Prof. Dr.-Ing. Holger Foysi
Lehrstuhl Strömungsmechanik

SS2013

Name:..Vorname:..Punkte:.........

Matr.-Nr.: ....

KLAUSUR STRÖMUNGSLEHRE - Fragenteil

Bitte direkt auf die Angabe schreiben. Blatt evtl. wenden!

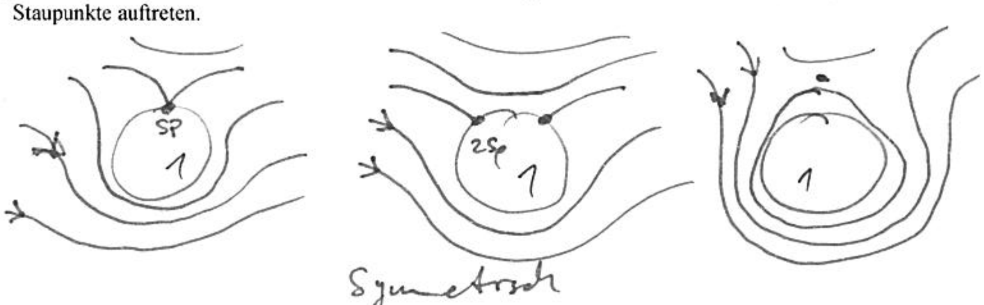
1) Gegeben ist die potentialtheoretisch modellierte Umströmung eines Zylinders mit Zirkulation (7P).

a) Geben Sie Namen und Formel der Elementarlösungen an, aus denen die Strömung zusammengesetzt ist.

Parallelstr. Dipol Zirkulation (Pot.wirbel)

$u_0 z$ 1 $\frac{m}{2\pi z}$ 1 $-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$ 1

b) Skizzieren Sie die Stromlinien um einen linksdrehenden Zylinder für den Fall dass ein, zwei, bzw. keine Staupunkte auftreten.



Symmetrisch

c) Wie ändert sich das zur Einstellung der Fälle in b) notwendige Dipolmoment?

gar nicht 1

2) In einem Ideenwettbewerb wird ein Vorschlag gemacht: Energie durch Fahrtwind. Hierzu soll auf einem Zugdach ein Aufsatz angebracht werden, der den Fahrtwind auffängt und durch einen Rotor zur Stromgewinnung leitet. Ist eine solche Idee sinnvoll? Begründen Sie Ihre Aussage.

Hinweise zur Abschätzung: gegeben sind Leistungsbeiwert c_L (der maximale Erntegrad eines Rotors, auch Leistungsbeiwert oder Wirkungsgrad genannt, beträgt etwa c_L = 60%; die Normierung erfolgt ähnlich zu der des Druck- oder Widerstandsbeiwertes), angeströmte Fläche A, die mittlere Geschwindigkeit der Strömung durch den Rotor, v. Bekannte Widerstandsbeiwerte sind: moderne PKWs $c_w \approx 0.35$, Queranströmung einer Kreisscheibe $c_w \approx 1.1$, einer senkrechten Platte $c_w \approx 0.9$, längsangeströmter Zylinder oder Würfel, $c_w \approx 0.9$. (5P)

$L_L = c_L \frac{1}{2} \rho u^2 \cdot u A \cdot \eta$ 1/2 $c_w \sim 0{,}8 - 1 >$ 1

$L_w = c_w \cdot \frac{1}{2} \rho u^2 A \cdot u$ 1/2 $c_L \cdot \eta$

$\Rightarrow$ lohnt nicht

Zusätzlich kommt Wind hinzu, ändert aber nicht c_L und c_w! Alternativ, 2. HS., Energieerhaltung.

