Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

26. August 2015

Name:	
Matr.-Nr.:	
Note	

Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Gesamt
Soll:	11	7	6	7	10	14	5	60
Ist:								

Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Korrelation und Portfolio Optimierung

In Bild 1 sind die zeitliche Verläufe von zwei Aktien im Laufe eines Jahres zu sehen.

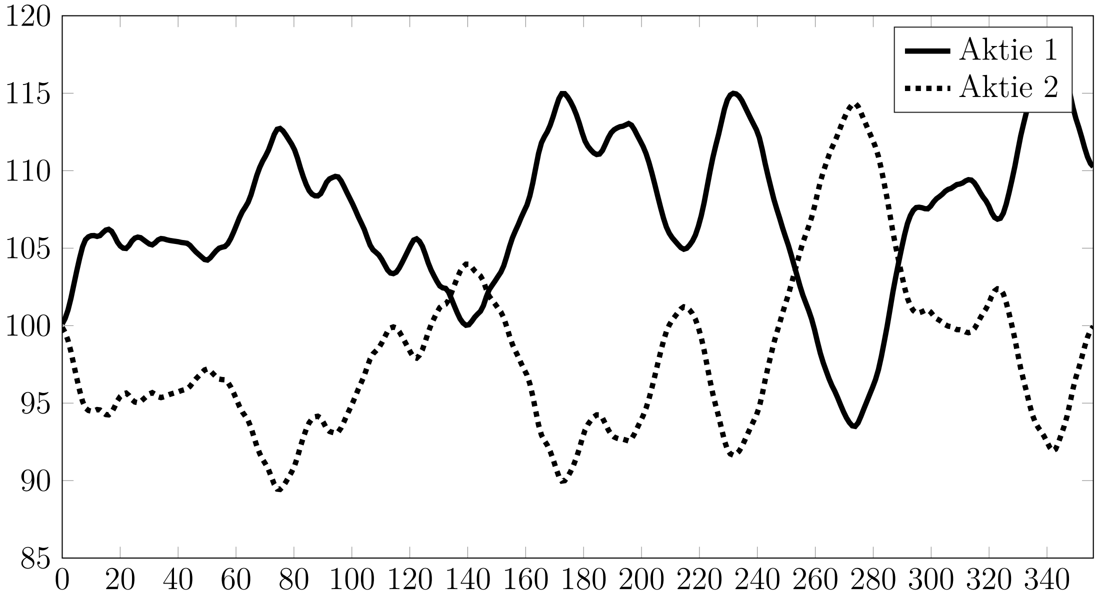


Bild 1: Aktienkurs von zwei Aktien innerhalb eines Jahres

a) Welchen prozentualen Gewinn erzielen Aktie 1 und Aktie 2 innerhalb eines Jahres?

b) Welchen Korrelationskoeffizienten haben die Zeitverläufe der beiden Aktien in etwa?

Kreuzen Sie an:

Korrelationskoeffizient	-1	-0,5	0	0,5	1

c) Was ist in etwa die optimale Kombination von Aktie 1 und 2, um das Risiko bzw. die Volatilität so gering wie möglich zu halten? Zeichnen Sie in Bild 2 die folgenden drei Punkte ein:

- nur Aktie 1
- nur Aktie 2
- risikominimale Kombination aus Aktie 1 und 2

d) Wie sieht für alle Kombinationen aus Aktie 1 und 2 der Verlauf Rendite über Risiko/Volatilität aus?

e) Wo liegen auf dieser Kurve alle effizienten Portfolios (markieren Sie den Bereich deutlich)?

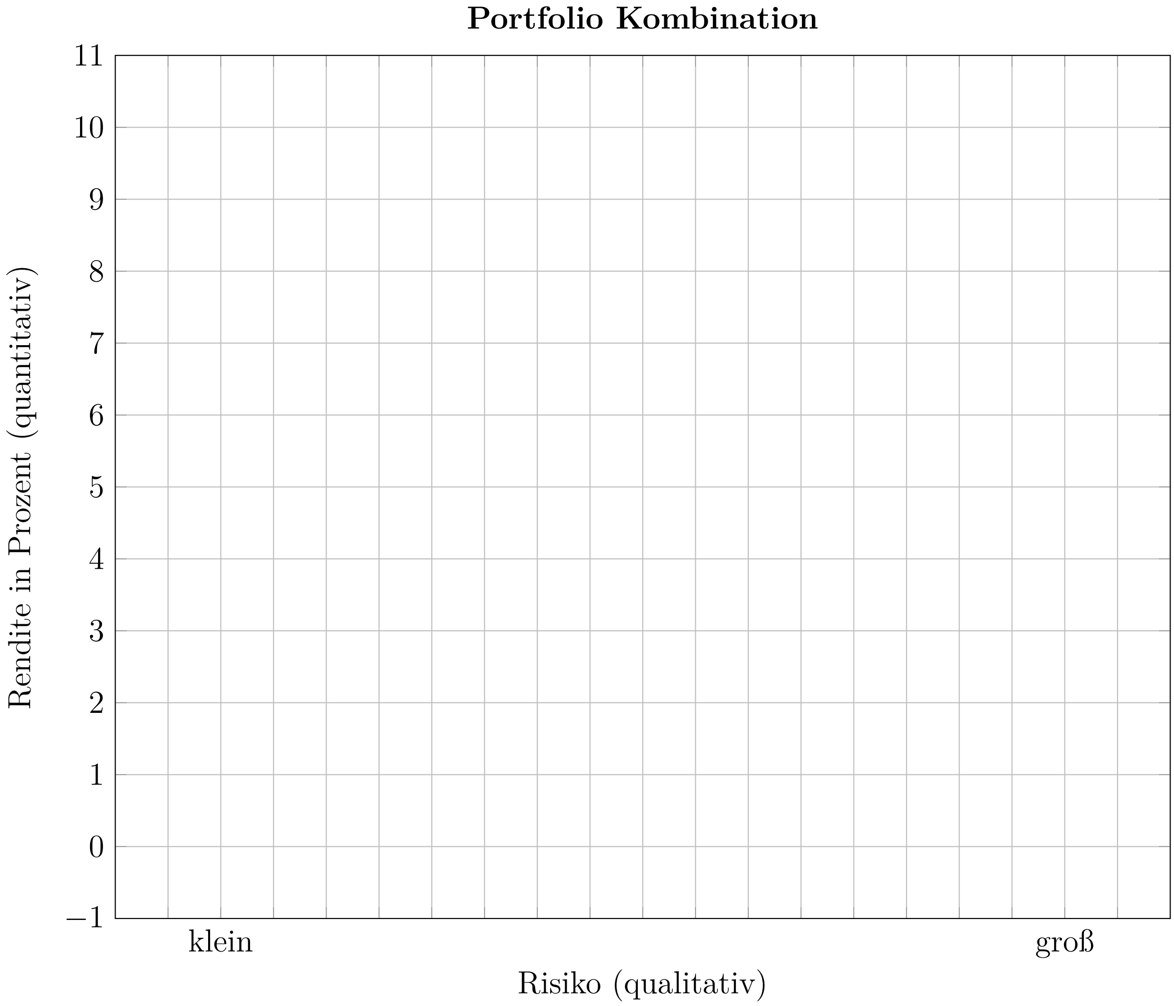


Bild 2: Rendite über Risiko

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitsdichte

In Bild 3 sind drei verschiedene diskrete Signale zu sehen.

