

Exkurs in die Grundlagen der Kontaktmechanik

Dr.-Ing. Denis Anders

SMS Siemag

Strukturanalysen und numerische Berechnungen

**Lehrauftrag im Kurs Festigkeitslehre,
18./21.01.2013**



Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

- ▶ **Einleitung – Annahmen und Voraussetzungen**

- ▶ **Hertzscher Kontakt für ebene Probleme**
 - ▶ **Punktförmige Belastung einer elastischen Halbebene (Flamant-Lösung)**
 - ▶ **Elastische Halbebene unter beliebigen Zug- bzw. Drucklasten**
 - ▶ **Verformungszustand der Halbebene**
 - ▶ **Hertzscher Kontakt zweier Scheiben**

- ▶ **Hertzscher Kontakt für dreidimensionale Probleme**
 - ▶ **Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)**
 - ▶ **Krümmungsverhältnisse in der Kontaktzone**
 - ▶ **Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Körper**
 - ▶ **Analytische Lösung vs. FEM**

Annahmen und Voraussetzungen (Hertzscher Kontakt)

Werden zwei elastische Körper mit gewölbter Oberfläche in Richtung ihrer Berührungsnormalen gegeneinander gedrückt, so verformen sich vorwiegend die Berührstellen der beiden Körper.

Voraussetzungen für den Hertzschen Kontakt:

- linear-elastische, homogene und isotrope Werkstoffe
- Reibungsfreiheit, keine Schubspannungen in der Kontaktfläche
- kontinuierliche Berührflächen ohne Oberflächenfehler
- Kontaktfläche eben und klein gegenüber den Abmessungen der Körper

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

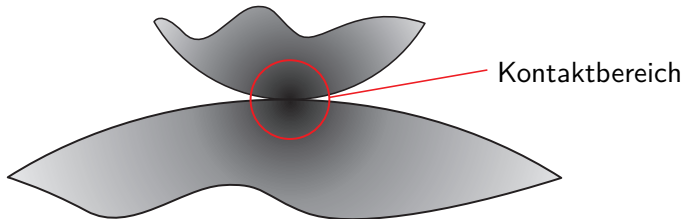
3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

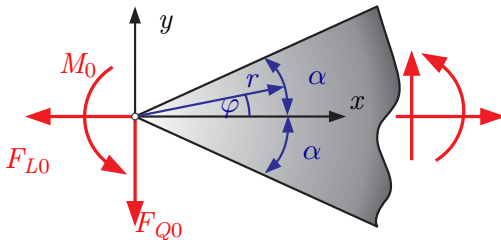
Analytische Lösung vs.
FEM



⇒ Überführung des Kontaktproblems in den Belastungs-/Verformungszustand einer elastischen Halbebene (für ebene Probleme) bzw. des elastischen Halbraumes (für dreidimensionale Probleme)

Die keilförmige Scheibe unter Last

Die untersuchte keilförmige Scheibe wird durch die Normalkraft F_{L0} , die Querkraft F_{Q0} sowie das Moment M_0 belastet.



Ansatz für die Airysche Spannungsfunktion Ψ :

$$\Psi = C_1 r \varphi \sin \varphi + C_2 r \varphi \cos \varphi + C_3 \varphi + C_4 \sin 2\varphi \quad (1)$$

Mit Hilfe der nachfolgenden Beziehungen für polare Koordinaten

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = \frac{2C_1}{r} \cos \varphi - \frac{2C_2}{r} \sin \varphi - \frac{4C_4}{r^2} \sin 2\varphi \quad (2)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = 0 \quad (3)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) = \frac{C_3}{r^2} + \frac{2C_4}{r^2} \cos 2\varphi \quad (4)$$

erhalten wir aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi(\varphi = \pm \alpha) &= 0 \quad (\text{durch den bisherigen Ansatz bereits erfüllt}) \\ \tau_{r\varphi}(\varphi = \pm \alpha) &= 0 \quad \Leftrightarrow \frac{C_3}{r^2} + \frac{2C_4}{r^2} \cos 2\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \underline{C_3 = -2C_4 \cos 2\alpha}. \end{aligned} \quad (5)$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier Scheiben

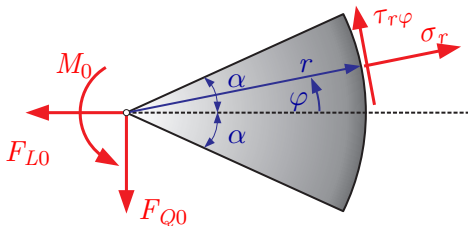
3D Kontakt

Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Körper

Analytische Lösung vs. FEM



Die Gleichgewichtsbedingungen an diesem freigeschnittenen Segment liefern

$$\sum \rightarrow = 0 : F_{L0} + d \int_{-\alpha}^{\alpha} (\tau_{r\varphi} \sin \varphi - \sigma_r \cos \varphi) r d\varphi = 0$$

$$\sum \downarrow = 0 : F_{Q0} - d \int_{-\alpha}^{\alpha} (\tau_{r\varphi} \cos \varphi + \sigma_r \sin \varphi) r d\varphi = 0$$

$$\sum M = 0 : M_0 + d \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{r\varphi} r^2 d\varphi = 0$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$C_1 = \frac{F_{L0}}{d (\sin 2\alpha + 2\alpha)}$$

$$C_2 = \frac{F_{Q0}}{d (\sin 2\alpha - 2\alpha)}$$

$$C_4 = \frac{M_0}{d (4\alpha \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha)}$$

$$\Rightarrow C_3 = -2C_4 \cos 2\alpha = \frac{-M_0 \cos 2\alpha}{d (2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha)}$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier Scheiben

3D Kontakt

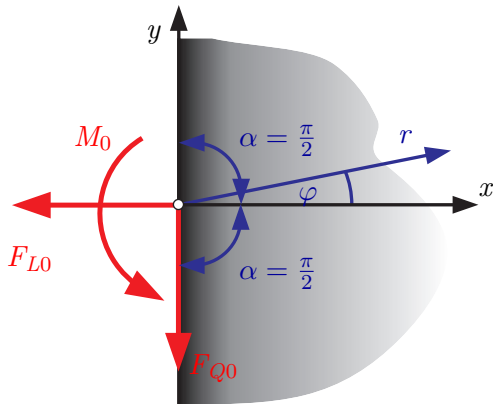
Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Körper

Analytische Lösung vs. FEM

Der Übergang zur Halbebene als ein Sonderfall der keilförmigen Scheibe wird durch $\alpha = \frac{\pi}{2}$ realisiert:



Für die Halbebene lauten die Integrationskonstanten:

$$C_1 = \frac{F_{L0}}{d\pi}, \quad C_2 = -\frac{F_{Q0}}{d\pi}, \quad C_3 = -\frac{M_0}{d\pi}, \quad C_4 = -\frac{M_0}{2d\pi}.$$

Ist die Halbebene nur durch eine senkrechte Punktlast F_{L0} belastet, so erhalten wir für die Airysche Spannungsfunktion

$$\Psi = \frac{F_{L0}}{d\pi} r\varphi \sin \varphi$$

und die zugehörigen Spannungskomponenten

$$\sigma_r = \frac{2F_{L0} \cos \varphi}{rd\pi}, \quad \sigma_\varphi = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0.$$

