

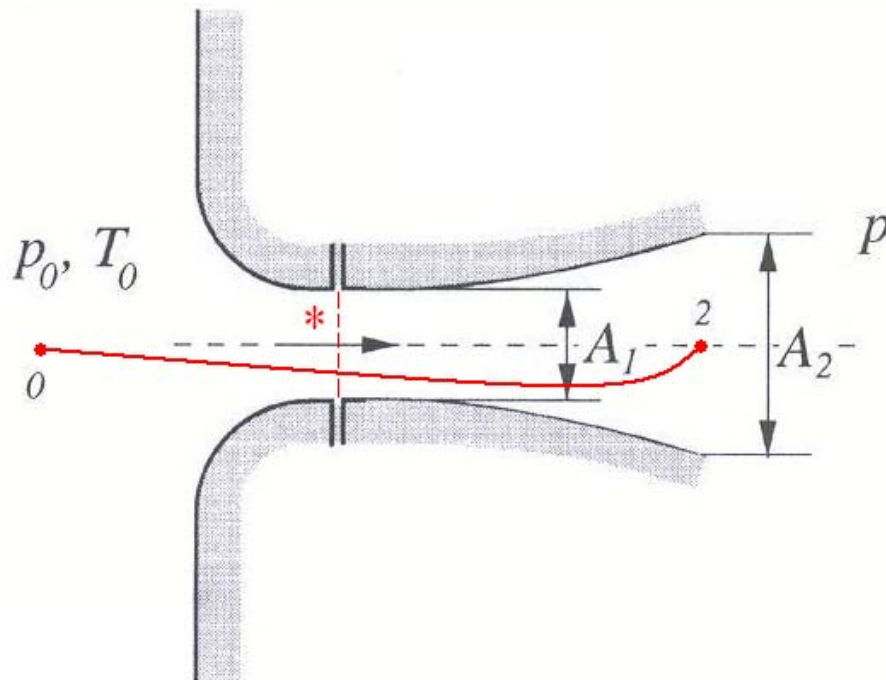
Lösungen zu dem Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

Gegeben: $T_0, p_0, p, A_1, A_2, \text{IR}, \kappa$.

Gesucht: a) Ausströmende Masse \dot{m} bei inkompressibler Strömung

b) Ausströmende Masse \dot{m} bei kompressibler Strömung



Begriffe:

- für Teil a) INKOMPRESSIBEL Medium $\rho = \text{konst.}$
- für Teil b) ideales Gas \rightarrow KOMPRESSIBEL = Änderung der Dichte bei Druckunterschieden \rightarrow Gasdynamik $\rho = \rho(p, T)$
- „großer Kessel“ Strömungsgeschwindigkeit im Inneren des Kessels $c_0 \approx 0$
- Ausströmen im Umgebungsdruck p

- isentrope Zustandsänderungen
- reibungsfreie Strömung → Bernoulli-Gleichung

a) Ausströmende Masse bei **inkompressibler** Strömung ($\rho = \rho_0$):

Die inkompressible Bernoulligleichung für einen Stromfaden vom Kessel bis zum Austritt lautet:

$$p_0 = p + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \quad (1)$$

daraus folgt

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot (p_0 - p)} \quad (2)$$

Die sekundlich ausströmende Masse ergibt sich aus:

$$\dot{m} = \rho c_2 A_2 = \rho A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot (p_0 - p)} = A_2 \sqrt{2\rho \cdot (p_0 - p)} \quad (3)$$

Mit $\rho = \rho_0$ folgt daraus:

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{2\rho_0 \cdot (p_0 - p)} \quad (4)$$

Aus der Zustandsgleichung im Kessel $p_0 = \rho_0 R T_0$ folgt:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R T} \quad (5)$$

Die Gleichung (5) in (4) einsetzen:

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{2 \frac{p_0}{R T_0} \cdot (p_0 - p)}$$

b) Ausströmende Masse bei **kompressibler** Strömung:

Für den Massenstrom \dot{m} gilt:

$$\dot{m} = \rho_1 c_1 A_1 = \rho^* c^* A^* = \rho_2 c_2 A_2$$

Im engste Querschnitt: $A_1 = A^*$ und $c_1 = c^*$

Für den Strömungsverlauf ist es entscheidend, ob der Außendruck p über oder unter dem kritischen Druck p^* liegt.

