Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

24.08.2022

Name:	
Mat.-Nr.	
Note:	

Aufgabe:	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Punkte:	13	10	14	11	12	60
Erreicht:						

Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Zeitdiskrete Systeme (13 Punkte)

Für ein System ist die folgende Differenzengleichung gegeben

$$y(k) = b_0 u(k) - a_1 y(k-1) \ .$$

Zusätzlich sein die beiden Konstanten $\alpha = -0.6$ und $\beta = 2$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Vertärkung des Systems für $b_0 = \beta$ und $a_1 = \alpha$.

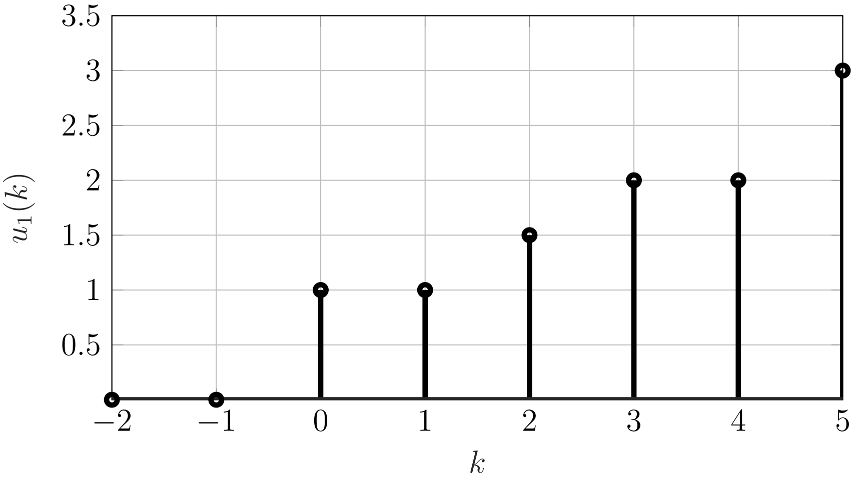
b) Welche Systemeigenschaft verändert sich wie, wenn b_0 ein anderes Vorzeichen hat $b_0 = -\beta$?

c) Nun wird das Vorzeichen von a_1 auf $a_1 = -\alpha$ gewechselt ($b_0 = \beta$). Welche Systemeigenschaft verändert sich im Vergleich zum ursprünglichen System (ursprüngliches System: $a_1 = \alpha$ und $b_0 = \beta$)? Was ist der Grund für die Änderung?

d) Nun soll $a_1 = \frac{1}{\alpha}$ (und $b_0 = \beta$) sein. Welche Systemeigenschaft verändert sich im Vergleich zum ursprünglichen System (ursprüngliches System: $a_1 = \alpha$ und $b_0 = \beta$)? Was ist der Grund für die Änderung?

Aufgabe 2: Median-Filter (10 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt das Eingangssignal $u_1(k)$.



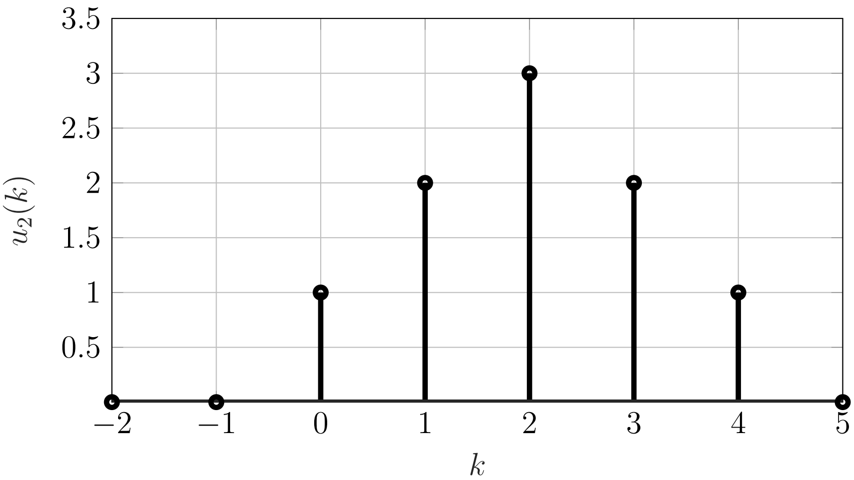
Ein kausaler Median-Filter dritter Ordnung wird benutzt, um das Eingangssignal $u_1(k)$ zu filtern. Die Gleichung dieses Median-Filters lautet

$$y_1(k) = \text{median}(u(k), u(k-1), u(k-2)).$$

a) Bestimmen und zeichnen Sie das Ausgangssignal $y_1(k)$ des Filters für den Eingang $u_1(k)$ für $k \geq 0$.

b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G_1(z)$ eines linearen Filters an, welche den selben Ausgang $y_1(k)$ (Aufgabenteil b)) für den gegebenen Eingang $u_1(k)$ liefert (keine Berechnung notwendig). Begründen Sie, wie es möglich ist, dass zwei unterschiedliche Filter die selbe Ausgangsgrößenfolge liefern können.

Nun ist ein zweiter Eingang $u_2(k)$ gegeben.

