Prof. Dr.-Ing. Holger Foysi
Lehrstuhl Strömungsmechanik

Name:.. ....Vorname:....................................... ....Punkte:....

Matr.-Nr.: ....MB-DI / MB-DII / IP-DII / WIW-DII
BSc-MB / BSc-MBD / BSc-BIBME

KLAUSUR STRÖMUNGSLEHRE

Fragenteil

Bitte direkt auf die Angabe schreiben!

1) Welche Kennzahlen können wir nutzen, um Strömungen mit Temperatureinfluß zu beschreiben? Nennen Sie zwei und geben Sie kurz deren Bedeutung an. (4P)

z.B. Nusseltzahl $Nu = \frac{\alpha_w \cdot l}{k}$ · übergehende (auf Wand) zu geleiteter Wärme

Pécletzahl $Pe = \frac{u_\infty \cdot l}{\alpha}$: konvektive zu geleiteter Wärme

3) Was besagt die Prandtl-Relation? (1P)

$Ma_2^* = \frac{1}{Ma_1^*}$

Stoß von subsonisch → supersonisch (Entropie verbietet das) oder umgekehrt.

4) Wie können wir potentialtheoretisch den Auftrieb eines Körpers beschreiben? Geben Sie dafür auch den mathematischen Ausdruck an. Können wir auch den Widerstand berechnen und wenn ja wie? (3P)

- Durch Zirkulation , $i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$
- Nein , d'Alembertsches Paradoxon

5) Stellen Sie sich einen Hubschrauber mit starren, nicht schwenkbaren Rotorblättern vor. Warum kann dieser auf der Stelle schweben, aber nicht vorwärts fliegen; was passiert? Kurze Erklärung.(3P)

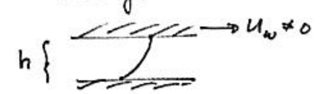
Schweben: klar, Druckverteilung ist identisch auf Rotorblättern. Kippt man den gesamten Rotor oder Helikopter und läßt ihn fliegen ⇒ durch Anströmung ist die relative Geschwdk. auf dem nach vorne bzw. dem nach hinten laufenden Blatt unterschiedlich ⇒ Drücke unterschiedlich ⇒ Heli kippt zur Seite ⇒ Anstellen d. Blätter ist notwendig

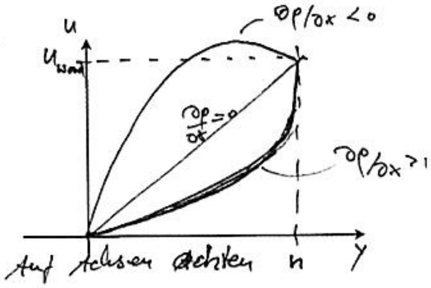
6) Ein auf dem Wasser *treibendes* Boot ist lenkbar. Dies wäre nicht der Fall, wenn das Boot *genauso schnell* triebe, wie das Wasser fließt. Tatsächlich treibt es aber schneller. Versuchen Sie das kurz zu erklären (Tipp: betrachten Sie das Volumen mit/ohne Boot und was jeweils physikalisch passiert). (3P)

Betrachte äquivalente Wassermasse (wie das vom Boot verd. Wasser): diese würde sich mit dem umliegenden Wass. turbulent vermischen, insb. mit tieferen (langsameren) Wasser ⇒ Impu verlust (im laminaren ähnlich, d. innere Reibung an tieferen Sch
Boot: keine Vermischung, aber dünne Grenzschicht, daher geringerer Impulsverlust ⇒ treibt schneller.

7) Was ist eine Couette Strömung? Skizzieren Sie die Profile der Geschwindigkeit in Strömungsrichtung über dem Wandabstand ins Diagramm, für drei Fälle des Druckgradienten: Null, positiv und negativ. (5P)

Strömung zw. zwei Platten, mit einer davon fest, die andere bewegt





7) Gegeben: $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Referenzgrößen sind u_0, L, ρ_0; der Druck wird mit ρ_0 und der Schallgeschwindigkeit c_0 entdimensioniert. Geben Sie die dimensionslose Form der Gleichung mit Hilfe bekannter Kennzahlen an (5P).

$$\left(\frac{u_0^2}{L}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\rho_0 c^2}{L}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\nu_0 \frac{u_0}{L^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$p_0 = \rho_0 c_0^2$, laut Angabe