a) Welche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion liegt den Signalen vermutlich zu Grunde?

b) Ordnen Sie die Signale aus Bild 3 den Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen in Bild 4 zu (Jedes Signal besitzt eine Wahrscheinlichkeitsdichte Funktion). Begründen Sie Ihre Wahl in einem Satz:

Signal	A	B	C	D
PDF				

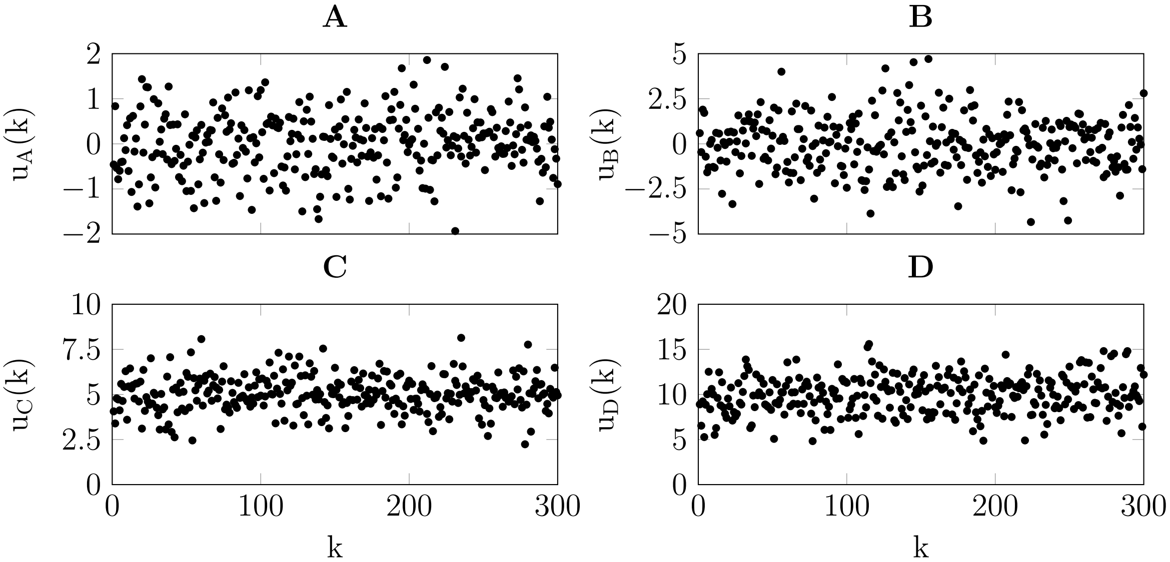


Bild 3: Signalverläufe

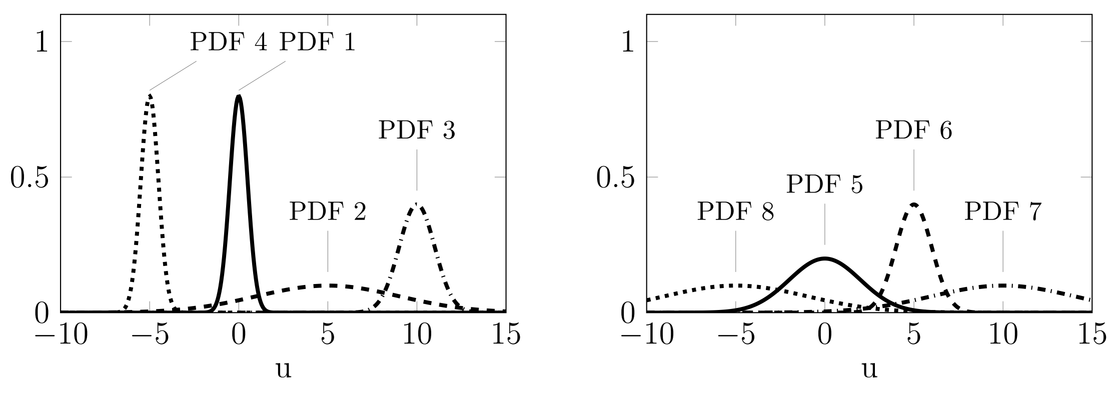


Bild 4: Wahrscheinlichkeitsdichte Funktionen

Aufgabe 3: PCA

Aus verschiedenen Eingangsdaten u_1 und u_2 ergeben sich die multivariaten Verteilungen A, B und C. Ordnen Sie diese Cluster den korrekten Singulärwertkombinationen aus einer Hauptkomponentenanalyse SV 1 bis SV 9 zu und tragen Sie dieses Ergebnis in unten stehende Tabelle ein. Begründen Sie Ihre Wahl mit einem Satz.