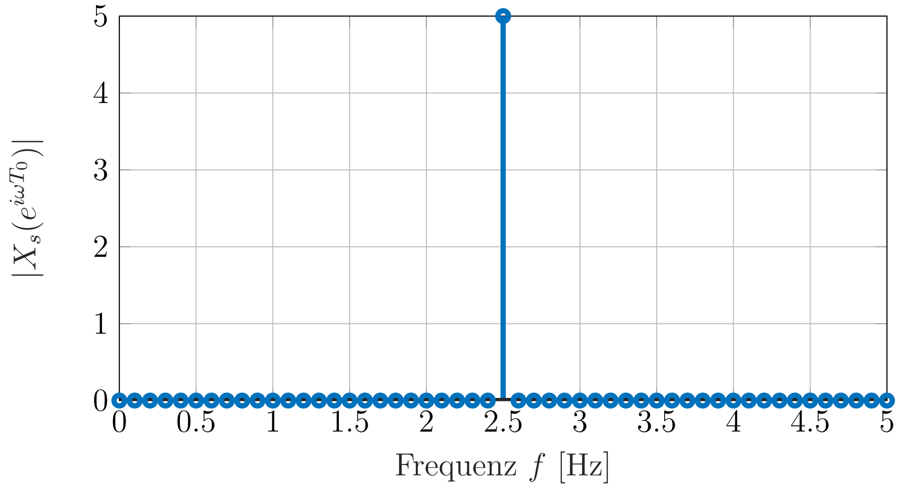


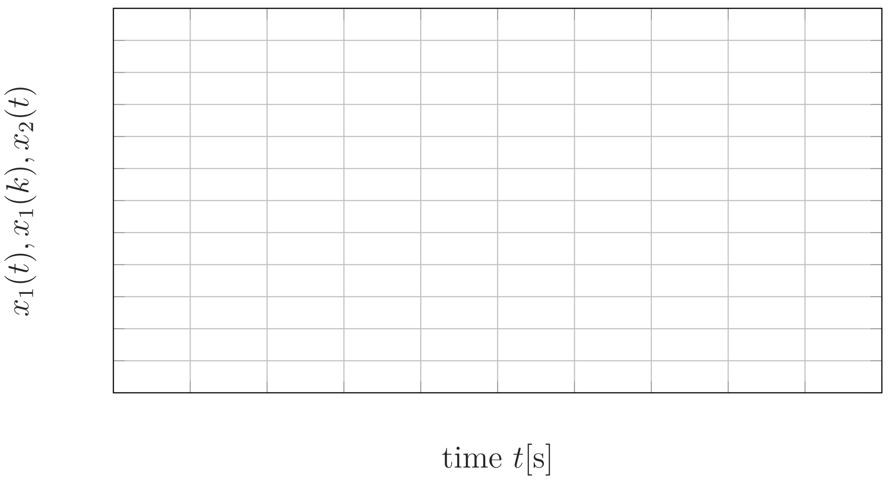
d) Der Eingang $u_2(k)$ wird auch mit einem kausalen Median-Filter dritter Ordnung gefiltert. Bestimmen und zeichnen Sie das neue Ausgangssignal $y_2(k)$ für $k \geq 0$.

e) Führt die lineare Übertragungsfunktion $G_1(z)$ zu dem selben Ausgang $y_2(k)$ (Aufgabenteil d)) für den Eingang $u_2(k)$. Begründen Sie ihre Aussage.

Aufgabe 3: DFT und Aliasing (14 Punkte)

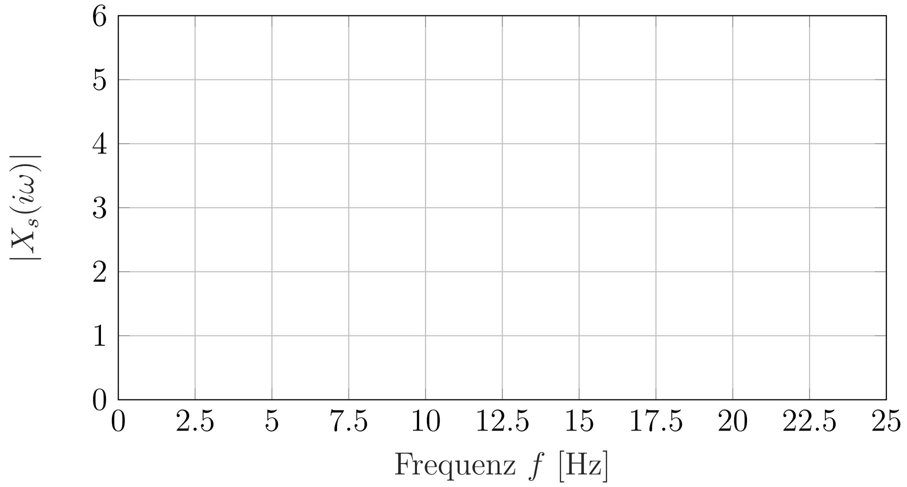
a) Die folgende Abbildung zeigt das diskrete Frequenzspektrum eines Signals, dass mit der Messfrequenz von $f_0 = 10$Hz aufgezeichnet worden ist. Zeichnen Sie in das vorgegebene Diagramm eine Periode eines zeitkontinuierliches Signal, dass zum gezeigten Frequenzspektrum führt. Geben Sie die Formel für dieses Signal an. Zeichnen Sie zusätzlich 5 Samples in das zeitkontinuierliche Diagramm, die zu der gegebenen Messfrequenz passen





