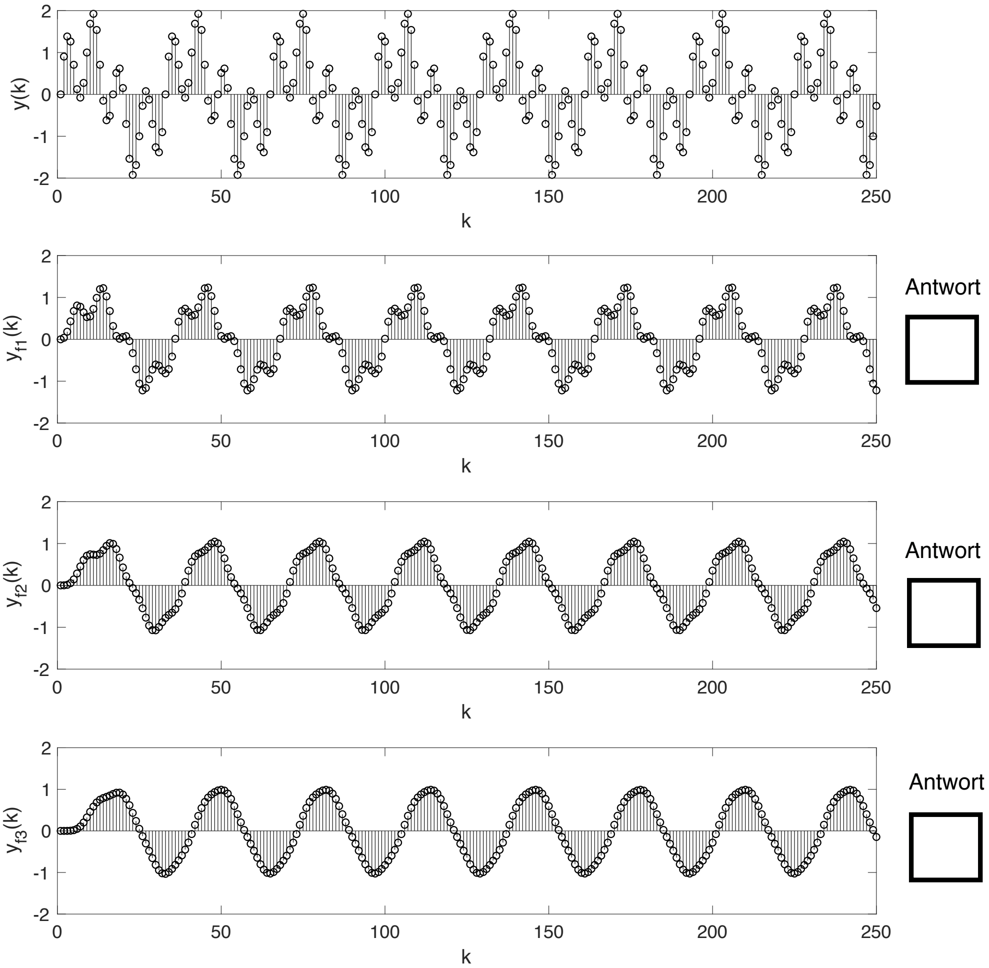
Gegeben sind die drei Butterworth-Filter B1-B3. Die Frequenzgänge der Filter sind unten dargestellt.



a) Welchen Typ haben die Filter? (Hochpass, Bandpass, ...)

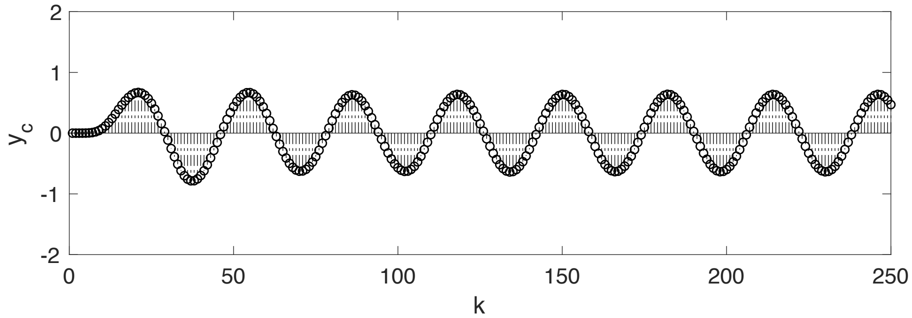
b) Welche Ordnung haben die Filter B1-B3?