Cluster	A	B	C
Singulärwert			

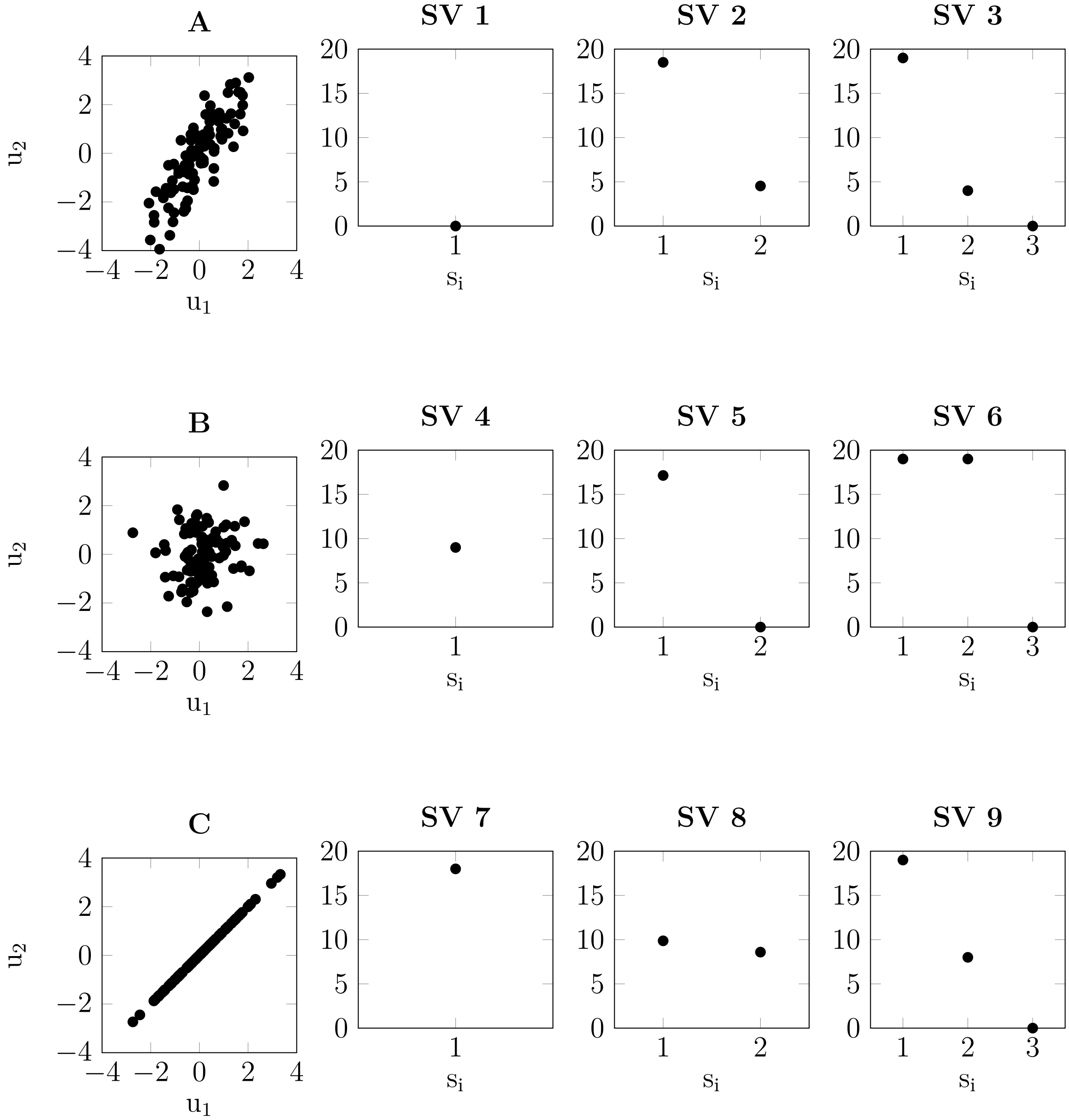


Bild 5: Cluster

Aufgabe 4: Downsampling

Gegeben ist ein zeitdiskretes Signal $u(k)$ mit Abtastzeit T_0 in Bild 6. Das Signal soll nun durch einfaches Downsampling komprimiert werden.

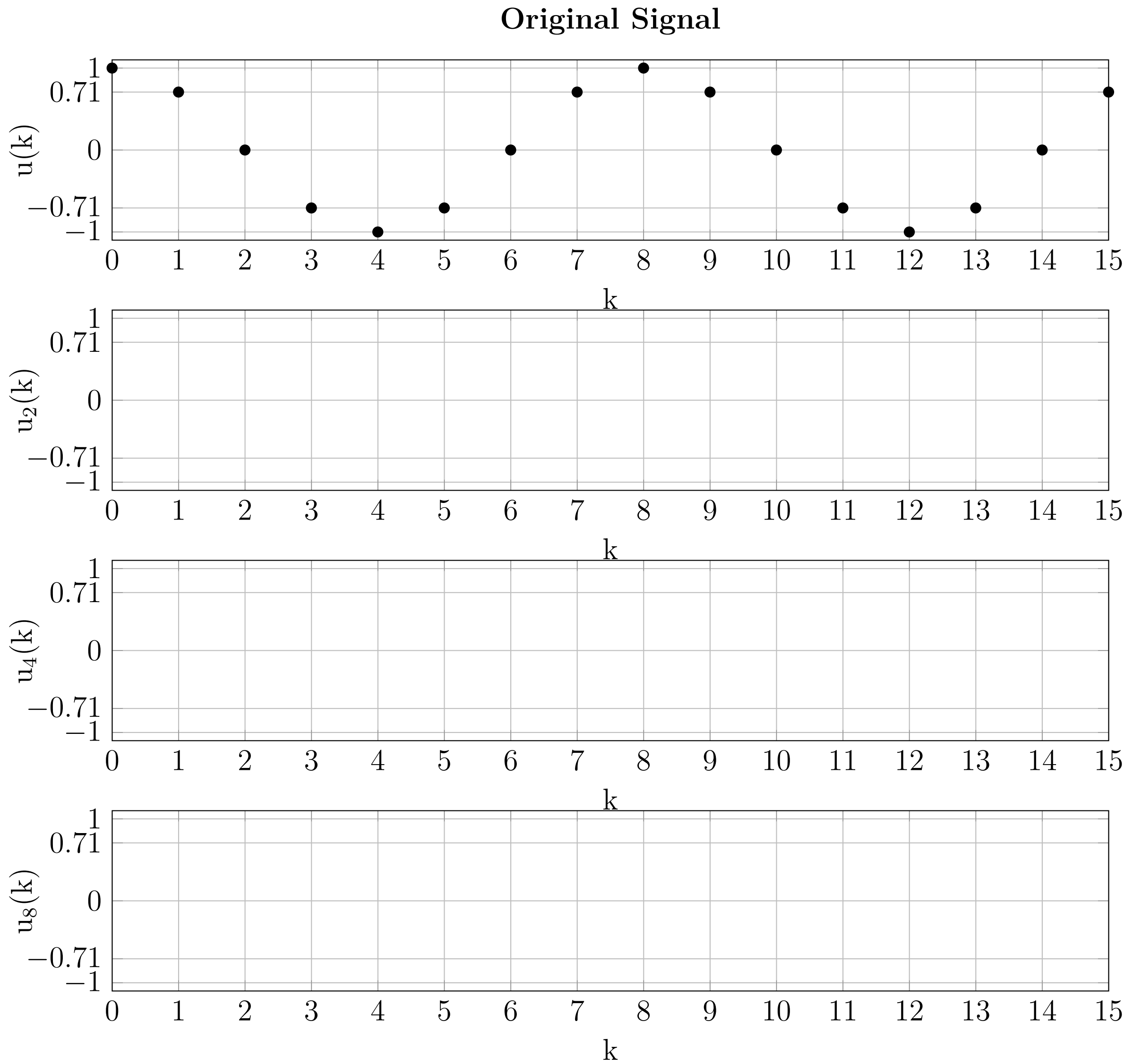


Bild 6: Zeitdiskretes Signal

a) Komprimieren Sie $u(k)$ um die Faktoren 2, 4 und 8. Wie verändert sich die Abtastzeit? Tragen Sie die Ergebnisse ($u_2(k)$,$u_4(k)$ und $u_8(k)$) oben ein. Tipp: Der erste Wert wird jeweils behalten. Beachten Sie, die Bedeutung von k für verschiedene T_0.

b) Bei welcher der oben genannten Komprimierungen ergeben sich Probleme? Wie nennt man dieses Phänomen?

c) Welche Möglichkeit gibt es, das Problem aus Aufgabenteil b) zu umgehen?

d) Welcher Signalverlauf ergibt sich, wenn man die Lösung aus Aufgabenteil c) auf das Signal anwendet?

Aufgabe 5: Dynamisches System

Gegeben ist das folgende zeitdiskrete System:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z - 0.5} \tag{1}$$

a) Wie lautet ein diskreter Impuls?

b) Wie lautet das Signal für die Impulsantwort des obigen Systems im z-Bereich?

c) Bestimmen Sie den Endwert der Impulsantwort für $G(z)$ mit Hilfe des Endwertsatzes.

d) Transformieren Sie dieses Signal aus Aufgabenteil b) ins Zeitdiskrete und bestimmen Sie $y(k)$ für die Zeitschritte $k = \{0, 1, \ldots, 5\}$ (Anfangsbedingung $y(k) = 0$ für $k < 0$).

e) Wie lautete die Übertragungsfunktion eines allgemeinen FIR Filters 4. Ordnung?

f) Wie müssen die Koeffizienten des FIR Systems gewählt werden, wenn hiermit das System aus Gleichung (1) approximiert werden soll?

Aufgabe 6: Filter

In Bild 7 sind zwei unterschiedliche Filter dargestellt.

