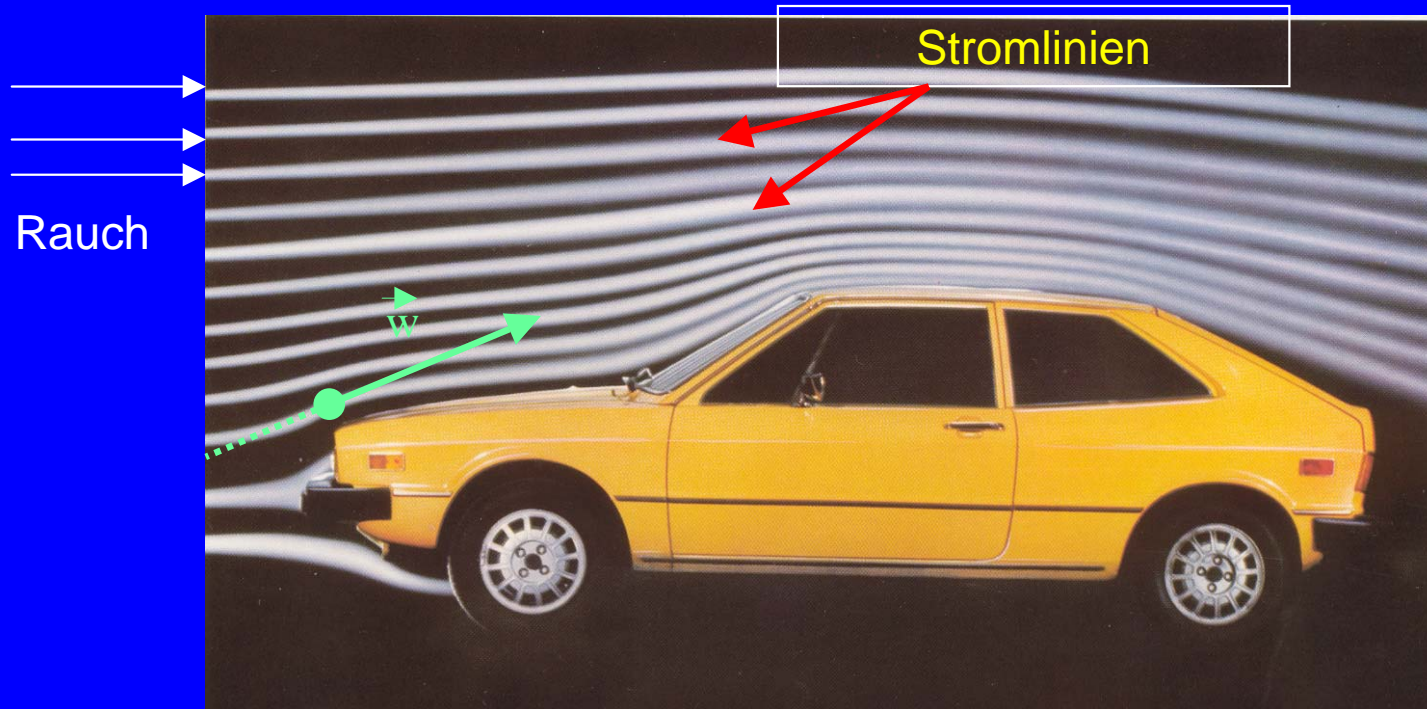


Beschreibung eines Strömungsfeldes



Strömungsfeld eindeutig beschrieben durch:

Geschwindigkeit $\vec{w} = (u, v, w)$

Dichte ρ

Druck p

Temperatur T



Beschreibung eines Strömungsfeldes

Kontinuumsmechanik: (im Gegensatz zur Moleküldynamik oder Massenpunktmechanik)

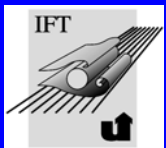
Charakteristische physikalische Größen einer Strömung, Geschwindigkeit $\vec{w} = (u, v, w)$, Druck p , Dichte ρ und Temperatur T im betrachteten Bereich (Stromfeld) als **kontinuierliche Funktionen** des Ortes $\vec{r} = (x, y, z)$ und der Zeit t :