Für eine auf die Halbebene wirkende Druckkraft erhält man analog

$$\Psi = -\frac{F_{L0}}{d\pi} r\varphi \sin \varphi \Rightarrow \sigma_r = -\frac{2F_{L0} \cos \varphi}{rd\pi}, \quad \sigma_\varphi = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0.$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Elastische Halbebene unter beliebigen Zug- bzw. Drucklasten

Transformation des bisherigen Ergebnisses mit Hilfe der Beziehungen

$$\sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

in kartesische Koordinaten

$$\Psi = -\frac{F_{L0}}{d\pi} y \arctan \frac{y}{x}.$$

Elastische Halbebene unter beliebigen Zug- bzw. Drucklasten

Die zugehörigen Spannungskomponenten in kartesischen Koordinaten errechnen sich aus den Relationen

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$$

und der Ableitungsbeziehung $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ zu

$$\sigma_x = -\frac{2F_{L0}}{d\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2F_{L0}}{d\pi} \frac{y^2 x}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2F_{L0}}{d\pi} \frac{yx^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Über eine Koordinatentransformation $y \rightarrow \eta = y - u$ können wir einen Zustand beschreiben, in welchem eine Druckkraft F_L im Abstand u vom Koordinatenursprung auf der Halbebenenoberfläche angreift. Damit verändert sich die Airysche Spannungsfunktion zu

$$\Psi = -\frac{F_L}{d\pi} \eta \arctan \frac{\eta}{x} = -\frac{F_L}{d\pi} (y - u) \arctan \frac{y - u}{x}.$$

Nun kommt ein **mathematischer Trick!** Die Kraft F_L wird durch ein Produkt aus einer Linienlast $q(u)$ und einem infinitesimalen Linienelement du dargestellt. Eine Integration über die Kraftinkremente $q(u) du$ entlang der Wirkungslinie von q liefert die resultierende Spannungsfunktion für eine kontinuierliche Linienbelastung $q(u)$ gemäß

$$\Psi = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(u)}{d\pi} (y - u) \arctan \frac{y - u}{x} du.$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

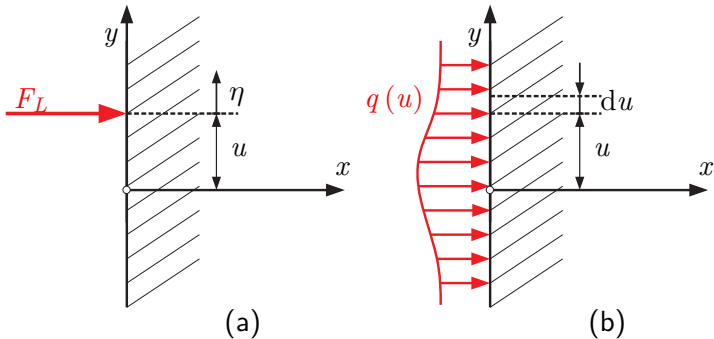
Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Skizze des Vorgehens



Elastische Verformungen der Halbebene

Annahme eines ebenen Verformungszustandes (EVZ).
Aus dem Hookeschen Gesetz folgt

$$\varepsilon_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

Mit den zuvor berechneten Spannungen folgt für die
Verzerrung in x -Richtung

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)) \\ &= \frac{1}{E} \left((1 - \nu^2) \sigma_x - \nu (1 + \nu) \sigma_y \right) \\ &= \frac{1 + \nu}{E} \left((1 - \nu) \sigma_x - \nu \sigma_y \right) \\ &= -\frac{2F_L (1 + \nu)}{\pi d E} \left[(1 - \nu) \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} - \nu \frac{y^2 x}{(x^2 + y^2)^2} \right]. \end{aligned}$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Elastische Verformungen der Halbebene

Die Einsenkungslinie $u_x(y)$ der Halbebeneoberfläche folgt aus

$$\begin{aligned} u_x(y) &= \int_0^t \varepsilon_x dx \\ &= -\frac{2F_L(1+\nu)}{\pi dE} \int_0^t \left[(1-\nu) \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2} - \nu \frac{y^2 x}{(x^2+y^2)^2} \right] dx \end{aligned}$$

Elastische Verformungen der Halbebene

Substitution $x^2 + y^2 = \xi^2$ liefert mit $x dx = \xi d\xi$:

$$\int_0^t \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} dx = \int_y^{\sqrt{t^2+y^2}} \frac{(\xi^2 - y^2) \xi}{\xi^4} d\xi$$

$$= \int_y^{\sqrt{t^2+y^2}} \frac{d\xi}{\xi} - y^2 \int_y^{\sqrt{t^2+y^2}} \frac{d\xi}{\xi^3}$$

$$= \ln \sqrt{1 + \frac{t^2}{y^2}} - \frac{y^2}{2} \left[\frac{1}{y^2} - \frac{1}{t^2 + y^2} \right]$$

$$y^2 \int_0^t \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx = y^2 \int_y^{\sqrt{t^2+y^2}} \frac{d\xi}{\xi^3} = \frac{y^2}{2} \left[\frac{1}{y^2} - \frac{1}{t^2 + y^2} \right]$$

Elastische Verformungen der Halbebene

Da wir nur die nähere Umgebung der Lastangriffsstelle betrachten, können wir $\frac{t}{y} \gg 1$ voraussetzen. Mit dieser Annahme vereinfachen sich die zuvor berechneten Ausdrücke zu

$$y^2 \int_0^t \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx \approx \frac{1}{2}, \quad \int_0^t \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} dx \approx \ln \frac{t}{y} - \frac{1}{2}.$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$u_x(y) = -\frac{2F_L(1+\nu)}{\pi dE} \left[(1-\nu) \ln \frac{t}{y} - \frac{1}{2} \right]$$

und hieraus durch Differentiation

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}(y) = -\frac{2F_L(1-\nu^2)}{\pi dE} \frac{1}{y}.$$

Elastische Verformungen der Halbebene

Analog zu der Herleitung der Airyschen Spannungsfunktion für beliebige Zug- und Drucklasten in dem vorherigen Abschnitt führen wir eine Koordinatentransformation $y \rightarrow y - u$ durch, ersetzen F_L durch $q(u) \cdot du$ und integrieren über den Wirkungsbereich von $q(u)$. Hierbei beschränken wir uns der Einfachheit halber auf eine symmetrische Druckbelastung $p(u) = q(u) / d$ auf dem Intervall $I = [-a, a]$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial y}(y) &= -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi d E} \int_{-a}^a \frac{q(u)}{y-u} du \\ &= -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{p(u)}{y-u} du. \end{aligned}$$

Elastische Verformungen der Halbebene

Unter der Annahme einer symmetrischen Druckverteilung
 $p(u) = p(-u)$ folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_x}{\partial y}(y) &= -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{p(u)}{y-u} du \\
 &= -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\int_{-a}^0 \frac{p(u)}{y-u} du + \int_0^a \frac{p(u)}{y-u} du \right] \\
 &= -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\int_0^a \frac{p(-u)}{y+u} du + \int_0^a \frac{p(u)}{y-u} du \right] \\
 &= -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^a p(u) \left[\frac{1}{y+u} + \frac{1}{y-u} \right] du \\
 &= -\frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} y \int_0^a \frac{p(u)}{y^2-u^2} du.
 \end{aligned}$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)