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{M_0^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$Re = \frac{u_0 L}{\nu}$$

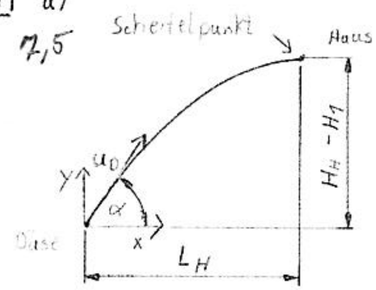
$$M_0 = \frac{u_0}{c_0}$$

Musterlösung Klausur Strömungslehre WS 2012/2013
09.03.2013

$\Sigma 31{,}5$

$\boxed{A1}$ a)

7,5



Beziehungen des schrägen Wurfs:

$x(t) = u_0 \cos\alpha \cdot t$ 1

$y(t) = u_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ 1

$u_y = \frac{dy}{dt} = u_0 \sin\alpha - g \cdot t$ 1

Randbedingungen:

– im Scheitelpunkt ist $u_y = 0$ 1/2

– " $y = H_H - H_1$ 1/2

– " $x = L_H$ 1/2

· benötigte Zeit bis zum Erreichen des Scheitelpunkts:

$u_y = 0 = u_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t_H \quad \Rightarrow \quad t_H = \frac{u_0 \cdot \sin\alpha}{g}$ 1/2

(1) $x(t = t_H) = u_0 \cos\alpha \cdot t_H = u_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{u_0 \sin\alpha}{g} = u_0^2 \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{g} = L_H$ 1/2

(2) $y(t = t_H) = u_0 \sin\alpha \cdot t_H - \frac{1}{2} g t_H^2 =$

$$\frac{u_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{u_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} = \frac{u_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = H_H - H_1$$ 1/2

(3) $\Rightarrow u_0^2 = \frac{(H_H - H_1)2g}{\sin^2\alpha}$

(3) in (1) $L_H = \frac{(H_H - H_1)2g}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{(H_H - H_1)2}{\tan\alpha}$ 1/2

$$\alpha = \arctan\left(\frac{(H_H - H_1)2}{L_H}\right) = \arctan\left(\frac{(24m - 2m)2}{25m}\right) = 60{,}4^\circ$$ 1/2

aus (2) $u_0 = \frac{\sqrt{2(H_H - H_1)g}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2(24m - 2m) \cdot 10\frac{m}{s^2}}}{\sin(60{,}4^\circ)} = 24{,}1\,\frac{m}{s}$ 1/2

b) $N_P = \eta_P \cdot \dot{V} \cdot \Delta p_P$ 1

9,5

$\dot{V} = u_0 \cdot \frac{\pi}{4} d_0^2 = 24{,}1\frac{m}{s} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}025\,m)^2 = 0{,}0118\,\frac{m^3}{s}$ 1

Δp_P aus Bernoulligl.

$\varrho g H_0 + \cancel{p_0} = \frac{\varrho}{2} u_0^2 + \varrho g H_1 + \cancel{p_0} + \Delta p_{Verl} - \Delta p_P$ 1 1 1/2 1/2

$\Delta p_P = \frac{\varrho}{2} u_0^2 + \varrho g (H_1 - H_0) + \Delta p_{Verl}$

$\Delta p_{Verl} = \frac{\varrho}{2} u_S^2 \left(\zeta_E + \zeta_F + \frac{L_S}{d} \cdot \lambda_S\right)$ 1/2 1/2

λ_S bestimmen: $Re_d = \frac{u_S \cdot d}{\nu}$ 1/2 mit $u_S = u_0 \cdot \left(\frac{d_0}{d}\right)^2$ 1/2

$$Re_d = \frac{u_0 \cdot d_0^2}{\nu \cdot d} = \frac{24{,}1\frac{m}{s} \cdot (0{,}025m)^2}{1{,}5 \cdot 10^{-6}\frac{m^2}{s} \cdot 0{,}1m} = 100.417$$

in Diagramm 1, hydr. glatt gehen: $\lambda_S = 0{,}018$

$$\Rightarrow \Delta p_P = \frac{\varrho}{2} u_0^2 + \varrho g (H_1 - H_0) + \frac{\varrho}{2} u_0^2 \cdot \left(\frac{d_0}{d}\right)^4 \left(\zeta_E + \zeta_F + \frac{L_S}{d} \cdot \lambda_S\right)$$

$$= 500\frac{kg}{m^3} \cdot (24{,}1\frac{m}{s})^2 + 1000\frac{kg}{m^3}\, 10\frac{m}{s^2}\,(2m - 3m)$$