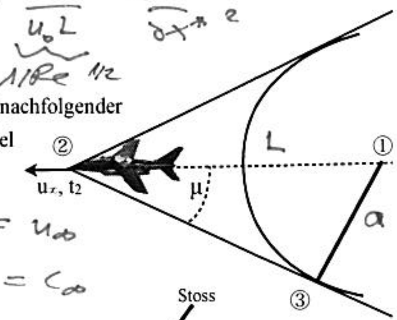
3) Gegeben: $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Referenzgrößen sind u_0, L, ρ_0; der Druck wird mit durch eine *gemis* Formulierung aus ρ_0, u_0, *und* der Schallgeschwindigkeit c_0 entdimensioniert. Geben Sie die dimensions Form der Gleichung mit Hilfe bekannter Kennzahlen an (5P).

$p \sim \rho_0 u_0 c_0$ 1

$\Rightarrow \frac{u_0}{L/u_0} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\rho_0 u_0 c_0}{\rho_0 \cdot L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu_0 \frac{u_0}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$ 1/2 1/2 1/2

$\Rightarrow \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\underbrace{\frac{c_0}{u_0}}_{1/Ma} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \underbrace{\frac{\nu_0}{u_0 L}}_{1/Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$ 1/2 1/2 1/2 1/2

4) Ein Flugzeug bewegt sich mit $Ma_x > 1$. Leiten Sie anhand nachfolgender Abbildung eine Beziehung für den halben Öffnungswinkel des Mach'schen Kegels her.(3P)



$\sin\mu = \frac{a}{L}$ $u_{Flugz.} = u_\infty$

$u_{Schall} = c_\infty$

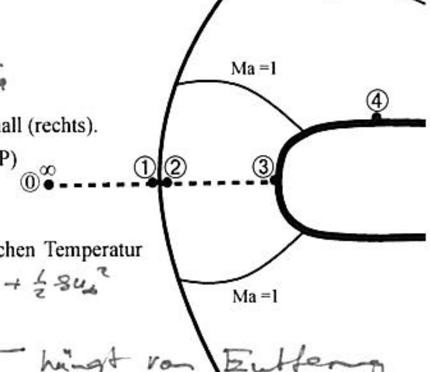
$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{u_\infty} = \frac{a}{c_\infty}$

$\Rightarrow \sin\mu = \frac{c_\infty \Delta t}{u_\infty \Delta t} = \frac{1}{Ma}$

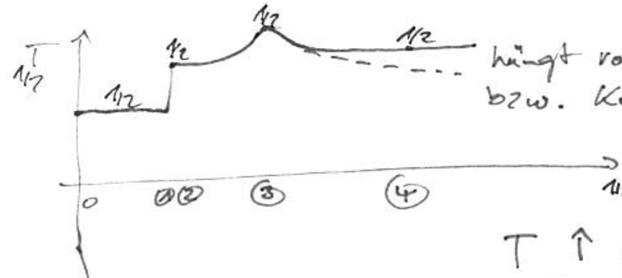
5) Gegeben ist die Anströmung eines Körpers im Überschall (rechts).

a) Wie ändert sich die Totaltemperatur von 0 bis 4? (1P)

Konstant



b) Skizzieren sie den zugehörigen Verlauf der statischen Temperatur über die angegebenen Punkte. (3P) $T_0 = T + \frac{1}{2}\rho u_0^2$



hängt von Entfernung bzw. Körperkontur ab

T ↑ falls u ↓ und umgekehrt

Total 24 Punkte. Viel Erfolg!

Musterlösung Klausur Strömungslehre Aufgabenteil

– SoSe 2013 28.08.2013 –

Fragen 24

$\boxed{A\,1}$ $\Sigma\,33{,}5$

Σ 6 a) ges.: Volumenstrom Q

$Q = w_1 \cdot A_1$ 1 $A_1 = A_2$

Bernoulli-Gl. $\infty \to 1$

$$\overset{1/2}{p_\infty} + \frac{\rho}{2}\underbrace{\cancel{w_\infty^2}}_{=0} + 0 = p_1 + \frac{\rho}{2}w_1^2 - \rho g H_1 + \frac{\rho}{2}w_1^2 \cdot \zeta_E$$

