

Jürgen Zierep, Karl Bühler

# Grundzüge der Strömungslehre

**Jürgen Zierep, Karl Bühler**

# **Grundzüge der Strömungslehre**

**Grundlagen, Statik und  
Dynamik der Fluide**

7., verbesserte Auflage 2008 mit 179 Abbildungen



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Das Buch erschien bis zur 6. Auflage unter dem gleichen Titel beim Springer Verlag.  
7., verbesserte Auflage 2008

Alle Rechte vorbehalten

© B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2008

Der B.G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.  
[www.teubner.de](http://www.teubner.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Waren- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN 978-3-8351-0231-6

## **Vorwort zur 7. Auflage**

Die „Grundzüge der Strömungslehre“ haben seit dem Erscheinen der ersten Auflage vor etwa 30 Jahren eine sehr positive Aufnahme bei Lehrenden und Lernenden an vielen Hochschulen und Universitäten des In- und Auslandes erfahren.

Die 6. Auflage war wiederum schnell vergriffen. Eine überarbeitete, ergänzte, aktualisierte 7. Auflage liegt nun vor. An der grundsätzlichen Konzeption als Textbuch zu Vorlesungen hat sich wenig geändert, da sie sich offensichtlich bewährt hat. Das vielfältige zustimmende Echo der Leser, der Hörer der Vorlesungen und der Anwender in der Praxis ist uns stets Freude und Ansporn unserer Lehr- und Forschertätigkeit gewesen. Dafür möchten wir auch an dieser Stelle danken, wie auch für Verbesserungsvorschläge, die stets berücksichtigt wurden.

Dem Teubner-Verlag sagen wir Dank für das große Vertrauen bei der Herausgabe dieses Buches und für die hochehrfreuliche Zusammenarbeit.

Karlsruhe, Juli 2007

Jürgen Zierep und Karl Bühler

## Aus dem Vorwort der 1. Auflage

Das vorliegende Buch "Grundzüge der Strömungslehre" ist aus einführenden Vorlesungen hervorgegangen, die ich seit etwa 20 Jahren an der Universität Karlsruhe (TH) halte. Es stellte sich mir hier die interessante Aufgabe, in einer vierstündigen einsemestrigen Vorlesung Studenten nach dem Vorexamen die Strömungslehre nahezubringen. Das Spektrum der Hörer war breit gestreut. Es reichte von Maschinenbauern und Chemieingenieuren bis zu Physikern, Meteorologen und Mathematikern. Diese Tatsache sowie die zur Verfügung stehende Zeit bestimmten Inhalt und Umfang des vorgetragenen Stoffes. Es ging also nicht darum, **alles** darzustellen (das kann man in Spezialvorlesungen tun), sondern eine möglichst interessante, für die Studenten leicht faßliche und anwendbare Darstellung zu wählen.

Einige Worte zum Aufbau. Im Unterschied zu den meisten Darstellungen der Strömungslehre wird der Impulsatz erst spät behandelt. Das hat gute Gründe. Trotz seiner einfachen Formulierung ist und bleibt er der schwerste Satz der Strömungslehre. Die Schwierigkeit liegt in der zweckmäßigen Wahl des Kontrollraumes **und** der benutzten Strömungsdaten auf dem Rand. Hier gehen viele Kenntnisse ein, die man **vorher** bei der Beschäftigung mit Beispielen der Strömungslehre sammeln muß. Diese Erfahrung haben wir immer wieder gemacht.

Ich habe mich um einen systematischen Aufbau bemüht. Dabei wird mit dem Einfachsten begonnen und bis zu den Fragen vorgedrungen, die in den zahlreichen Anwendungen auftreten und heute von großem Interesse sind. Es ist dabei z.B. wichtig, daß man von Anfang an weiß, welche und wieviele Gleichungen für die Strömungsgrößen zur Verfügung stehen. Bei einigen behandelten Fragen wird man eine gewisse Liebe zum Detail spüren. Dies scheint mir dort gerechtfertigt, wo die Studenten aus anderen Vorlesungen wenig Information mitbringen. Andererseits ist es notwendig, daß der Anfänger die wichtigsten Hilfsmittel gründlich und ausführlich vorgeführt bekommt. Daß sich dabei Kompromisse ergeben, ist jedem Vortragenden klar.

Parallel zu den Vorlesungen werden zweistündige Übungen veranstaltet. Ohne dieses eigene Engagement der Hörer kann man den Stoff nicht bewältigen. Einige der Aufgaben sind im Text berücksichtigt. Hier wie auch beim Vorlesungsgegenstand wird der Leser zu Papier und Bleistift greifen müssen, um den Inhalt aufzunehmen, zu verarbeiten und anschließend anwenden zu können. Diese Mühe lohnt sich! Ich wäre mit dem Erfolg meiner langjährigen Tätigkeit zufrieden, wenn der Leser dies bestätigen könnte.

Jürgen Zierep

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung, Überblick und Grundlagen .....	1
1. Eigenschaften von Fluiden .....	4
1.1 Molekularer Aufbau - Mikrostruktur .....	4
1.2 Widerstand gegen Formänderungen (Elastizität, Viskosität) .....	5
1.3 Gaskinetische Erklärung der inneren Reibung .....	11
1.4 Volumenänderung und Zustandsgleichung für Gase .....	13
1.5 Oberflächen- oder Grenzflächenspannung und Kapillarität .....	15
2. Hydro- und Aerostatik .....	27
2.1 Flüssigkeitsdruck $p$ .....	27
2.2 Flüssigkeitsdruck in Kraftfeldern .....	28
2.3 Druckkraft auf ebene Behälterwände .....	34
2.4 Hydrostatischer Auftrieb. Druckkraft auf gekrümmte Flächen .....	36
3. Hydro- und Aerodynamik .....	40
3.1 Stromfadentheorie .....	40
3.1.1 Grundbegriffe .....	40
3.1.2 Grundgleichungen der Stromfadentheorie .....	45
3.1.3 Stromfadentheorie in Einzelausführungen .....	51
Bewegung auf konzentrischen Kreisbahnen (Wirbel) .....	51
Wirbelquell- oder Wirbelsenkenströmung .....	54
Drehbewegung unter Berücksichtigung der Schwere .....	55
Die verschiedenen Druckbegriffe und die Messung .....	56
Ausströmen aus einem Behälter .....	60
Gasdynamische Betrachtungen. Die Strömung in der Laval-Düse. Der senkrechte Verdichtungsstoß .....	63
3.2 Reibungsfreie, ebene und räumliche Strömungen .....	78
3.2.1 Kontinuität (= Massenerhaltung) .....	78
3.2.2 Eulersche Bewegungsgleichungen .....	79
3.2.3 Ebene, stationäre, inkompressible Potentialströmung .....	80
3.2.4 Beispiele für elementare und zusammengesetzte Potentialströmungen .....	86
3.2.5 Potentialströmungen um vorgegebene Körper .....	95
3.3 Strömung mit Reibung .....	101
3.3.1 Impulssatz mit Anwendungen .....	102
Durchströmen eines Krümmers .....	104
Düse und Diffusor frei ausblasend .....	107
Carnotscher Stoßdiffusor .....	108
Borda-Mündung .....	110

Schub eines luftatmenden Triebwerkes .....	111
Widerstand eines Halbkörpers im Kanal .....	112
3.3.2 Drehimpulssatz mit Anwendung .....	114
Durchströmen eines radialen Laufrades .....	115
3.3.3 Grundsätzliches zum Reibungseinfluß - Kennzahlen .....	117
3.3.4 Laminare und turbulente Strömung .....	121
3.3.5 Geschwindigkeitsverteilung und Druckabfall in Kreisrohren bei laminarer und turbulenter Strömung .....	123
3.3.6 Laminare und turbulente Strömung durch rauhe Rohre (Nikuradse-Diagramm) .....	129
3.3.7 Strömung in der Einlaufstrecke .....	132
3.3.8 Geschwindigkeitsschwankungen und scheinbare Schubspannungen ...	135
3.3.9 Prandtlscher Mischungswegansatz für die Schwankungs- geschwindigkeiten .....	137
3.3.10 Allgemeine Form der Navier-Stokes-Gleichungen .....	141
3.3.11 Spezielle Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen .....	143
3.3.12 Einführung in die Grenzschichttheorie .....	148
3.3.13 Energiesatz .....	157
3.3.14 Widerstand und Druckverlust .....	159
3.3.15 Ähnlichkeitsbetrachtungen .....	165
 Tabelle.....	 169
 Ausgewählte Literatur .....	 170
 Namen- und Sachverzeichnis .....	 171

# Einleitung, Überblick und Grundlagen

In der **Strömungslehre** werden die **Bewegungsvorgänge** in **Flüssigkeiten** und **Gasen** (sogenannten **Fluiden**) behandelt. Anstelle der Bezeichnung Strömungslehre trifft man häufig auch die Begriffe Strömungsmechanik, Fluidodynamik, Aerodynamik u.a.

Die Strömungslehre spielt in Naturwissenschaft und Technik eine große Rolle. Die Anwendungen lassen sich, grob gesprochen, in zwei verschiedene Gruppen einteilen.

1. **Umströmung** von Körpern, z.B. Kraftfahrzeugen, Flugzeugen, Gebäuden. Hier interessiert das Stromfeld im **Außenraum**, d.h. Geschwindigkeit, Druck, Dichte und Temperatur in Körperrnähe und -ferne. Daraus resultiert z.B. die Kraftwirkung auf den umströmten Körper.
2. **Durchströmen** von Leitungen, Kanälen, Maschinen und ganzen Anlagen. Jetzt interessiert die Strömung im **Innenraum**, z.B. von Krümmern, Diffusoren und Düsen. Von Wichtigkeit sind hier Reibungseinflüsse, die sich durch Druckverluste bemerkbar machen.

Bei aktuellen technischen Problemen können die beiden soeben behandelten Teilaufgaben natürlich auch kombiniert auftreten. Zahlreiche Anwendungen trifft man in den Gebieten Strömungsmaschinenbau, Chemieingenieurtechnik, Flugzeugbau, Kraftfahrzeugbau, Gebäudeaerodynamik, Meteorologie, Geophysik etc.

Die **quantitative Beschreibung** einer Strömung erfolgt in jedem Punkt  $(x,y,z)$  des betrachteten Feldes zu jeder Zeit  $(t)$  durch die Größen:

Geschwindigkeit  $\vec{w} = (u, v, w)$  , Druck  $p$  , Dichte  $\rho$  , Temperatur  $T$  .

Wir nehmen die Existenz dieser Zustandsgrößen als Funktion von  $(x,y,z; t)$  an. Wir bewegen uns damit im Bereich der Kontinuumsmechanik. Insgesamt handelt es sich also um 6 abhängige und 4 unabhängige Variablen. Zur Bestimmung der ersteren sind 6 Gleichungen, die physikalischen Grundgesetze der Strömungslehre, erforderlich. Sie werden in Form von Erhaltungssätzen formuliert und sind in der folgenden Tabelle skizziert.

	Physikalische Aussage	Zahl der Gleichungen	Art der Gleichungen
Erhaltungssätze	Kontinuität (Massenerhaltung)	1	skalar
	Kräftegleichgewicht (Impulssatz)	3	vektoriell
	Energiesatz (z.B. 1.Hauptsatz, Fouriersche Wärmeleitungsgleichung etc.)	1	skalar
<b>Fluid</b>	<b>Zustandsgleichung</b> (thermodynamische Verknüpfung von $p, \rho, T$ )	1	skalar

Gegenüber der Massenpunktmechanik, die mit 3 Gleichungen für 3 Geschwindigkeitskomponenten auskommt, sind hier also 6 Gleichungen erforderlich. Zu diesen Differential- oder Integralbeziehungen treten Anfangsbedingungen (t) und/oder Randbedingungen (x,y,z) hinzu, um aus der Mannigfaltigkeit der **möglichen** Lösungen die, gegebenenfalls **eindeutig** bestimmte, Lösung des gestellten Problems zu ermitteln. Für die oben angeführten Um- und Durchströmungsaufgaben kann man diese Bedingungen leicht diskutieren. Eine allgemeine Lösung der Grundgleichungen der Strömungslehre stößt auf größte Schwierigkeiten, da die zugehörigen Differentialgleichungen **nichtlinear** sind. Häufig beschränkt man sich daher auf sogenannte **Ähnlichkeitsaussagen**, mit denen es möglich ist, die Strömungsdaten von einem Stromfeld auf ein anderes zu übertragen. Dies führt zu den wichtigen Modellgesetzen, die es z.B. gestatten, Windkanalversuche auf die Großausführung umzurechnen.