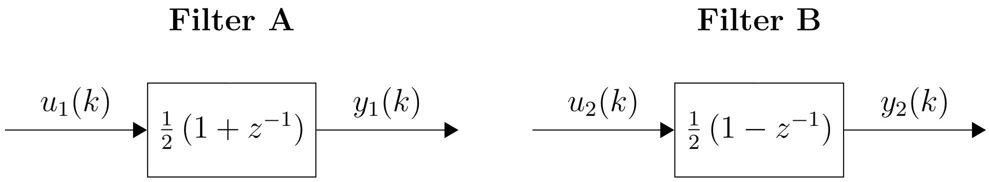
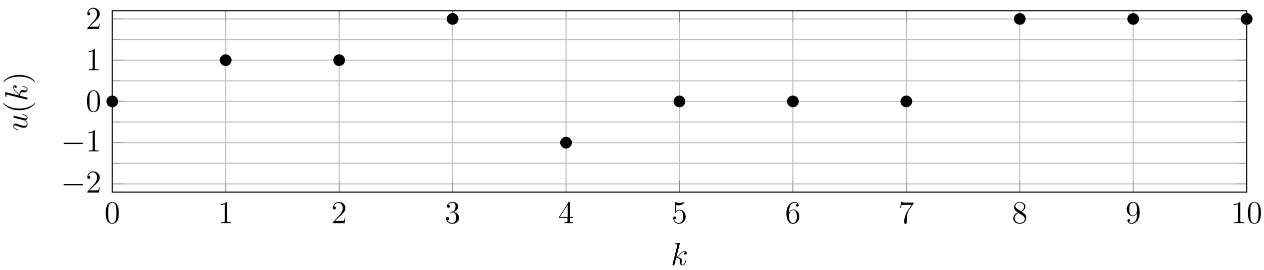


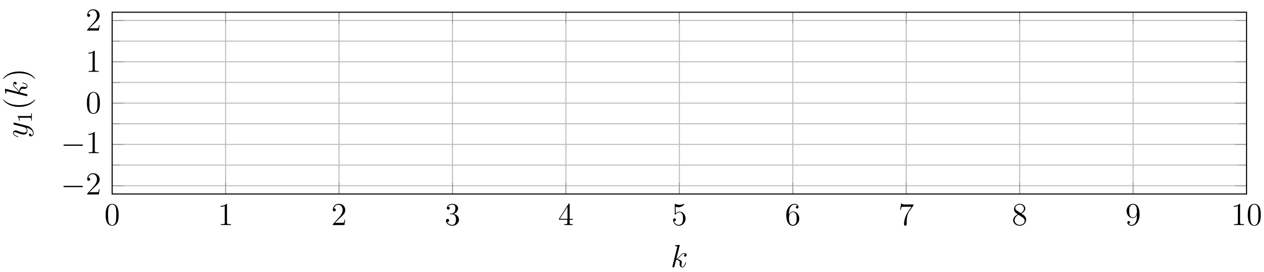
Bild 7: Filterübertragungsfunktionen

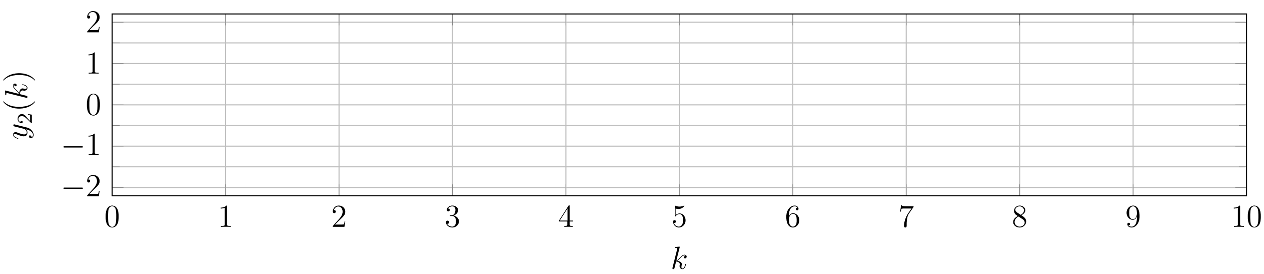
a) Berechnen Sie für jeden Filter den Amplitudengang. Setzen Sie dabei für die Abtastzeit allgemein T_0 an.

b) Handelt es sich bei den einzelnen Filtern um einen Hoch-, Tief-, Bandpass- oder Bandsperrfilter? Tipp: Setzen Sie $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{T_0}$ in die Lösung aus Aufgabenteil a) ein.

c) Die Filter werden mit dem dargestellten gleichen Eingangssignal ($u(k) = u_1(k) = u_2(k)$) beaufschlagt. Zeichnen Sie die Systemantworten $y_1(k)$ und $y_2(k)$ jeweils in das entsprechende untere Diagram ein (Angabe von Nebenrechnungen ist nicht erforderlich). Es gilt $u(k) = 0$ für $k < 0$.







d) Die beiden Filter werden nun wie in der unteren Abbildung 8 dargestellt parallel geschaltet. Das System wird mit dem gleichen Eingangssignal wie in Aufgabenteil c) beaufschlagt. Zeichnen Sie die Systemantwort in das Diagramm. Begründen Sie das Beobachtete kurz anhand des Übertragungsverhaltens.

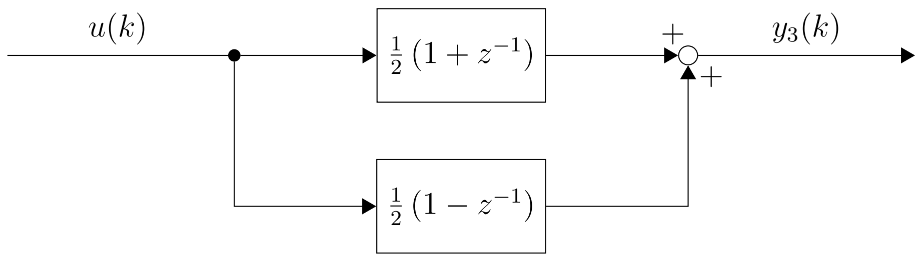
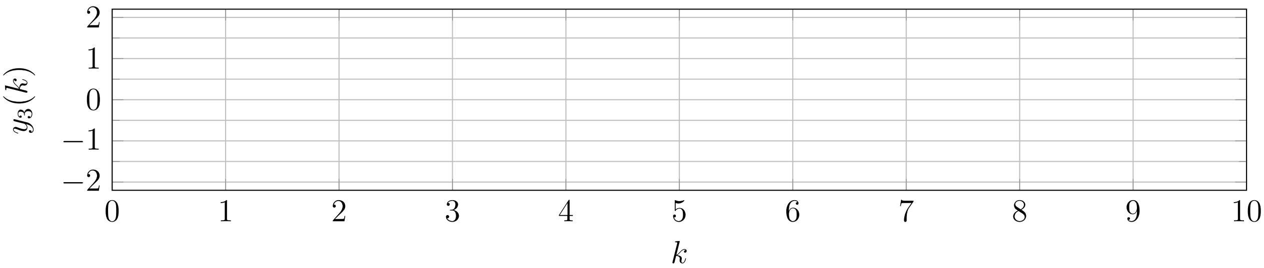


Bild 8: Parallelschaltung der Filter



Aufgabe 7: Blockschaltbild

Zeichnen Sie ein Blockschaltbild zu der Differenzengleichung

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_1 u(k-1) + b_3 u(k-3).$$

Lösungen:

Aufgabe 1: Korrelation und Portfolio Optimierung

a) Aktie 1 erzielt einen Gewinn von 10%, Aktie 2 hingegen erwirtschaftet keinen Gewinn. $\boxed{1}$

b) Aktie 1 verläuft (abgesehen vom linearen Anstieg) gegenphasig zu Aktie 2. Daher ist die Korrelation zwischen beiden Verläufen nahezu -1. $\boxed{1}$

c) Jede Aktie für sich hat einen hohes Risiko aufgrund der hohen Varianz der Signalverläufe. Der Gewinn wurde bereits bestimmt und so können die Aktien im Bereich großen Risikos und mit einere Rendite von 0% bzw. 10% eingetragen werden. Eine Kombination aus beiden Aktien gleicht das gegenläufige Verhalten der beiden Aktien aus, sodass nur der positive Trend im Signal verbleibt. Eine Mischung von je 50% ist hier risikominimal. Die Rendite dieser zusammenstellung liegt im Mittelwert zwischen den einzelnen Aktien also bei 5%. Diese drei Punkte sind in Bild 9 eingetragen. $\boxed{3}$

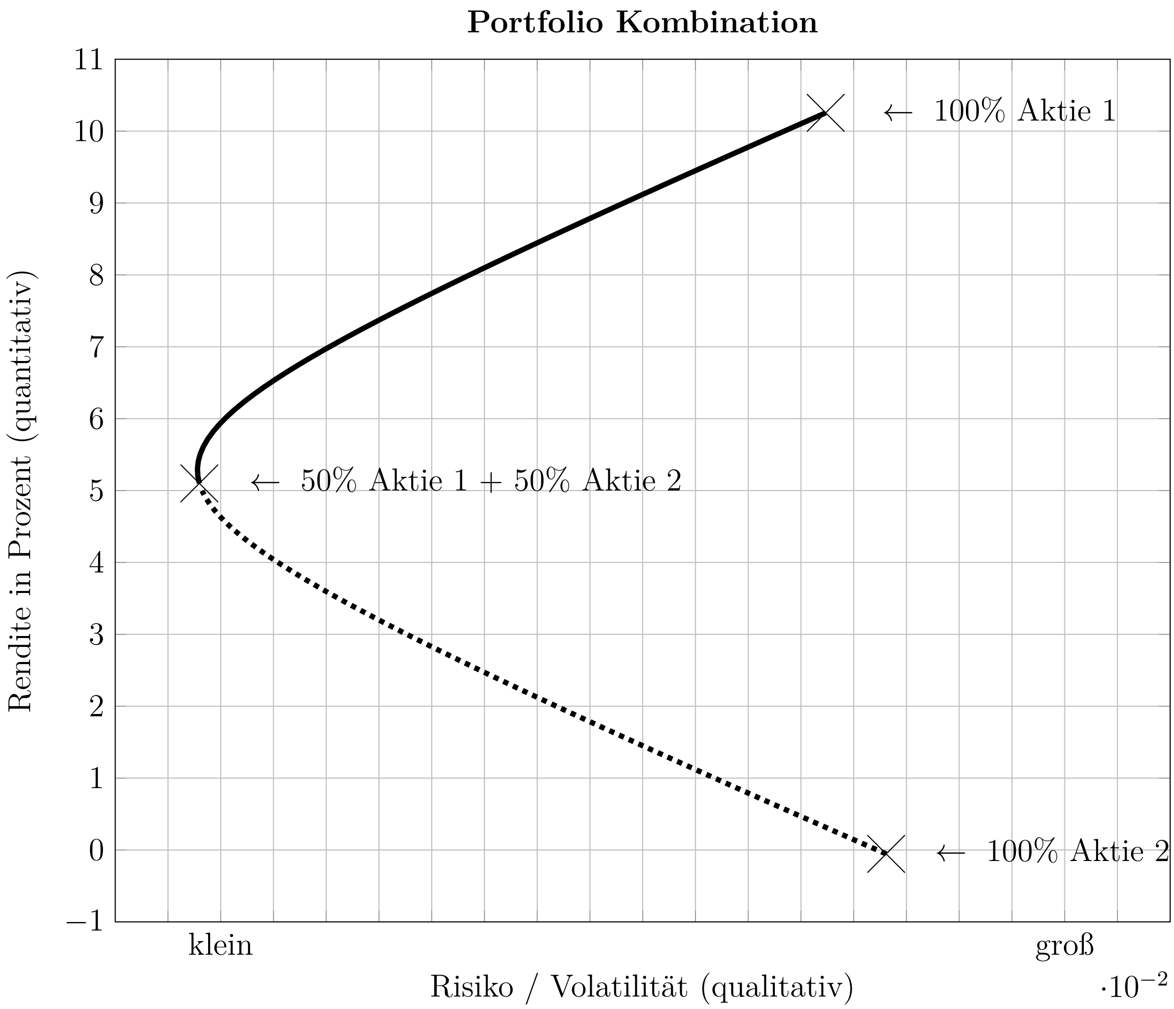


Bild 9: Rendite über Risiko

In Bild 10 sind verschiedene Portfolios aufgetragen. Es wird klar ersichtlich, dass eine Mischung von je 50% zu einer sehr sicheren Anlagestrategie führen.

d) Der Verlauf für alle Mischungsverhältnisse der beiden Aktien ist ebenfalls in Bild 9 dargestellt. Man beachte: Der Verlauf startet bei 100% Aktie 1 und endet bei 100%Aktie 2. Die verschiedenen Linienarten wurde nur gewählt um die Lösung des Folgenden Aufgabenteils besser beschreiben zu können. 3

e) Die Effizienten Portfolios sind alle, welche bei einem gegebenen Risiko die maximale Rendite erbringen. In Bild 9 sind die effizienten Portfolios mit einer durchgezogenen Linie markiert. 3

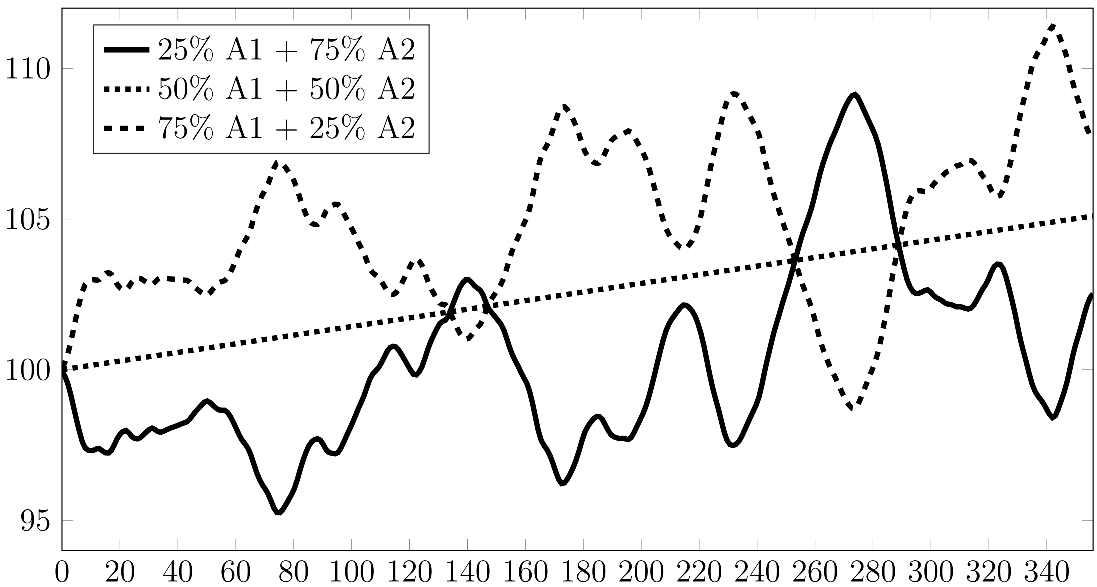


Bild 10: Verläufe von verschiedenen Aktienportfolios

$\sum 11$

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitsdichte

a) Normalverteilung. 1

b) Die Signale lassen sich mit Hilfe des Mittelwertes jedes Signals zu maximal zwei Wahrscheinlichkeitsdichte Funktionen zuordnen. Anhand der Varianz der Signal lässt sich erkenne, wie ‚spitz' die Gaußglocke der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion sein muss.