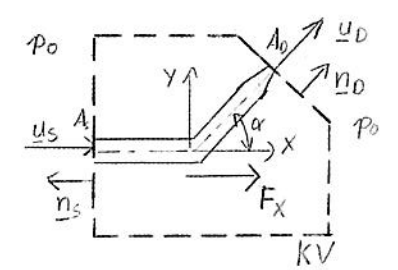
$$+ 500\frac{kg}{m^3} \cdot (24{,}1\frac{m}{s})^2 \left(\frac{0{,}025}{0{,}1}\right)^4 \left(0{,}5 + 0{,}47 + \frac{10m}{0{,}1m} \cdot 0{,}018\right)$$

$\Delta p_P = 283.547\ Pa$

$N_P = \eta_P \cdot \dot{V} \cdot \Delta p_P = 1 \cdot 0{,}0118\frac{m^3}{s} \cdot 283.547 Pa = 3{,}346\ kW$

c)

8



$\underline{u}_S = \begin{pmatrix} u_S \\ 0 \end{pmatrix}; \ \underline{n}_S = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{u}_D = u_D \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$\underline{n}_D = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

Druck am Eintrittsquerschnitt:

$$p_S + \frac{\rho}{2} u_S^2 = p_0 + \frac{\rho}{2} u_0^2 + \frac{\rho}{2} u_S^2 \, \rho_F \qquad \tfrac{1}{2}$$

$$p_S = p_0 + \frac{\rho}{2} u_0^2 + \frac{\rho}{2} u_S^2 (-1 + \rho_F) = p_0 + \frac{\rho}{2} u_0^2 + \frac{\rho}{2} u_0^2 \cdot \left(\frac{d_D}{d}\right)^4 (\rho_F - 1) \qquad \tfrac{1}{2}$$

$$p_S = 100.000\,Pa + \frac{1000}{2} \frac{kg}{m^3} \cdot \left(24{,}1 \frac{m}{s}\right)^2 + \frac{1000}{2} \frac{kg}{m^3} \left(24{,}1 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot \left(\frac{0{,}025}{0{,}1}\right)^4 (0{,}47 - 1)$$

$$p_S = 389.804\,Pa \qquad \tfrac{1}{2}$$

Impulssatz in x-Richtung

$$\rho A_S u_S (u_S \cdot (-1) + 0 \cdot 0) + \rho A_D \cdot u_D \cos\alpha \,(u_D \cos^2\alpha + u_D \sin^2\alpha) = F_x + p_S A_S - p_0 A_S \qquad \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$$

$$-\rho A_S u_S^2 + \rho A_D u_D^2 \cos\alpha = F_x + A_S (p_S - p_0)$$

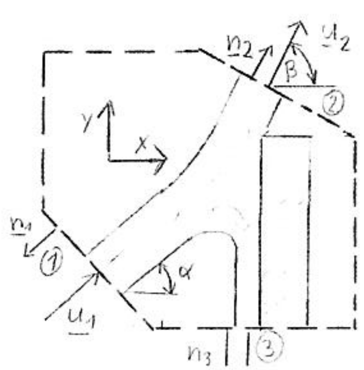
$$F_x = \rho \cdot \dot{V} \cdot (u_D \cos\alpha - u_S) + A_S (-p_S + p_0) \qquad \tfrac{1}{2}$$

$$F_x = 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}0118 \frac{m^3}{s} \left(24{,}1 \frac{m}{s} \cdot \cos(60^\circ) - 24{,}1 \frac{m}{s} \cdot \left(\frac{0{,}025}{0{,}1}\right)^2\right) + \frac{\pi}{4} (0{,}1\,m)^2 (-389.804\,Pa + 100.000\,Pa)$$

$$F_x = -2153\,N = -2{,}153\,kN \qquad \tfrac{1}{2}$$

Kraft auf Spritzenwagen: $F_S = -F_x = 2{,}153\,kN$ $\tfrac{1}{2}$

d)
6,5



$$\underline{u}_1 = u_1 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} ; \quad \underline{n}_1 = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = u_2 \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} ; \quad \underline{n}_2 = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_3 \end{pmatrix} ; \quad \underline{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme β mit Impulssatz in y-Richtung

$$\rho A_1 \cdot u_1 \sin\alpha \,(u_1 \cos\alpha(-\cos\alpha) + u_1 \sin\alpha(-\sin\alpha)) + \rho A_2 u_2 \sin\beta \,(u_2 \cos^2\beta + u_2 \sin^2\beta)$$
$$+ \rho A_3 (-u_3)(-u_3 \cdot (-1) + 0 \cdot 0) = 0 \qquad \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$$