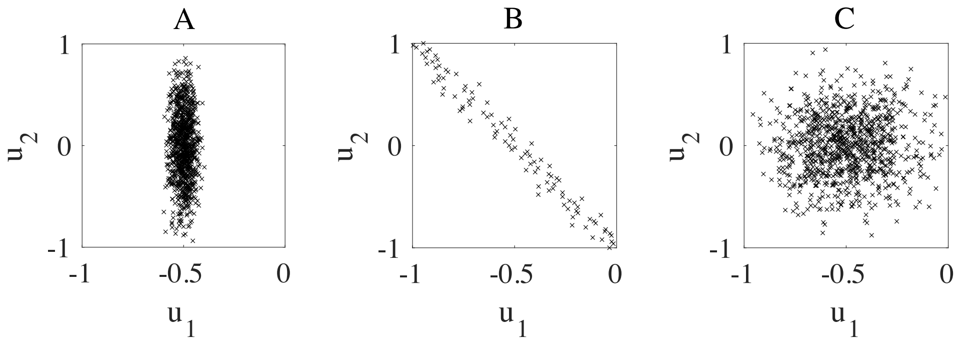
b) Angenommen das Sampling Theorem wurde bei der Aufzeichnung des Signals $x(k)$ nicht eingehalten. Zu welchen anderen Frequenzen könnte das dargestellte Frequenzspektrum aus Aufgabenteil a) auch gehören. Stellen Sie eine allgemeine Formel auf.

c) Zeichnen Sie die Shannon-Frequenz sowie 2 weitere mögliche Frequenzen, die zu dem Frequenzspektrum aus Aufgabenteil a) führen können, in des gegebene Diagramm. Zeichnen Sie zusätzlich in das Zeit-Diagramm aus Aufgabenteil a) eine weiteres zeitkontinuierliches Signal, dass zu dem angegebenen Frequenzspektrum führen könnte.


6
5
4
3
2
1
0
$|X_s(i\omega)|$
0
2.5
5
7.5
10
12.5
15
17.5
20
22.5
25
Frequenz f [Hz]

Aufgabe 4: Hauptkomponentenanalyse (11 Punkte)

a) Im Folgenden sind drei verschiedene Datensätze abgebildet. Für diese wurde jeweils die Hauptkomponentenanalye (PCA) durchgeführt. Ordnen Sie die jedem Datensatz ein der angegebenen Singulärwertkombinationen zu. Begründen Sie zudem Ihre Auswahl kurz. Zeichnen Sie zudem die mittels PCA berechneten Hauptachsen in die Diagramme ein.



ID	Singulärwerte
1	$s_1 = 10;\ s_2 = 9.5$
2	$s_1 = 8;\ s_2 = 0$
3	$s_1 = 9;\ s_2 = 0.7$
4	$s_1 = 10;\ s_2 = -1$
5	$s_1 = 9;\ s_2 = 2$
6	$s_1 = -1;\ s_2 = -3$

b) Nennen Sie mögliche Gründe, warum eine Hauptkomponentenanalyse durchgeführt wird.

Aufgabe 5: Statistik (12 Punkte)

a) Es soll mit drei verschiedenen Thermometern die wahre Temperatur T_0 aus N verrauschten Messdatenpunkten geschätzt werden. Gehen Sie davon aus, dass die gemessenen Werte normalverteilt sind. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten der geschätzten Temperatur für drei verschiedene N ($N_1 = 100$, $N_2 = 200$, $N_3 = 400$) für die drei folgenden Fälle:

- 1.) Erwartungstreues und konsistentes Thermometer.
- 2.) Asymptotisch erwartungstreues und konsistentes Thermometer,
- 3.) Nicht erwartungstreues und nicht konsistentes Thermometer.

Verwenden Sie für jeden Fall ein eigenes Diagramm. Markieren Sie den wahren Wert der Temperatur T_0, beschriften Sie die Achsen und kennzeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten mit der jeweiligen Messdatenpunktanzahl.

Lösung:

Aufgabe 1: Zeitdiskrete Systeme (13 Punkte)

Für ein System ist die folgende Differenzengleichung gegeben

$$y(k) = b_0 u(k) - a_1 y(k-1)\ .$$

Zusätzlich sein die beiden Konstanten $\alpha = -0.6$ und $\beta = 2$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Vertärkung des Systems für $b_0 = \beta$ und $a_1 = \alpha$.

Antwort:

Berechnen der Übertragungsfunktion

$$y(k) = b_0 u(k) - a_1 y(k-1)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1}) = b_0 U(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \boxed{\frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}}$$ $\boxed{3}$

Berechnung der Verstärkung

$$\lim_{z\to 1}(z-1)H(z) = G(z=1) = \frac{b_0}{1+a_1} = \frac{\beta}{1+\alpha} = \frac{2}{1-0.6} = \boxed{5}$$ $\boxed{2}$

b) Welche Systemeigenschaft verändert sich wie, wenn b_0 ein anderes Vorzeichen hat $b_0 = -\beta$?

Antwort:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)H(z) = G(z=1) = \frac{b_0}{1+a_1} = \frac{-\beta}{1+\alpha} = \frac{-2}{1-0.6} = \boxed{-5}$$ $\boxed{1}$

Die **Verstärkung** des Systems verändert sich. Der Betrag der Verstärkung bleibt erhalten und das **Vorzeichen ändert sich**. $\boxed{1}$

c) Nun wird das Vorzeichen von a_1 auf $a_1 = -\alpha$ gewechselt ($b_0 = \beta$). Welche Systemeigenschaft verändert sich im Vergleich zum ursprünglichen System (ursprüngliches System: $a_1 = \alpha$ und $b_0 = \beta$)? Was ist der Grund für die Änderung?