Für das kritische Druckverhältnis gilt:

Fall 1:

$$\frac{p}{p_0} > \frac{p^*}{p_0}$$

In diesem Fall wird im engsten Querschnitt keine Schallgeschwindigkeit erreicht. Es liegt eine reine Unterschallströmung vor und die Strömung ist dort wie bei einem inkompressiblen Medium verzögert. Der Außendruck wird wie bisher dem Freistrah aufgeprägt.

Wie im Teil a) folgt:

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{2 \frac{p_0}{\text{IR} T_0} (p_0 - p)}$$

Fall 2:

$$\frac{p}{p_0} < \frac{p^*}{p_0}$$

Im engsten Querschnitt wird Schallgeschwindigkeit erreicht. Hinter dem engsten Querschnitt erfolgt eine Expansion im Überschall durch die Lavaldüse „kontrolliert“.

Es gilt:

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

Für die maximale Geschwindigkeit gilt:

$$c_{\max} = c^* = \sqrt{2 \cdot c_p \cdot T_0}$$

mit den bekannten Beziehungen

$$\text{IR} = c_p - c_v, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad \text{und} \quad c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR}$$

folgt:

$$c_{\max} = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa + 1} \cdot \text{IR} \cdot T_0}$$

Und die Dichte ρ_0 erhält man aus der Zustandsänderung idealer Gase:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{\text{IR} T_0}$$

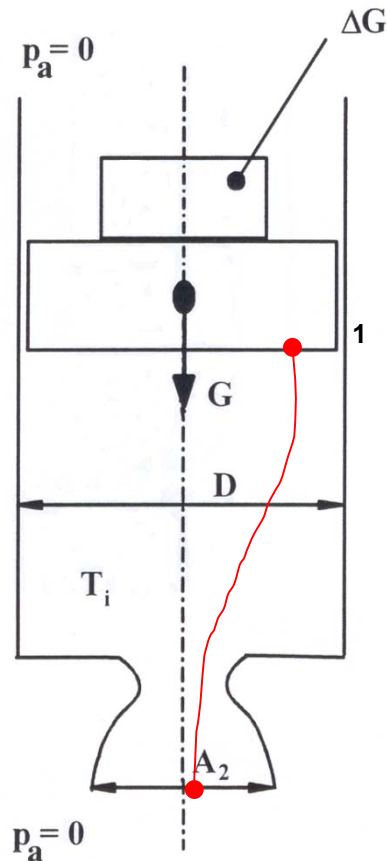
Eingesetzt erhält man für den Massenstrom:

$$\dot{m} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \rho_0 A_1 c_{\max} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \rho_0 A_1 \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa + 1} \cdot \text{IR} \cdot T_0}$$

Aufgabe 2

Gegeben: $G, D, IR, \kappa, T_{i1}, p_a = 0$

Gesucht: a) Ausströmgeschwindigkeit c_2 bei A_2 sowie Innendruck p_{i1}
b) Zusatzgewicht ΔG für isentrope Kompression auf den neuen Innendruck p_{i2} und die neue Austrittsgeschwindigkeit $c_2^* = 1,25 \cdot c_2$ bei A_2



Begriffe:

- ideales Gas \rightarrow KOMPRESSIBEL = Änderung der Dichte bei Druckunterschieden \rightarrow Gasdynamik $\rho = \rho(p, T)$
- stationäre Strömung
- Ausströmen ins Vakuum ($p_a = 0$)
- isentrope Zustandsänderungen
- es wirken keinerlei Reibungskräfte auf den Kolben
- Strömungsgeschwindigkeit im Inneren des Kreiszylinders $c_i \approx 0$
- der Schwerkrafteinfluss darf vernachlässigt werden, wenn nicht zu große Höhendifferenzen betrachtet werden

- a) Für den Ausfluss eines kompressiblen Mediums aus einem Reservoir ohne Schwerkräfteinfluss bei isentropen Zustandsänderungen gilt die **Ausflussformel nach Saint-Venant und Wantzell** (Skript zur Vorlesung „Strömungslehre“, Kapitel 3.1.3 „Stromfadentheorie in Einzelausführungen“, Gleichung 3.45):

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i1} \left[1 - \frac{p_2}{p_{i1}} \right]^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}}$$

$\cancel{p_{i1}}$
 $da p_2 = p_a = 0$

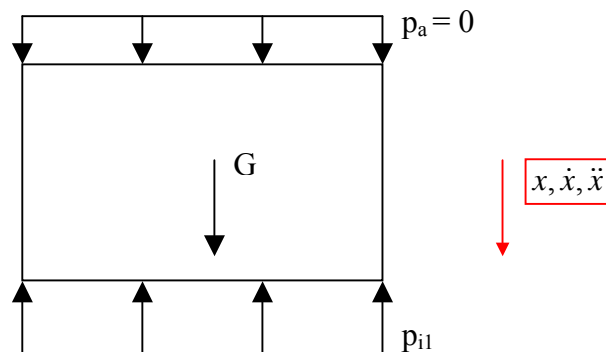
$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i1}} \quad (1.1)$$