Beispiel: Signal A hat einen Mittelwert von $\mu = 0$. Hiermit kommen nur noch PDF 1 und 5 in Frage. Das Signal streut in einem Bereich von etwa -1.5 bis 1.5. Bei diesen Werten ergeben sich Wahrscheinlichkeiten für PDF 5 von deutlich größer Null. PDF 1 hingegen fällt bei diesen Werten auf nahezu Null ab. Somit kann nur PDF 1 zu Signal A gehören.

Signal	A	B	C	D
PDF	PDF 1	PDF 5	PDF 6	PDF 7

6

$\sum 7$

Aufgabe 3: PCA

Die abgebildeten Punktverteilungen werden durch zwei Eingangsgrößen beschrieben. Somit haben die Verteilungen auch genau zwei Singulärwerte. SV 1, SV 3, SV 4, SV 6, SV 7 und SV 9 sind somit falsch, da hier entweder ein oder drei Singulärwerte vorhanden sind. Die Singulärwerte sind ein Maß, für die Wichtigkeit der Eingänge.

In Verteilung B sind beide Eingänge annähernd gleich wichtig, da aufgrund eines Wertes in u_1 nicht auf einen Wert u_2 geschlossen werden kann. Dies spiegelt sich auch in den Singulärwerten wider. Somit kommt nur SV 8 in Frage.

Im Gegensatz hierzu steht Punktverteilung C. Die lineare Abhängigkeit von u_1 und u_2 führt dazu, dass mit einem Eingang der andere berechnet werden kann. Somit muss ein Singulärwert gleich Null sein. Dies ist bei SV 5 der Fall.

In Punktverteilung A lässt sich durch Vorgabe von einem u_1 ein gewisser kleiner Bereich für u_2 bestimmen. Dieser Zusammenhang der beiden Eingänge ergibt einen großen Singulärwert und einen wesentlich kleineren, welcher jedoch nicht bei Null liegt $\Rightarrow$ SV 2.

$\boxed{3}$

Cluster	A	B	C
Singulärwert	SV 2	SV 8	SV 5

$\boxed{3}$

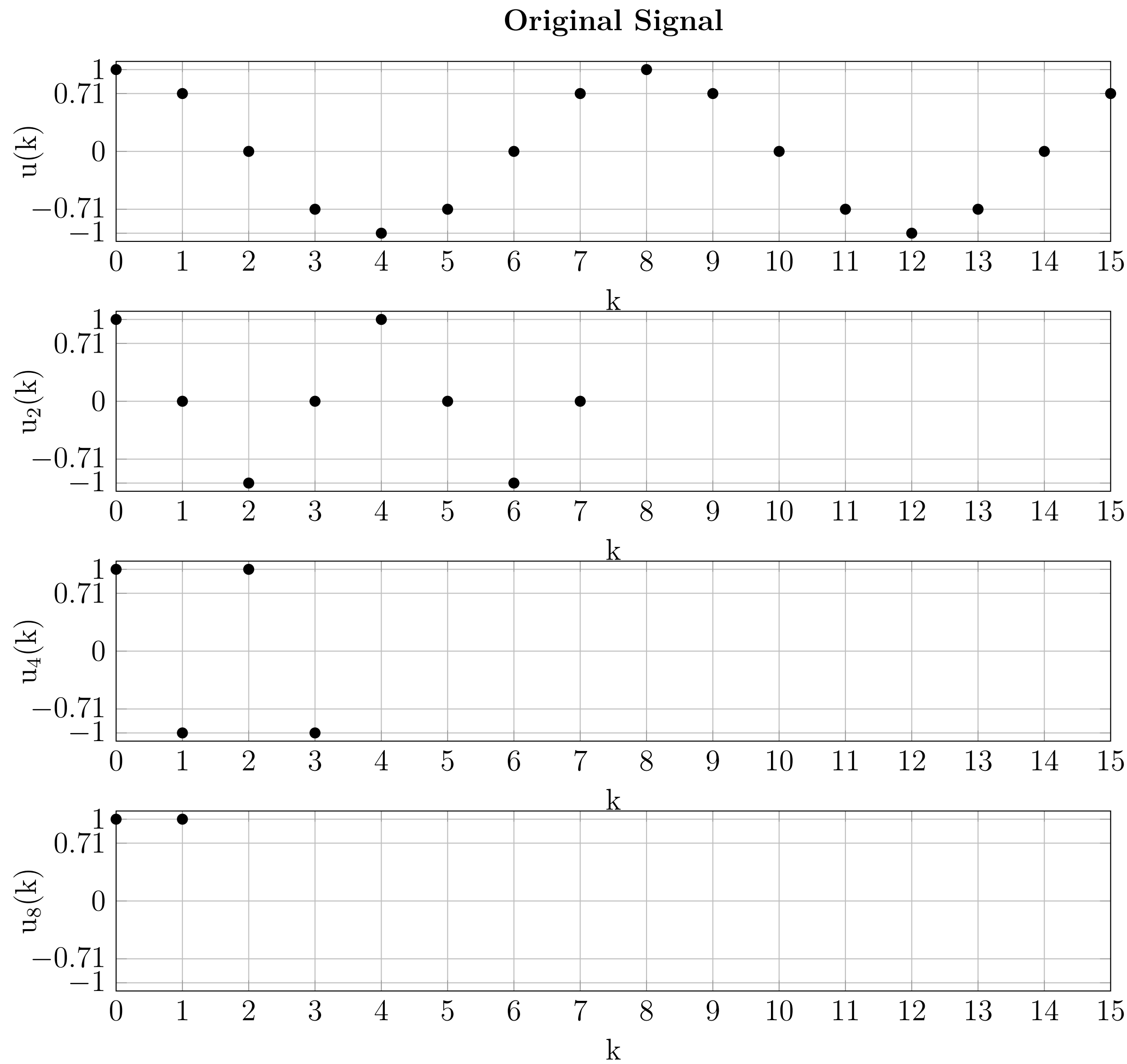
$\boxed{\sum 6}$

Aufgabe 4: Downsampling

a) Die Abtastzeiten ergeben sich zu:

$$T_{0,2} = 2 \cdot T_0 \quad ; \quad T_{0,4} = 4 \cdot T_0 \quad ; \quad T_{0,8} = 8 \cdot T_0 \tag{2}$$