Geschwindigkeit $\vec{w} = (u, v, w)$
Dichte ρ
Druck p
Temperatur T

} = $f(x, y, z, t) = f(\vec{r}, t)$

Feldgrößen: beschreiben eindeutig einen Strömungszustand; 6 abhängige (u, v, w, p, ρ, T) und 4 unabhängige (x, y, z, t) Variablen

- Modell des Kontinuums (Modellannahmen, Grenzen)
- Fluideigenschaften aus molekularem Aufbau der Materie



1. Eigenschaften von Fluiden

Für das Verständnis von Strömungsvorgängen sind Kenntnisse über den molekularen Aufbau von Fluiden notwendig:

Mikrostruktur

1.1 Molekularer Aufbau (Mikrostruktur)

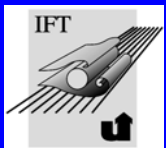
Kleinste Bestandteile der Materie:

Atome/Moleküle = **undurchdringliche** Kugeln
mit einem **mittleren Durchmesser** von:

$$d = 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA} (\text{\AA} \text{ngström})$$

Aufbau von Flüssigkeiten, Gasen und festen Körpern (=3 Aggregatzustände) völlig unterschiedlich. Maßgebend hierfür ist der Abstand der einzelnen Moleküle.

Dabei sind **zwei Tatsachen von wesentlichem Einfluß:**



1. Falls relativ **wenig** Teilchen pro Volumen vorhanden sind, dann

- großer Teilchenabstand im Vergleich zum Durchmesser und damit niedrige Dichte ρ (Masse / Volumen)
- leicht komprimierbar (zusammendrückbar)
- kaum Beeinflussung der Teilchen untereinander:
völlig regellose, statistische Bewegung und Verteilung
der Teilchen auf Grund **thermischer Energie**,
z.B. Brownsche Molekularbewegung bei Gasen.



völlig regellose, statistische Bewegung

Die Teilchen können nur nach Durchfliegen der sog. „mittleren freien Weglänge“ zusammenstoßen:

mittlere freie Weglänge L :

$$L \sim 10^{-7} \text{ m} \quad L/d \sim 10^3$$

mittlere Molekülgeschwindigkeit:

$$\bar{c} = 500 \text{ m/s} \quad \text{mit} \quad \bar{c} \sim \sqrt{T}$$

(bei Atmosphärendruck und 20° C)