Im Rahmen dieser Darstellung werden wir mit dem Einfachsten (Hydrostatik) beginnen. Durch Zunahme der Zahl der unabhängigen und der abhängigen Veränderlichen werden wir bis zu den Fragestellungen vorstoßen, die in den Anwendungen von Interesse sind. Das folgende Schema erläutert von links nach rechts unsere Vorgehensweise.

	Hydrostatik	Aerostatik	Hydrodynamik	Aerodynamik
p				
$\rho$				
$\vec{w} = (u, v, w)$				
Beispiele	ruhende Flüssigkeit im Gefäß	ruhende Atmosphäre	bewegte Flüssigkeit	bewegtes Gas

Die Temperatur T kann hier fortgelassen werden, da sie durch die Zustandsgleichung aus p und  $\rho$  zu ermitteln ist.

Die historische Entwicklung der Strömungslehre zeigt bis etwa 1900 zwei unterschiedliche Arbeitsrichtungen.

### 1. Theoretische, vorwiegend mathematische Strömungslehre.

Sie ist mit den Namen Newton, Euler, Bernoulli, D'Alembert, Kirchhoff, Helmholtz, Rayleigh verknüpft. Hierbei handelt es sich vornehmlich um die theoretische Behandlung reibungsfreier

J.B.J. Fourier, 1768 - 1830

I. Newton, 1643 - 1727

L. Euler, 1707 - 1783

D. Bernoulli, 1700 - 1782

J. D'Alembert, 1717 - 1783

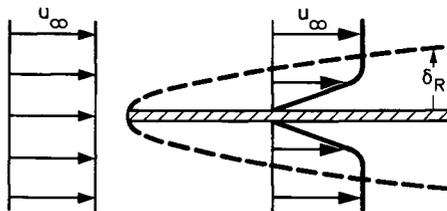
G. Kirchhoff, 1824 - 1887

H.v.Helmholtz, 1821 - 1894

J.W. Rayleigh, 1842 - 1919

**Bild 1.1**

Strömungsgrenzschicht an der längsange-  
strömten ebenen Platte



Strömungen (sogenannter Potentialströmungen). Damit war es z.B. nicht möglich, Verluste in Strömungen bei Umströmungs- und Durchströmungsproblemen quantitativ richtig zu ermitteln.

**2. Technische Strömungslehre oder Hydraulik.**

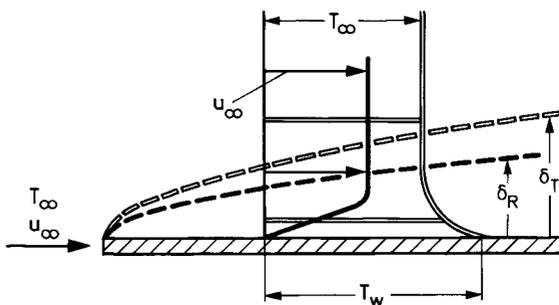
Maßgebende Forscher waren Hagen, Poiseuille, Reynolds. Hier ging es um Probleme der Messung und deren Darstellung bei reibungsbehafteten Strömungen, z.B. die Gesetze für Rohrströmungen.

Beide Richtungen wurden 1904 durch die **Grenzschichttheorie** von Prandtl zusammengeführt. Danach ist die Ursache für den Reibungswiderstand eines Körpers in der sogenannten Grenzschicht zu suchen. Diese ist eine relativ dünne, wandnahe Schicht, in der der Geschwindigkeitsanstieg von Null an der Wand auf den Wert der Außenströmung erfolgt. Hierbei ist die **Haftbedingung** an der Körperoberfläche wesentlich. Wird der Körper bewegt, so macht das strömende Medium an der Oberfläche diese Bewegung mit. Es haftet dort! In Bild 1.1 ist der besonders einfache Fall der längsangeströmten Platte - der Prototyp einer Grenzschicht - dargestellt. Dieses Prandtl'sche Grenzschichtkonzept hat sich als sehr fruchtbar erwiesen. Es führt zu wesentlichen Vereinfachungen in den nichtlinearen Differentialgleichungen, so daß eine Lösung möglich ist.

Spielt neben den Reibungsverlusten auch der Wärmeübergang eine Rolle, so tritt außer der **Strömungsgrenzschicht** eine **Temperaturgrenzschicht** auf (Bild 1.2). Beide haben ihre Ursache in völlig analogen physikalischen Vorgängen: Reibung und Wärmeleitung.

**Bild 1.2**

Strömungs- und Temperaturgrenzschicht an der ebenen Platte



# 1 Eigenschaften von Fluiden

## 1.1 Molekularer Aufbau - Mikrostruktur

Für das Verständnis der später zu behandelnden Strömungsvorgänge in Fluiden ist es wichtig, die Grundtatsachen ihres molekularen Aufbaus zusammenzustellen. Wir sprechen dabei von der Mikrostruktur.

Die Materie ist aus elementaren Bestandteilen (Molekülen bzw. Atomen) aufgebaut, deren Durchmesser die folgende Größenordnung besitzt:  $d \sim 10^{-10}$  m. Beim Aufbau aus diesen Elementen sind nun zwei Tatsachen von wesentlichem Einfluß.

1. Sind die einzelnen **Teilchen** relativ **weit voneinander entfernt**, d.h. ist die Dichte genügend klein, so sind sie voneinander unbeeinflusst und führen eine regellose statistische Bewegung infolge ihrer thermischen Energie aus (**Brownsche Molekularbewegung** bei Gasen). Für Luft gilt unter Normalbedingungen, d.h. Atmosphärendruck und  $20^\circ\text{C}$ , für diese Bewegung: mittlere freie Weglänge  $\ell \sim 10^{-7}$  m, mittlere Molekülgeschwindigkeit  $\bar{c} \sim 500$  m/s.

**Ergänzung:** Die Thermodynamik liefert die Abhängigkeit der Molekülgeschwindigkeit von der Temperatur. Die innere Energie des Moleküls ist pro Freiheitsgrad  $= 1/2 kT$  mit  $k =$  Boltzmann-Konstante. Mit  $f = 3$  als Zahl der Freiheitsgrade lautet der Energiesatz für das Molekül der Masse  $m$ :

$$\text{innere Energie} = \frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m \bar{c}^2 = \text{mittlere kinetische Energie der Translation.}$$

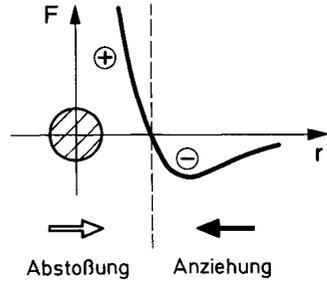
$$\text{Also} \quad \bar{c}^2 = \frac{3k}{m} T, \text{ oder größenordnungsmäßig } \sqrt{\bar{c}^2} \sim \bar{c} \sim \sqrt{T}.$$

Dies ist eine charakteristische Abhängigkeit von der Temperatur, die später bei vielen typischen Geschwindigkeiten (Schallgeschwindigkeit, maximale Geschwindigkeit) wiederholt auftritt.

2. Sind die **Teilchen** relativ **nah beieinander**, d.h. ist die Dichte genügend groß, so beeinflussen sie sich gegenseitig. Es wirken intermolekulare sogenannte van-der-Waals-Kräfte. Ihre Erstreckung reicht etwa über eine Distanz von  $10 d \sim 10^{-9}$  m. Diese Anziehungskräfte, die ihrer Natur nach Gravitationskräfte sind, können die Teilchen gegenseitig fixieren, z.B. in einem regelmäßigen Kristallgitter. In Bild 1.3 ist die Kraft, die ein im Nullpunkt liegendes Teilchen auf ein anderes im Abstand  $r$  befindliches ausübt, qualitativ dargestellt.

**Bild 1.3**

Intermolekulare Kraft, die ein im Nullpunkt liegendes Teilchen auf ein anderes ausübt



Nähern sich die Teilchen außerordentlich, so tritt anstelle von Anziehung Abstoßung auf. Hierbei spielt die innere Struktur der Teilchen eine wesentliche Rolle. Für unsere Betrachtungen ist dies jedoch nicht wichtig.

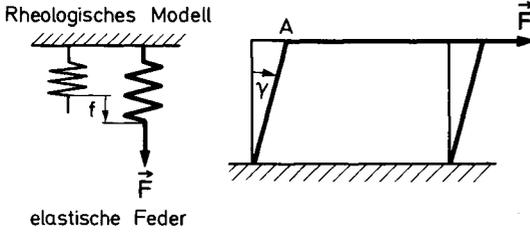
Das Zusammenspiel der zwei Tatsachen 1. und 2. führt zu den drei **Aggregatzuständen**. Das nachfolgende Schema erläutert dies in grober, aber für uns ausreichender Weise. Die Dichte nimmt dabei von links nach rechts zu.

Gas	Flüssigkeit	Fester Körper
1. überwiegt 2. Regellose Bewegung.	1. und 2. gleich. Zufallsbewegung, die nicht unbeeinflusst von den Nach- barn erfolgt.	2. überwiegt 1. Intermolekulare Kräfte bin- den Teilchen an feste Stellen, z.B. im Kristallgitter.

**1.2 Widerstand gegen Formänderungen (Elastizität, Viskosität)**

Es besteht ein grundsätzlicher Unterschied zwischen **festen, elastischen Körpern** einerseits und **Fluiden** andererseits. Wir erläutern dies am Fall der Beanspruchung auf **Scherung (Schub)**.

**1.** Ein **fester, elastischer Körper** wird beansprucht durch eine Scherkraft  $\vec{F}$ . In Bild 1.4 ist dieser Fall skizziert. Der Winkel  $\gamma$  ist ein Maß für die Deformation und A die Fläche, an der die Kraft  $\vec{F}$  angreift. Bei geringer Deformation gilt das **Hookesche Gesetz**, nach dem die Schubspannung der Deformation proportional ist:



**Bild 1.4**  
Scherbeanspruchung eines festen, elastischen Körpers sowie rheologisches Modell

$$\frac{|\vec{F}|}{A} = \tau = G \cdot \gamma \qquad G = \text{Gleit- oder Schubmodul.} \qquad (1.1)$$

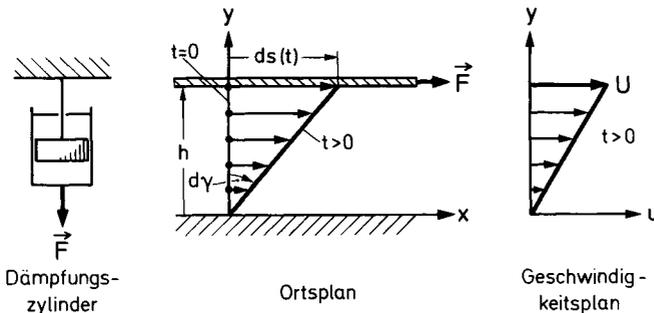
Bild 1.4 zeigt auch das zugehörige rheologische Modell. Es handelt sich um die elastische Feder, die durch die Kraft  $\vec{F}$  beansprucht wird. Solche Modelle sind zum Verständnis dieser Vorgänge von großem Nutzen und werden uns oft begegnen.