Antwort: Das ursprüngliche System ist nicht schwingungsfähig. Dies liegt daran, dass es nur einen positiv reellen Pol gibt ($p_1 = -a_1 = 0.6$). Wenn sich das Vorzeichen von a_1 ändert, dann befindet sich der Pol auf der negativen reellen Achse ($p_{\text{new}} = -0.6$). Alle zeitdiskrete Systeme mit Polen auf der negativen reellen Achse sind **schwingungsfähig**. $\boxed{3}$

d) Nun soll $a_1 = \frac{1}{\alpha}$ (und $b_0 = \beta$) sein. Welche Systemeigenschaft verändert sich im Vergleich zum ursprünglichen System (ursprüngliches System: $a_1 = \alpha$ und $b_0 = \beta$)? Was ist der Grund für die Änderung?

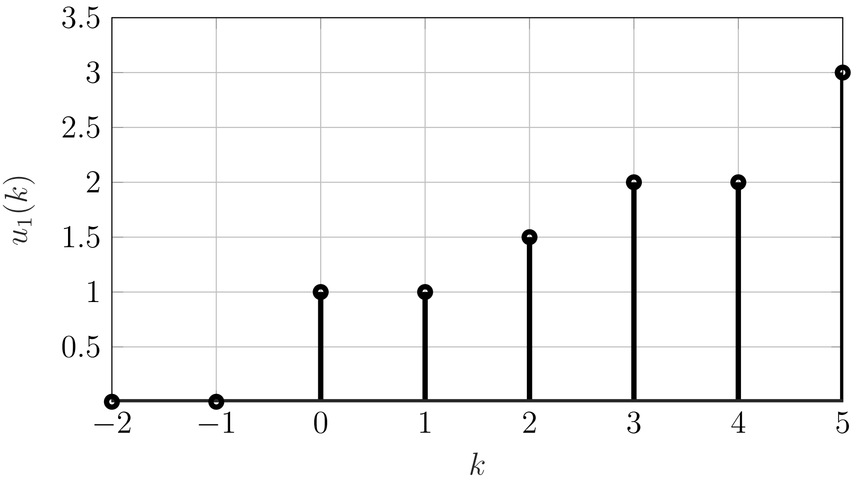
Antwort:

Das ursprüngliche System mit $a_1 = \alpha = -0.6$ hat einen stabilen Pol bei $p_1 = 0.6$ (Pol befindet sich innerhalb des Einheitskreises). Das Inverse eines beliebigen, stabilen Pol ist instabil (liegt außerhalb des Einheitskreises). Deshalb ist das System mit $p_{\text{new}} = -a_1 = -\frac{1}{\alpha} = 1\frac{2}{3}$ **instabil**. $\boxed{3}$

$\boxed{\sum 13}$

Aufgabe 2: Median-Filter (10 Punkte)

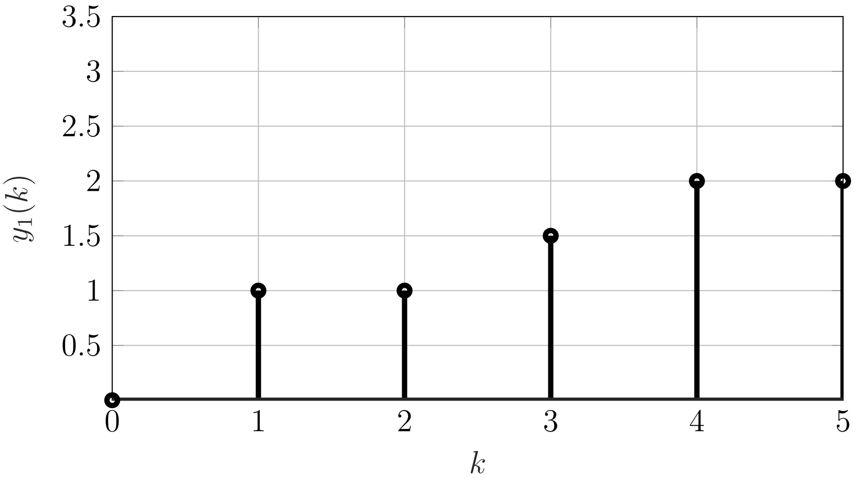
Die folgende Abbildung zeigt das Eingangssignal $u_1(k)$.