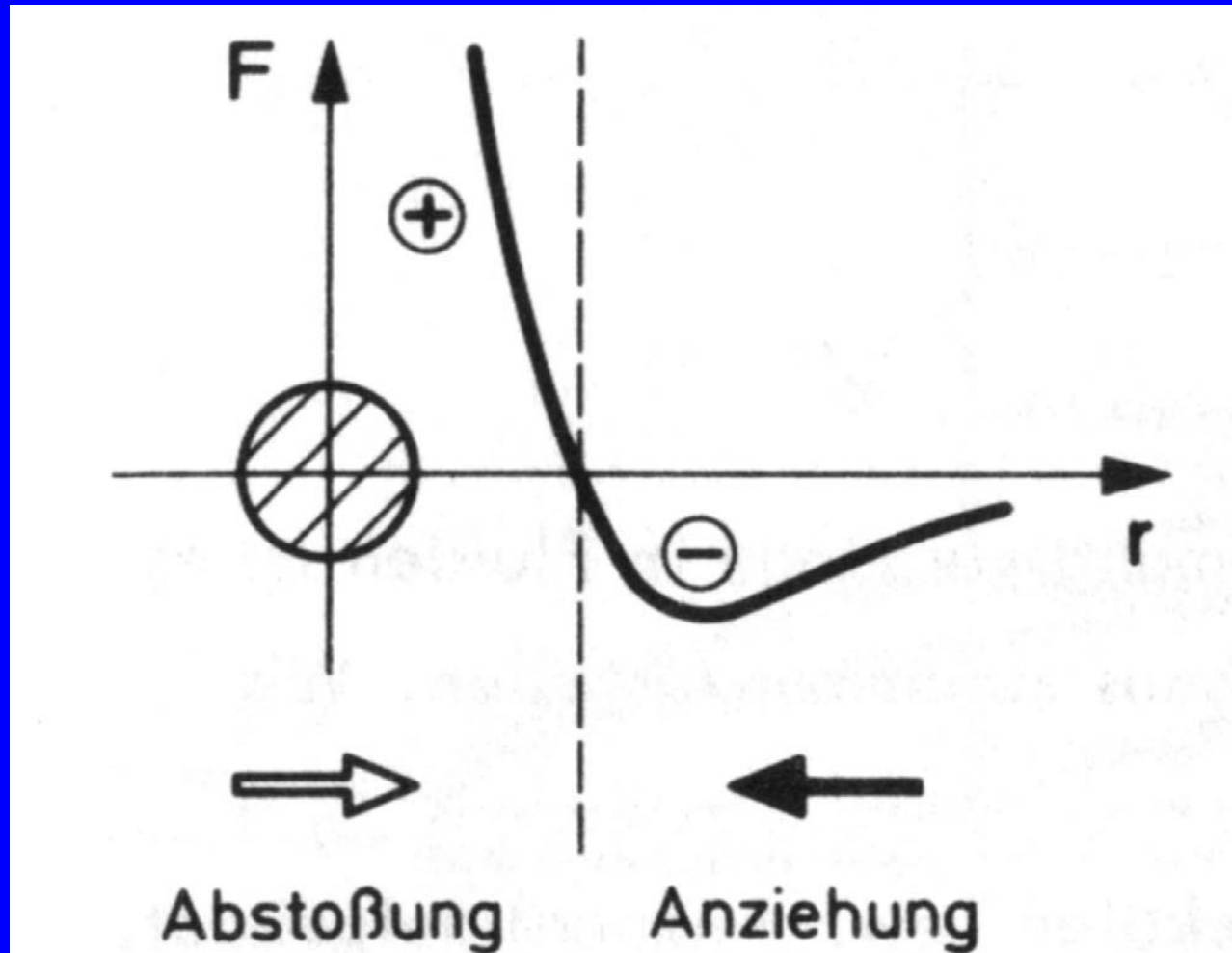


2. Relativ **viele** Teilchen pro Volumen vorhanden, dann

- relativ **kleiner** Teilchenabstand im Vergleich zum Durchmesser und damit **relativ hohe Dichte ρ** (Masse/Vol.)
- schwer **komprimierbar** (zusammendrückbar)
- In diesem Fall wirken die intermolekularen Anziehungskräfte, sog. **van-der-Waals-Kräfte**.



Intermolekulare Kraft, die ein im Nullpunkt liegendes Teilchen auf ein anderes ausübt



2. Falls relativ **viele** Teilchen pro Volumen vorhanden sind,

- d.h. relativ **kleiner Teilchenabstand** im Vergleich zum Durchmesser und damit **relativ hohe Dichte ρ (Masse/Vol.)**
- schwer **komprimierbar** (zusammendrückbar)
- In diesem Fall wirken die intermolekularen Anziehungskräfte, sog. **van-der-Waals-Kräfte**.

mittlere freie Weglänge L : $L \sim 10^{-9} \text{ m bis } 10^{-8} \text{ m}$

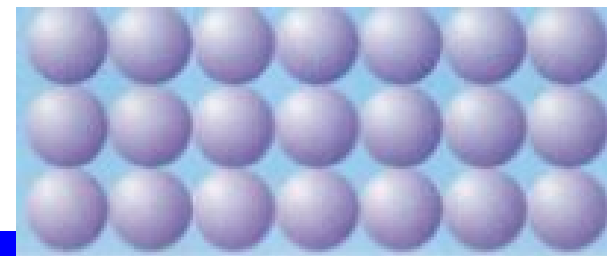
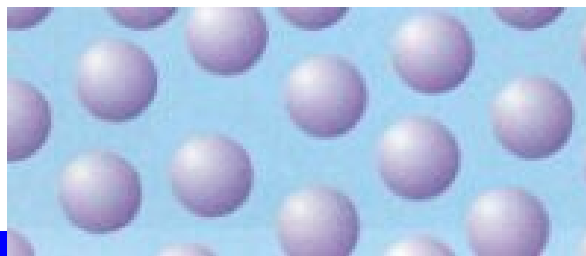
also $L/d \sim 10 \text{ bis max. } 100$

Zusammenspiel von 1. und 2. liefert den **Aufbau von Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern**