2. Bei **Fluiden** muß das Medium geführt werden. Bild 1.5 erläutert den besonders einfachen Fall der Scher- oder Couette-Strömung zwischen zwei ebenen Platten. Die obere Platte werde mit der konstanten Geschwindigkeit  $U$  bewegt, die untere ruht. Wir verfolgen den Strömungsvorgang sowohl im Ortsplan  $(x,y)$  als auch im Geschwindigkeitsplan  $(u,y)$ . Das Experiment liefert eine lineare Geschwindigkeitsverteilung

$$u = U \frac{y}{h} \qquad (1.2)$$

im Plattenspalt. Die Haftbedingung bei  $y=0$  und  $y=h$  ist offenbar erfüllt. Der Zusammenhang zwischen Orts- und Geschwindigkeitsplan führt zu den Gleichungen

$$U = \frac{ds(t)}{dt} \quad , \quad ds(t) = h \, d\gamma(t),$$



**Bild 1.5**  
Couette-Strömung. Orts- und Geschwindigkeitsplan sowie rheologisches Modell für das Newtonsche Medium

d.h.

$$U = h \dot{\gamma}(t). \quad (1.3)$$

Definieren wir ein **Newtonsches Fluid** durch

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}, \quad (1.4)$$

so ergeben (1.2) und (1.3):

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} = \eta \frac{U}{h} = \eta \dot{\gamma}(t). \quad (1.5)$$

Bei Newtonschen Fluiden ist damit die Schubspannung der Deformations**geschwindigkeit** proportional. Dies ist ein grundlegender Unterschied zum elastischen Körper. Das rheologische Modell ist hier ein Dämpfungszyylinder (Bild 1.5).

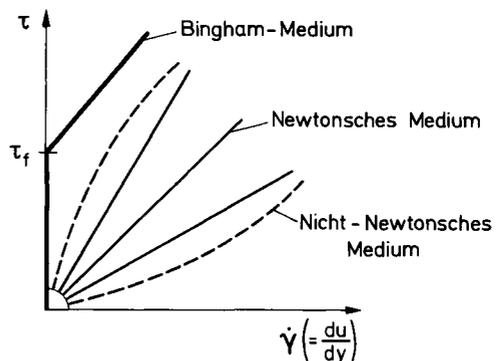
Der Proportionalitätsfaktor  $\eta$  in (1.4) und (1.5) heißt **dynamische Viskosität**.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \text{kinematische Viskosität}, \quad \rho = \text{Dichte des Mediums}. \quad (1.6)$$

In den Anwendungen liegt häufig der allgemeinere Fall vor, daß

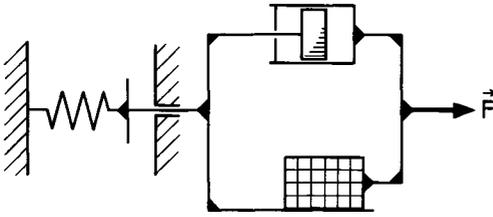
$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad (1.7)$$

ist.  $f$  wird als Fließfunktion bezeichnet. Bild 1.6 enthält einige charakteristische Fälle. Ist  $f$  eine **lineare** Funktion, so handelt es sich um Newtonsche Fluide (Öl, Wasser, Luft usw.). Die Steigung der Geraden ist ein direktes Maß für die dynamische Viskosität. Durch nichtlineare Fließfunktionen werden **Nicht-Newtonsche Fluide** beschrieben. Beispiele sind Suspensionen,



**Bild 1.6**

Verschiedene Fließfunktionen. Newtonsche, Nicht-Newtonsche Fluide, Bingham-Medium



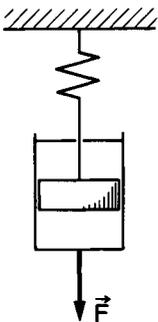
**Bild 1.7**  
Rheologisches Modell des Bingham-Mediums

Polymere, Ölfarben usw. Ein interessanter Sonderfall ist das **Bingham-Medium**. Es verhält sich für  $\tau < \tau_f$  wie ein fester, elastischer Körper, dagegen für  $\tau > \tau_f$  wie ein Newtonsches Fluid.

$\tau_f$  heißt die Fließspannung. Es ist dies ein Modell für das Viskositätsverhalten von Breien und Pasten. Das rheologische Modell (Bild 1.7) enthält einen Dämpfungszyylinder und parallel hierzu einen Klotz auf rauher Unterlage; vorgeschaltet ist eine elastische Feder, deren Auslenkung begrenzt ist. Der Klotz besitzt Haft- sowie Gleitreibung. Letztere wird bei dem betrachteten Modell vernachlässigt. Eine interessante Kombination ergibt sich, wenn ein elastischer Körper viskoses Verhalten zeigt. Man spricht dann von einem **viskoelastischen Medium**. Bei kurzzeitiger Belastung verhält sich dieses Medium wie ein elastischer Körper, bei längerer Belastung dagegen wie ein Newtonsches Fluid. Der "hüpfende Kitt" ist ein Beispiel. Es handelt sich um ein knetbares, kautschukähnliches Medium. Eine Kugel wird elastisch an der festen Wand reflektiert. Sie zerfließt unter ihrem Eigengewicht beim längeren Liegen. Das rheologische Modell ist eine elastische Feder und ein Dämpfungszyylinder in Reihe geschaltet (Bild 1.8).

Zur quantitativen Angabe der eingeführten physikalischen Größen sind Dimensionen und Maßeinheiten erforderlich. Wir verwenden vorrangig das internationale System (SI), geben vergleichsweise aber die Daten auch im alten technischen System an.

Die dynamische Viskosität  $\eta$  wird gemessen in



**Bild 1.8**  
Rheologisches Modell für das viskoelastische Medium

$$\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \text{Pa s}.$$

Die kinematische Viskosität  $\nu = \eta/\rho$  wird gemessen in  $\text{m}^2/\text{s}$ .

Die folgende Tabelle enthält typische Zahlenwerte bei Normalbedingungen.

	$\eta \cdot 10^6$ $\text{N m}^{-2} \text{ s} = \text{Pa s}$	$\nu \cdot 10^6$ $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$
Luft	18,2	15,11
Wasser	1.002,0	1,004
Silikonöl Bayer M 100	130.950,0	135,0

Man erkennt hieran sofort, daß  $\eta$  für die durch die Viskosität übertragene Kraft charakteristisch ist und nicht etwa  $\nu = \eta/\rho$ . (1.4) liefert für  $\eta$  die Aussage

$$\eta = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}},$$

d.h.  $\eta$  ist ein Maß für die Kraft pro Flächeneinheit ( $= \tau$ ), die erforderlich ist, um den Geschwindigkeitsgradienten ( $= du/dy$ ) zu erzeugen. Die kinematische Viskosität entsteht nach Division durch die Dichte, wobei die Größenordnung wesentlich geändert werden kann.

Die **Viskosität** ist bei Fluiden **temperaturabhängig**; mit wachsender Temperatur sinkt sie bei Flüssigkeiten und steigt bei Gasen (Bild 1.9). Diese Tatsache wird verständlich aus der oben diskutierten Mikrostruktur. Die Viskosität ist ein makroskopischer Effekt, der durch den

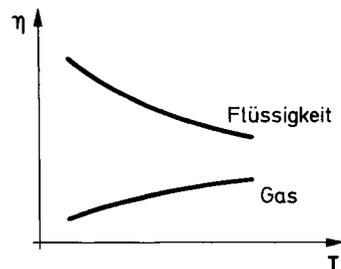
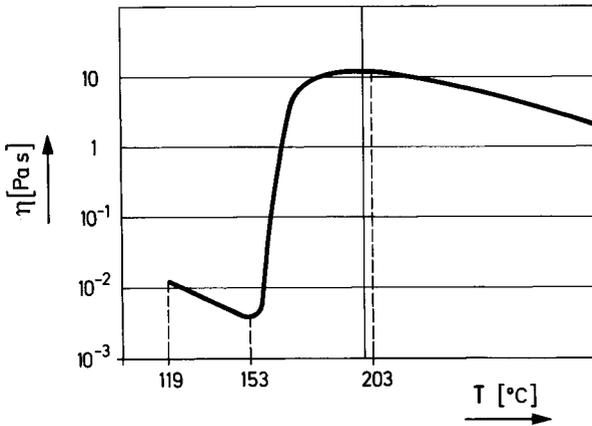


Bild 1.9

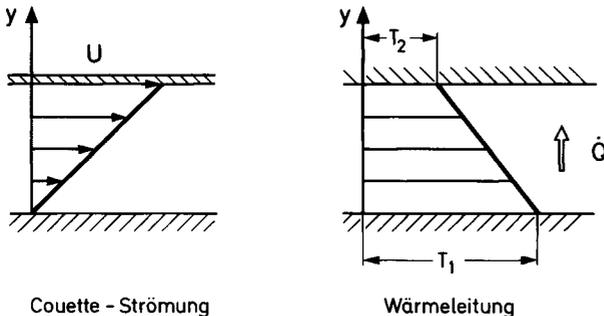
Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur bei Flüssigkeiten und Gasen



**Bild 1.10**  
Dynamische Viskosität der Schwefelschmelze

molekularen, d.h. mikroskopischen, Impulsaustausch der einzelnen Fluidpartikel hervorgerufen wird. Diese Auffassung führt im nächsten Abschnitt zu der gaskinetischen Erklärung der inneren Reibung. Bei Gasen steigt mit wachsender Temperatur die Molekülgeschwindigkeit und damit der beim Stoß übertragene Impuls, was zu einer Zunahme der Viskosität bei diesem Modell führt. Bei Flüssigkeiten spielen die intermolekularen Kräfte eine entscheidende Rolle. Steigende Temperatur lockert hier die gegenseitige Bindung, die Teilchen werden leichter verschiebbar, die Viskosität sinkt. Einen interessanten Sonderfall bildet die Schwefelschmelze (Bild 1.10). In einem gewissen Temperaturbereich verhält sich dieser Stoff wie eine Flüssigkeit, bei Steigerung der Temperatur wie ein Gas und bei weiterer Steigerung der Temperatur wieder wie eine Flüssigkeit. Dies hängt offenbar mit der Umwandlung des kristallinen Gefüges dieses Stoffes zusammen. Interessant ist die **Analogie** zwischen **innerer Reibung** und **Wärmeleitung**. Es handelt sich um molekulare Transportvorgänge, die ähnlich verlaufen. Wir können der oben behandelten Couette-Strömung ein sehr einfaches Wärmeleitproblem zur Seite stellen (Bild 1.11). Der Wärmestrom  $\dot{Q}$ , als übertragene Wärmemenge pro Zeit, kann mit dem Fourier-Ansatz wie folgt dargestellt werden:

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dy} \quad (1.8)$$



**Bild 1.11**  
Analogie von innerer Reibung und Wärmeleitung

$\lambda$  ist das Wärmeleitvermögen und  $A$  die übertragende Fläche. Für den spezifischen Wärmestrom  $\dot{q}$  kommt also

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dy}. \quad (1.9)$$

Damit gilt zwischen innerer Reibung und Wärmeleitung die Analogie

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \leftrightarrow \dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dy}. \quad (1.10)$$

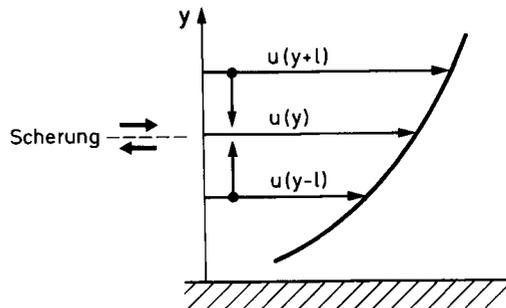
$\lambda$  und  $\eta$  sind molekulare Austauschgrößen für Wärme und Impuls. Für später ist wichtig, daß man aus beiden Größen eine charakteristische Kennzahl herleiten kann. Sie wird nach Prandtl benannt:

$$\text{Prandtl-Zahl} = \text{Pr} = \frac{\eta c_p}{\lambda}. \quad (1.11)$$

$c_p$  ist hierin wie üblich die spezifische Wärme bei konstantem Druck.