(Keine weiteren Kräfte) $\tfrac{1}{2}$

$$\rho \dot{V}_1 \sin\alpha (-u_1) + \rho \dot{V}_2 \sin\beta\, u_2 + \rho \dot{V}_3 - u_3 = 0$$

$$\frac{\rho}{2} u_1^2 = \frac{\rho}{2} u_2^2 \; ; \; \frac{\rho}{2} u_1^2 = \frac{\rho}{2} u_3^2 \Rightarrow u_1 = u_2 = u_3 \quad \text{(aus Bernoulli)} \qquad 1$$

$$\Rightarrow \quad -\dot{V}_1 \sin\alpha + \dot{V}_2 \sin\beta - \dot{V}_3 = 0$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \; ; \quad \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_3} = \frac{3}{1} \Rightarrow \dot{V}_2 = 3\dot{V}_3 \qquad \tfrac{1}{2}$$

$$\dot{V}_1 = 3\dot{V}_3 + \dot{V}_3 = 4\dot{V}_3 \qquad \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -4\dot{V}_3 \sin\alpha + 3\dot{V}_3 \sin\beta - \dot{V}_3 = 0$$

$$-4\sin\alpha + 3\sin\beta - 1 = 0 \qquad \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\beta = (1 + 4\sin\alpha)\frac{1}{3} = (1 + 4\sin(30^\circ))\frac{1}{3} = \left(1 + 4 \cdot \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3} = 1 \qquad \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = 90^\circ \qquad \tfrac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Der Strahl geht senkrecht nach oben!

Σ 21,5

$\boxed{A2}$

a) 3,5 $\quad F(z) = u_0 \cdot z + \frac{E}{2\pi} \ln(z) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z) \qquad 1 \quad 1 \quad 1/2 \quad 1$

Translation $\quad$ Quelle $\quad$ Zirkulation

b) 3,5 $\quad F(z) = u_0 (x+iy) + \frac{E}{2\pi} \ln(r \cdot e^{i\varphi}) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r \cdot e^{i\varphi})$

$= u_0(x+iy) + \frac{E}{2\pi}(\ln r + i\varphi) - \frac{\Gamma}{2\pi}(i\ln r - \varphi)$

$\Psi = \mathrm{Im}(F(z)) = u_0 y + \frac{E}{2\pi} \cdot \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

$\Psi = u_0 \cdot r \cdot \sin\varphi + \frac{E}{2\pi} \cdot \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \qquad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2$

$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = u_0 \cos\varphi + \frac{E}{2\pi r} \qquad 1$

$u_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -u_0 \sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r} \qquad 1$

c) 3 $\quad$ in Staupunkten ist $u_r = u_\varphi = 0 \qquad 1$

$0 = u_0 \cos\varphi + \frac{E}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad u_0 = -\frac{E}{2\pi r \cos\varphi} \qquad 1/2$

$0 = -u_0 \sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad u_0 = \frac{\Gamma}{2\pi r \sin\varphi} \qquad 1/2$

$\Rightarrow -\frac{E}{2\pi r \cos\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r \sin\varphi} \qquad | \cdot \frac{\sin\varphi}{(-E)} \qquad 1/2$

$\tan\varphi = -\frac{\Gamma}{E} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{\Gamma}{E}\right) \qquad 1/2$

d) 1,5 $\quad$ geg. $\varphi = \frac{5}{4}\pi \quad ; \quad E = 2\pi u_0$

$0 = u_0 \cos\varphi + \frac{E}{2\pi r} \qquad 1/2$

$\Rightarrow r_{SP} = -\frac{E}{2\pi u_0 \cos\varphi} = -\frac{2\pi u_0}{2\pi u_0 \cos(\frac{5}{4}\pi)} = -\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \qquad 1/2 \quad 1/2$

e) 1,5 $\quad \varphi = \arctan\left(-\frac{\Gamma}{E}\right) \Rightarrow \Gamma = -E \cdot \tan\varphi \qquad 1/2$