Zusammenspiel von 1. und 2. liefert den Aufbau von Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern (3 Aggregatzustände)

Gas	Flüssigkeit	fester Körper
<p>1. überwiegt 2.</p> <p>regellose, stochastische Bewegung</p> <p>Teilchen frei beweglich Dichte ρ = variabel (kompressibel)</p>	<p>1. ~ 2.</p> <p>Zufallsbewegung, die aber nicht unbeeinflusst vom Nachbarn erfolgt</p> <p>Zwar noch frei beweglich, aber mehr Reibung Dichte ρ ~ konstant (inkompressibel)</p>	<p>2. überwiegt 1.</p> <p>Teilchen an feste Plätze gebunden</p> <p>„unbeweglich“ Kristallgitter</p>



Zusammenspiel von 1. und 2. liefert den Aufbau von Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern (3 Aggregatzustände)

Gas	Flüssigkeit	fester Körper
<p>1. überwiegt 2.</p> <p>regellose, stochastische Bewegung</p> <p>Teilchen frei beweglich Dichte ρ = variabel (kompressibel)</p>	<p>1. ~ 2.</p> <p>Zufallsbewegung, die aber nicht unbeeinflusst vom Nachbarn erfolgt</p> <p>Zwar noch frei beweglich, aber mehr Reibung Dichte ρ ~ konstant (inkompressibel)</p>	<p>2. überwiegt 1.</p> <p>Teilchen an feste Plätze gebunden</p> <p>„unbeweglich“ Kristallgitter</p>

Übergang zum Kontinuum für alle 3 Aggregatzustände

=> Kontinuumshypothese



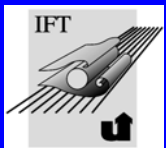
Kontinuumshypothese

Massendichte: $\rho = M/V$ (Masse / Volumen)

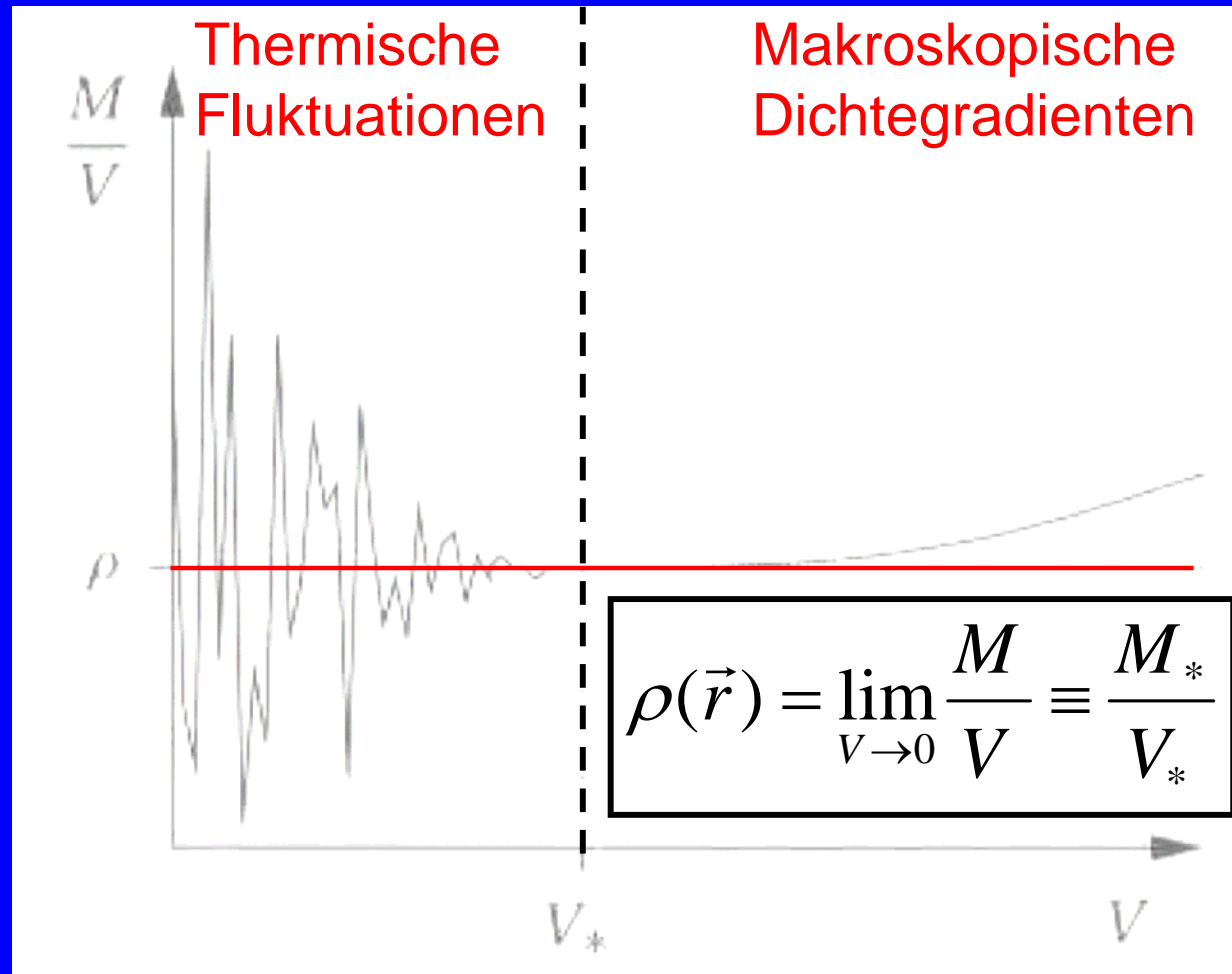
$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{V}$$