Ein kausaler Median-Filter dritter Ordnung wird benutzt, um das Eingangssignal $u_1(k)$ zu filtern. Die Gleichung dieses Median-Filters lautet

$$y_1(k) = \text{median}(u(k), u(k-1), u(k-2)).$$

a) Bestimmen und zeichnen Sie das Ausgangssignal $y_1(k)$ des Filters für den Eingang $u_1(k)$ für $k \geq 0$.
Antwort:



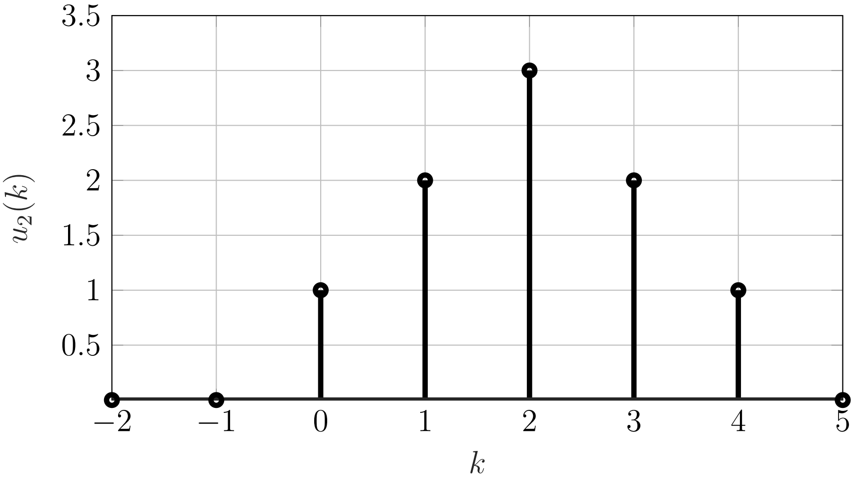
3

b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G_1(z)$ eines linearen Filters an, welche den selben Ausgang $y_1(k)$ (Aufgabenteil b)) für den gegebenen Eingang $u_1(k)$ liefert (keine Berechnung notwendig). Begründen Sie, wie es möglich ist, dass zwei unterschiedliche Filter die selbe Ausgangsgrößenfolge liefern können.
Antwort: Durch das monoton steigende Eingangssignal wird beim Median-Filter immer der Eingangswert von $u(k-1)$ als Ausgang $y(k)$ bestimmt. Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G_1(z) = z^{-1}.$$

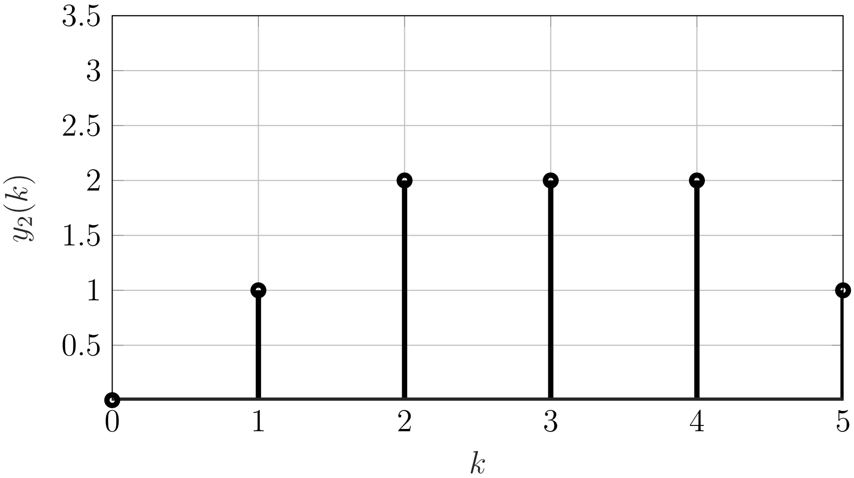
Zwei verschiedene lineare Filter können nicht den selben Ausgangsverlauf zum gleichen Eingangssignal aufweisen. Dies ist nur möglich, da der Median-Filter ein nichtlinear Filter ist. 2

Nun ist ein zweiter Eingang $u_2(k)$ gegeben.



d) Der Eingang $u_2(k)$ wird auch mit einem kausalen Median-Filter dritter Ordnung gefiltert. Bestimmen und zeichnen Sie das neue Ausgangssignal $y_2(k)$ für $k \geq 0$.

Antwort: Die Gleichung für den Median-Filter ist in Aufgabenteil a) gegeben.



3

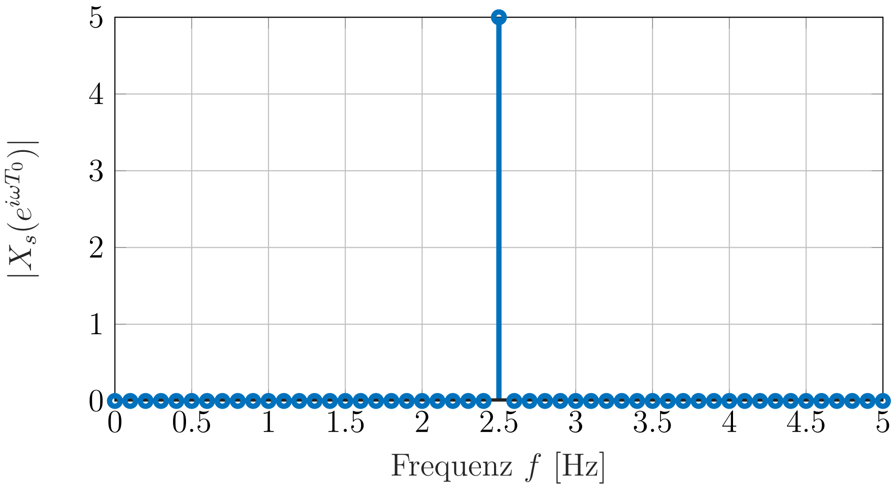
e) Führt die lineare Übertragungsfunktion $G_1(z)$ zu dem selben Ausgang $y_2(k)$ (Aufgabenteil d)) für den Eingang $u_2(k)$. Begründen Sie ihre Aussage.