$\Gamma = -2\pi u_0 \cdot \tan\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -2\pi u_0 \cdot 1 \qquad 1/2$

$\Gamma = -2\pi u_0 = -E \qquad 1/2$

f) 2 $\quad \Psi = u_0 \cdot r \cdot \sin\varphi + \frac{E}{2\pi}\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

Staupunktkoordinaten $r_{SP} = \sqrt{2}$ und $\varphi_{SP} = \frac{5}{4}\pi$ einsetzen $\quad 1/2$

$\Psi_{SP} = u_0 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{2\pi u_0}{2\pi} \cdot \frac{5}{4}\pi - \frac{-2\pi u_0}{2\pi} \cdot \ln(\sqrt{2})$

$\Psi_{SP} = -u_0 + \frac{5}{4}\pi u_0 + u_0 \frac{\ln 2}{2} = u_0\left(\frac{5}{4}\pi - 1 + \frac{1}{2}\ln 2\right) \qquad 1/2 \quad 1/2$

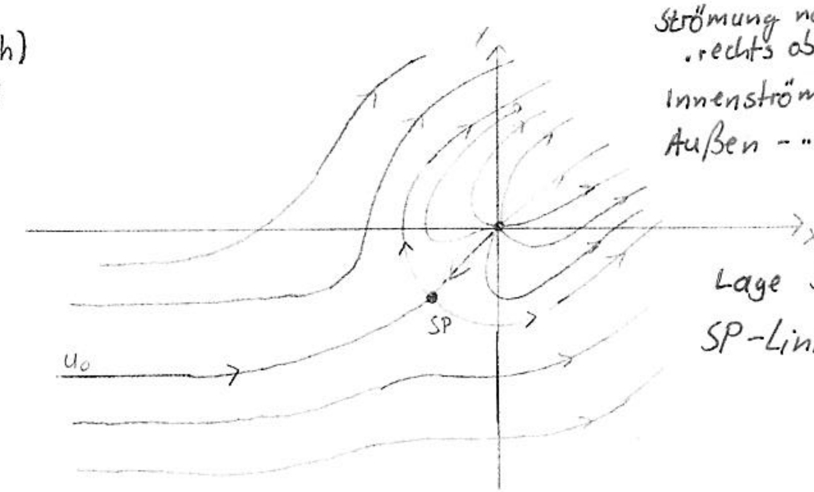
$\Psi_{SP} = u_0 \cdot 3{,}274 \qquad 1/2$

g) 2,5 $\quad$ auf Profilkontur ist $u_r = 0 \qquad 1$

$0 = u_0 \cos\varphi + \frac{E}{2\pi r} \quad \frac{1}{2} \Rightarrow \quad r = \frac{-E}{2\pi u_0 \cos\varphi} = -\frac{1}{\cos\varphi} \qquad 1/2$

$r_P = -\frac{1}{\cos\varphi_P} = -\frac{1}{\cos\pi} = 1 \qquad 1/2$

h) 4



Strömung nach „rechts oben"

Innenströmung

Außen - " -

Lage SP

SP-Linie $\frac{1}{2}$

24

$\boxed{A3}$

a) 1,5 $\quad p_\infty + \frac{\rho_F}{2} u_\infty^2 = p_0 + \underbrace{\frac{\rho_F}{2} u_0^2}_{=0}$ $\quad$ 1

$\Rightarrow u_\infty = \sqrt{\frac{(p_0 - p_\infty) 2}{\rho_F}}$ $\quad$ 1/2

b) 1 $\quad u_\infty = \sqrt{\frac{(140.000\,Pa - 80.000\,Pa)\,2}{0{,}22\ kg/m^3}} = 738{,}5\ \frac{m}{s}$ $\quad$ 1

$\Rightarrow$ deutlich größer als Schallgeschwindigkeit $\quad$ (1/2 Zusatzpkt.)

c) 1 $\quad$ Temperatur T_0 (Ruhetemperatur) $\quad$ 1

d) 3,5 $\quad$ Isentropen-Beziehung: $\quad \frac{p_2}{p_0} = \left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ $\quad$ 1

$\Rightarrow T_2 = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ $\quad$ 1/2