Wegen stationärer Strömung folgt aus dem Newtonschen Grundgesetz:

$$\dot{x} = \text{konst.} \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} = 0 = G - p_{i1} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 + \underbrace{p_a \cdot \frac{\pi}{4} D^2}_{=0, da p_a=0}$$

$$p_{i1} = \frac{G}{D^2} \cdot \frac{4}{\pi} \quad (1.2)$$

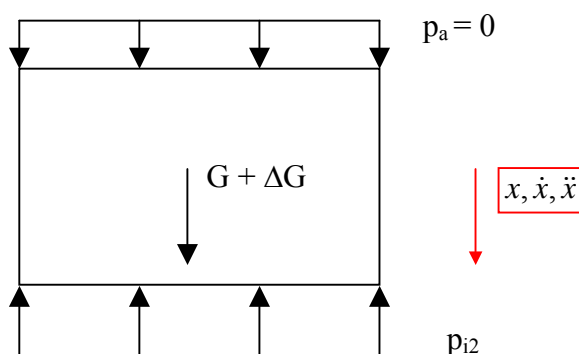


b) Wegen stationärer Strömung folgt aus dem Newtonschen Grundgesetz:

$$\dot{x} = \text{konst.} \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} = 0 = G + \Delta G - p_{i2} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 + \underbrace{p_a \cdot \frac{\pi}{4} D^2}_{=0, da p_a=0}$$

$$\Delta G = p_{i2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - G \quad (1.3)$$



Bestimmung von c_2^* :

$$c_2^* = 1,25 \cdot c_2 = 1,25 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i1}} \quad (1.4)$$

$$c_2^* = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i2}} \quad (1.5)$$

Gleichsetzen von (1.4) und (1.5):

$$1,25 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i1}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i2}}$$

$$\Rightarrow T_{i2} = (1,25)^2 \cdot T_{i1} \quad (1.6)$$

isentrope Zustandsänderung:

$$\frac{p_{i1}}{p_{i2}} = \left(\frac{\rho_{i1}}{\rho_{i2}} \right)^\kappa \quad (1.7)$$

Zustandsgleichung für ideales Gas:

$$\frac{p_{i1,2}}{\rho_{i1,2}} = \text{IR} \cdot T_{i1,2} \Leftrightarrow \rho_{i1,2} = \frac{p_{i1,2}}{\text{IR} \cdot T_{i1,2}} \quad (1.8)$$

mit (1.8) in (1.7)

$$\frac{p_{i1}}{p_{i2}} = \left[\frac{\frac{p_{i1}}{\text{IR} \cdot T_{i1}}}{\frac{p_{i2}}{\text{IR} \cdot T_{i2}}} \right]^\kappa \Leftrightarrow \frac{p_{i1} \cdot p_{i2}^\kappa}{p_{i2} \cdot p_{i1}^\kappa} = \left(\frac{T_{i2}}{T_{i1}} \right)^\kappa \quad (1.9)$$

mit (1.6) in (1.9)

$$p_{i1}^{(1-\kappa)} \cdot p_{i2}^{(\kappa-1)} = 1,25^{(2\kappa)}$$

$$p_{i2}^{(\kappa-1)} = \frac{1,25^{(2\kappa)}}{p_{i1}^{(1-\kappa)}} \Leftrightarrow p_{i2} = 1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} \cdot p_{i1} \quad (1.10)$$

mit (1.10) in (1.3)

$$\Delta G = 1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} \cdot p_{i1} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 - G \quad (1.11)$$

mit (1.2) in (1.11)