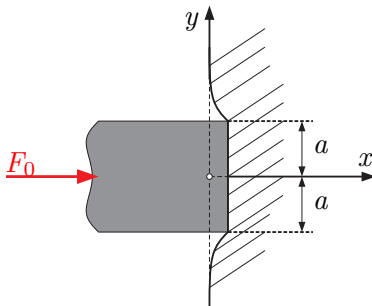
Krümmungsverhältnisse in der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Körper

Analytische Lösung vs. FEM

Eindrücken eines starren Stempels in eine elastische Halbebene

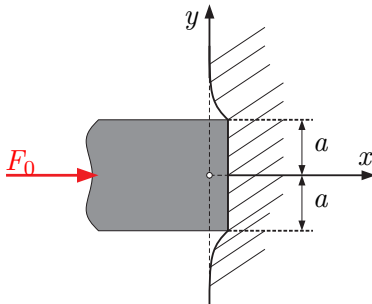
Gesucht: Flächenpressung zwischen Stempel und Halbebene



Eindrücken eines starren Stempels in eine elastische Halbebene

Aufgrund der Starrheit des eingedrückten Stempels muss im Kontaktbereich $(-a < y < a)$ die Tangentensteigung der Einsenkungslinie $u_x(y)$ verschwinden. Somit folgt:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^a \frac{p(u)}{y^2 - u^2} du = 0 \quad \text{für } y^2 < a^2$$



Eindrücken eines starren Stempels in eine elastische Halbebene

In den Integraltafeln nach Gröbner-Hofreiter findet sich das bestimmte Integral

$$\int_0^a \frac{du}{(y^2 - u^2) \sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} 0 & \text{für } y^2 < a^2, \\ \frac{\pi}{2|y| \sqrt{y^2 - a^2}} & \text{für } y^2 > a^2. \end{cases}$$

Damit erhält man für die allgemeine Darstellung der Druckverteilung

$$p(u) = \frac{C}{\sqrt{a^2 - u^2}}.$$

Die Integrationskonstante C drücken wir mit $p(u=0) = p_0 = \frac{C}{a}$ als $C = p_0 a$ aus.

Eindrücken eines starren Stempels in eine elastische Halbebene

Den Wert für p_0 erhält man aus der Gleichgewichtsbedingung der zur x -Achse parallelen Kräfte gemäß

$$\begin{aligned} F_0 &= \int_{-a}^a d \cdot p(u) \, du = 2p_0 a d \int_0^a \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \\ &= 2p_0 a \left[\arcsin \frac{u}{a} \right]_0^a = 2p_0 a d \frac{\pi}{2} = p_0 a d \pi \\ \Leftrightarrow \quad p_0 &= \frac{F_0}{\pi a d} \end{aligned}$$

Damit ist der Druckverlauf vollständig bestimmt und es gilt

$$p(u) = p_0 \frac{a}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{F_0}{d\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}.$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier Scheiben

3D Kontakt

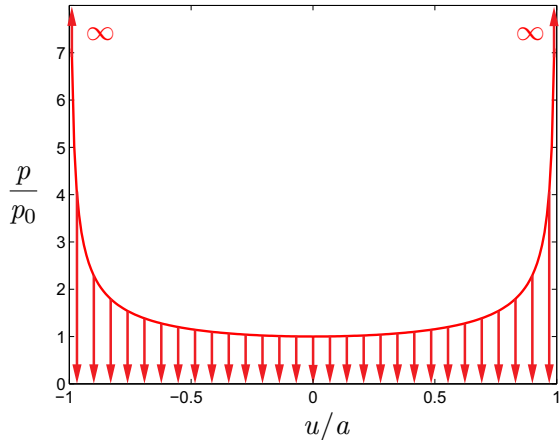
Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Körper

Analytische Lösung vs. FEM

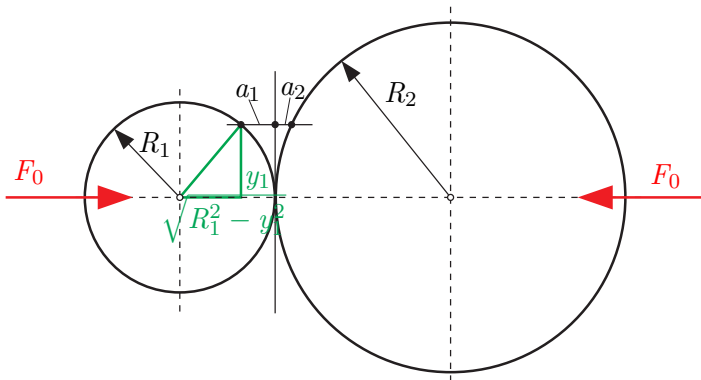
Druckverteilung in der Kontaktzone



Hertzscher Kontakt zweier elastischer Scheiben

Als ein Beispiel für den Hertzschen Kontakt im ebenen Spannungs- oder Verzerrungszustand betrachten wir den Kontakt zweier Scheiben (der Dicke d).

Gesucht: Druckverteilung und Größe der Abplattung



Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

**Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben**

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Hertzscher Kontakt zweier elastischer Scheiben

Eine genauere Betrachtung der Kontaktzone zeigt, dass die Summe der Abplattungen der beiden Scheiben konstant ist:

$$w_0(y) = u_{x1}(y) + u_{x2}(y) + a_1(y) + a_2(y)$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier Scheiben

3D Kontakt

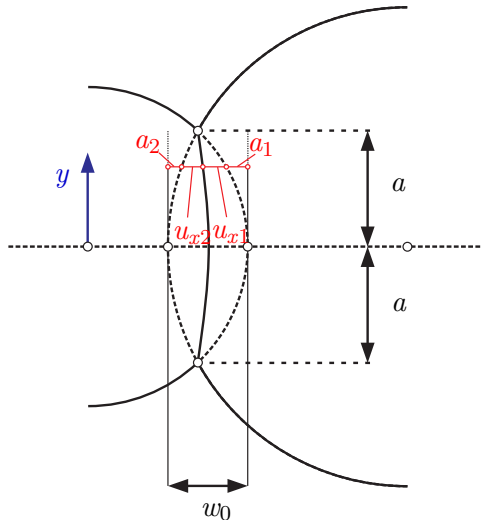
Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Körper

Analytische Lösung vs. FEM

Detaillierte Betrachtung des Kontaktbereiches



Hertzscher Kontakt zweier elastischer Scheiben

Aus den Kreisgleichungen folgt für a_1 und a_2

$$a_1(y) = R_1 - \sqrt{R_1^2 - y^2} = R_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{R_1^2}} \right],$$
$$a_2(y) = R_2 - \sqrt{R_2^2 - y^2} = R_2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{R_2^2}} \right].$$

Da im Kontaktbereich die Werte $\frac{y}{R_1}$ bzw. $\frac{y}{R_2}$ stets sehr klein sein werden, ist es zulässig die obigen Ausdrücke für a_1 und a_2 als eine Taylorreihe um 0 zu entwickeln und nach den Gliedern 2. Ordnung abzubrechen.