c) Es wird das Eingangssignal $y(k) = \sin(\pi/4 \cdot k) + \sin(\pi/16 \cdot k)$ für die drei Filter verwendet. Im obersten Plot ist das ungefilterte Signal dargestellt. Geben Sie für die drei darunter dargestellten Signale an, mit welchem Filter (B1, B2 oder B3) das oberste Signal gefiltert wurde.



d) Warum unterscheidet sich der erste Teil der Filterantwort ($k < 30$) von dem periodischen restlichen Teil.

e) In der unteren Grafik wird $y(k)$ mit einem Chebyshev-Filter vom Typ I und Ordnung 6 mit gleicher Eckfrequenz gefiltert. Wie unterscheidet sich das Ergebniss von dem Butterworth-Filter und was ist die Ursache für den Unterschied?



Aufgabe 4: Mittelwertfilter (14 Punkte)

Gegeben ist folgendes Ein- und Ausgangsverhältnis in diskreter Zeit:

$$y\left(k\right)) = \frac{1}{5}\left(u\left(k+2\right) + u\left(k+1\right) + u\left(k\right) + u\left(k-1\right) + u\left(k-2\right)\right) \tag{2}$$

a) Nutzen Sie dieses Verhältnis, um die Übertragungsfunktion G(z) zu berechnen.

b) Bestimmen Sie die Phasenverschiebung von dem System. Geben Sie zu Ihrer Antwort eine Erklärung oder Berechnung an.
Hinweis: Sie können folgende Gleichung nutzen: $e^{i\phi} = \cos\left(\phi\right) + i \sin\left(\phi\right)$

c) Zeichnen Sie die Sprungantwort $y(k)$ in Bild 2 ein.

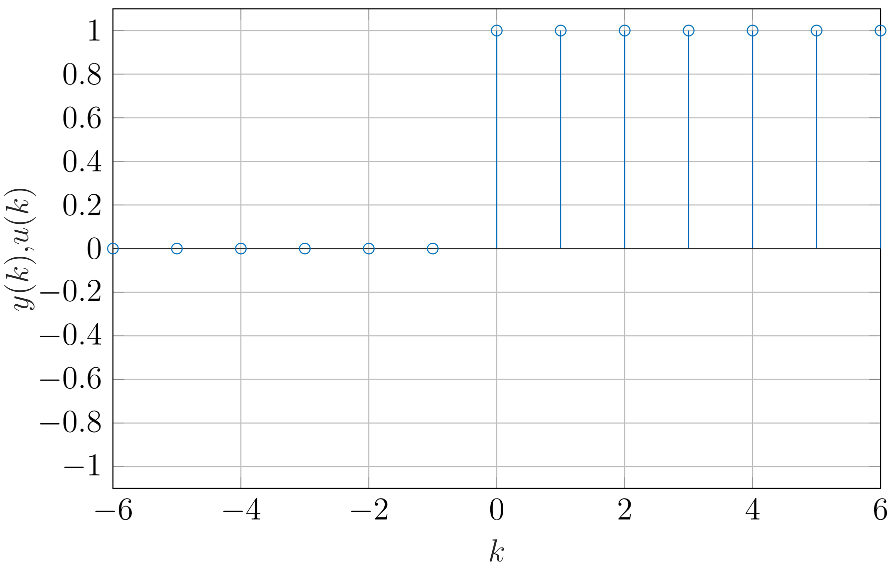


Bild 2: Einheitssprung $u(k)$: (○)

d) Erstellen Sie die Übertragungsfunktion $G_d(z)$ durch Zeitverschiebung von $G(z)$ so, dass $G_d(z)$ kausal ist. Die Zeitverschiebung soll so klein wie möglich sein.

e) Zeichnen Sie die Impulsantwort $y_d(k)$ (von Übertragungsfunktion $G_d(z)$) in Bild 3 ein.