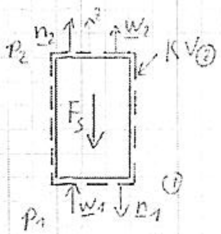
$$p_\infty - p_1 + \rho g H_1 = \frac{\rho}{2}w_1^2(1+\zeta_E) \quad \tfrac{1}{2} \text{ Umstellen + Rechnung}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{2(p_\infty - p_1 + \rho g H_1)}{\rho(1+\zeta_E)}} = \sqrt{\frac{2(100.000\,Pa - 88980\,Pa + 9{,}8\frac{m}{s^2}\cdot 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 0{,}1m)}{1000\frac{kg}{m^3}(1+0{,}5)}}$$

$w_1 = 4\,\frac{m}{s}$ $\tfrac{1}{2}$ Ergebnis

$Q = w_1 \cdot A_2 = 4\frac{m}{s}\cdot 0{,}0007\,m^2 = 0{,}0028\,\frac{m^3}{s}$ $\tfrac{1}{2}$ Ergebnis

Σ 9,5 b) ges.: Rohreibungsbeiwert λ_2



$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix}0\\w_1\end{pmatrix}$ $\underline{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\w_1\end{pmatrix}$

$\underline{n}_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ $\underline{n}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Impulssatz in z-Richtung:

$$\rho w_1(0\cdot 0 + w_1\cdot(-1))A_1 + \rho w_2(0\cdot 0 + w_2\cdot 1)A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_S - \rho A_2 L_2 g$$

$$-\rho w_1^2 A_2 + \rho w_1^2 A_2 = 0 = A_2(p_1 - p_2) - F_S - \rho A_2 L_2 g$$

Druckdifferenz aus Bernoulli-Gl. von $1 \to 2$

$$p_1 + \cancel{\frac{\rho}{2}w_1^2} + \rho g \cdot 0 = p_2 + \cancel{\frac{\rho}{2}w_2^2} + \rho g L_2 + \frac{\rho}{2}w_2^2 \lambda_2 \frac{L_2}{D_2}$$

$$p_1 - p_2 = \rho g L_2 + \frac{\rho}{2}w_1^2 \lambda_2 \frac{L_2}{D_2}$$

alternativer Lösungsweg für Teil b) auch möglich!

$$0 = A_2\left(\rho g L_2 + \frac{\rho}{2}w_1^2 \lambda_2 \frac{L_2}{D_2}\right) - F_S - \rho A_2 L_2 g$$

$F_S = \frac{\rho}{2}w_1^2 \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} A_2$ 1

$$\lambda_2 = \frac{F_S \cdot 2}{\frac{L_2}{D_2}\rho w_1^2 A_2} = \frac{2 \cdot 2{,}8\,N}{25 \cdot 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 16\frac{m^2}{s^2}\cdot 0{,}0007\,m^2} = 0{,}02 \quad \tfrac{1}{2}$$

Σ 11,5 c) ges.: Pumpenleistung P_P

$P_P = Q \cdot \Delta p_P \frac{1}{\eta_P}$ $\tfrac{1}{2}$

Druckdifferenz Δp_P über Bernoulli-Gl von $\infty \to 3$

$$p_\infty + \frac{\rho}{2}\underbrace{\cancel{w_\infty^2}}_{=0} + \rho g \underbrace{\cancel{h_\infty}}_{=0} = \underset{p_\infty}{p_3} + \frac{\rho}{2}w_3^2 + \rho g(L_2 - H_1 + L_3 \sin\varepsilon) + p_V - \Delta$$

$$\Delta p_P = \frac{\rho}{2}w_3^2 + \rho g(L_2 - H_1 + L_3\sin\varepsilon) + p_V$$

$$p_V = \frac{\rho}{2}w_1^2\left(\zeta_E + \lambda_2\frac{L_2}{D_2}\right) + \frac{\rho}{2}w_3^2 \lambda_3 \frac{L_3}{D_{3H}}$$

Hydraulischer Durchmesser D_{3H}:

$D_{3H} = \frac{4A_3}{U_3} = \frac{4b\cdot h}{2(b+h)} = \frac{2\cdot 0{,}05m\cdot 0{,}01m}{0{,}06m} = 0{,}01\overline{6}\,m$ 1