- V: betrachtetes Volumen
- N: Anzahl Moleküle/Atome im Volumen V
- m_i : Masse der einzelnen Moleküle/Atome

**=> Ergebnis abhängig von Größe des Volumens V
(Anzahl der Moleküle / Atome im Volumen)**



Mittlere Dichte eines Fluids als Funktion des Volumens



Extrapolation der Dichte in V_* nach $V \rightarrow 0$:

ρ ist kontinuierliche Funktion in Raum und Zeit!



Kontinuumshypothese

Kontinuierliche Verteilung von

- Dichte

$$\rho(\vec{r}, t)$$

- Geschwindigkeit

$$\vec{w}(\vec{r}, t)$$

- Druck

$$p(\vec{r}, t)$$

- Temperatur

$$T(\vec{r}, t)$$

in Raum und Zeit.

=> **Materieller Punkt im Raum heißt Fluidteilchen**

Gültig, wenn V_* (Anzahl Moleküle / Atome)

- so groß, dass Eigenschaften unabhängig von V_*

- klein gegenüber makroskopisch interessierender Länge



Gültigkeitsbereich der Kontinuumshypothese

Gerade noch ausreichende Anzahl von Molekülen / Atomen:

$$10^8 = 100000000$$

=> Notwendiges Volumen V_* (charakteristische Länge $l = V_*^{1/3}$)
bei Atmosphärendruck und 20° C (**Größenordnungen!**)

- Wasser: $V_* = 10^{-21} \text{ m}^3 \Rightarrow l = 10^{-7} \text{ m} = 0.1 \text{ } \mu\text{m}$
- Luft (Gas): $V_* = 10^{-18} \text{ m}^3 \Rightarrow l = 10^{-6} \text{ m} = 1 \text{ } \mu\text{m}$

=> Makroskopische Abmessungen groß gegenüber l



Gültigkeitsbereich der Kontinuumshypothese

Grenzen der Kontinuumsmechanik z.B.

- Mikrofluidik (Gas) und Nanofluidik

=> makroskopische Abmessungen zu klein!

- Stark verdünnte Gase (wenig Moleküle pro Volumen)

=> mikroskopische Abmessungen zu groß!

z.B. Wiedereintritt in Atmosphäre



Gase, Flüssigkeiten und feste Körper (3 Aggregatzustände) als Kontinuum beschreibbar (auf größeren Längenskalen)

Gas	Flüssigkeit	fester Körper
<p>1. überwiegt 2.</p> <p>regellose, stochastische Bewegung</p> <p>Teilchen frei beweglich Dichte ρ = variabel (kompressibel)</p>	<p>1. ~ 2.</p> <p>Zufallsbewegung, die aber nicht unbeeinflusst vom Nachbarn erfolgt</p> <p>Zwar noch frei beweglich, aber mehr Reibung Dichte ρ ~ konstant (inkompressibel)</p>	<p>2. überwiegt 1.</p> <p>Teilchen an feste Plätze gebunden</p> <p>„unbeweglich“ Kristallgitter</p>

Es besteht ein grundsätzlicher Unterschied zwischen einem festen, elastischen Körper und Fluiden.