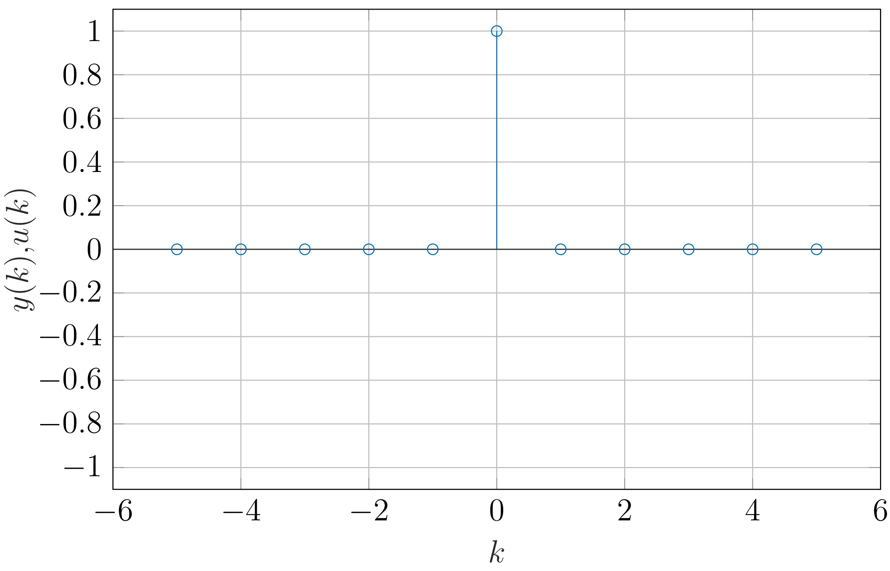


Bild 3: Einheitsimpuls $u(k)$: (∘)

Aufgabe 5: Blockschaltbild (10 Punkte)

Zwei verschiedene Systeme sind gegeben. Die Übertragungsfunktion von System 1 ist

$$G_1(z) = \frac{1.5}{z} + \frac{0.7}{z^2} + \frac{2}{z^{-1}} \ .$$

Das Verhalten von System 2 wird durch folgende Differenzengleichung beschrieben:

$$y(k+2) + 0.6y(k+1) = 2u(k+1) + 0.8u(k) \ .$$

a) Führen Sie die z-Transformation für System 2 durch und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_2(z)$ an. Nutzen Sie die Zeitverschiebung so, dass die Exponenten von z kleiner oder gleich 0 sind.

b) Charakterisieren Sie System 1 und 2 durch Ankreuzen der richtigen Antworten in der folgenden Tabelle.

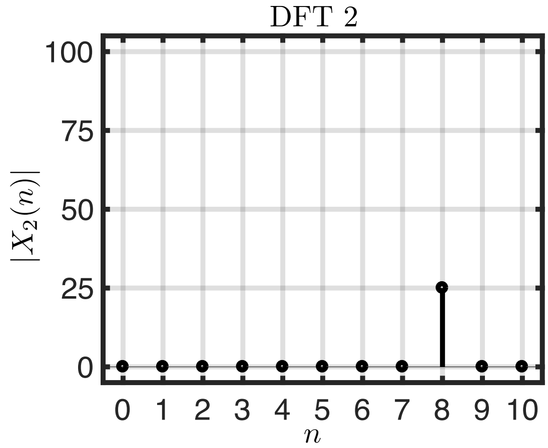
	kausal	akausal	IIR	FIR
System 1				
System 2				

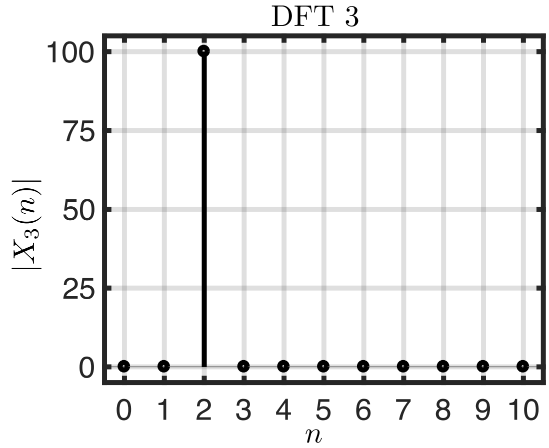
c) Zeichnen Sie die Blockschaltbilder von System 1 und 2. Nutzen Sie dafür nur z^{-1}-, z^1-Blöcke und Blöcke für die Koeffizienten.