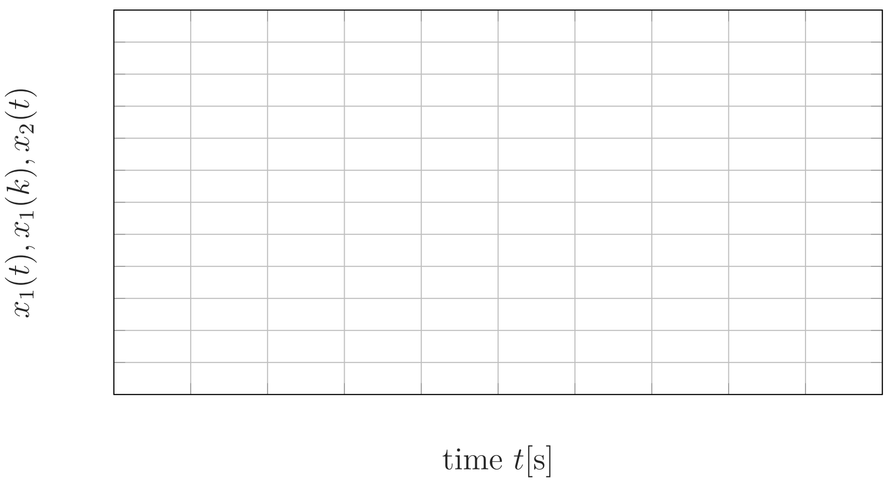
Antwort: Nein die Übertragungsfunktion $G_1(z)$ führt nicht zum selben Ausgang $y_2(k)$. Dies gilt nur für monoton steigende/fallende Eingangsgrößenfolgen. 2

$\sum 10$

Aufgabe 3: DFT und Aliasing (14 Punkte)

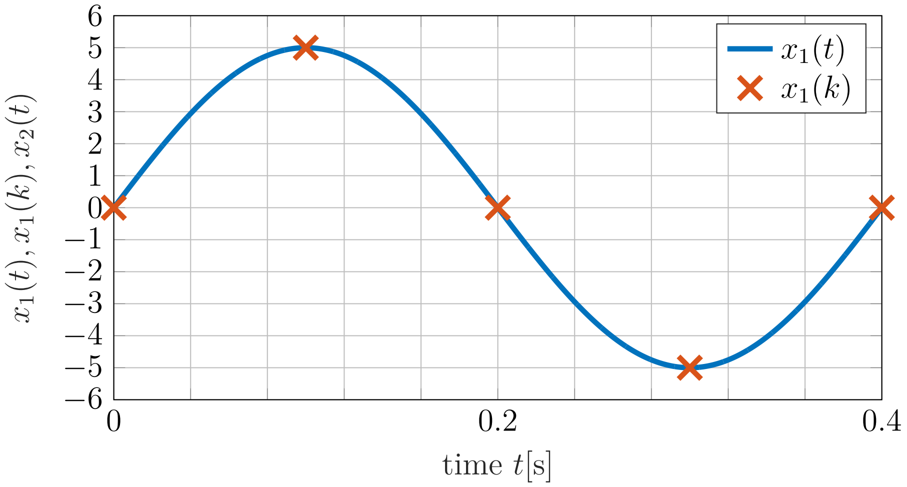
a) Die folgende Abbildung zeigt das diskrete Frequenzspektrum eines Signals, dass mit der Messfrequenz von $f_0 = 10\text{Hz}$ aufgezeichnet worden ist. Zeichnen Sie in das vorgegebene Diagramm eine Periode eines zeitkontinuierliches Signal, dass zum gezeigten Frequenzspektrum führt. Geben Sie die Formel für dieses Signal an. Zeichnen Sie zusätzlich 5 Samples in das zeitkontinuierliche Diagramm, die zu der gegebenen Messfrequenz passen





Antwort: Aus der Abbildung ist ablesbar, dass das Signal nur aus einem Frequenzanteil mit 2.5Hz besteht. Die Amplitude zu dieser Frequenz beträgt 5. Daraus lässt sich die allgemeine Formel eines Sinus-Signals mit der Frequenz von $f_1 = 2.5\text{Hz}$ und Amplitude $A_1 = 5$ erstellen.

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) = 5 \sin(2\pi \cdot 2.5\text{Hz} \cdot t)$$



6

b) Angenommen das Sampling Theorem wurde bei der Aufzeichnung des Signals $x(k)$ nicht eingehalten. Zu welchen anderen Frequenzen könnte das dargestellte Frequenzspektrum aus Aufgabenteil a) auch gehören. Stellen Sie eine allgemeine Formel auf.