### 1.3 Gaskinetische Erklärung der inneren Reibung

Es geht hier um zwei Aussagen. Einerseits wollen wir den Newtonschen Schubspannungsansatz (1.4) für Gase herleiten und andererseits  $\eta$  bzw.  $\nu$  auf bekannte mikroskopische Werte zurückführen. Bei der Ableitung benutzen wir gaskinetische Betrachtungen, bei denen makroskopische und mikroskopische Überlegungen gleichzeitig eingehen. Wir untersuchen die Strömung längs einer ebenen Wand (Bild 1.12).  $u(y)$  ist das gemittelte Geschwindigkeitsprofil, wie wir es makroskopisch, z.B. mit dem bloßen Auge, registrieren. Mikroskopisch dagegen führen die Gasteilchen eine regellose Zufallsbewegung aus. Der dabei erfolgende **Impulsaustausch** der verschiedenen Schichten führt zu einer Verhef-



**Bild 1.12**

Zur gaskinetischen Erklärung der inneren Reibung. Strömung längs der ebenen Wand.

tung, d.h. zur **inneren Reibung**. Bild 1.12 veranschaulicht, wie es zu der Scherung in der Schicht  $y$  kommt.  $\ell$  bezeichne die mittlere freie Weglänge. Teilchen, die aus dem Niveau  $y + \ell$  stammen, beschleunigen die bei  $y$  vorhandenen Partikel. Teilchen, die von unten kommen ( $y - \ell$ ) verzögern sie entsprechend. Dies ruft eine Scherung bzw. Schubspannung im Niveau  $y$  hervor. Diese Kraftwirkung wird jetzt berechnet.

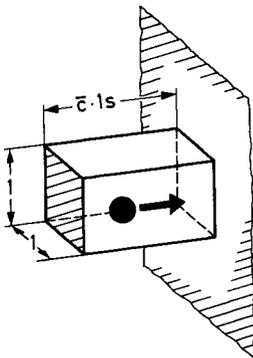
Die Masse des stoßenden Teilchens sei  $m$ , dann ist der gemittelte Impuls eines von **oben** kommenden Teilchens  $|\vec{i}_o| = m u(y + \ell)$ ; analog gilt für ein Teilchen, das von **unten** kommt,  $|\vec{i}_u| = m u(y - \ell)$ .

Zur Bestimmung des insgesamt übertragenen Impulses müssen wir abzählen, wieviel Teilchen pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit gehen.  $n$  sei die Teilchenzahl pro  $\text{cm}^3$ . Aufgrund der Gleichverteilung bewegen sich in  $1 \text{ cm}^3$   $n/3$  Teilchen in  $x$ - oder  $y$ - oder  $z$ -Richtung, mithin die Hälfte, also  $n/6$  Teilchen, in  $(+x)$  oder  $(-x)$ , ... -Richtung. Also treten  $(n/6)\bar{c}$  Teilchen pro Sekunde durch die Flächeneinheit (Bild 1.13). Hier geht entscheidend die mittlere mikroskopische Molekülgeschwindigkeit  $\bar{c}$  der Teilchen ein. Bild 1.13 zeigt, daß nur diejenigen Moleküle, die sich in einem Quader mit der Höhe  $\bar{c} \cdot 1 \text{ s}$  befinden, in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit treten können.

Damit kommt für den an die Schicht  $y$  übertragenen Impuls pro Zeit- und Flächeneinheit = Kraft pro Fläche = Schubspannung.

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{n}{6} \bar{c} m u(y + \ell) - \frac{n}{6} \bar{c} m u(y - \ell) = \\ &= \frac{n m}{6} \bar{c} \left[ u(y) + \ell \frac{du}{dy} + \dots - u(y) + \ell \frac{du}{dy} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Berücksichtigen wir bei der Entwicklung nur die in  $\ell$  linearen Terme, so wird



**Bild 1.13**

Ermittlung der Zahl der stoßenden Teilchen

$$\tau = \frac{n m \bar{c} \ell}{3} \frac{du}{dy} = \frac{\rho \bar{c} \ell}{3} \frac{du}{dy}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\eta}{\rho} = \nu = \frac{\bar{c} \ell}{3}. \quad (1.14)$$

Damit ist der Newtonsche Schubspannungsansatz für Gase hergeleitet und gleichzeitig  $\nu$  auf die früher eingeführten mikroskopischen Bestimmungsstücke  $\bar{c}$  und  $\ell$  zurückgeführt. Wegen  $\bar{c} \sim \sqrt{T}$  folgt weiterhin, daß bei Gasen die Viskosität  $\nu$  mit der Temperatur ansteigt. Aus den Angaben für Luft:  $\bar{c} \sim 500$  m/s,  $\ell \sim 10^{-7}$  m folgt mit (1.14)  $\nu \sim 15 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, was mit dem in der Tabelle Seite 9 angegebenen Wert gut übereinstimmt.

Miteiner **Dimensionsbetrachtung** kann man auch zur Darstellung der kinematischen Viskosität  $\nu$  gelangen. Man geht davon aus, daß  $\nu$  allein von den kinematischen mikroskopischen Bestimmungsstücken  $\ell$  und  $\bar{c}$  abhängen kann, d.h.

$$\nu = f(\ell, \bar{c}).$$

Ein Potenzansatz

$$\nu = A \bar{c}^m \cdot \ell^n$$

mit  $A = \text{konst}$  liefert sofort

$$\nu = A \bar{c} \ell,$$

d.h. abgesehen von dem Zahlenfaktor kommt wiederum (1.14). Diese Zurückführung der kinematischen Viskosität auf die mikroskopischen Größen: mittlere Molekülgeschwindigkeit und mittlere freie Weglänge stellt ein sehr einleuchtendes Ergebnis dar, das handgreiflich den Mechanismus des Zustandekommens der inneren Reibung vor Augen führt. Wir kommen später auf ähnliche Betrachtungen (z.B. das Konzept des Prandtlschen Mischungsweges) wiederholt zurück.

## 1.4 Volumenänderung und Zustandsgleichung für Gase

Wir erinnern an zwei elementare Grundgesetze für sogenannte ideale Gase.

**1. Das Boyle-Mariotte-Gesetz für isotherme Prozesse** besagt:

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 = \text{konst} , t = \text{konst} , t \text{ in } ^\circ\text{C} . \quad (1.15)$$

2. Das **Gay-Lussac-Gesetz** für **isobare** Vorgänge lautet:

$$V = V_0 (1 + \beta t) , p = \text{konst} , \beta = \frac{1}{273^\circ\text{C}} . \quad (1.16)$$

$t$  bezeichnet hierin die Celsius-Temperatur. In Bild 1.14 sind verschiedene Prozesse (isochor -  $p = \text{konst}$ , isobar -  $p = \text{konst}$ , isotherm -  $t = \text{konst}$ , isentrop -  $s = \text{konst}$ ) in der  $(p,V)$ -Ebene eingetragen.

Eine beliebige Zustandsänderung  $p_1, V_1, t_1 = 0 \rightarrow p, V, t$  können wir stets aus den beiden oben betrachteten elementaren Prozessen zusammensetzen (Bild 1.15). Ein **isothermer** Vorgang führt von  $p_1, V_1, t_1 = 0$  zu  $p, V_2, t_2 = 0$ :

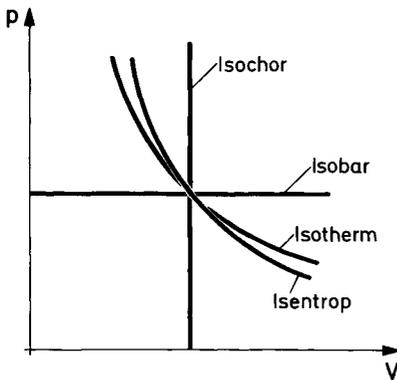
$$p_1 V_1 = p V_2 . \quad (1.17)$$

Ein anschließender **isobarer** Prozeß führt  $p, V_2, t_2 = 0$  in  $p, V, T$  über mit

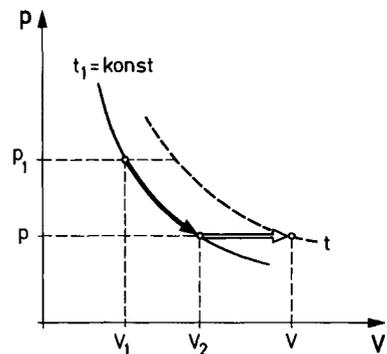
$$V = V_2 (1 + \beta t) . \quad (1.18)$$

Benutzen wir hier (1.17), so wird

$$p V = p V_2 (1 + \beta t) = p_1 V_1 (1 + \beta t) = \beta p_1 V_1 \left( \frac{1}{\beta} + t \right) = \beta p_1 V_1 T ,$$



**Bild 1.14**  
Thermodynamische Zustandsänderungen in der  $(p,V)$ -Ebene



**Bild 1.15**  
Zusammensetzung eines isothermen und eines isobaren Prozesses

also in spezifischen Größen

$$p v = \frac{p}{\rho} = \frac{R}{m} T = \mathbb{R} T. \quad (1.19)$$

Dies ist die **ideale Gasgleichung**. Hierin bedeuten:

$$R = \text{allgemeine (molare) Gaskonstante} = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{m}^2 \text{g}}{\text{s}^2 \text{mol K}} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}},$$

$$\mathbb{R} = \text{spezifische oder spezielle Gaskonstante in } \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{K}} = \frac{\text{J}}{\text{kg K}},$$

$$m = \text{Molmasse in } \frac{\text{g}}{\text{mol}}.$$

Es gilt die Beziehung

$$\frac{R}{m} = c_p - c_v = \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

Die wichtigsten Repräsentanten sind

Gas	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	Luft
m in $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	32	28,016	2,016	29

Bei **realen** Gasen haben wir es im Unterschied zu den vorstehenden Betrachtungen mit allgemeineren Zustandsgleichungen zu tun. Ein Beispiel ist die sogenannte van-der-Waalssche Gleichung.