Lösungen:

Aufgabe 1: Signalanalyse (17 Punkte)

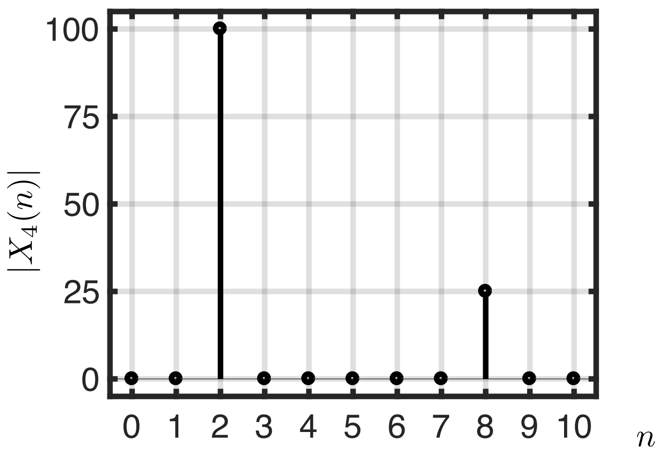
a) Skizzieren Sie in die nachfolgenden Diagramme den Absolutwert der DFTs ($|X_2(n)|$ und $|X_3(n)|$) der Signale x_2 und x_3 für $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Die Signale wurden so gewählt, das kein Leckeffekt auftritt!





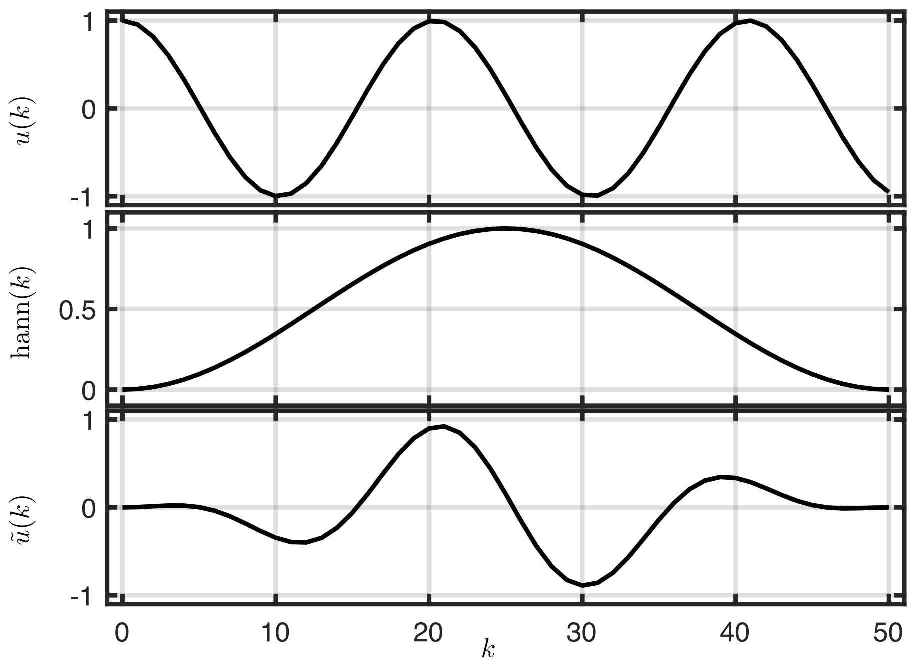
Das Signal x_2 hat die doppelte Frequenz und halbe Amplitude von x_1 daher hat der Absolutwert der DFT entsprechend einen Peak bei $n = 8$ mit der halben Höhe im Vergleich zum Absolutwert der DFT von Signal x_1. Für Signal 3 hat sich im Vergleich zu x_1 die Frequqnz halbiert und die Amplitude verdoppelt. Das Ergebnis ist oben zu sehen. 6

b) Skizzieren Sie für das Signal $x_4(k) = -x_2(k) - x_3(k)$ die Absolutwerte der DFT transformierten $|X_4(n)|$ in das vorbereitete Diagramm für $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Ergänzen Sie hierzu die Beschriftung an der Hochachse!