Hertzscher Kontakt zweier elastischer Scheiben

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 a_1(y) &\approx \underbrace{a_1(0)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{1!} \frac{da_1}{dy}(0)}_{=0} (y-0) + \frac{1}{2!} \underbrace{\frac{d^2 a_1}{dy^2}(0)}_{=\frac{1}{R_1}} (y-0)^2 \\
 &= \frac{y^2}{2R_1}
 \end{aligned}$$

und analog dazu $a_2(y) \approx \frac{y^2}{2R_2}$. Mit diesen Beziehungen erhalten wir

$$u_{x1} + u_{x2} = w_0 - (a_1 + a_2) = w_0 - \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Hertzscher Kontakt zweier elastischer Scheiben

Differenzieren wir die letzte Gleichung nach y , so ergibt sich

$$\frac{du_{x1}}{dy} + \frac{du_{x2}}{dy} = -y \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Nun nutzen wir die Beziehungen für den elastischen Halbraum

$$\frac{du_{x1}}{dy}(y) = -\frac{4(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} y \int_0^a \frac{p(u)}{y^2 - u^2} du,$$

bzw.

$$\frac{du_{x2}}{dy}(y) = -\frac{4(1-\nu_2^2)}{\pi E_2} y \int_0^a \frac{p(u)}{y^2 - u^2} du.$$

$$\Rightarrow \int_0^a \frac{p(u)}{y^2 - u^2} du = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} = \text{const.}$$

Hertzscher Kontakt zweier elastischer Scheiben

Zum Lösen der vorherigen Integralgleichung verwenden wir die Integralbeziehung

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{y^2 - u^2} du &= \int_0^a \frac{(a^2 - u^2)}{\sqrt{a^2 - u^2} (y^2 - u^2)} du \\
 &= \int_0^a \frac{(a^2 - y^2 + y^2 - u^2)}{\sqrt{a^2 - u^2} (y^2 - u^2)} du \\
 &= \int_0^a \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \\
 &\quad + (a^2 - y^2) \int_0^a \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2} (y^2 - u^2)} \\
 &= \frac{\pi}{2} + \begin{cases} 0 & \text{für } y^2 < a^2, \\ \frac{\pi (a^2 - y^2)}{2 |y| \sqrt{y^2 - a^2}} & \text{für } y^2 > a^2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

**Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben**

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Hertzscher Kontakt zweier elastischer Scheiben

Damit lautet die allgemeine Lösung für die Druckverteilung

$$p(u) = C\sqrt{a^2 - u^2}.$$

Mit $C = \frac{p_0}{a}$ ist

$$p(u) = p_0\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}.$$

Hierbei handelt es sich um eine halbkreisförmige/elliptische Druckverteilung.

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

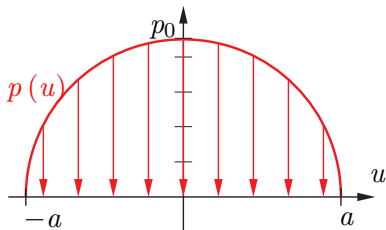
Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Halbkreisförmige Druckverteilung beim Kontakt zweier Scheiben



Hertzscher Kontakt zweier elastischer Scheiben

Nun fehlen noch die unbekanntenen Konstanten p_0 und a . Aus der vorherigen Integralbeziehung erhalten wir

$$C \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{p_0}{a} = \frac{\pi}{4} \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} \Leftrightarrow a = 2p_0 \frac{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Des weiteren erhalten wir aus der Gleichgewichtsbedingung der zur Presskraft F_0 parallelen Kräfte:

$$\begin{aligned} F_0 &= \int_{-a}^a p(u) \cdot d \, du = 2d \int_0^a p(u) \, du \\ &= 2dp_0 \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2} \, du \\ &= 2d \frac{p_0}{a} \left[\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} \right]_0^a = dp_0 a \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow p_0 &= \frac{2F_0}{d\pi a} \end{aligned}$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

**Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben**

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Hertzscher Kontakt zweier elastischer Scheiben

Auflösen der vorherigen Gleichungen liefert für $y^2 < a^2$ die **Hertzschen Formeln (EVZ)**:

$$p_0 = \sqrt{\frac{F_0}{d\pi} \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}} \quad \text{und} \quad a = \sqrt{\frac{4F_0}{d\pi} \frac{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}.$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

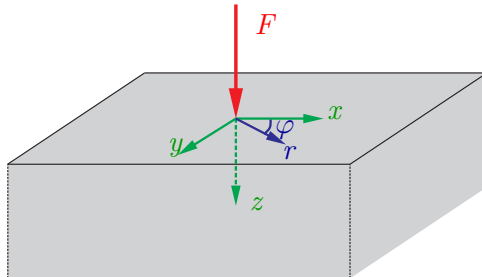
Hertzscher Kontakt zweier elastischer Scheiben

Analog zu den vorherigen Betrachtungen erhält man für den ebenen Spannungszustand (ESZ) durch Transformation der Materialkonstanten $\frac{1-\nu_1^2}{E_1}, \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \rightarrow \frac{1}{E_1}, \frac{1}{E_2}$ die Ergebnisse

$$p_0 = \sqrt{\frac{F_0}{d\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \quad \text{und} \quad a = \sqrt{\frac{4F_0}{d\pi} \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}$$

Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)

Analog zu den Betrachtungen im 2D-Fall wird der Verformungszustand des elastischen Halbraumes unter einer Punktlast in die Herleitung des 3D Hertzschen Kontaktes mit einfließen.



Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)

Boussinesq gibt für das Verschiebungsfeld eines elastischen Halbraumes infolge einer Punktlast im Koordinatenursprung die folgende Lösung an:

$$u_x = \frac{Fx}{4\pi GR} \left[\frac{z}{R^2} - \frac{1-2\nu}{R+z} \right], \quad u_y = \frac{Fy}{4\pi GR} \left[\frac{z}{R^2} - \frac{1-2\nu}{R+z} \right],$$

$$u_z = \frac{F}{4\pi GR} \left[2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right].$$

Hierbei ist $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und G der Schubmodul.

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

**Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)**

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)

Durch Transformation auf Zylinderkoordinaten
(mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) erhalten wir

$$u_r = \frac{Fr}{4\pi GR^2} \left[\frac{z}{R} - (1 - 2\nu) \frac{R}{R + z} \right], \quad u_\varphi = 0,$$

$$u_z = \frac{F}{4\pi GR} \left[2(1 - \nu) + \frac{z^2}{R^2} \right].$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Krümmungsbeschreibung

Da die Druckverteilung und die Verformung bei dem Kontakt elastischer Körper entscheidend durch die lokalen geometrischen Verhältnisse innerhalb der Kontaktzone bestimmt wird, ist es wichtig eine allgemeine Beschreibung der vorliegenden Krümmungsverhältnisse anzugeben. Ausgangspunkt für unsere Betrachtung ist ein punktförmiger Kontakt zweier elastischer Oberflächen.

Der Ursprung des Koordinatensystems für die Kontaktbetrachtung wird in den Berührungspunkt gelegt. Die x, y -Ebene fällt mit den Tangentialebenen der beiden Körper im Berührungspunkt zusammen. Die z -Achse verläuft in Richtung der Berührungsnormalen.