Konti.-Gl für w_3:

$w_3 = \frac{Q}{A_3} = \frac{Q}{b\cdot h} = \frac{0{,}0028\,m^3/s}{0{,}05m\cdot 0{,}01m} = 5{,}6\,\frac{m}{s}$ 1

$$\Rightarrow p_V = 500\frac{kg}{m^3}\,16\frac{m^2}{s^2}(0{,}5 + 0{,}02\cdot 25) + 500\frac{kg}{m^3}\left(5{,}6\frac{m}{s}\right)^2\cdot 0{,}02\cdot\frac{0{,}71m}{0{,}01\overline{6}m}$$

$p_V = 21.359\,Pa$

L_2 berechnen: $L_2 = \frac{L_2}{D_2}\cdot D_2 = \frac{L_2}{D_2}\sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = 0{,}746\,m$ 1

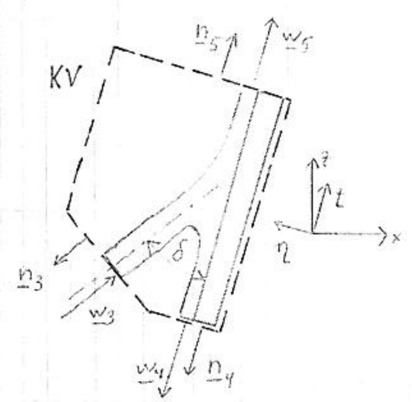
$$\Rightarrow \Delta p_P = 500\frac{kg}{m^3}\left(5{,}6\frac{m}{s}\right)^2 + 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}(0{,}746m - 0{,}1m + 0{,}71m\cdot\sin(44°$$

$+ 21.359\,Pa$

$\Delta p_P = 26.844\,Pa + 21.359\,Pa = 48.203\,Pa$

$P_P = Q \Delta p_P \frac{1}{\eta_P} = 0{,}0028 \frac{m^3}{s} \cdot 48.203\,Pa \frac{1}{0{,}9} = 150\,W$ 1 Rechnung + Ergebnis

Σ 6,5 d)



Vektoren in t, η - Achsensystem: 1

$\underline{w}_3 = w_3 \begin{pmatrix} \cos\delta \\ -\sin\delta \end{pmatrix}$ $\underline{n}_3 = \begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}$

$\underline{w}_4 = w_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{n}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{w}_5 = w_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{n}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Impulssatz in tangentialer Richtung (t-Achse):

$\rho A_3 \, w_3 \cos\delta \,(w_3(\cos\delta(-\cos\delta) - \sin\delta \cdot \sin\delta) + \rho A_4 (-w_4)(-w_4 \cdot (-1) + 0 \cdot 0)$ ½ ½ ½

$+ \rho A_5 \, w_5 \,(w_5 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = 0$ ½ ½

$-\rho A_3 w_3^2 \cos\delta - \rho A_4 w_4^2 + \rho A_5 w_5^2$

mit $w_3 = w_4 = w_5$ u. Kontigl.: $A_3 w_3 = A_4 w_4 + A_5 w_4$ 1

$\Rightarrow A_3 = A_4 + A_5$

$\Longrightarrow -(A_4 + A_5)\cos\delta - A_4 + A_5 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{A_5}$

$-\left(\frac{A_4}{A_5} + 1\right)\cos\delta - \frac{A_4}{A_5} + 1 = 0 \qquad \frac{A_4}{A_5} = \xi$ ½

$-(\xi + 1)\cos\delta = \xi - 1$

$\Rightarrow \delta = \arccos\left(-\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right) = \arccos\left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi}\right)$ ½

$\boxed{A\ 2}$ Σ 22,5

Σ 4 a) ges.: $\frac{\partial p}{\partial z}$

$\underbrace{\frac{\partial \rho u_z}{\partial t}}_{=0} = -\underbrace{\frac{\partial \rho u_z u_z}{\partial z}}_{=0} - \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial \rho u_z u_\varphi}{\partial \varphi}}_{=0} - \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial r \rho u_z u_r}{\partial r}}_{=0} - \frac{\partial p}{\partial z} + V_z$ ½ ½ ½ ½