Antwort: Wenn das Sampling Theorem bei der Aufzeichnung eines Signals nicht eingehalten wird, kann der Aliasing Effekt auftreten. Bei diesem Effekt werden Frequenzen, die außerhalb des Frequenzspektrums von 0Hz bis $0.5f_0 = 5$Hz liegen, in jenen Bereich gespiegelt. Diese zusätzlichen Frequenzspektren werden auch Schattenspektra genannt. Allgemein werden durch den Abtastprozess folgende Schattenspektra erzeugt:

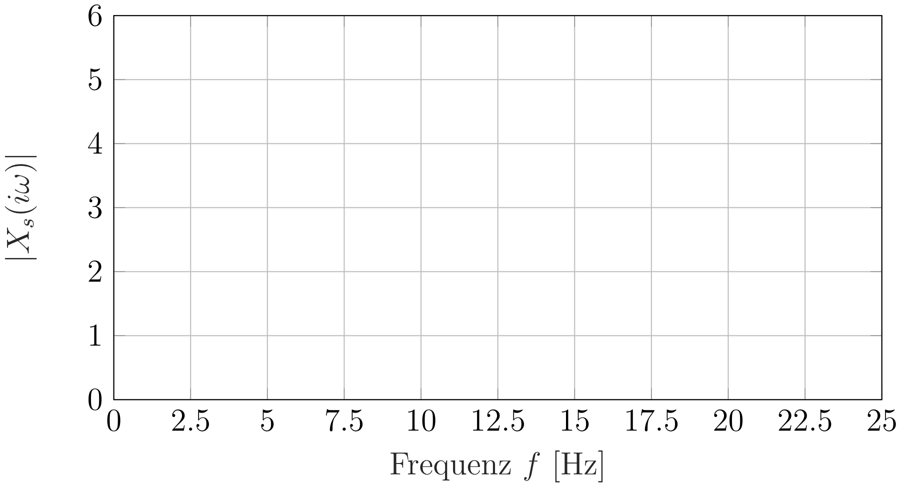
$$f_l = f_1 + lf_0 \quad \text{mit } l = \ldots -2, -1, 0, 1, 2\ldots$$

Aus diesem Grund kann das gezeigte Frequenzspektrum auch zu folgenden Frequenzen gehören:

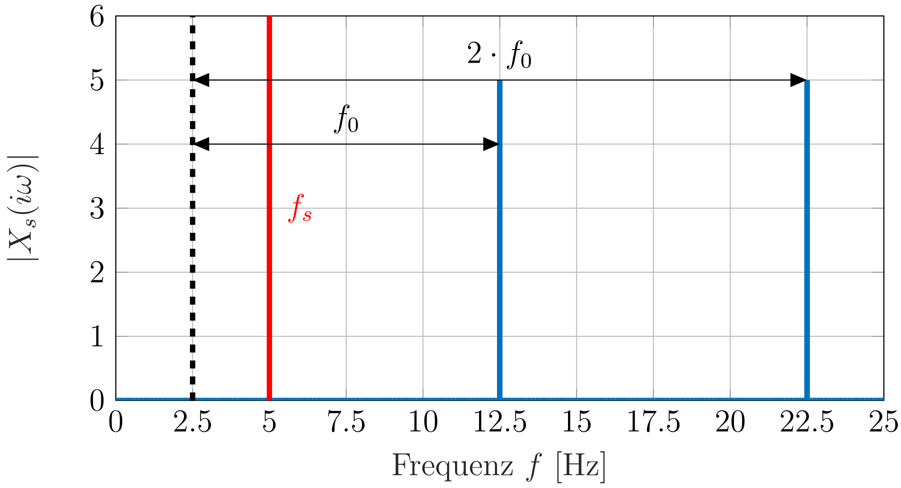
$$f_2 = f_1 + lf_0 = 2.5\text{Hz} + l \cdot 10\text{Hz} \quad \text{mit } l = \ldots -2, -1, 0, 1, 2\ldots$$

2

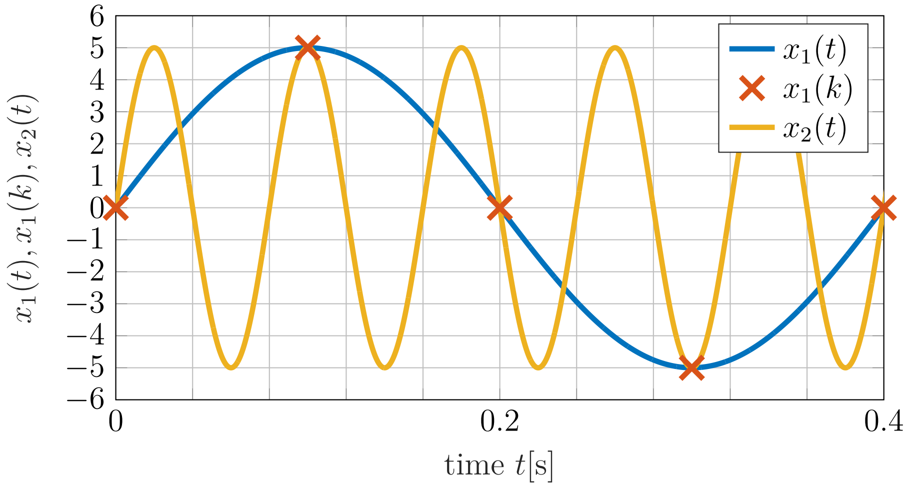
c) Zeichnen Sie die Shannon-Frequenz sowie 2 weitere mögliche Frequenzen, die zu dem Frequenzspektrum aus Aufgabenteil a) führen können, in des gegebene Diagramm. Zeichnen Sie zusätzlich in das Zeit-Diagramm aus Aufgabenteil a) eine weiteres zeitkontinuierliches Signal, dass zu dem angegebenen Frequenzspektrum führen könnte.



Antwort: Die Shannon-frequenz liegt bei der halben Messfrequenz $f_s = 0.5 f_m =$ 5Hz. Zwei mögliche Frequenzen können aus der Lösung von Aufgabenteil b) abgeleitet werden.