$\frac{p_0}{p_2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ $\quad$ 1

$Ma_2^2 = \left(\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) \cdot \frac{2}{\gamma-1} \Rightarrow Ma_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}$ $\quad$ 1

e) 5,5 $\quad$ Prandtl-Relation: $\quad u_1 u_2 = c^{*2}$ $\quad$ 1

$\Rightarrow u_\infty = \frac{c^{*2}}{u_2} = \frac{\gamma R T^*}{Ma_2 \cdot c_2}$ 1/2 1 $= \frac{\gamma R T_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)}{Ma_2 \cdot \sqrt{\gamma R T_2}}$ 1 1/2

mit Isentropenbeziehung aus d)

$u_\infty = \frac{\gamma R T_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)}{Ma_2 \sqrt{\gamma R T_0 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}$ 1 $= \frac{\sqrt{\gamma R T_0}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)}{Ma_2 \sqrt{\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}$ $\quad$ 1/2

Ma_2-Zahl aus d) einsetzen

$u_\infty = \frac{\sqrt{\gamma R T_0}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)}{\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]} \sqrt{\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}$ $\quad$ 1

T_0 aus idealer Gasgl.: $\quad T_0 = \frac{p_0}{R \rho_0}$ $\quad$ 1 $\quad$ Zusatzpk

$u_\infty = \frac{\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)}{\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}}$ $\quad$ 1/2

f) 6 $\quad Ma_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{5-3}\left[\left(\frac{1{,}4\,bar}{0{,}8\,bar}\right)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}} - 1\right]} = 0{,}868$ $\quad$ 1/2

$T_2 = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{p_0}{R \rho_0}\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ $\quad$ 1

$T_2 = \frac{140.000\,Pa}{2077{,}2\ \frac{J}{kg\,K} \cdot 0{,}22\ \frac{kg}{m^3}} \left(\frac{0{,}8\,bar}{1{,}4\,bar}\right)^{\frac{2}{5}} = 245\ K$ $\quad$ 1/2

$u_\infty = \frac{\sqrt{\frac{5}{3}\ \frac{140.000\,Pa}{0{,}22\,kg/m^3}}\left(\frac{3 \cdot 2}{5+3}\right)}{\sqrt{\frac{2 \cdot 3}{5-3}\left[1 - \left(\frac{0{,}8\,bar}{1{,}4\,bar}\right)^{\frac{2}{5}}\right]}} = 995{,}8\ \frac{m}{s}$ $\quad$ 1

$Ma_2^2 = \frac{(\gamma-1) Ma_\infty^2 + 2}{2\gamma Ma_\infty^2 + 1 - \gamma}$ $\quad$ 1

$Ma_2^2 (2\gamma Ma_\infty^2 + 1 - \gamma) = 2\gamma Ma_2^2 Ma_\infty^2 + Ma_2^2 (1-\gamma) = (\gamma-1) Ma_\infty^2 + 2$ $\quad$ 1/2

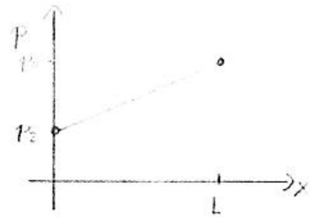
$2\gamma Ma_2^2 Ma_\infty^2 - (\gamma-1) Ma_\infty^2 = 2 - Ma_2^2 (1-\gamma)$

$Ma_\infty^2 (2\gamma Ma_2^2 + \cancel{\gamma}\,1 - \gamma)) = 2 + Ma_2^2 (\gamma - 1)$ $\quad$ 1/2

$Ma_\infty = \sqrt{\frac{2 + Ma_2^2 (\gamma-1)}{2\gamma Ma_2^2 + (1-\gamma)}}$ 1/2 $= \sqrt{\frac{2 + 0{,}868^2 (2/3)}{\frac{10}{3}\, 0{,}868^2 + (1 - \frac{5}{3})}}$

$Ma_\infty = 1{,}165$ $\quad$ 1/2

g)
5,5



$$p = \frac{p_0 - p_2}{L} \cdot x + p_2$$ 1

1

$$u = Ma \cdot c = \sqrt{\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] \frac{2}{\gamma - 1}} \cdot \sqrt{\gamma R T}$$ 1/2 1/2

T aus Isentropenbeziehung: $T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ 1/2

$$u = \sqrt{\frac{2\gamma R}{\gamma - 1} T_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$ 1

Lineare Druckbeziehung einsetzen

$$u = \sqrt{\frac{2\gamma R}{\gamma - 1} T_0 \left[1 - \left(\frac{p_0 - p_2}{p_0 \cdot L} \cdot x + \frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$ 1