3

c) Skizzieren Sie in das nachfolgende Diagramm ein cosinusförmiges Signal bei dem der Leckeffekt deutlich auftritt. Das Signal muss folgende Eigenschaften besitzen:
1. $k = 0, 1, 2, \ldots 50$, 2. monofrequent, 3. maximal 3 Schwingungen und 4. Amplitude gleich eins.



2

d) Wenden Sie nun das dargestellt Hann-Fenster auf das von Ihnen gewählte Signal aus Aufgabenteil b) an. Skizzieren Sie das entstehende Signal $\tilde{u}(k)$ in das vorbereitete Diagramm. 2

e) Das Signal $u(t) = \sin(2\pi f t)$ mit $f = 2\,\mathrm{Hz}$ wird mit einer Abtastfrequenz $f_0 = 100\,\mathrm{Hz}$ abgetastet. Wie viele Abtastwerte N sollten aufgezeichnet werden um die Frequenz des Signals in einer DFT exakt widerspiegeln zu können.
Die Frequenzen einer DFT ergeben sich zu

$$f_n = n f_0 / N, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, (N-1) \tag{3}$$

für $f_n = 2\,\mathrm{Hz}$ und $f_0 = 100\,\mathrm{Hz}$ ergibt sich

$$2\,\mathrm{Hz} = \frac{100\,\mathrm{Hz} \cdot n}{N} \tag{4}$$

$$\text{Für } N \neq 0 \;\Rightarrow\; N = \frac{100\,\mathrm{Hz} \cdot n}{2\,\mathrm{Hz}} \tag{5}$$

$$N = 50n \tag{6}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ergeibt sich die korrekten Antworten zu $N = 50, 100, 150, \ldots$ 2

f) Es seien zwei Signale $x_5(k) = -x_6(k)$ gegeben. Wie unterscheiden sich die dazugehörigen DFT transformierten $X_5(n)$ und $X_6(n)$ und wie unterscheiden sich die Absolutwerte der DFT transformierten?
Die DFT-Matrix für beide Signale ist identisch ($\underline{W}_{N,5} = \underline{W}_{N,6}$) und deren Einträge besitzen im allgemeinen Real- und Imaginärteil. Da sich die Signale nur im Vorzeichen unterscheiden, unterscheiden sich somit auch die DFT transformierten $X_5(n)$ und $X_6(n)$ nur im Vorzeichen. Dies hat zur Folge, dass der komplexe Zeiger von $X_5(n)$ für ein beliebiges n in die entgegengesetzte Richtung von $X_6(n)$ zeigt. Die Absolutwerte (Länge der komplexen Zeiger) sind jedoch identisch. 2

$\sum$ 17

Aufgabe 2: Statistik

a) Skizzieren Sie grob die Höhenlinien der zweidimensionalen Normalverteilung für die gegebenen Signale in Bild 1.

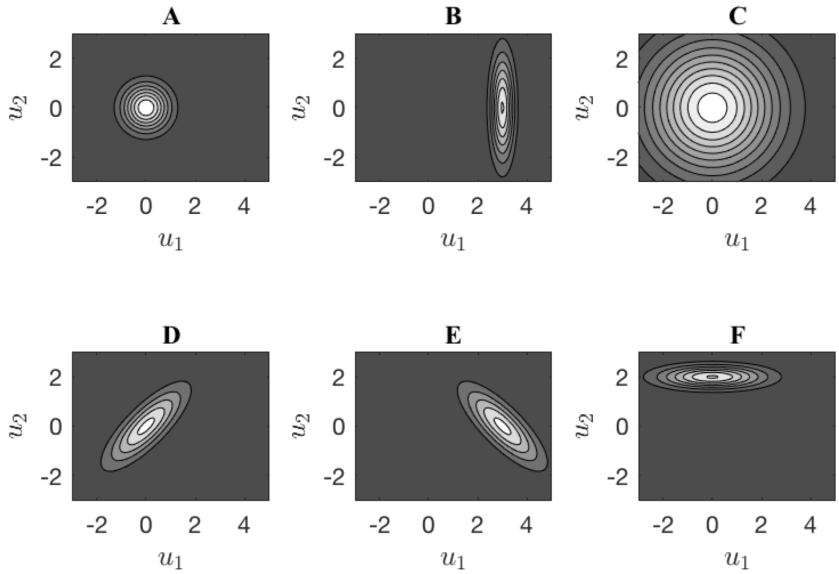


Bild 4: Korrekte Höhenlinien der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