Die Frequenz von $f_2 = 12.5$Hz ist $\frac{12.5}{2.5} = 5$ mal so hoch wie die ursprüngliche Frequenz:

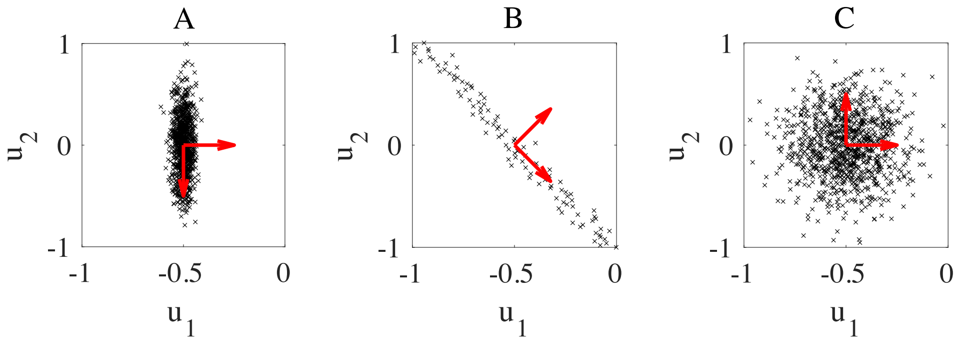


6

$\sum 14$

Aufgabe 4: Hauptkomponentenanalyse (11 Punkte)

a) Im Folgenden sind drei verschiedene Datensätze abgebildet. Für diese wurde jeweils die Hauptkomponentenanalye (PCA) durchgeführt. Ordnen Sie die jedem Datensatz ein der angegebenen Singulärwertkombinationen zu. Begründen Sie zudem Ihre Auswahl kurz. Zeichnen Sie zudem die mittels PCA berechneten Hauptachsen in die Diagramme ein.



ID	Singulärwerte
1	$s_1 = 10;\ s_2 = 9.5$
2	$s_1 = 8;\ s_2 = 0$
3	$s_1 = 9;\ s_2 = 0.7$
4	$s_1 = 10;\ s_2 = -1$
5	$s_1 = 9;\ s_2 = 2$
6	$s_1 = -1;\ s_2 = -3$

Antwort:

Datensatz	Singulärwert-ID
A	5
B	3
C	1

- Keine negativen Eigenwerte
- A: Sehr niedrige Varianz in u_1.
- B: Größere Varianz entlang der ersten Hauptachse im Vergleich zu A, daher Verhältnis der Eigenwerte größer als bei A.
- C: Ähnliche Varianz in beiden Merkmalen 9

b) Nennen Sie mögliche Gründe, warum eine Hauptkomponentenanalyse durchgeführt wird.

Antwort:

- Dimensionsreduktion
- Vereinfachte Beschreibung der Daten 2

$\sum 11$

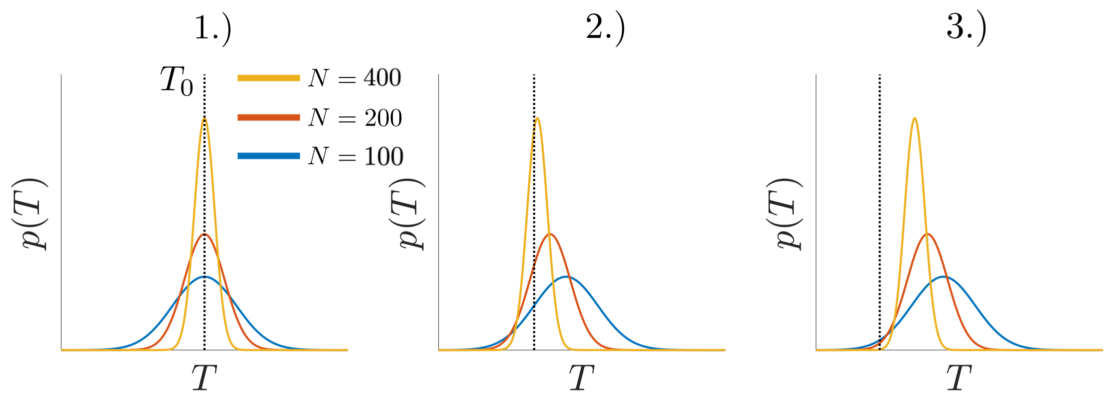
Aufgabe 5: Statistik (12 Punkte)

a) Es soll mit drei verschiedenen Thermometern die wahre Temperatur T_0 aus N verrauschten Messdatenpunkten geschätzt werden. Gehen Sie davon aus, dass die gemessenen Werte normalverteilt sind. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten der geschätzten Temperatur für drei verschiedene N ($N_1 = 100$, $N_2 = 200$, $N_3 = 400$) für die drei folgenden Fälle:

- 1.) Erwartungstreues und konsistentes Thermometer.
- 2.) Asymptotisch erwartungstreues und konsistentes Thermometer,
- 3.) Nicht erwartungstreues und nicht konsistentes Thermometer.

Verwenden Sie für jeden Fall ein eigenes Diagramm. Markieren Sie den wahren Wert der Temperatur T_0, beschriften Sie die Achsen und kennzeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten mit der jeweiligen Messdatenpunktanzahl.

Antwort:



12

$\sum 12$