## 1.5 Oberflächen- oder Grenzflächenspannung und Kapillarität

Bisher haben wir nur **ein** **homogenes** Medium betrachtet. Jetzt beschäftigen wir uns mit der unmittelbaren Umgebung der Trennfläche **zweier** Medien unterschiedlicher Dichte. Solche

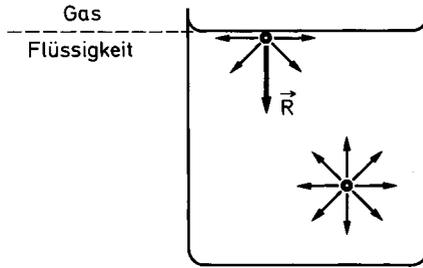


Bild 1.16

Intermolekulare Kräfte im Innern und an der Oberfläche einer Flüssigkeit

Flächen spielen in der Strömungslehre eine große Rolle. Grenzen zwei nicht mischbare Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte aneinander, so sprechen wir von einer internen Grenzfläche. Eine freie Oberfläche liegt vor, wenn eine Flüssigkeit und ein Gas aneinander grenzen. Im **Innern** der Flüssigkeit heben sich die intermolekularen Anziehungskräfte auf ein Teilchen im Mittel auf (Bild 1.16). Es liegt hier ein kugelsymmetrisches Kraftfeld vor. An der **Oberfläche** tritt eine Resultierende auf, die ins Innere gerichtet ist, da die Gaspartikel über der Oberfläche keine intermolekularen Kräfte ausüben. Die Dicke dieser Oberflächenschicht ist vergleichbar dem Wirkungsbereich der intermolekularen Kräfte ( $\sim 10 \text{ d} \sim 10^{-9} \text{ m}$ ). Diese Resultierende der intermolekularen Kräfte steht im Gleichgewicht mit den übrigen Kräften (Schwerkraft, Druckkraft). Im Vorgriff auf Späteres besagt dies, daß es dadurch in der Nähe der Oberfläche zu einer abgeänderten hydrostatischen Druckverteilung kommt. Gegen diese Resultierende muß Arbeit geleistet werden, wenn ein Teilchen aus dem Flüssigkeitsinnern an die Oberfläche verschoben werden soll, d.h. die Moleküle an der Oberfläche haben eine höhere Energie als Teilchen im Innern. In jeder Flüssigkeitsoberfläche steckt also Energie. Um diese zusätzliche Energie gering zu halten, verwendet die Natur möglichst wenig Teilchen zur Bildung der Oberfläche. Dies führt zur Entstehung von sogenannten **Minimalflächen**. Das folgende Beispiel illustriert dies handgreiflich (Bild 1.17). Ein rechteckiger Drahtrahmen wird mit einer Seifenhaut ausgefüllt. Ein geschlossener Garnfaden wird darauf gelegt. Wird die Seifenhaut in der Schlinge durchstochen, so springt die Schlinge zu einem Kreis auf. Der Kreis hat bekanntlich bei gegebenem Umfang die größte Fläche. Die Restfläche ist also unter den gegebenen Randbedingungen die Minimalfläche.

Das Bestreben, die Oberfläche möglichst klein zu machen, führt zu einem **Spannungszustand**

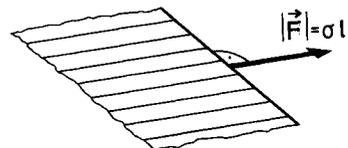
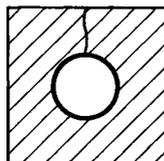
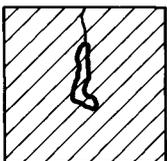


Bild 1.17

Zur Bildung von Minimalflächen

Bild 1.18

Zur Definition der Oberflächenspannung

**in der Fläche.** Als **Oberflächenspannung**  $\sigma$  definiert man diejenige Kraft pro Längeneinheit der Berandung, die die Oberfläche im Gleichgewicht hält (Bild 1.18). Die Größe  $\sigma$  hängt wesentlich von den beiden Medien ab, die an der Oberfläche aneinander grenzen. Sie nimmt im übrigen mit wachsender Temperatur ab. Die Erklärung ist ähnlich wie bei der Viskosität. Mit zunehmender Temperatur werden die intermolekularen Bindungen geringer. Die Resultierende in Bild 1.16 nimmt ab, und damit sinkt die Oberflächenenergie.

Medien	$\sigma \cdot 10^2 \text{ N m}^{-1}$
Wasser / Luft	7,1
Öl / Luft	2,5 - 3,0
Quecksilber / Luft	46

(bei 20°C)

Die Messung von  $\sigma$  kann mit einem Drahtbügel erfolgen, an dem ein Steg verschiebbar angebracht ist (Bild 1.19). Da zwei Oberflächen gebildet werden, gilt

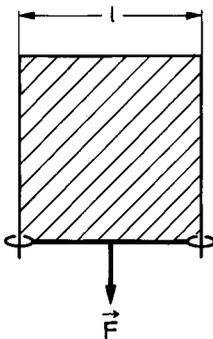
$$|\vec{F}| = 2 \sigma \ell.$$

Anstelle der

$$\text{Oberflächenspannung } \sigma = \frac{\text{angreifende Kraft } |\vec{F}| \text{ an der Berandung}}{\text{Länge der Berandung } \ell} \quad (1.21)$$

wird häufig der Begriff der

$$\text{spezifischen Oberflächenenergie } \varepsilon = \frac{\text{Energiezunahme } \Delta E}{\text{Oberflächenzunahme } \Delta A} \quad (1.22)$$

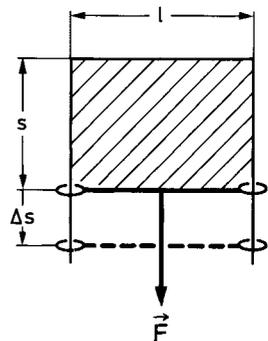


← Bild 1.19

Messung von  $\sigma$  mit einem Drahtbügel

Bild 1.20

Zur Gleichheit von Oberflächenspannung und spezifischer Oberflächenenergie



verwendet. Es ist

$$\varepsilon = \sigma . \quad (1.23)$$

Um diese Aussage zu beweisen, verschieben wir in Bild 1.20 den Steg um  $\Delta s$ . Die dabei erzielte Oberflächenzunahme ist  $\Delta A = 2 \Delta s \ell$ . Mit (1.22) kommt damit für die hierzu erforderliche Energie

$$\Delta E = 2 \varepsilon \Delta s \ell . \quad (1.24)$$

Gehen wir andererseits von der angreifenden Kraft  $|\vec{F}| = 2 \sigma \ell$  aus, so leistet sie bei der Verschiebung um  $\Delta s$  die Arbeit

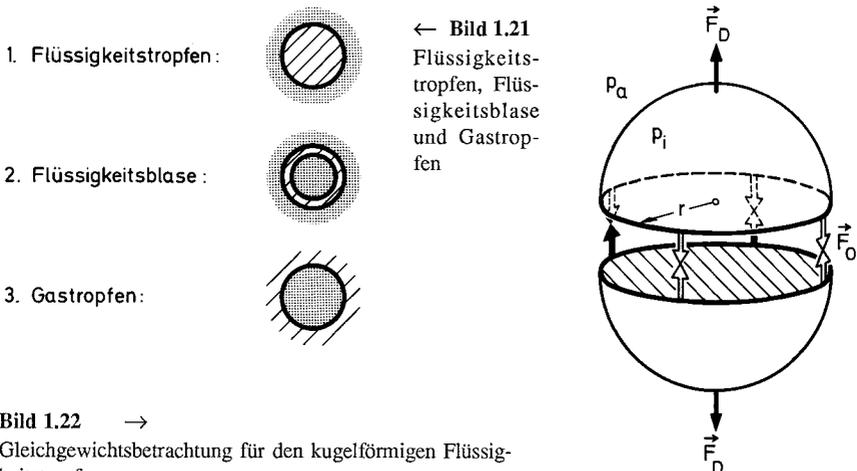
$$\Delta W = 2 \sigma \Delta s \ell . \quad (1.25)$$

Da beide Energien (1.24) und (1.25) gleich groß sind (Energiebilanz!), folgt

$$\Delta W = 2 \sigma \Delta s \ell = 2 \varepsilon \Delta s \ell = \Delta E$$

d.h. es gilt (1.23).

Mit dieser Beziehung ist es leicht möglich, die Energie abzuschätzen, die in Flüssigkeitsoberflächen steckt. Das ist insbesondere dann wichtig, wenn Oberflächen ständig neu gebildet werden, was z.B. bei der Zerstäubung der Fall ist. Diese letzte Feststellung führt uns von den bisher behandelten **ebenen** Oberflächen zu **gekrümmten** Flächen, die in den Anwendungen von großem Interesse sind. Beispiele hierfür sind etwa ein Wassertropfen, eine Flüssigkeitsblase oder ein Gastropfen (Bild 1.21). In allen drei Fällen ist die



Oberflächenspannung bestrebt, den Tropfen bzw. die Blase zu komprimieren. Dadurch kommt es zu einem Druckanstieg im Innern. Dies führt bei Vernachlässigung der Schwerkraft zu einem Gleichgewicht zwischen der Druckkraft und der aus der Oberflächenspannung resultierenden Kraft.

Besonders einfach ist die zugehörige **Gleichgewichtsbetrachtung** für den **kugelförmigen Flüssigkeitstropfen** (Bild 1.22). Schneiden wir den Tropfen am Äquator auf, so ergibt sich eine resultierende **Oberflächenspannungskraft**

$$|\vec{F}| = 2 \pi r \sigma. \quad (1.26)$$

Die resultierende **Druckkraft** weist in vertikaler Richtung und hat dieselbe Größe, als ob die Äquatorebene mit der Druckdifferenz  $\Delta p$  beaufschlagt wäre (s.u.):

$$|\vec{F}_D| = \Delta p \pi r^2 = (p_i - p_a) \pi r^2. \quad (1.27)$$

Aus dem Gleichgewicht der beiden Kräfte folgt

$$\Delta p = p_i - p_a = \frac{2\sigma}{r}. \quad (1.28)$$

Für die Blase ergibt sich rechts im Zähler ein zusätzlicher Faktor 2, da zwei Oberflächen gebildet werden. Im Tropfen bzw. in der Blase kann damit ein erheblicher **Überdruck** entstehen. Im Falle von Nebeltröpfchen,  $r = 10^{-6} \text{ m} = 10^{-3} \text{ mm}$ , erhalten wir z.B.

$$\Delta p = \frac{2 \cdot 7,1 \cdot 10^{-2}}{10^{-6}} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1,42 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1,42 \text{ bar}.$$

Wir wollen die ausführliche Ableitung der **Druckkraft** (1.27) nachtragen, weil das Ergebnis von allgemeinem Interesse ist. In Bild 1.23 ist das Oberflächenelement angegeben. Bei der Integration ist aus Symmetriegründen nur die z-Komponente der Druckkraft zu berücksichtigen:

Der Außendruck  $p_a$  ergibt für das Flächenelement den Anteil =

$$= - p_a \, dA \cos \vartheta = - p_a \, r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Integration über die Halbkugel liefert =

$$= - \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} p_a \, r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = - p_a \, \pi r^2.$$

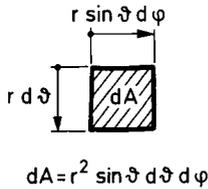
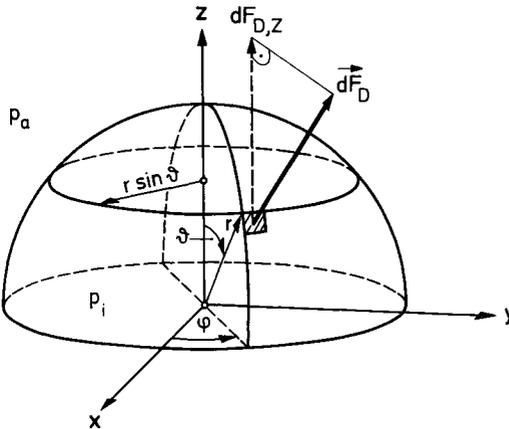


Bild 1.23

Zur Herleitung der Druckkraft



Berücksichtigen wir den Beitrag von  $p_i$  auf die Äquatorfläche  $= p_i \cdot \pi r^2$ , so wird insgesamt

$$F_{D,z} = (p_i - p_a) \pi r^2 = \Delta p \pi r^2.$$

Dieser Tatbestand gilt allgemein, d.h. bei gekrümmten Flächen spielt nur die Projektion in die jeweilige Ebene eine Rolle. Dabei wird in diejenige Richtung projiziert, in der die Komponente der Druckkraft gesucht wird.