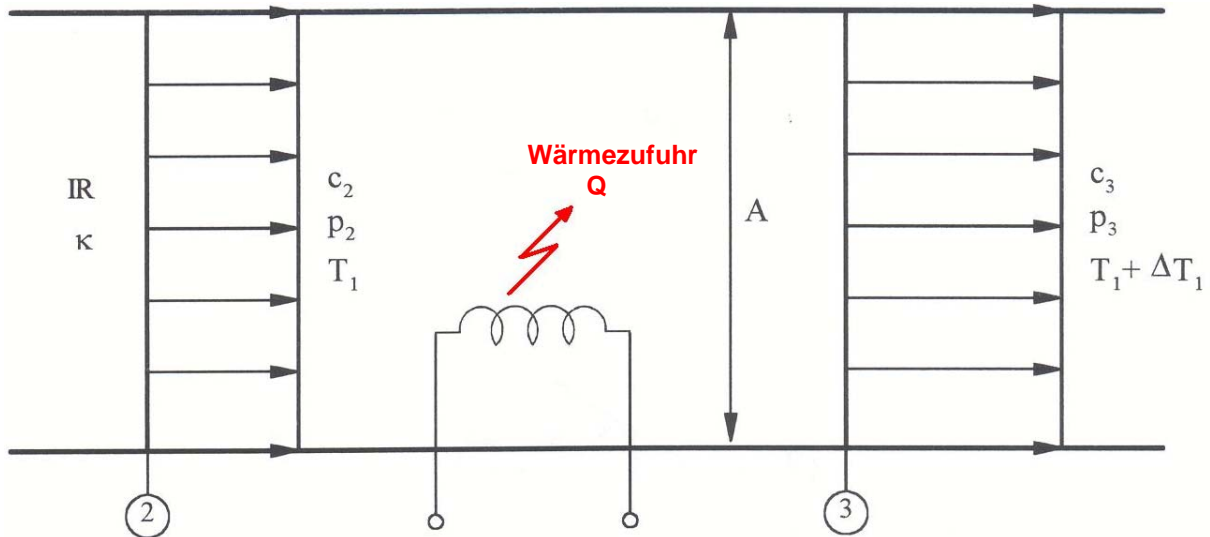
$$\Delta G = 1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} \cdot G \cdot \frac{\frac{\pi}{4} D^2}{\frac{\pi}{4} D^2} - G = G \cdot \left(1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} - 1 \right) \quad (1.12)$$

Aufgabe 3

Gegeben: $T_1, p_2, c_2, p_3, c_3, \dot{m}_3, A, IR, \kappa$.

Gesucht: a) die Machzahl M_2 bei 2

b) die Dichte ρ_3 , die Machzahl M_3 sowie ΔT_1 bei 3



Begriffe:

- ideales Gas \rightarrow KOMPRESSIBEL = Änderung der Dichte bei Druck- und Temperatur-unterschieden \rightarrow Gasdynamik $\rho = \rho(p, T)$
- stationäre Strömung
- isentrope Zustandsänderungen
- Reibungsfreie Strömung

a) $M_2 = ?$

$$M_2 = \frac{c_2}{a_2} \quad (1)$$

$$a_2 = \sqrt{\kappa \cdot IR \cdot T_2} \quad (2)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2} \quad (3)$$

(3) in (2) einsetzen:

$$\Rightarrow a_2 = \sqrt{\kappa \cdot IR \cdot \frac{T_1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2}} \quad (4)$$

(4) in (1) einsetzen:

$$M_2 = \frac{c_2}{\sqrt{\kappa \cdot IR \cdot \frac{T_1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2}}}$$

$$\Rightarrow M_2^2 \cdot (\kappa \cdot IR \cdot T_1) = c_2^2 \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2\right)$$

$$\Rightarrow M_2 = \frac{c_2}{\sqrt{\kappa \cdot IR \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{c_2^2}{\kappa \cdot IR \cdot T_1} \frac{\kappa - 1}{2}\right)}}$$

b) $\rho_3, M_3, \Delta T_1 = ?$

aus Konti.-gl.:

$$\rho_2 \cdot c_2 \cdot A = \rho_3 \cdot c_3 \cdot A \quad \text{mit} \quad \dot{m}_3 = \rho_3 c_3 A$$

$$\Rightarrow \rho_3 = \frac{\dot{m}_3}{c_3 \cdot A}$$

also:

$$M_3 = \frac{c_3}{a_3} = \frac{c_3}{\sqrt{\kappa \cdot IR \cdot T_3}} = \frac{\sqrt{\rho_3 \cdot c_3}}{\sqrt{\kappa \cdot p_3}}$$

für $\Delta T_1 = ?$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_3}{T_1 + \Delta T_1} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_3^2}$$

T_3 aus Gasgleichung:

$$\Rightarrow T_3 = \frac{p_3}{\rho_3 \cdot IR}$$

also:

$$T_1 + \Delta T_1 = T_3 \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_3^2\right)$$

$$\Rightarrow \Delta T_1 = T_3 \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_3^2\right) - T_1$$