Unten sind die korrekten Lösungen der komprimierten Signal zu sehen. $\boxed{1}$



$\boxed{3}$

b) Bei einer Datenreduktion um Faktor 8 wird die Frequenz des Signals nicht mehr korrekt wiedergegeben. Die Abtastfrequenz ist gleich der Signalfrequenz. Das Abtasttheorem wird verletzt, es entsteht Aliasing. $\boxed{1}$

c) Durch Aliasing ergibt sich hier ein konstantes Signal mit Mittelwert $\mu = 1$. Das original Signal hat jedoch $\mu = 0$. Um dies zu umgehen, muss das Signal vor dem Downsampling Tiefpass gefiltert werde (Anti Aliasing Filter).

d) Hier würde im idealen Fall $u_8(k) = 0$ herauskommen. $\boxed{2}$

$\boxed{\sum 7}$

Aufgabe 5: Dynamisches System

a) Ein zeit diskreter Impuls lautet:

$$U(z) = 1 \tag{3}$$

$\boxed{1}$

b) Die Impulsantwort in z entspricht der Multiplikation des Systems mit dem Impuls:

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) \tag{4}$$
$$Y(z) = \frac{1}{z-0.5} \cdot 1 \tag{5}$$
$$Y(z) = \frac{1}{z-0.5} \tag{6}$$

$\boxed{1}$

c) Der Endwert berechnet sich allgemein wie folgt:

$$y(k \to \infty) = \lim_{z \to 1} \left((z-1) \cdot G(z) \cdot U(z)\right) \tag{7}$$
$$y(k \to \infty) = \lim_{z \to 1} \left((z-1) \cdot Y(z)\right) \tag{8}$$

Für das hier gegebene System ergibt sich:

$$y(k \to \infty) = \lim_{z \to 1} \left((z-1) \cdot \frac{1}{z-0.5}\right) \tag{9}$$
$$y(k \to \infty) = 0 \cdot \frac{1}{z-0.5} \tag{10}$$
$$\Rightarrow y(k \to \infty) = 0 \tag{11}$$

$\boxed{2}$

d) Die Transformation lautet wie folgt:

$$Y(z) = \frac{1}{z-0.5} \tag{12}$$
$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{1-0.5 \cdot z^{-1}} \tag{13}$$
$$\Leftrightarrow \quad Y(z) - 0.5 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) = z^{-1} \tag{14}$$
$$\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \tag{15}$$
$$y(k) = 0.5y(k-1) + \delta_k(k-1) \tag{16}$$
$$y(k) = 0.5y(k-1) + \delta_k(k-1) \tag{17}$$

Die ersten 5 Zeitschritte des Signals lauten:

$\boxed{2}$

$$
\begin{aligned}
y(k=0) &= 0.5y(k=-1) + \delta_k(k=-1) && (18)\\
&= 0.5 \cdot 0 + 0 = 0 && (19)\\
y(k=1) &= 0.5y(k=0) + \delta_k(k=0) && (20)\\
&= 0.5 \cdot 0 + 1 = 1 && (21)\\
y(k=2) &= 0.5y(k=1) + \delta_k(k=1) && (22)\\
&= 0.5 \cdot 1 + 0 = 0.5 && (23)\\
y(k=3) &= 0.5y(k=2) + \delta_k(k=2) && (24)\\
&= 0.5 \cdot 0.5 + 0 = 0.25 && (25)\\
y(k=4) &= 0.5y(k=3) + \delta_k(k=3) && (26)\\
&= 0.5 \cdot 0.25 + 0 = 0.125 && (27)\\
y(k=5) &= 0.5y(k=4) + \delta_k(k=4) && (28)\\
&= 0.5 \cdot 0.125 + 0 = 0.0625 && (29)
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$

e) Die Übertragungsfunktion lautet allgemein:

$$G(z) = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + b_3 \cdot z^{-3} + b_4 \cdot z^{-4} \tag{30}$$

$\boxed{1}$

f) Als Koeffizienten des FIR Filters werden die Antwort des IIR Systems auf einen Impuls genutzt:

$$
\begin{aligned}
&b_i = y(k=i) && (31)\\
&b_0 = y(k=0) \quad ; \quad b_1 = y(k=1) \quad ; \quad b_2 = y(k=2) && (32)\\
&b_3 = y(k=3) \quad ; \quad b_4 = y(k=4) && (33)
\end{aligned}
$$

$\boxed{1}$

$\boxed{\sum 10}$

Aufgabe 6: Filter

a) Berechneter Amplitudengang für **Filter A:**

$$
\begin{aligned}
G_1(z) &= \frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right) && (34)\\
G_1(i\omega) &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{-i\omega T_0}\right) && (35)\\
G_1(i\omega) &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\omega T_0) - i\sin\left(\omega T_0\right)\right) && (36)\\
\|G_1(i\omega)\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\omega T_0\right)\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\omega T_0\right)} && (37)\\
&= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\omega T_0\right)} && (38)
\end{aligned}
$$

für **Filter B:** 3

$$
\begin{aligned}
G_2(z) &= \frac{1}{2}\left(1 - z^{-1}\right) && (39)\\
G_2(i\omega) &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-i\omega T_0}\right) && (40)\\
G_2(i\omega) &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(\omega T_0) - i\sin\left(\omega T_0\right)\right) && (41)\\
\|G_2(i\omega)\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\omega T_0\right)\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\omega T_0\right)} && (42)\\
&= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\omega T_0\right)} && (43)
\end{aligned}
$$

3

b) Die Filter sind von folgenden Typen:
Filter A: Tiefpass, da

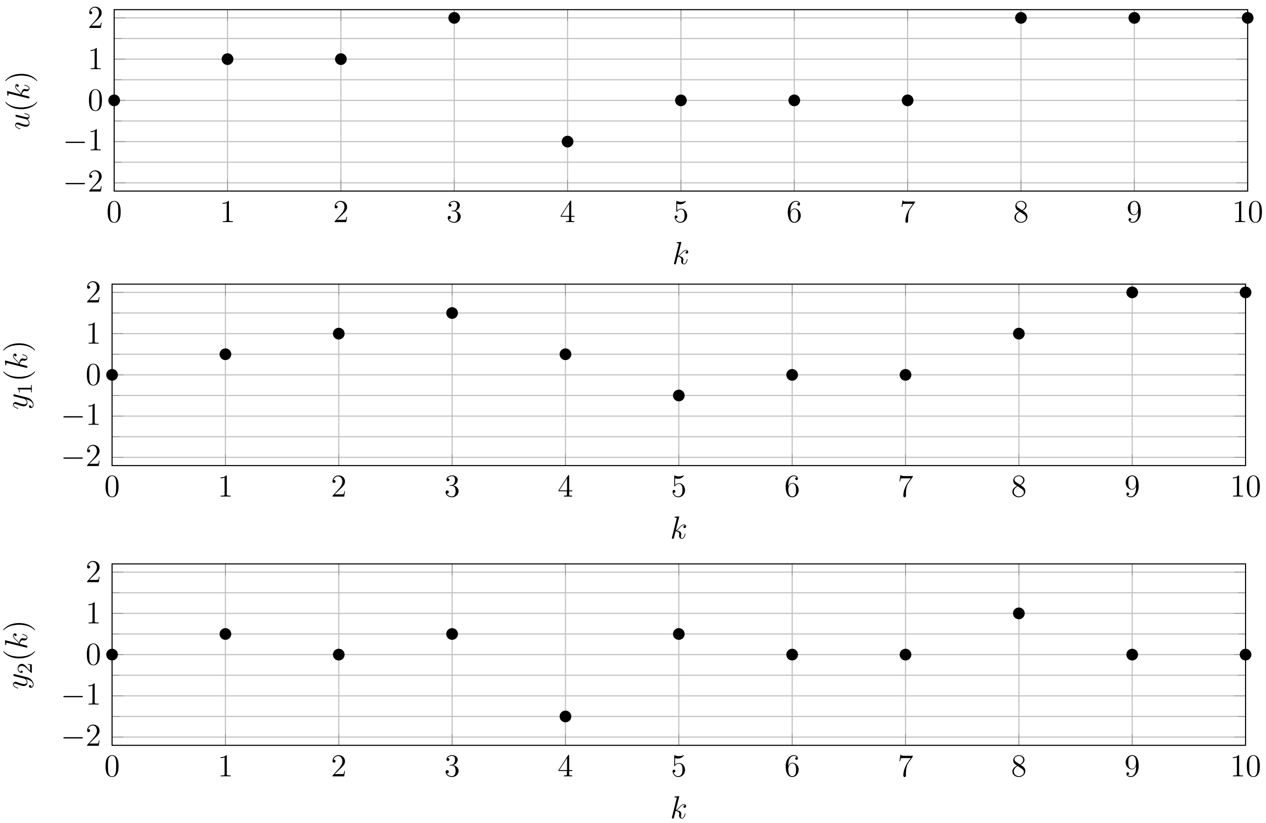
$$\|G_1(0)\| = 1 \qquad \left\|G_1\left(i\frac{\pi}{T_0}\right)\right\| = 0 \tag{44}$$