6

b) Eine zweidimensionale Normalverteilung hat perfekt kreisförmige Höhenlinien. Welche Eigenschaften besitzt diese Verteilung?
Antwort:
Die Wahrscheinlichkeiten sind unabhängig voneinander, daher sind die Signale unkorreliert. $\rho_{u_1,u_2} = 0$ 2

$\sum 8$

Aufgabe 3: Filter

a) Welchen Typ haben die Filter? (Hochpass, Bandpass, ...)
Antwort:
B1-B3: Tiefpass 1

b) Welche Ordnung haben die Filter B1-B3?
Antwort:
B1: zweiter Ordnung B2: sechster Ordnung, B3: vierter Ordnung 3

c) Es wird das Eingangssignal $y(k) = \sin(\pi/4 \cdot k) + \sin(\pi/16 \cdot k)$ für die drei Filter verwendet. Im obersten Plot ist das ungefilterte Signal dargestellt. Geben Sie für die drei darunter dargestellten Signale an, mit welchem Filter (B1, B2 oder B3) das oberste Signal gefiltert wurde.
Antwort:
$y_{f1} : B1$, $y_{f2} : B3$ und $y_{f3} : B2$ 3

d) Warum unterscheidet sich der erste Teil der Filterantwort ($k < 30$) von dem periodischen restlichen Teil.
Antwort:
Das Verhalten ist aufgrund der Anfangsbedingungen von 0 unterschiedlich. 2

e) In der unteren Grafik wird $y(k)$ mit einem Chebyshev-Filter vom Typ I und Ordnung 6 mit gleicher cut-off frequency gefiltert. Wie unterscheidet sich das Ergebniss von dem Butterworth-Filter und was ist die Ursache für den Unterschied?
Antwort:
Die Amplitude ist anders. Dies wird durch die Ripple im Durchlassbereich des Filters verursacht. 2

$\sum 11$

Aufgabe 4: Mittelwertfilter

Gegeben ist folgendes Ein- und Ausgangsverhältnis in diskreter Zeit:

$$y\left(k\right)) = \frac{1}{5}\left(u\left(k+2\right)+u\left(k+1\right)+u\left(k\right)+u\left(k-1\right)+u\left(k-2\right)\right) \tag{7}$$

a) Nutzen Sie dieses Verhältnis, um die Übertragungsfunktion G(z) zu berechnen.
Antwort:

$$Y\left(z\right) = \frac{1}{5}\left(U\left(z\right)z^{-2}+U\left(z\right)z^{-1}+U\left(z\right)z^{0}+U\left(z\right)z^{1}+U\left(z\right)z^{2}\right) \tag{8}$$

$$G\left(z\right) = \frac{1}{5}\left(z^{2}+z^{1}+z^{0}+z^{-1}+z^{-2}\right) \tag{9}$$

2

b) Bestimmen Sie die Phasenverschiebung von dem System. Geben Sie zu Ihrer Antwort eine Erklärung oder Berechnung an.
Hinweis: Sie können folgende Gleichung nutzen: $e^{i\phi} = \cos\left(\phi\right)+i\sin\left(\phi\right)$
Antwort:
Keine Phasenverschiebung. Imaginäre Anteile kürzen sich gegenseitig.