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

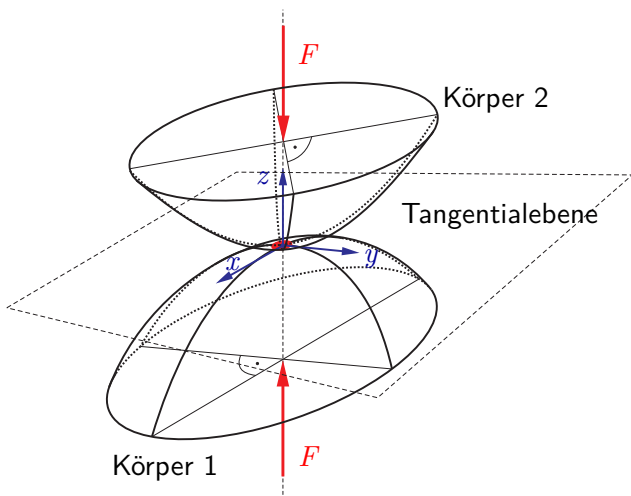
3D Kontakt

Punktartige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

**Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone**

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM



Krümmungsbeschreibung

In der Nähe des Berührungspunktes kann die Oberfläche des oberen Körpers durch die Gleichung

$$z_1(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \mathcal{G}_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

beschrieben werden. Hierbei ist \mathcal{G}_1 ein metrischer Tensor, der die Krümmung der Fläche charakterisiert. Analog gilt für die Oberfläche des unteren Körpers

$$z_2(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \mathcal{G}_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Vereinfacht gesprochen handelt es sich hierbei um eine mehrdimensionale Taylorreihenapproximation der Oberflächen $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$.

Krümmungsbeschreibung

Mit diesen Ergebnissen folgt für die durch den Kontakt induzierte Abplattung der beiden Körper

$$\begin{aligned} w_0 &= (z_1 + u_{z1}) + (z_2 + u_{z2}) \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T (\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + u_{z1} + u_{z2}. \end{aligned}$$

Nun legt man die x - und y -Achse so, dass $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ in Diagonalform überführt wird. Seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte dieses Tensors, so geht die Abplattungsgleichung über in

$$w_0 = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + u_{z1} + u_{z2}.$$

Krümmungsbeschreibung

Die Eigenwerte λ_1, λ_2 hängen mit den lokalen Hauptkrümmungsradien R_{11}, R_{12} der Fläche 1 und R_{21}, R_{22} der Fläche 2 über die Beziehungen

$$2(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}},$$

$$4(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}}\right)^2 + 2 \cos(2\psi) \left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}}\right) \left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}}\right).$$

Hierbei ist die Konvention $R_{11} \geq R_{12}$; $R_{21} \geq R_{22}$ zu beachten, in der die Radien konkav gekrümmter Oberflächen als negative Größen gerechnet werden. ψ ist der Winkel zwischen den Normalschnitten der Oberflächen, in denen die Krümmungsradien R_{11} und R_{21} vorliegen

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

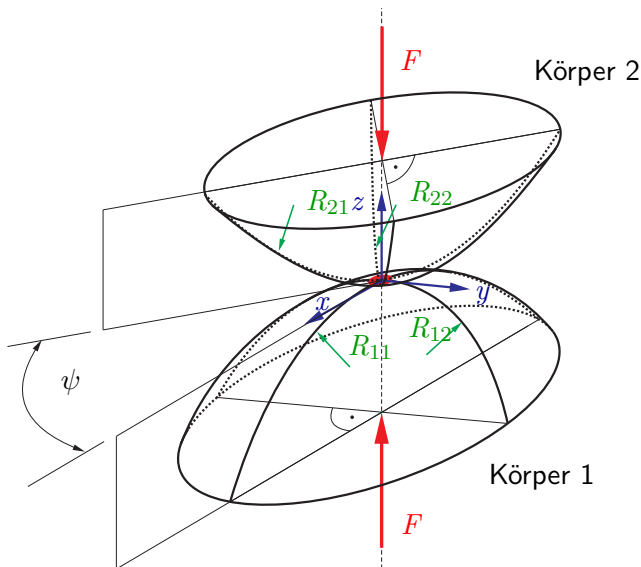
3D Kontakt

Punkt förmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM



Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

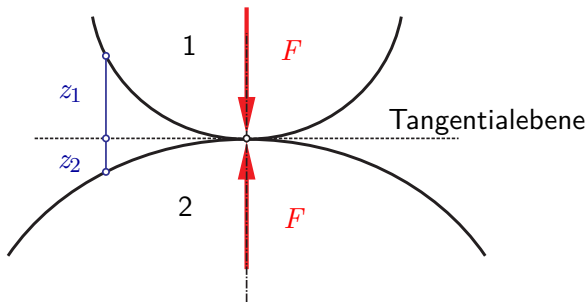
Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Als ein Anwendungsbeispiel untersuchen wir hier den Kontakt zweier rotationssymmetrisch zur Berührungsnormalen ausgebildeten Körper



Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Aufgrund der Rotationssymmetrie gilt für die Hauptkrümmungsradien $R_{11} = R_{12} = R_1$ und $R_{21} = R_{22} = R_2$. Damit folgt für die Eigenwerte des Metriktensors aus dem vorherigen Abschnitt

$$(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad 4(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}$$

Mit diesem Ergebnis ergibt sich für die Abplattungsgleichung

$$u_{z1} + u_{z2} = w_0 - \lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 = w_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$
$$= w_0 - \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

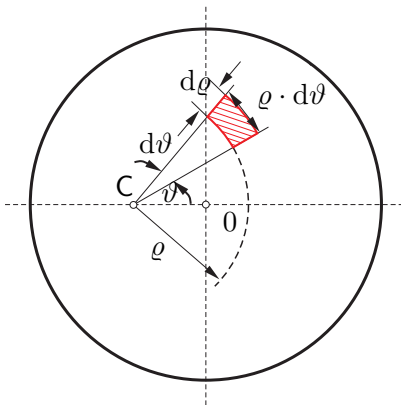
Die Deformationen $u_{z1}(r)$ und $u_{z2}(r)$ werden durch den in der Berührungsfläche Ω herrschenden Druck $p(r)$ hervorgerufen. Mit genügender Genauigkeit können wir im Bereich der gesamten Druckfläche Ω den Druck in Richtung der Berührungsnormalen annehmen. Wir erhalten somit das Kräftegleichgewicht

$$F = \int_{\Omega} p(r) \, d\Omega$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie zur Berührungsnormalen muss Ω eine **kreisförmige Fläche** sein. Um nun auf den Zusammenhang zwischen den Verformungen $u_{z1}(r)$ und $u_{z2}(r)$ und dem Kontaktdruck $p(r)$ zu schließen, denken wir uns die Druckverteilung durch eine jeweils in den einzelnen Flächenelementen $d\Omega$ wirkende Einzelkraftbelastung $dF = p d\Omega$ ersetzt.

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Betrachten wir die alleinige Wirkung der auf das Flächenelement $d\Omega = \rho d\rho d\vartheta$ entfallenden Elementarlast $dF = p d\Omega$ auf die Deformationen $u_{z1}(r)$ und $u_{z2}(r)$.



Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Es liegt mit guter Näherung der Fall eines durch eine Punktlast beanspruchten elastischen Halbraumes vor. Diese Annahme ist nur dann gültig, wenn die Abmessungen der Druckfläche klein gegen- über den Krümmungsradien R_1 und R_2 sind. Die Verschiebungen u_{z1} und u_{z2} entsprechen dann näherungsweise den lotrechten Verschiebungen der Halbraumboberfläche mit $z = 0$ und $R = \varrho$ hervorgehen. Ersetzen wir in den Verschiebungsgleichungen F durch $p \, d\Omega$ so erhalten wir für die Deformation der beiden Rotationskörperoberflächen

$$du_{z1} = \frac{p \, d\Omega (1 - \nu_1)}{2\pi G_1} \frac{1}{\varrho}, \quad du_{z2} = \frac{p \, d\Omega (1 - \nu_2)}{2\pi G_2} \frac{1}{\varrho}.$$

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Integration über sämtliche Elementarlasten liefert

$$u_{z1} = \frac{1 - \nu_1}{2\pi G_1} \int_{\Omega} \frac{p}{\varrho} d\Omega = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \int_{\Omega} \frac{p}{\varrho} d\Omega,$$

$$u_{z2} = \frac{1 - \nu_2}{2\pi G_2} \int_{\Omega} \frac{p}{\varrho} d\Omega = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \int_{\Omega} \frac{p}{\varrho} d\Omega$$

Mit diesem Ergebnis folgt aus der Abplattungsgleichung

$$w_0 - \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 - \nu_1}{G_1} + \frac{1 - \nu_2}{G_2} \right] \int_{\Omega} \frac{p}{\varrho} d\Omega.$$

Mit den Abkürzungen $b = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]$ und

$c = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 - \nu_1}{G_1} + \frac{1 - \nu_2}{G_2} \right]$ liest sich die obige Gleichung als

$$w_0 - br^2 = c \int_{\Omega} \frac{p}{\varrho} d\Omega = c \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left[\int_{-\varrho_1}^{\varrho_2} p d\varrho \right] d\vartheta.$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Zum Lösen der obigen Integralgleichung führen wir zunächst den längs der Strecke $\overline{DE} = \eta$ herrschenden mittleren Druck

$$\bar{p} = \frac{1}{\eta} \int_{-e_1}^{e_2} p \, d\varrho$$

ein, womit wir die Integralgleichung in

$$w_0 - br^2 = c \int_0^{\pi} \bar{p} \eta \, d\vartheta$$

überführen können.

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

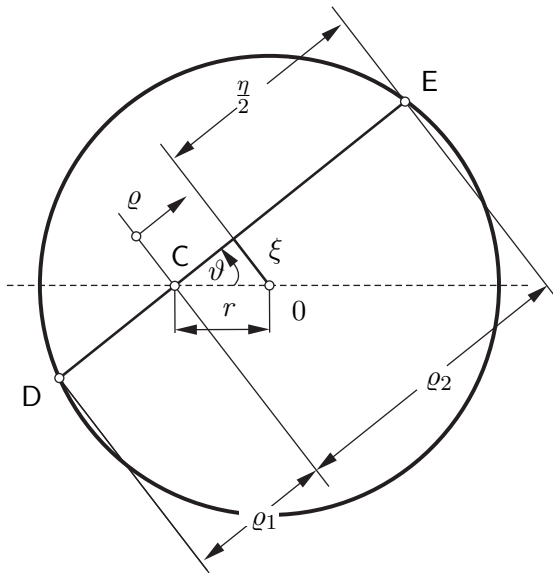
3D Kontakt

Punktartige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM



Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Mit $\xi = r \sin \vartheta$ und $\eta = 2\sqrt{a^2 - \xi^2} = 2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta}$ erhalten wir

$$w_0 - br^2 = c \int_0^\pi \bar{p} \eta \, d\vartheta = 2c \int_0^\pi \bar{p} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta} \, d\vartheta.$$

a ist der Radius der kreisförmigen Druckfläche Ω . Aufgrund der Rotationssymmetrie muss \bar{p} eine Funktion von $\xi^2 = r^2 \sin^2 \vartheta$ sein. Des Weiteren muss beachtet werden, dass der mittlere Druck \bar{p} für $\xi = a$ verschwinden muss. Mit dieser Restriktion gibt es nur eine einzige Lösung, die qualitativ der obigen Integralgleichung mit der Bedingung $\bar{p}(a) = 0$ genügt:

$$\bar{p} = \chi \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta} = \chi \sqrt{a^2 - \xi^2}.$$

Hierbei ist χ ein noch zu bestimmender Parameter.

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Körper

Analytische Lösung vs. FEM

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Mit diesen Ergebnissen erhalten wir

$$w_0 - br^2 = 2\chi c \int_0^\pi \left(a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \right) d\vartheta = 2\chi c \pi \left(a^2 - \frac{r^2}{2} \right).$$

Mittels eines Koeffizientenvergleichs können wir hieraus zwei Gleichungen für die unbekanntenen Größen w_0 , χ und a extrahieren:

$$w_0 = 2\pi\chi ca^2, \quad b = \pi\chi c.$$

Die dritte Gleichung erhalten wir aus der Gleichgewichtsbedingung zwischen Kontaktdruck und der Kraft F

$$F = \int_{\Omega} p \, d\Omega = \int_{\xi=-a}^a \bar{p}(\xi) \eta(\xi) \, d\xi = 2\chi \int_{\xi=-a}^a \left(a^2 - \xi^2 \right) d\xi = \frac{8}{3} \chi a^3.$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier Scheiben

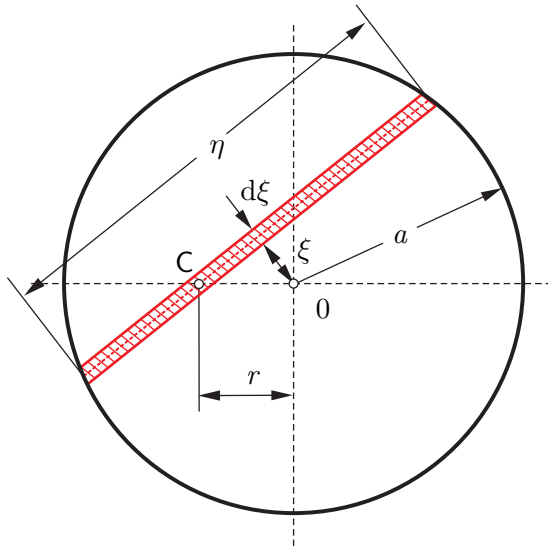
3D Kontakt

Punktartige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Körper

Analytische Lösung vs. FEM



Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Auflösen der aufgestellten Gleichungen liefert die unbekanntenen Größen w_0 , χ und a

$$\chi = \frac{b}{\pi c} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \frac{1}{\frac{1 - \nu_1}{G_1} + \frac{1 - \nu_2}{G_2}},$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{3 F}{8 \chi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \pi F c}{8 b}} = \sqrt[3]{\frac{3}{8} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left[\frac{1 - \nu_1}{G_1} + \frac{1 - \nu_2}{G_2} \right] F},$$

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\pi \chi c a^2 = 2b \sqrt[3]{\frac{9}{64} \frac{F^2 \pi^2 c^2}{b^2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9}{64} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \left[\frac{1 - \nu_1}{G_1} + \frac{1 - \nu_2}{G_2} \right]^2 F^2}. \end{aligned}$$

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Wir erhalten mit $b = \pi\chi c$ und $w_0 = 2\pi\chi ca^2$

$$\int_{\Omega} \frac{p}{\varrho} d\Omega = \frac{1}{c} (w_0 - br^2) = 2\chi\pi \left(a^2 - \frac{r^2}{2} \right)$$

Mit Hilfe der Relation $\chi = \frac{3F}{8a^3}$, können wir die obige Gleichung über die Presskraft F ausdrücken:

$$\int_{\Omega} \frac{p}{\varrho} d\Omega = \frac{3\pi F}{4a^3} \left(a^2 - \frac{r^2}{2} \right).$$