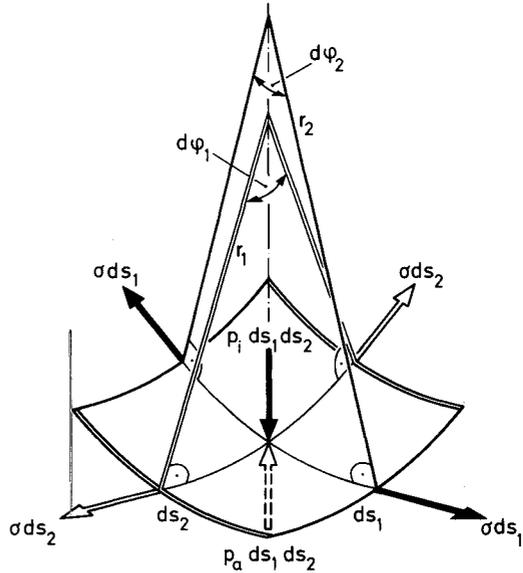
Wir kommen jetzt zur Gleichgewichtsbetrachtung bei einer beliebig gekrümmten Fläche. Wir schneiden ein rechteckförmiges Oberflächenelement heraus. Bild 1.24 enthält alle Bezeichnungen, die die Geometrie und die Kräfte betreffen.  $r_1$  und  $r_2$  sind die Krümmungsradien der Schnittkurven der Oberfläche mit zwei zueinander senkrechten Ebenen. Man beachte, daß  $r_1$  und  $r_2$  mit Vorzeichen behaftet sind. Sie haben entgegengesetztes Vorzeichen, falls die Krümmungsmittelpunkte auf verschiedenen Seiten der Fläche liegen. Es gelten die Zusammenhänge

$$ds_1 = r_1 d\varphi_1, \quad ds_2 = r_2 d\varphi_2. \quad (1.29)$$

Die Resultierende aus den angreifenden Oberflächenspannungen muß der Druckkraft das Gleichgewicht halten (Bild 1.25):

**Bild 1.24**

Gleichgewichtsbetrachtung für eine beliebig gekrümmte Fläche



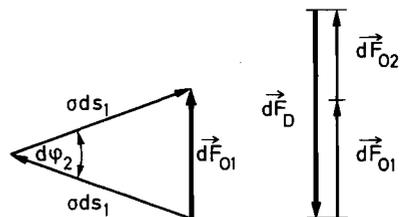
$$\vec{dF}_{01} + \vec{dF}_{02} + \vec{dF}_D = 0. \tag{1.30}$$

Hier gilt für die Beträge

$$\begin{aligned} dF_D &= (p_i - p_a) ds_1 ds_2 = \Delta p ds_1 ds_2, \\ dF_{01} &= \sigma ds_1 d\varphi_2 = \frac{\sigma}{r_2} ds_1 ds_2, \\ dF_{02} &= \sigma ds_2 d\varphi_1 = \frac{\sigma}{r_1} ds_1 ds_2. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Die Gleichgewichtsbedingung liefert

$$\Delta p = p_i - p_a = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \tag{1.32}$$



**Bild 1.25**

Kräftegleichgewicht für den Fall von Bild 1.24

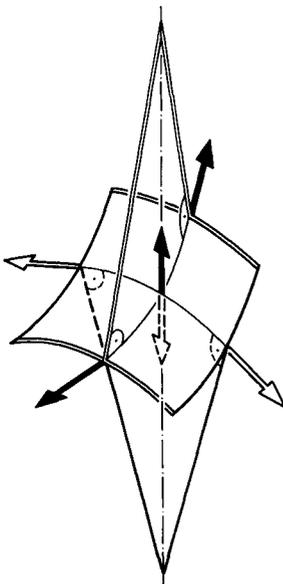
Als **Spezialfälle** heben wir hervor:

1. Kugeltropfen:  $r_1 = r_2 = r$  ,  $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$ .
2. Kugelförmige Blase:  $\Delta p = \frac{4\sigma}{r}$ .
3. Zylindrische Oberfläche:  $r_1 = r$  ,  $r_2 \rightarrow \infty$  ,  $\Delta p = \frac{\sigma}{r}$ .

Von Interesse ist eine Vorzeichendiskussion. Wir beginnen mit  $r_1 > 0$  und  $r_2 > 0$ . Beide Krümmungsmittelpunkte liegen auf derselben Seite der Fläche. Wir halten  $r_1 > 0$  fest und lassen  $r_2$  von positiven Werten über Unendlich zu negativen Werten variieren. Dann ist die Krümmung in den beiden Richtungen 1 und 2 entgegengesetzt. Es liegt das Verhalten einer Sattelfläche (Bild 1.26) vor. In einem solchen Fall kann durchaus  $\Delta p = p_i - p_a = 0$  sein, nämlich dann, wenn die Oberflächenspannungskräfte untereinander im Gleichgewicht stehen. Mit geeigneten Drahtbügeln können solche Sattelflächen aus Seitenhaut leicht erzeugt werden. Beide Seiten der Fläche stehen unter Atmosphärendruck, und es gilt damit für die Krümmungsradien

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0. \quad (1.33)$$

In der Mathematik werden hierdurch die sogenannten Minimalflächen definiert. Die Bedingung hierfür lautet, daß die mittlere Flächenkrümmung



**Bild 1.26**  
Gleichgewicht an einer Sattelfläche

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 0$$

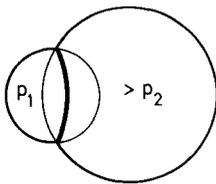
ist, was mit unserer Bedingung (1.33) übereinstimmt.

Zum Abschluß einige elementare Konsequenzen. Sind zwei Blasen miteinander in Berührung, so ist die konvexe Seite in der größeren Blase, da in der kleineren der höhere Druck herrscht (Bild 1.27). Stehen die beiden Blasen durch eine Leitung miteinander in Verbindung, so bläst die kleine die große auf. Im Endzustand besitzen beide Flächen gleiche Krümmung. In Bild 1.28 ist der entsprechende Versuch skizziert. Im Anfangszustand liegen zwei Blasen unterschiedlicher Größe vor. Die rechts befindliche kleinere enthält Rauch. Wird die Verbindung zwischen beiden hergestellt, so strömt der Rauch nach links. Die rechte Blase verkleinert sich. Im Endzustand bleibt rechts ein Flächenstück übrig, das dieselbe Krümmung wie die Blase links besitzt.

Wir kommen zur Besprechung der **Kapillarität**. Die Bezeichnung rührt von der Hebung bzw. Senkung des Flüssigkeitsspiegels in einer Kapillaren her. Jetzt handelt es sich darum, daß drei Medien, z.B. Gas - Flüssigkeit - fester Körper, zusammentreffen. Neben den intermolekularen Kräften der Flüssigkeit spielen jetzt die Anziehungskräfte der Wand (= Adhäsion) eine Rolle. Vom Eigengewicht des Teilchens (Schwerkraft) kann in diesem Zusammenhang abgesehen werden.

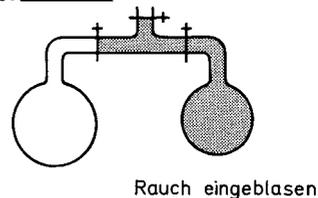
Von Wichtigkeit sind zwei Extremfälle.

1. Die Adhäsion ist sehr viel größer als die Anziehung durch die benachbarten Flüssigkeitsteilchen. In diesem Fall kommt es zur Benetzung der Wand. Die Flüssigkeit wird an die Wand herangezogen und steigt dort in die Höhe (Bild 1.29). Die Resultierende aus Adhäsion und intermolekularen Kräften steht senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche (bei



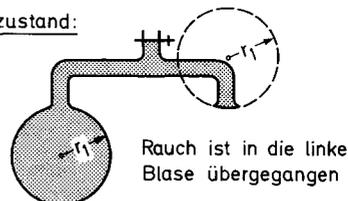
**Bild 1.27**  
Zwei Blasen in Berührung

Anfangszustand:



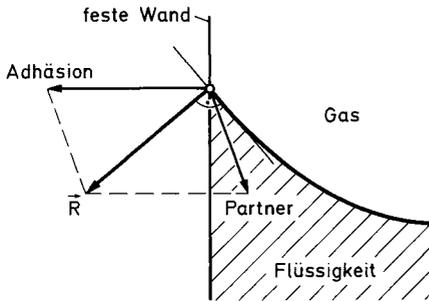
Rauch eingeblasen

Endzustand:

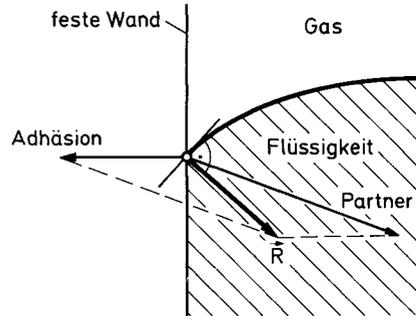


Rauch ist in die linke Blase übergegangen

**Bild 1.28** →  
Druckausgleich zwischen zwei Blasen verschiedener Größe

**Bild 1.29**

Benetzung der Wand (z.B. Glas, Wasser, Luft)

**Bild 1.30**

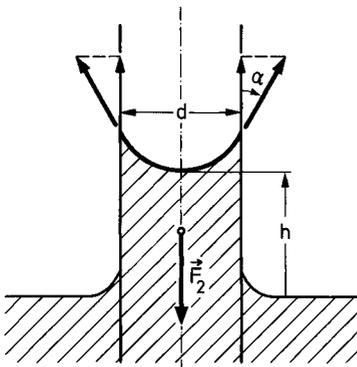
Nichtbenetzender Fall (z.B. Glas, Quecksilber, Luft)

Vernachlässigung der Schwerkraft!). Dies muß so sein, da sonst eine Komponente in Richtung der Oberfläche vorhanden wäre, die zu einer Verschiebung der Teilchen an der Oberfläche und damit zu einer Bewegung führen würde. Der skizzierte Fall entspricht z.B. der Kombination: Glas, Wasser und Luft.

2. Ist die Anziehung der Flüssigkeitspartner sehr viel größer als die Adhäsion, so liegt der nichtbenetzende Fall vor. Die Flüssigkeit sinkt an der Wand herab (Bild 1.30). Dies entspricht z.B. der Kombination: Glas, Quecksilber und Luft.

Von Wichtigkeit ist die Berechnung der kapillaren **Steighöhe** (oder Senkung). Wir wollen hier verschiedene Methoden anwenden, die alle in den Anwendungen eine Rolle spielen.

1. Wir benutzen das **Schnittprinzip der Mechanik** und schneiden die in der Kapillaren gehobene Flüssigkeitssäule (Bild 1.31) frei. Dann muß ein Gleichgewicht bestehen zwischen der Oberflächenspannungskraft  $\vec{F}_1$  und der Gewichtskraft der gehobenen Flüssigkeitssäule  $\vec{F}_2$ . Mit den Bezeichnungen von Bild 1.31 gilt im Gleichgewicht

**Bild 1.31**

Gleichgewicht bei der Kapillarhebung

$$F_1 = 2 \pi r \sigma \cos \alpha = F_2 = \pi r^2 h \rho g,$$

d.h.

$$h = \frac{2 \sigma \cos \alpha}{r \rho g} = \frac{4 \sigma \cos \alpha}{d g \rho}. \quad (1.34)$$

Die Adhäsion geht durch den Randwinkel  $\alpha$  ein. Bei vollständiger Benetzung ist  $\alpha=0$ , und es kommt

$$h = \frac{4 \sigma}{d g \rho}, \quad (1.35)$$

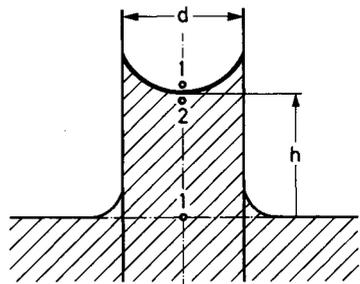
wodurch eine einfache Möglichkeit zur Messung von  $\sigma$  gegeben ist.