Advektions terme unberücksichtig

$\frac{\partial p}{\partial z} = V_z = \underbrace{\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}}_{=0} + \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi}}_{=0} + \frac{1}{r}\frac{\partial r \tau_{zr}}{\partial r} - \underbrace{\rho g}_{=0}$ ½ ½ ½

2. Albeitung — kein Änderung in Umfangsrichtung — Kein Schwerkraft einfluss

$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial r \tau_{zr}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \mu \underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial r}}_{=0}\right)$ ½ $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = 0$

$u_z \neq f(r)$

Σ 3 b) ges.: Randbedingungen

Druck: $p(r = R_i, z) = p_\infty$ ½

$p(r = R_a, z) = p_\infty$ ½

Geschwindigkeit: $u_z(r, z=0) = 0$ ½ $u_r(r, z=0) = 0$ ½

$u_z(r, z=h) = -U$ ½ $u_r(r, z=h) = 0$ ½

Σ 7 c) ges.: Druckverlauf

Kontigl.: $\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}}_{=0} = 0$ ½

Radialgeschwindigkeit einsetzen:

$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{2\mu r}\frac{\partial(pr)}{\partial r}(z^2 - hz)\right) = 0$ 1 Eins

$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2(pr)}{\partial r^2}(z^2 - hz)$ ½ Gleich umstell

Integration von z=0 bis z=h

$$\int_0^h \frac{\partial u_z}{\partial z}\, dz = \underbrace{-\frac{1}{r}\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2(pr)}{\partial r^2}}_{\neq f(z)} \int_0^h (z^2 - hz)\, dz$$ 1 Integration

$$u_z(h) - u_z(0) = -\frac{1}{r}\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2(pr)}{\partial r^2}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{hz^2}{2}\right)\Big|_0^h$$

1 $$-U - 0 = -\frac{1}{r}\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2(pr)}{\partial r^2}\left(-\frac{h^3}{6}\right)$$ 1

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2(pr)}{\partial r^2} = -\frac{12U\mu}{h^3}\, r \qquad \text{Setze } -\frac{12U\mu}{h^3} = c_0$$

$$\frac{\partial(pr)}{\partial r} = c_0\frac{r^2}{2} + c_1$$ 1

$$pr = c_0\frac{r^3}{6} + c_1 r + c_2 \qquad \left|\cdot \frac{1}{r}\right.$$ 1

$$p(r) = c_0\frac{r^2}{6} + c_1 + \frac{c_2}{r}$$

2 8.5 d) ges.: Integrationskonstanten, Kraft auf Platte

$$p(r=R_i) = p_\infty = c_0\frac{R_i^2}{6} + c_1 + \frac{c_2}{R_i} \quad (1)$$ 1/2

$$p(r=R_a) = p_\infty = c_0\frac{R_a^2}{6} + c_1 + \frac{c_2}{R_a} \quad (2)$$ 1/2

$$(1)=(2) \Rightarrow c_0\frac{R_i^2}{6} + \frac{c_2}{R_i} = c_0\frac{R_a^2}{6} + \frac{c_2}{R_a}$$

$$c_2\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right) = c_0\frac{R_a^2 - R_i^2}{6} = c_0\frac{(R_a+R_i)(R_a-R_i)}{6}$$ } 1/2 Lösungsansatz

$$c_2 = \frac{c_0}{6}(R_a+R_i)R_aR_i = -\frac{2U\mu}{h^3}(R_a+R_i)R_aR_i$$ 1

aus (1): $$c_1 = p_\infty - c_0\frac{R_i^2}{6} - \frac{c_2}{R_i} = p_\infty + \frac{2U\mu}{h^3}R_i^2 + \frac{2U\mu}{h^3}(R_a+R_i)R_a$$