Filter B: Hochpass, da

$$\|G_2(0)\| = 0 \qquad \left\|G_2\left(i\frac{\pi}{T_0}\right)\right\| = 1 \tag{45}$$

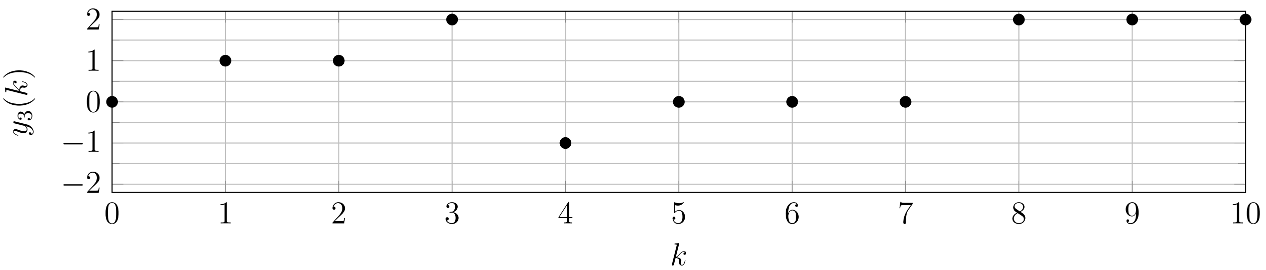
2

c) Der richtige Signalverlauf ist in der Abbildung dargestellt.



$\boxed{4}$

d) Die Summe der Übertragungsfunktionen ergibt 1, daher entspricht der Systemausgang der Parallelschaltung exakt dem Systemeingang.



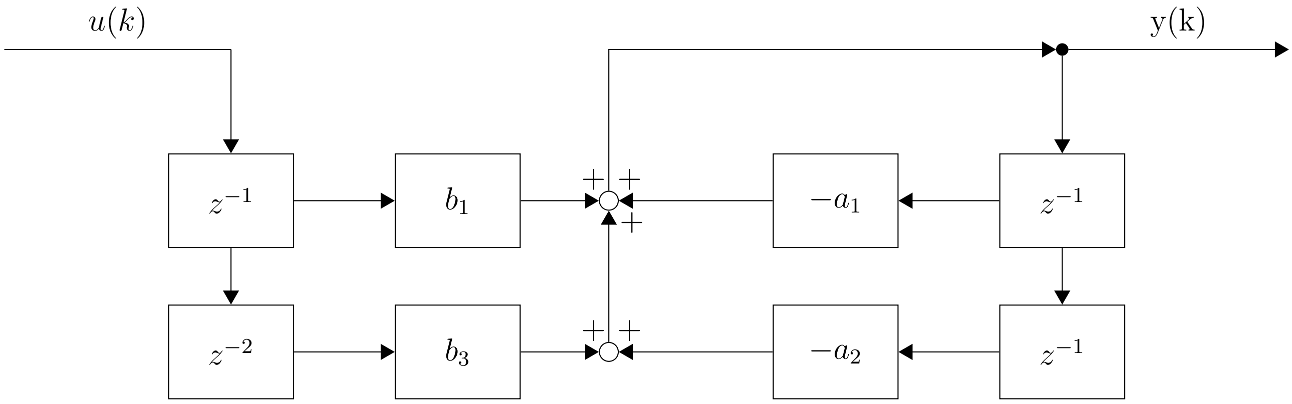
$\boxed{2}$

$\boxed{\sum 14}$

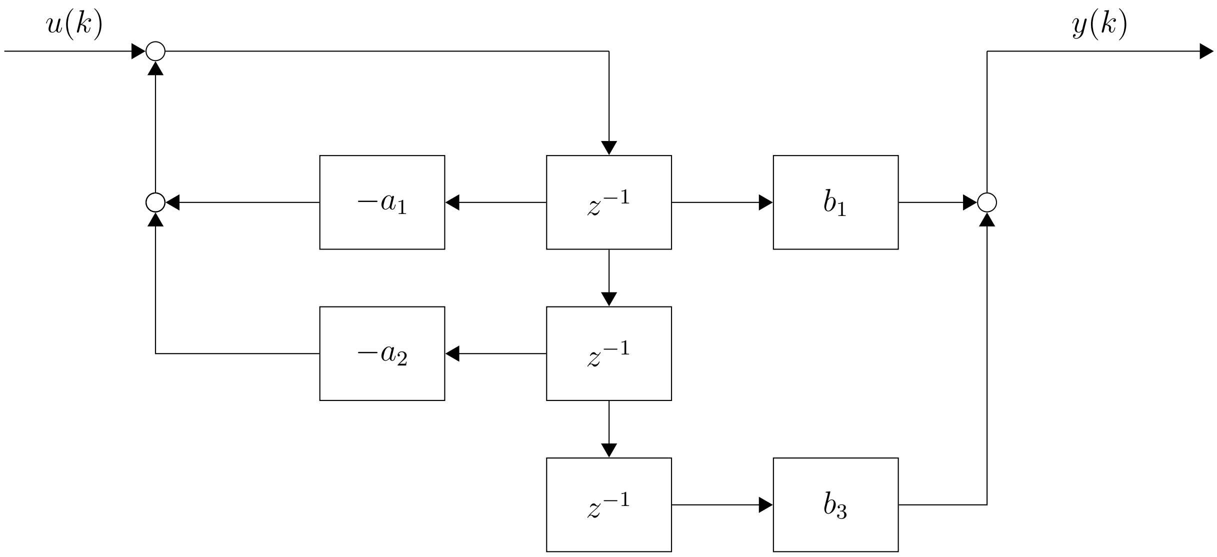
Aufgabe 7: Blockschaltbild

Zeichnen Sie ein Blockschaltbild zu der Übertragungsfunktion

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) \quad = \quad b_1 u(k-1) + b_3 u(k-3).$$



Alternative Lösung



$\boxed{\sum 5}$