2. Wir betrachten den Spezialfall der vollständigen Benetzung und erläutern eine weitere Möglichkeit (Bild 1.32). In der Flüssigkeit entsteht unter der freien Oberfläche ein Unterdruck

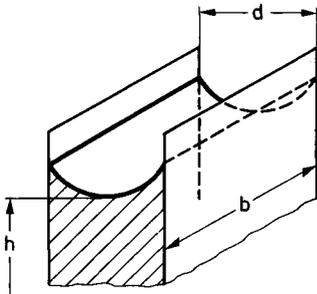
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{2 \sigma}{r} = \frac{4 \sigma}{d}.$$

Die zugehörige Sogkraft, die sich durch Projektion der Oberfläche in den Kapillarquerschnitt ergibt, trägt die Flüssigkeitssäule. Für die Sogkraft kommt:  $\Delta p \pi r^2 = 2 \pi \sigma r$ , während das Gewicht  $\pi r^2 h \rho g$  ist. Setzen wir beide Ausdrücke gleich, so kommt (1.35).

3. Wir benutzen die Stetigkeitsbedingung für den Druck im Punkt 2 (Bild 1.32). Wir nehmen an der Stelle die Darstellung für den hydrostatischen Druck vorweg. Der Druck in 2 kann auf zwei Wegen berechnet werden: als hydrostatischer Druck  $p_2 = p_1 - \rho g h$  und als Kapillardruck  $p_2 = p_1 - 2 \sigma / r$ . Durch Gleichsetzen kommt wieder (1.35). An der letzten Darstellung erkennt man auch sofort, daß die Steighöhe begrenzt ist. Für  $p_2 = 0$  wird  $h_{\max} = p_1 / \rho g$  bzw.  $r_{\min} = 2 \sigma / p_1$ . Strenggenommen wäre hier zu fordern, daß an der Stelle 2 der Dampfdruck der Flüssigkeit nicht unterschritten werden darf. Das erste stellt die wohlbekannte Steighöhe der



**Bild 1.32**  
Berechnung der Drücke bei der  
Kapillarhebung

**Bild 1.33**

Kapillarhebung zwischen zwei benachbarten Platten

Hydrostatik dar, das zweite gibt, im Rahmen des hier benutzten Modells, eine Abschätzung für den minimalen Kapillarradius. Mit  $\sigma = 7,1 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$  und  $p_1 = 10^5 \text{ N/m}^2$  wird  $d_{\min} \cong 3 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ .

Für die Steighöhen im zylindrischen Rohr ergibt (1.35)

$$h_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{28,8}{d} \text{ mm} \quad , \quad |h_{\text{Hg}}| = \frac{13,8}{d} \text{ mm} .$$

Hierin ist  $d$  in mm einzutragen.

Betrachtet man die Hebung einer Flüssigkeit zwischen zwei benachbarten vertikalen Platten (Bild 1.33), so erhält man für die Vertikalkomponente der Oberflächenspannungskraft

$$F_1 = 2 b \sigma \cos \alpha$$

und für das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit

$$F_2 = h b d \rho g ,$$

also

$$h = \frac{2 \sigma \cos \alpha}{d g \rho} .$$

Die Steighöhe ist also halb so groß wie bei der zylindrischen Kapillaren. Dies leuchtet unmittelbar ein, da der wirksame Druck auch nur halb so groß ist.

## 2 Hydro- und Aerostatik

### 2.1 Flüssigkeitsdruck p

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Zustandsgrößen bei fehlender Bewegung. Wir holen zunächst den Nachweis nach, daß der **Druck eine richtungsunabhängige Größe**, also ein **Skalar**, ist. Wir betrachten ein Massenelement mit der Tiefe  $dz$  (Bild 2.1) eines Newtonschen Fluids im bewegungslosen Gleichgewichtszustand. Schubspannungen treten in den Schnittflächen erst bei Bewegung auf. Bei uns sind dort nur Normalkräfte vorhanden. Den Druck kennzeichnen wir mit einem Index:  $p_x, p_y, p_z$ , je nachdem auf welche Fläche er wirkt. Das Gewicht geht als Volumenkraft ein. Es bestehen die Relationen

$$dx = ds \cos \alpha, \quad dy = ds \sin \alpha.$$

Das Kräftegleichgewicht lautet

$$\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = 0$$

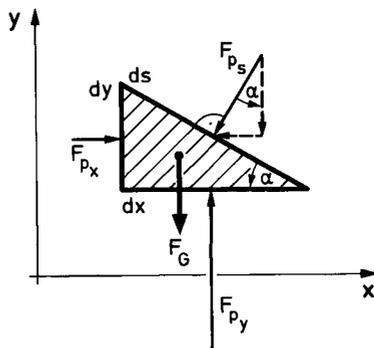
d.h. die Summe aller angreifenden Kräfte ist Null. In Komponenten besagt dies

$$\sum F_x = p_x dy dz - p_s \sin \alpha ds dz = (p_x - p_s) dy dz = 0,$$

$$p_s = p_x. \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= p_y dx dz - p_s \cos \alpha ds dz - \frac{1}{2} dx dy dz \rho g = \\ &= \left( p_y - p_s - \frac{1}{2} \rho g dy \right) dx dz = 0, \end{aligned}$$

$$p_s = p_y - \frac{1}{2} \rho g dy. \quad (2.2)$$



**Bild 2.1**

Kräftegleichgewicht am ruhenden Massenelement

Ziehen wir das Massenelement auf einen Punkt zusammen, so gehen (2.1) und (2.2) über in

$$p_s = p_x = p_y. \quad (2.3)$$

Wir können also die Indizes fortlassen. Dadurch ist der **Flüssigkeitsdruck**  $p$  als skalare Größe erkannt.

## 2.2 Flüssigkeitsdruck in Kraftfeldern

Wir betrachten nach wie vor ein ruhendes Medium, schneiden einen infinitesimalen Quader heraus (Bild 2.2) und formulieren die Gleichgewichtsbedingung. Wir unterteilen die auftretenden Kräfte in zwei Klassen: in **Massenkräfte** und **Oberflächenkräfte**. In die erste Gruppe fallen definitionsgemäß alle an der Masse des Elements angreifenden Kräfte (Schwerkraft, Zentrifugalkraft, elektrische und magnetische Kräfte usw.). Die zweite Gruppe enthält alle auf die Oberfläche wirkenden Kräfte (Druckkraft, Reibungskräfte usw.). Die letzteren Kräfte werden durch Normal- und Tangentialspannungen an der Oberfläche hervorgerufen. In dem hier betrachteten Spezialfall tritt nur der statische Druck auf.

Die Massenkraft pro Masseneinheit ist

$$\vec{f} = \{f_x, f_y, f_z\}. \quad (2.4)$$

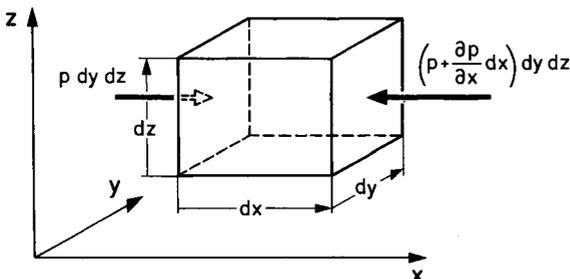
Die x-Komponente der Gleichgewichtsbedingung lautet

$$p \, dy \, dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz + f_x \, dm = 0,$$

also

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz + f_x \, dm = 0.$$

Mit dem Massenelement  $dm = \rho \, dx \, dy \, dz$  folgt für alle drei Komponenten



**Bild 2.2**  
Gleichgewichtsbetrachtung  
für den Quader

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \quad (2.5a)$$

oder, zusammengefaßt in Vektorform,

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \vec{f}. \quad (2.5b)$$

Wir diskutieren Spezialfälle, die für die Strömungslehre von Wichtigkeit sind. Als Massenkkräfte berücksichtigen wir die Schwerkraft

$$\vec{f}_s = \{0, 0, -g\}, \quad (2.6)$$

sowie die Zentrifugalkraft, die bei Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die z-Achse auftritt (Bild 2.3):

$$\vec{f}_z = \{\omega^2 x, \omega^2 y, 0\}. \quad (2.7)$$

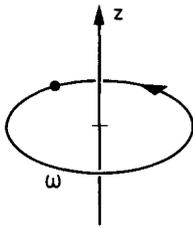
Strenggenommen fällt dieses Beispiel nicht mehr in das Gebiet der Statik. Rotiert das Fluid mit konstanter Winkelgeschwindigkeit wie ein starrer Körper, so können dennoch die obigen Gleichungen verwendet werden. (2.6) und (2.7) ergeben mit (2.5b) das Differentialgleichungssystem

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \omega^2 x \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \omega^2 y \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g. \quad (2.8)$$

Die Integration führt bei konstanter Dichte  $\rho$  schrittweise zu dem Ergebnis

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2 + f(y, z) \rightarrow \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = \rho \omega^2 y, \\ f(y, z) &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 y^2 + h(z) \rightarrow \frac{dh}{dz} = -g \rho, \\ h(z) &= -g \rho z + \text{konst}, \\ p(x, y, z) &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) - g \rho z + \text{konst}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Diese Druckverteilung kann man am einfachsten anhand der Isobarenflächen  $p = \text{konst}$  diskutieren. Es handelt sich um Rotationsparaboloide, die alle durch Translation längs der Rotationsachse auseinander hervorgehen (Bild 2.4):



← Bild 2.3  
Zur Zentrifugalkraft

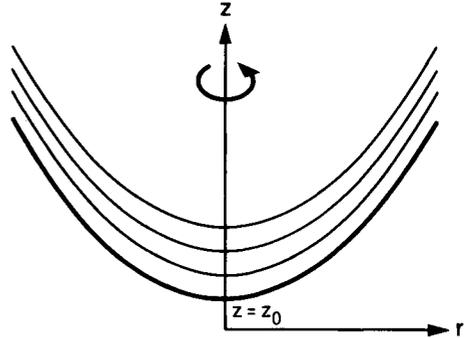


Bild 2.4 →  
Isobaren bei Drehung des Fluids um die z-Achse

$$z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) = \frac{\omega^2}{2g} r^2. \quad (2.10)$$

Speziell gilt diese Darstellung für die Flüssigkeitsoberfläche, denn dort ist der Druck gleich dem konstanten Atmosphärendruck. Man kann zu diesem Ergebnis sehr leicht auch auf dem folgenden Wege kommen: An der Flüssigkeitsoberfläche muß die Resultierende aus Schwerkraft und Zentrifugalkraft senkrecht zur Fläche liegen (Bild 2.5). Dies führt zum Anstieg

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g},$$

d.h. es kommt (2.10):

$$z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

Wir beschäftigen uns nun mit dem **Druckverlauf** in Flüssigkeiten und Gasen im **Schwerefeld**.

In einer ruhenden Flüssigkeit ( $\rho = \text{konst}$ ) erhalten wir aus (2.9) für die Druckdifferenz  $p_1 -$

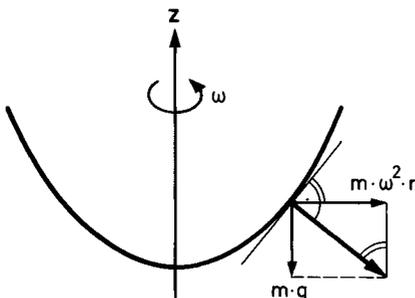


Bild 2.5  
Gleichgewichtsbetrachtung für die Flüssigkeitsoberfläche

$p_2$  beim Höhenunterschied  $h$  (Bild 2.6)

$$\Delta p = p_1 - p_2 = g \rho h. \quad (2.11)$$

Der Druck nimmt in Flüssigkeiten also **linear** mit der Tiefe zu. Die **Maßeinheiten** des Druckes sind

$$1 \text{ Pa (Pascal)} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2},$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Ältere Einheiten sind

$$\text{Technische Atmosphäre: } 1 \text{ at} = 1 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 10 \text{ m WS} = 0,981 \text{ bar},$$

$$\text{Physikalische Atmosphäre: } 1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr} = 76 \text{ cm Hg} = 1,033 \text{ at} = 1,013 \text{ bar} = 1013 \text{ mbar}.$$

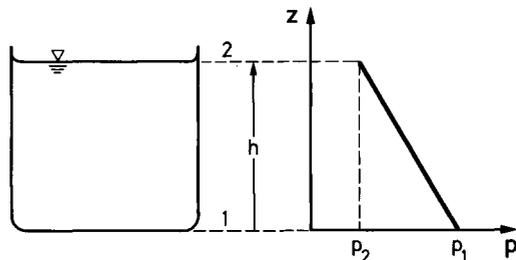
Es gelten damit die Zusammenhänge

$$1 \text{ Torr} = \frac{1}{760} \text{ atm} = 133,3 \text{ Pa},$$

$$1 \text{ mm Hg} = 13,6 \text{ mm WS}.$$

Die älteren Definitionen gehen entweder vom Druck einer 10 m hohen Wassersäule (WS) (= 1 at) oder einer 76 cm hohen Quecksilbersäule (= 1 atm) aus.