$$G\left(i\omega\right) = \frac{1}{5}\left(e^{-2i\omega T_0}+e^{-1i\omega T_0}+e^{0i\omega T_0}+e^{1i\omega T_0}+e^{2i\omega T_0}\right) \tag{10}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\cos\left(2\omega T_0\right)+i\sin\left(2\omega T_0\right)+\cos\left(\omega T_0\right)+i\sin\left(\omega T_0\right)+1+\cos\left(-\omega T_0\right)\right. \tag{11}$$

$$\left.+i\sin\left(-\omega T_0\right)+\cos\left(-2\omega T_0\right)+i\sin\left(-2\omega T_0\right)\right)$$

$$G\left(i\omega\right) = \frac{1}{5}\left(2\cos\left(2\omega T_0\right)+2\cos\left(\omega T_0\right)+1\right) \tag{12}$$

4

c) Zeichnen Sie die Sprungantwort $y(k)$ in Bild 5 ein.
Antwort: 3

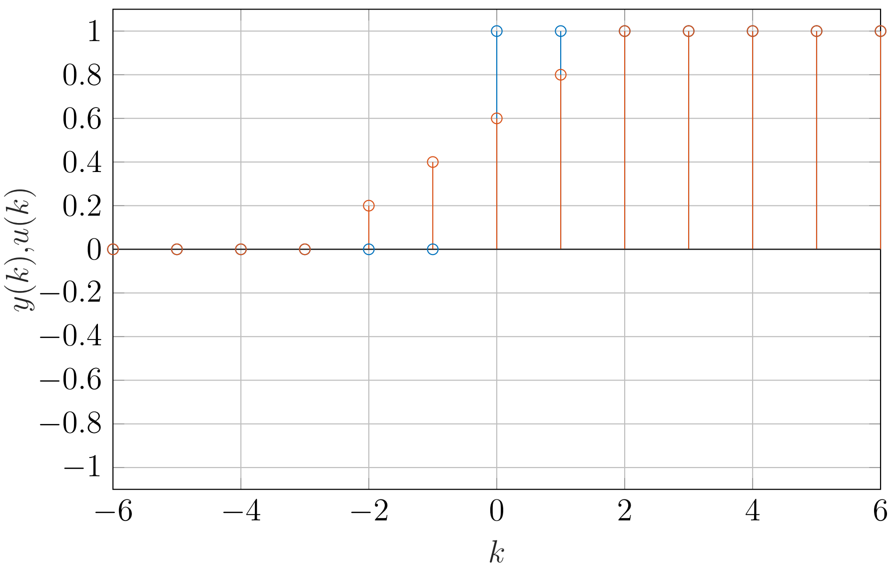


Bild 5: Einheitssprung $u(k)$: (○), Sprungantwort $y(k)$: (○)

d) Erstellen Sie die Übertragungsfunktion $G_d(z)$ durch Zeitverschiebung von $G(z)$ so, dass $G_d(z)$ kausal ist. Die Zeitverschiebung soll so klein wie möglich sein.
Antwort:

$$G_d\left(z\right) = \frac{1}{5} z^{-2} \left(z^2 + z^1 + z^0 + z^{-1} + z^{-2}\right) \tag{13}$$

2

e) Zeichnen Sie die Impulsantwort $y_d(k)$ (von Übertragungsfunktion $G_d(z)$) in Bild 6 ein.
Antwort:

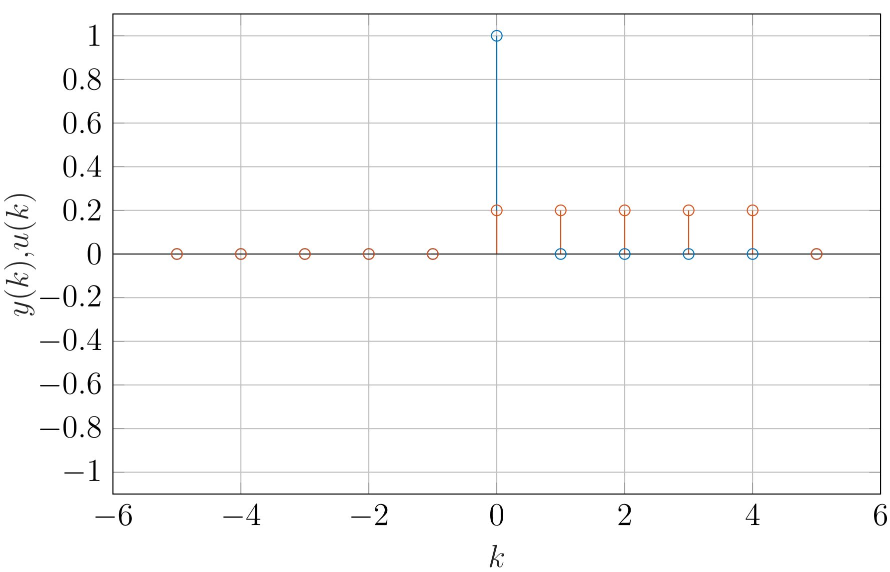


Bild 6: Einheitsimpuls $u(k)$: (○), Impulsantwort $y_d(k)$: (○)

3

$\sum$ 14

Aufgabe 5: Blockschaltbild (10 Punkte)

Zwei verschiedene Systeme sind gegeben. Die Übertragungsfunktion von System 1 ist

$$G_1(z) = \frac{1.5}{z} + \frac{0.7}{z^2} + \frac{2}{z^{-1}} \ .$$

Das Verhalten von System 2 wird durch folgende Differenzengleichung beschrieben:

$$y(k+2) + 0.6y(k+1) = 2u(k+1) + 0.8u(k) \ .$$

a) Führen Sie die z-Transformation für System 2 durch und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_2(z)$ an. Nutzen Sie die Zeitverschiebung so, dass die Exponenten von z kleiner oder gleich 0 sind.
Antwort:

$$\begin{aligned}
y(k+2) + 0.6y(k+1) &= 2u(k+1) + 0.8u(k) \\
y(k) + 0.6y(k-1) &= 2u(k-1) + 0.8u(k-2) \\
Y(z) + 0.6z^{-1}Y(z) &= 2U(z)z^{-1} + 0.8U(z)z^{-2} \\
Y(z) \cdot (1 + 0.6z^{-1}) &= U(z) \cdot (2z^{-1} + 0.8z^{-2}) \\
\Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{2z^{-1} + 0.8z^{-2}}{1 + 0.6z^{-1}}
\end{aligned}$$

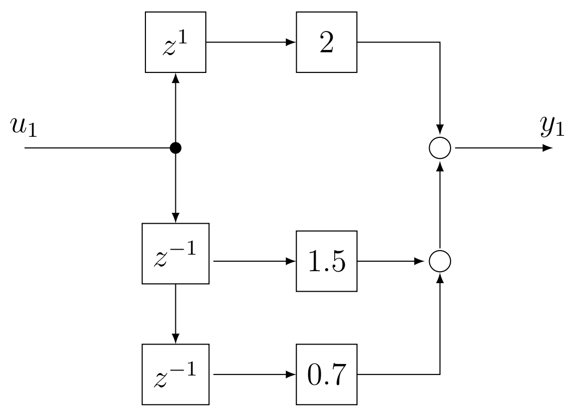
4

b) Charakterisieren Sie System 1 und 2 durch Ankreuzen der richtigen Antworten in der folgenden Tabelle.
Antwort:

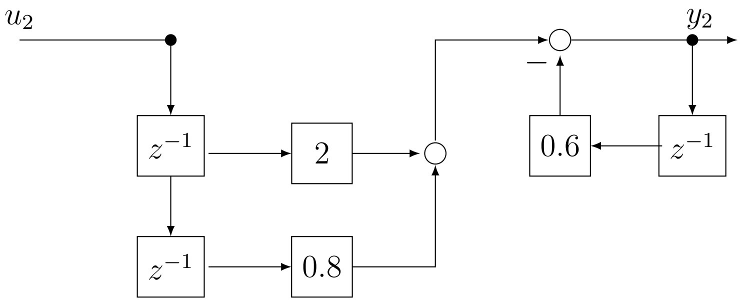
	kausal	akausal	IIR	FIR
System 1		x		x
System 2	x		x	

2

c) Zeichnen Sie die Blockschaltbilder von System 1 und 2. Nutzen Sie dafür nur z^{-1}-, z^1-Blöcke und Blöcke für die Koeffizienten.
Antwort:



2



$\boxed{2}$

$\boxed{\sum 10}$