1/2 Lösungsansatz → $$c_1 = p_\infty + \frac{2U\mu}{h^3}(R_i^2 + R_a^2 + R_iR_a)$$ 1

$$F = \int_A (p(r) - p_\infty)\, dA = \int_{R_i}^{R_a} (p(r) - p_\infty)\, \overbrace{2\pi r\, dr}^{1}$$ 1 1

$$= 2\pi\int_{R_i}^{R_a}\left(c_0\frac{r^3}{6} + c_1 r + c_2 - p_\infty r\right) dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{c_0}{24}r^4 + \frac{c_1}{2}r^2 - \frac{p_\infty}{2}r^2 + c_2 r\right]_{R_i}^{R_a}$$ 1 Integration

$$= \frac{\pi}{12}c_0(R_a^4 - R_i^4) + \pi(c_1 - p_\infty)(R_a^2 - R_i^2) + 2\pi c_2(R_a - R_i)$$ 1/2 Erg

$\boxed{A\,3}$ $\Sigma\, 15{,}5$

Σ1,5 a) ges.: Ma_1

$$\frac{A_a}{A^*} = \frac{1{,}25\,m^2}{0{,}05\,m^2} = 25 \rightarrow \text{Tabelle} \quad Ma_1 = 5$$ 1 ½

Σ7 b) ges.: Stoßwinkel β

für kleine Winkel gilt: $\sin(x) \approx x$; $\cos(x) \approx 1$; $\cos(2x) \approx 1$

$$2\theta = \frac{2^2}{\beta} \frac{Ma_1^2 \beta^2 - 1}{Ma_1^2(\gamma+1)+2} = \frac{2}{\beta}\frac{25\beta^2-1}{62}$$ 1 ½ ½ ½

$$31\beta\theta = 25\beta^2 - 1 \Rightarrow \beta^2 - \frac{31}{25}\theta\beta - \frac{1}{25}$$ 1 quadr. Gleichung

$$\theta = 10° = 10° \cdot \frac{\pi}{180°} = 0{,}1745$$ 1 Umrechnung

p,q-Formel: $p = -\frac{31}{25}\theta$ $\quad q = -\frac{1}{25}$

$$\beta_{1/2} = +\frac{31}{2\cdot 25}\theta \pm \sqrt{\left(\frac{31}{2\cdot 25}\theta\right)^2 + \frac{1}{25}}$$ 1 Lösung quadr. Gleichung

$$\beta_{1/2} = 0{,}1082 \pm 0{,}2274$$ ½ Ergebnis

$\beta_1 = 0{,}3356$ $\quad \beta_2 = -0{,}1192$ ← physikalisch ohne Sinn 1

$$\beta = \beta_1 = 0{,}3356 \cdot \frac{180°}{\pi} = 19{,}23°$$ ½

Σ3 c) ges.: p_1

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(Ma_1^2 - 1)$$ 1 mit $Ma_1 = Ma_{1n}$ 1

$$\Rightarrow p_1 = p_2 \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(Ma_1^2 \cdot \sin^2\beta - 1)\right)^{-1}$$

$$p_1 = 10^4 Pa \left(1 + \frac{2{,}8}{2{,}4}(25 \cdot \sin^2 20° - 1)\right)^{-1}$$

$$p_1 = 3081\ Pa$$ 1

Σ2 d) ges.: p_0

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$ 1

$$p_0 = 3081\ Pa\ (1 + 0{,}2 \cdot 25)^{3{,}5} = 1.630.126\ Pa$$ 1

Σ2 e) ges.: β für $\theta = 0$

Linearisierte Gleichung aus b):

$$0 = \theta = \frac{2}{\beta}\frac{Ma_1^2\beta^2 - 1}{Ma_1^2(\gamma+1)+2} \quad \Big| \cdot \frac{\beta}{2}(Ma_1^2(\gamma+1)+2)$$

$$0 = Ma_1^2\beta^2 - 1$$

$$\beta = \frac{1}{Ma_1} = 0{,}2 = 0{,}2 \cdot \frac{180°}{\pi} = 11{,}5°$$ ½ Ergeb

½ umrec