Somit ergeben sich für die Deformationen der Rotationskörperoberflächen im Druckbereich für $r \leq a$

$$u_{z1} = \frac{3}{8} \frac{1 - \nu_1}{G_1} \frac{F}{a^3} \left(a^2 - \frac{r^2}{2} \right), \quad u_{z2} = \frac{3}{8} \frac{1 - \nu_2}{G_2} \frac{F}{a^3} \left(a^2 - \frac{r^2}{2} \right)$$

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Nun fehlt uns nur noch die konkrete Gestalt der Druckverteilung $p(r)$ innerhalb der Kontaktzone. Hierzu schreiben wir die Integralgleichungen mit der Relation

$$\eta = 2\sqrt{a^2 - \xi^2} \text{ in}$$

$$\int_{-\varrho_1}^{\varrho_2} p \, d\varrho = \eta \bar{p} = 2\chi (a^2 - \xi^2)$$

um. Hieraus folgt insbesondere für die Druckverteilung in der nachfolgend abgebildeten Geraden $\overline{D'E'}$ mit $\xi = r$ die Integralgleichung

$$\int_{-\sqrt{a^2 - r^2}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} p \, d\varrho = 2\chi (a^2 - r^2).$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

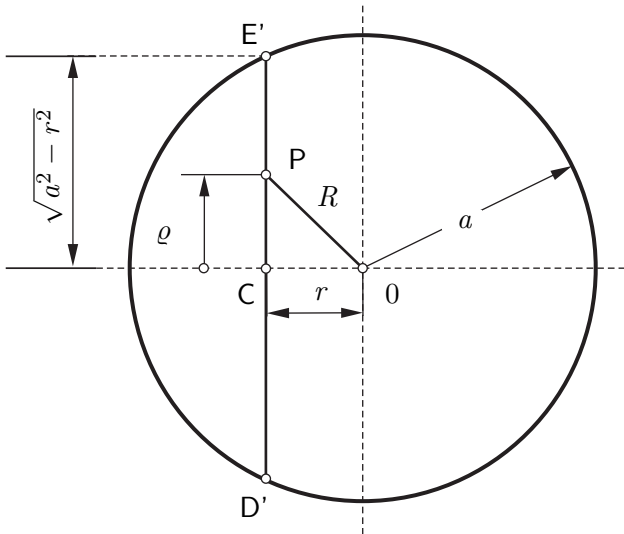
Einleitung

2D Kontakt

- Halbebene unter Punktlast
- Halbebene unter Linienlast
- Verformung der Halbebene
- Starrer Stempel auf Halbebene
- Hertzscher Kontakt zweier Scheiben

3D Kontakt

- Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)
- Krümmungsverhältnisse in der Kontaktzone
- Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Körper
- Analytische Lösung vs. FEM



Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Die aufgestellte Integralgleichung lässt sich mit Rücksicht auf die zu erwartende Symmetrie der längs der Geraden $\overline{D'E'}$ vorliegenden Druckverteilung hinsichtlich des Punktes C auch in der folgenden Form schreiben

$$\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} p \, d\varrho = \chi (a^2 - r^2).$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Problems muss der Kontaktdruck p eine Funktion des Abstandes $R = \sqrt{r^2 + \varrho^2}$ vom Berührungszentrum $R = 0$ sein. Daher schreiben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} p \left(\sqrt{r^2 + \varrho^2} \right) d\varrho &= \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} p \left(\sqrt{\varrho^2 + a^2 - (a^2 + r^2)} \right) d\varrho \\ &= \chi (a^2 - r^2) \end{aligned}$$

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Mit der Abkürzung $u^2 = a^2 - r^2$ folgt

$$\int_0^u p \left(\sqrt{\varrho^2 + a^2 - u^2} \right) d\varrho = \chi u^2.$$

Eine weitere Variablentransformation mit $v = u^2 - \varrho^2$ liefert

$$\int_0^{u^2} p \left(\sqrt{a^2 - v} \right) \frac{dv}{\sqrt{u^2 - v}} = 2\chi u^2.$$

Mit den Abkürzungen $s = u^2$ und $f(v) = p \left(\sqrt{a^2 - v} \right)$ gelangen wir schließlich zu

$$\int_0^s f(v) \frac{dv}{\sqrt{s - v}} = 2\chi s.$$

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Diese Bestimmungsgleichung ist eine spezielle Form der verallgemeinerten Abelschen Integralgleichung

$$\int_0^s \frac{f(v)}{(s-v)^n} dv = g(s) \quad \text{mit } 0 < n < 1,$$

deren allgemeine Lösung

$$f(v) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \frac{d}{dv} \left(\int_0^v g(s) (v-s)^{n-1} ds \right)$$

lautet. Für unseren Spezialfall erhalten wir mit $n = \frac{1}{2}$ und $g(s) = 2\chi s$ die Lösungsdarstellung

$$f(v) = \frac{2\chi}{\pi} \frac{d}{dv} \left(\int_0^v \frac{s}{\sqrt{v-s}} ds \right).$$

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Für den zu differenzierenden Integralausdruck ergibt sich mit der Substitution $\zeta = v - s$

$$\int_0^v \frac{s}{\sqrt{v-s}} ds = \frac{4}{3} v^{\frac{3}{2}}.$$

Damit erhalten wir

$$f(v) = \frac{4\chi}{\pi} \sqrt{v}$$

und damit

$$p\left(\sqrt{a^2 - v}\right) = \frac{4\chi}{\pi} \sqrt{v}.$$

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Schließlich folgt mit $\sqrt{r^2 + \varrho^2} = \sqrt{a^2 - v} = R$ bzw.
 $v = a^2 - R^2$

$$p(R) = \frac{4\chi}{\pi} \sqrt{a^2 - R^2}.$$

Nutzen wir nun unser zuvor erzielttes Ergebnis für χ aus, so folgt schließlich für die Druckverteilung

$$p(R) = \frac{3F}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2}$$

$$\text{bzw. } p(x, y) = \frac{3F}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}}.$$

Der maximale Druck findet sich im Berührungszentrum
 $R = 0$ und hat den Wert

$$p_{\max} = p(0) = \frac{3F}{2\pi a^2}.$$

Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Oberflächen

Es ist wichtig zu erwähnen, dass die Stelle mit der größten Materialbeanspruchung nicht in der Mitte der Druckfläche sondern im Inneren der Kontaktkörper zu finden ist. Beim Hertzschen Kontakt dient daher die größte Schubspannung als Maß für die Materialbeanspruchung. Föppl fand bei seinen Untersuchungen zum Spannungszustand bei der Berührung zweier elastischer Körper heraus, dass sich bei dem Kontakt zweier Kugeln aus demselben Material die größte Schubspannung in einer Tiefe von ca. $0.47a$ auf der Symmetrieachse mit einem Wert von $\tau_{\max} \approx 0.31p_{\max}$ befindet. Mit diesem Ergebnis lässt sich die Pitting-Bildung (Abblättern von Material an der Oberfläche) der Kugeln im Kugellager erklären. Die unter der Oberfläche auftretenden Schubspannungen führen während der Belastung des Kugellagers zur Zerstörung der Oberflächen, vgl. Abb.