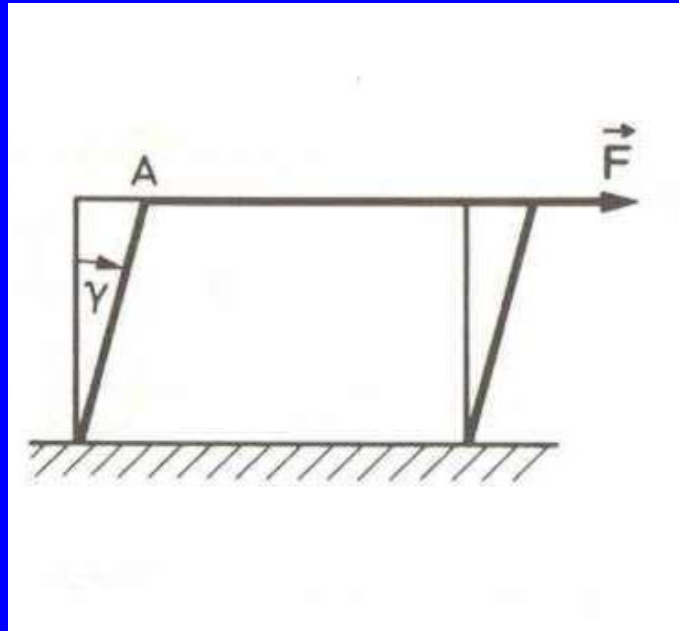
Erläuterung am Fall der Beanspruchung auf Scherung → Zähigkeit



1.2 Widerstand gegenüber Formänderung (Scherung): Viskosität, Zähigkeit

a) fester, elastischer Körper:

Für kleine Deformationen/Deformationswinkel: $\gamma \ll 1$



Es gilt das Hooksche Gesetz:

G = Gleit- oder Schubmodul

τ = Schubspannung

$$\frac{|\vec{F}|}{A} = \tau = G \cdot \gamma$$



Beim festen, elastischen Körper gilt :

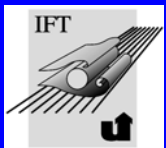
Schubspannung \sim Deformation

$$\tau \sim \gamma$$

Allgemein:

$$\tau = f(\gamma) \quad \text{mit} \quad f(0) = 0$$

=> Material ist fester Körper!



Dynamische Viskosität (Zähigkeit) μ

Maß für erforderliche Kraft ($\sim \tau$), um du/dy zu erzeugen

$$\mu = \frac{\vec{F} / A}{du / dy} = \frac{\tau}{du / dy}$$

$$[\mu] = \frac{N / m^2}{m / s / m} = \frac{N}{m^2} s = Pa \cdot s$$

Viskosität (= innere Reibung) aus molekularen Eigenschaften

- Gas: Impulsaustausch senkrecht zur Strömungsrichtung durch Stöße mit langsameren/schnelleren Molekülen
- Flüssigkeit: intermolekulare Anziehung dominiert

Immer Vergleichmäßigung der Geschwindigkeit angestrebt (minimieren des inneren Spannungszustands)



Tabelle

Unter Normalbedingungen gilt (Atmosphärendruck, T=20°C):

Medium	$\mu = \left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right] = [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$
Luft	$18.2 \cdot 10^{-6}$	$15.11 \cdot 10^{-6}$
Wasser	$1002 \cdot 10^{-6}$	$1004 \cdot 10^{-6}$
Silikonöl Bayer M100	$130\,950 \cdot 10^{-6}$	$135 \cdot 10^{-6}$

μ = charakteristische Größe für die übertragende Kraft und nicht ν

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}}$$

ν : kinematische Viskosität



Bei NEWTONschen Fluiden gilt :