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

**Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper**

Analytische Lösung vs.
FEM



Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktartige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

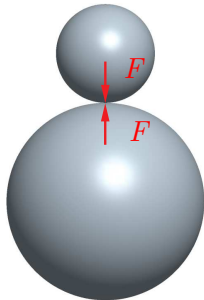
Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Beispielhafte Kontaktsituation

Um die oben angegebenen Ergebnisse auch numerisch zu untermauern, führen wir eine statische FE-Analyse der Kontaktsituation zweier metallischer Kugeln aus demselben Material ($E = 210 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.3$) durch. Die Kugeln haben die Radien $R_1 = 100 \text{ mm}$ bzw. $R_2 = 200 \text{ mm}$ und werden mit $F = 500 \text{ kN}$ gegeneinander gedrückt.



Beispielhafte Kontaktsituation

Für die angegebenen Kontaktdaten erhalten wir aus den Hertzschen Formeln:

$$a \approx 6.00617 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad A_{\text{Kontakt}} = 113.33 \text{ mm}^2,$$

$$p_{\text{max}} \approx 6617.8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$(\text{Summe der Abplattungen}): w_0 \approx 0.5411 \text{ mm}$$

Die Finite Elemente Analyse wurde mit dem kommerziellen FE-programm PRO MECHANIKA durchgeführt. Die räumliche Diskretisierung erfolgte mit 70599 Elementen, wobei die Kontaktzone mit einer maximalen Elementgröße von 3 mm wesentlich feiner aufgelöst wurde als der Rest der Kontaktkörper.

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

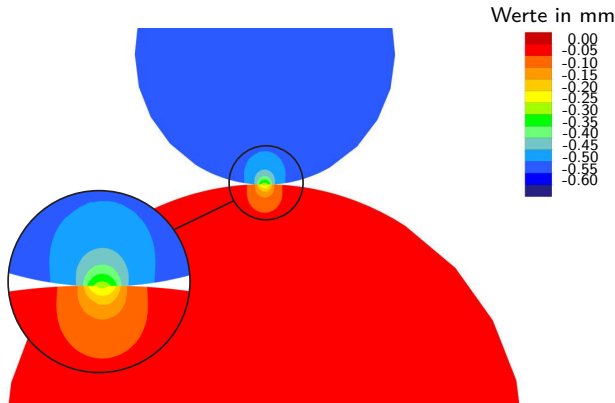
Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

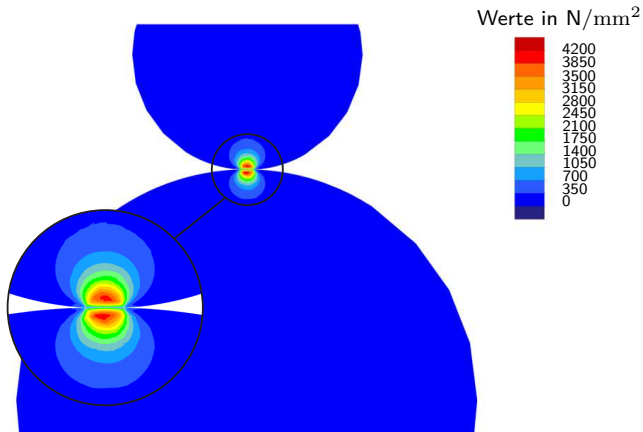
Analytische Lösung vs.
FEM

FE-Ergebnisse zur vertikalen Verschiebung.



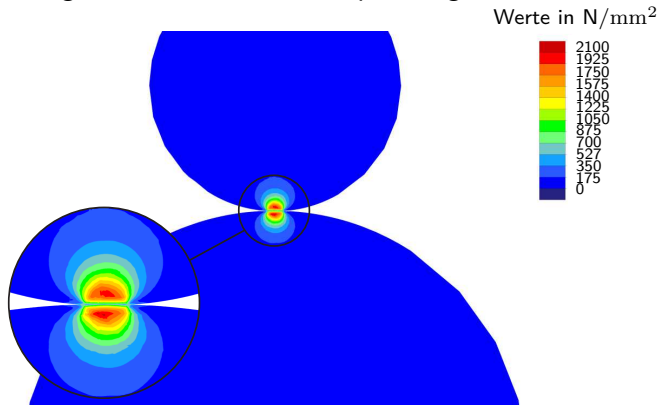
Die Berechnungen liefern hier eine globale Abplattung von $w_{0,\text{FEM}} \approx 0.5421 \text{ mm}$.

Vergleichsspannung nach von Mises.



Die maximale Vergleichsspannung beträgt hierbei $\sigma_{v,FEM} \approx 4364 \text{ N}/\text{mm}^2$.

Verteilung der maximalen Schubspannungswerte.



Der insgesamt größte Schubspannungswert findet sich wie von Föppl berechnet knapp unterhalb bzw. oberhalb der Druckfläche auf der Symmetrielinie der Kontaktkörper und beträgt $\tau_{\max, \text{FEM}} \approx 2200 \text{ N}/\text{mm}^2$.

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

Einleitung

2D Kontakt

Halbebene unter Punktlast

Halbebene unter Linienlast

Verformung der Halbebene

Starrer Stempel auf
Halbebene

Hertzscher Kontakt zweier
Scheiben

3D Kontakt

Punktförmige Belastung des
elastischen Halbraumes
(Boussinesq-Lösung)

Krümmungsverhältnisse in
der Kontaktzone

Hertzscher Kontakt
rotationssymmetrischer
Körper

Analytische Lösung vs.
FEM

Zum Schluss betrachten wir den Kontaktdruck auf der Oberfläche der größeren Kugel. Es ist zu beobachten, dass sich eine nahezu kreisförmige Kontaktzone mit hohen Kontaktdrücken ausgeprägt ist. Der maximale Druck befindet sich im Zentrum der Kontaktzone und hat einen Wert von $p_{\max, \text{FEM}} \approx 6530 \text{ N/mm}^2$. Dies entspricht einer Abweichung von 1.3% gegenüber dem Wert aus der analytischen Rechnung. Für den Radius der Kontaktzone a_{FEM} erhalten wir

$$A_{\text{FEM}} = 116.75 \text{ mm}^2 \approx \pi a_{\text{FEM}}^2 \quad \Rightarrow \quad a_{\text{FEM}} \approx 6.0961 \text{ mm.}$$

Dieser Wert weicht um knapp 1.5% zum Wert aus der analytischen Rechnung ab.

Kontaktmechanik

D. Anders

Inhaltsübersicht

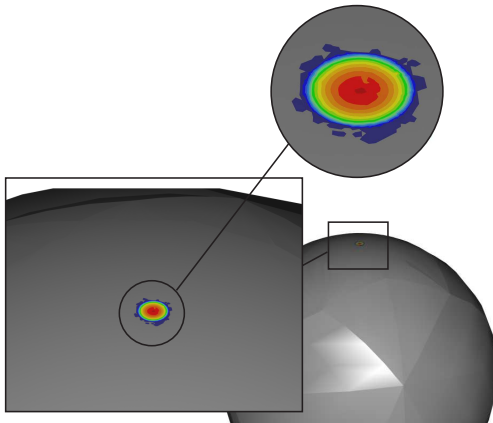
Einleitung

2D Kontakt

- Halbebene unter Punktlast
- Halbebene unter Linienlast
- Verformung der Halbebene
- Starrer Stempel auf Halbebene
- Hertzscher Kontakt zweier Scheiben

3D Kontakt

- Punktförmige Belastung des elastischen Halbraumes (Boussinesq-Lösung)
- Krümmungsverhältnisse in der Kontaktzone
- Hertzscher Kontakt rotationssymmetrischer Körper
- Analytische Lösung vs. FEM**



Werte in N/mm^2