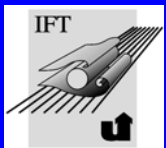
Schubspannung \sim Deformationsgeschwindigkeit

$$\tau \sim \dot{\gamma} \left(= \frac{du}{dy} \right)$$

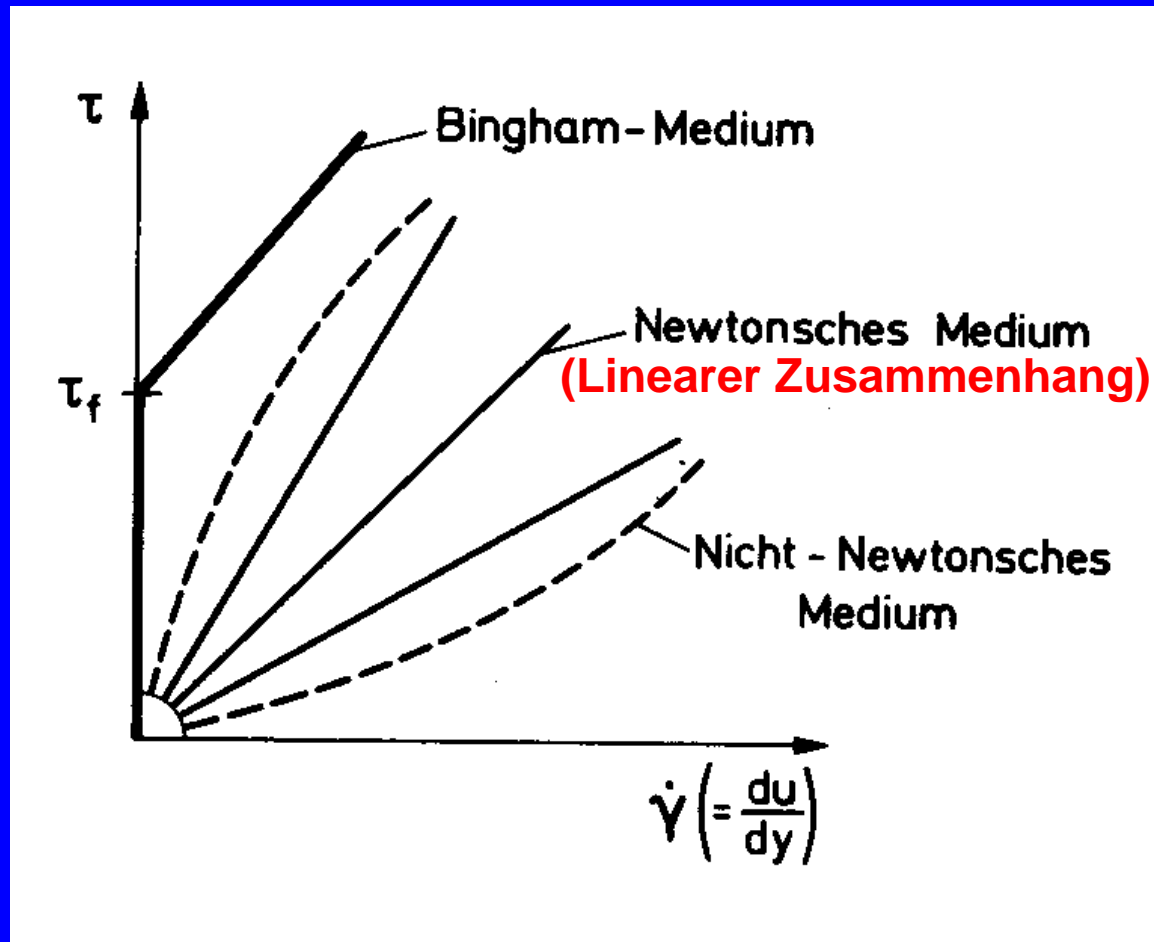
Allgemein (mit Fließfunktion f):

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad \text{mit} \quad f(0) = 0$$

=> Material ist Fluid!



Fließfunktion $\tau = \tau(du/dy)$ für verschiedene Medien



Newtonsche Medien:

z.B. Luft, Wasser, Öl

Nicht-Newtonsche Medien:

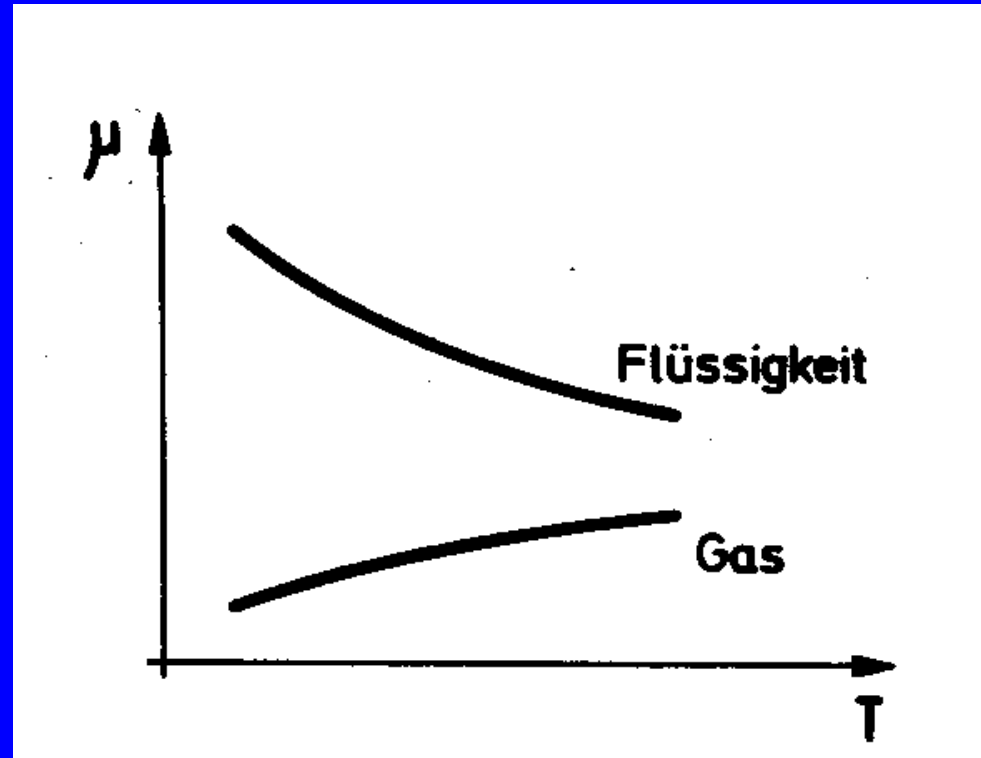
z.B. Farben, Schmelzen, Stärke

Bingham-Medium:

z.B. Zahnpasta, Brei



Änderung der Zähigkeit von Flüssigkeiten und Gasen mit der Temperatur



Gas:

mit zunehmender Temperatur nimmt die mittlere Molekülgeschwindigkeit zu, was gleichbedeutend mit einer Zunahme des übertragenen Impulses beim Stoß ist. Deshalb nimmt die Viskosität eines Gases mit steigender Temperatur zu.

Flüssigkeit:

Intermolekulare Anziehungskräfte lockern sich mit zunehmender Temperatur, weshalb dann die Viskosität sinkt.



1.4 Volumenänderung und Zustandsgleichung für ideale Gase

Aus der Thermodynamik:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{m} \cdot T \quad \text{mit}$$

$$IR = \frac{R}{m} = c_p - c_v \quad ; \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

wobei gilt:

T = absolute Temperatur

R = allgemeine (molare) oder universelle Gaskonstante

IR = spezifische Gaskonstante

m = Molmasse in g/mol

c_p = spezifische Wärme bei konstantem Druck

c_v = spezifische Wärme bei konstantem Volumen

κ = Isentropenexponent



$$R = 8.314 \cdot 10^3 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{g}}{\text{sec}^2 \cdot \text{mol} \cdot \text{K}} = 8.314 \frac{\text{Joule}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$IR = \frac{R}{m} = c_p - c_v \left[\frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2 \cdot \text{K}} = \frac{\text{Joule}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

Gas	O ₂	N ₂	H ₂	Luft
m [g/mol]	32	28	2	~29
IR [J/kg·K]	259.83	296.8	4124.4	287.06

(Werte für p=0.987 bar und T=298.15 °K)

Bei realen Gasen:

kompliziertere Zustandsgleichung (z.B. van-der Waals-Gl.)