Die Druckmessung ( $p_1$ ) kann somit auf eine Längenmessung ( $h$ ) zurückgeführt werden (Bild 2.7). Das ist das Prinzip des Barometers. Die maximale Steighöhe wird für  $p_2 = 0$  erreicht. Wenn  $p_1$  der Atmosphärendruck ist und der Dampfdruck vernachlässigt wird, wird  $h_{\max} = 10 \text{ m WS}$ .



**Bild 2.6**  
Druckverlauf in ruhenden Flüssigkeiten im Schwerfeld

Von Interesse ist die Diskussion des Barometers unter Berücksichtigung von Kapillaritätseffekten (Bild 2.8). Die Hydrostatik liefert

$$p_1 - p_2' = g \rho h. \quad (2.12)$$

Die Oberflächenspannung führt bei vollständiger Benetzung zur Druckdifferenz

$$p_2 - p_2' = \frac{4 \sigma}{d}. \quad (2.13)$$

Subtraktion ergibt

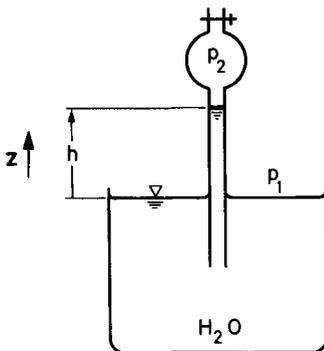
$$p_1 - p_2 = g \rho h - \frac{4 \sigma}{d},$$

d.h.

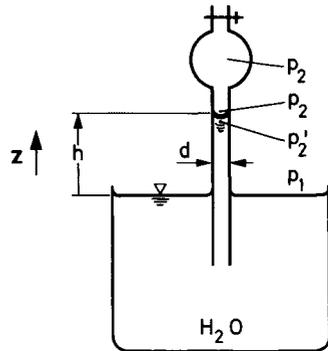
$$h = \frac{p_1 - p_2}{g \rho} + \frac{4 \sigma}{d g \rho}. \quad (2.14)$$

Danach sieht es so aus, als ob die maximale Steighöhe durch Kapillaritätseffekte vergrößert werden könnte. Dies ist jedoch nicht der Fall. Man hat hierzu lediglich zu beachten, daß nach (2.13)  $p_2 - p_2' \geq 0$  ist. Eine Verringerung von  $p_2$  hat dort ihre Grenze, wo  $p_2' = 0$  ist. Dann folgt aus (2.13):  $p_{2 \min} = 4 \sigma / d$  und aus (2.12):  $p_1 = g \rho h_{\max}$ . Dies stimmt vollständig mit der früher ermittelten Steighöhe überein.

Untersuchen wir nun die Druckverteilung in einem **geschichteten Medium** mit der Dichte  $\rho$



**Bild 2.7**  
Prinzip des Barometers



**Bild 2.8**  
Das Barometer unter Berücksichtigung von Kapillaritätseffekten

=  $p(z)$ . Es gibt viele Anwendungen, z.B. in Flüssigkeiten oder auch in der Atmosphäre. Wir beschäftigen uns im folgenden mit Gasschichten. Die hydrostatische Grundgleichung für den Druck (2.8)

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho$$

liefert mit der idealen Gasgleichung (1.19)

$$\frac{p}{\rho} = \mathbb{R}T$$

die Bestimmungsgleichung

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{\mathbb{R}T} dz. \quad (2.15)$$

Eine Integration ist nur möglich, wenn  $T=T(z)$  gegeben ist. Dies ist eine zusätzliche Aussage, die aus thermodynamischen Betrachtungen folgt (Energiebilanz!). Besonders einfach wird die Integration für eine **isotherme** Gasschicht. (2.15) ergibt bei den Anfangswerten  $p(z_0) = p_0$ ,  $\rho(z_0) = \rho_0$

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{g}{\mathbb{R}T_0}(z-z_0)\right), \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{g}{\mathbb{R}T_0}(z-z_0)\right). \quad (2.16)$$

Bei der Flüssigkeit konstanter Dichte liegt eine lineare Abhängigkeit des Druckes von der Höhe vor. Hier handelt es sich dagegen um einen exponentiellen Verlauf (Bild 2.9).

In der Atmosphäre kann man in der Troposphäre und in der Stratosphäre die Temperatur gut durch eine Gerade bzw. durch eine Konstante annähern (Bild 2.10). Eine entsprechende Integration wie oben führt in der Troposphäre zu einer Potenzfunktion, während in der Stratosphäre eine Exponentialfunktion vorliegt. Beide Druckfunktionen gehen in der Tropopause

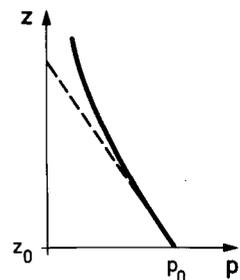
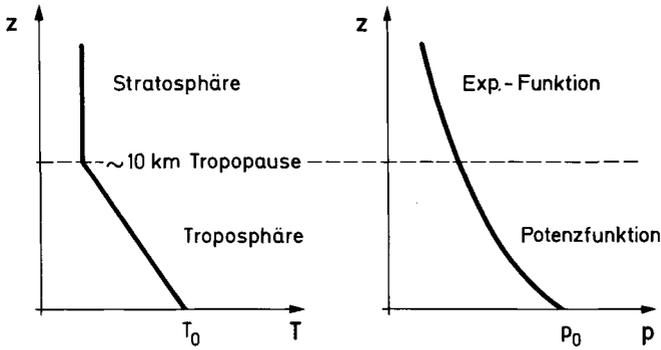


Bild 2.9

Druckverlauf in einer isothermen Gasschicht



**Bild 2.10**  
Temperatur und  
Druck in der At-  
mosphäre

stetig und stetig differenzierbar ineinander über. Letzteres folgt sofort aus der hydrostatischen Grundgleichung (2.5b) mit (2.6), weil die Dichte im Übergang stetig ist. In der Meteorologie werden diese Beziehungen (Barometrische Höhenformeln) sehr häufig, z.B. bei der Aufstiegsauswertung, verwendet.

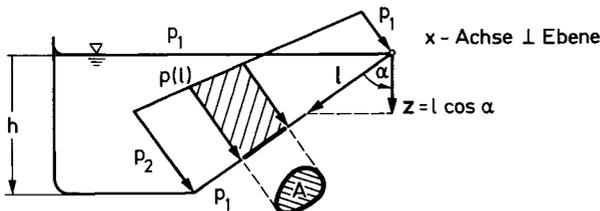
### 2.3 Druckkraft auf ebene Behälterwände

Das zu behandelnde Thema ist wichtig zur Dimensionierung von Gefäßen, Behältern, Staumauern usw. Wir betrachten hier zunächst ebene, geneigte Wände (Bild 2.11). Für den Druck gilt

$$p = p_1 + g \rho z.$$

Wir bestimmen den Betrag der Kraft  $|\vec{F}| = F$ , die von der Flüssigkeit auf die Fläche  $A$  übertragen wird. Für ein Flächenelement gilt  $dF = p dA$ , also insgesamt

$$\begin{aligned} F &= \int_A p dA = \int_A (p_1 + g \rho z) dA = p_1 A + g \rho \cos \alpha \int_A \ell dA = \\ &= p_1 A + g \rho \cos \alpha \ell_s A = p_1 A + g \rho z_s A = p_s A. \end{aligned} \quad (2.17)$$



**Bild 2.11**  
Druckkraft auf ebene,  
geneigte Wände

Hierin ist  $\ell_s$  die Schwerpunktskoordinate von  $A$ , definiert durch

$$\int_A \ell \, dA = \ell_s A. \quad (2.18)$$

Die von der Flüssigkeit ausgeübte Kraft ist damit gleich dem Druck im Flächenschwerpunkt mal der Fläche. Falls außen der konstante Druck  $p_1$  herrscht, ist die resultierende Kraft

$$F_{\text{Res}} = g \rho z_s A. \quad (2.19)$$

Dies ist ein einleuchtendes Ergebnis. Bei der Ermittlung der Kraft heben sich offenbar die Unterdrücke über dem Schwerpunkt mit den Überdrücken unter dem Schwerpunkt auf. Das liegt an der **linearen** Druckverteilung. Anders ist es bei den Momenten, die zur Bestimmung des Angriffspunktes dieser Kraft benötigt werden. Die Überdrücke unter dem Schwerpunkt haben einen größeren Hebelarm als die Unterdrücke. Demzufolge liegt der Angriffspunkt der Kraft stets **unter** dem Schwerpunkt. Wir führen die Rechnung nur für konstanten Außendruck  $p_1$ , d.h. für die Resultierende (2.19), vor. Der Leser kann den allgemeinen Fall sofort behandeln. Das Momentengleichgewicht bezüglich der  $x$ -Achse lautet:

$$\begin{aligned} F_{\text{Res}} \ell_m &= g \rho z_s A \ell_m = \int_A (p - p_1) \ell \, dA = \int_A g \rho z \ell \, dA = \\ &= g \rho \cos \alpha \int_A \ell^2 \, dA = g \rho \cos \alpha J_x. \end{aligned}$$

$J_x$  bezeichnet das Flächenträgheitsmoment von  $A$  bezüglich der  $x$ -Achse. Also kommt für den Angriffspunkt der Kraft  $F_{\text{Res}}$

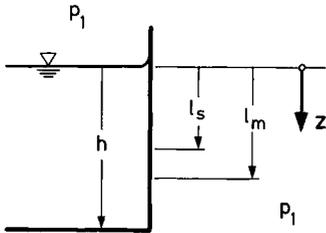
$$\ell_m = \frac{J_x}{A \ell_s}. \quad (2.20)$$

Wir verschieben die Bezugsachse parallel durch den Schwerpunkt. Der Steinersche Satz lautet

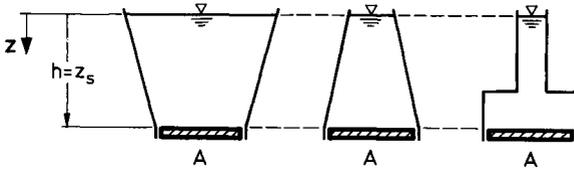
$$J_x = J_s + A \ell_s^2$$

mit  $J_s$  als Flächenträgheitsmoment bezüglich der Schwerachse parallel zur  $x$ -Achse. Also wird aus (2.20)

$$\ell_m - \ell_s = \frac{J_s}{A \ell_s} > 0, \quad (2.21)$$



**Bild 2.12**  
Schwerpunkt ( $\ell_s$ ) und Angriffspunkt der resultierenden Kraft ( $\ell_m$ ) für die rechteckige, ebene, vertikale Wand



**Bild 2.13**  
Das hydrostatische Paradoxon

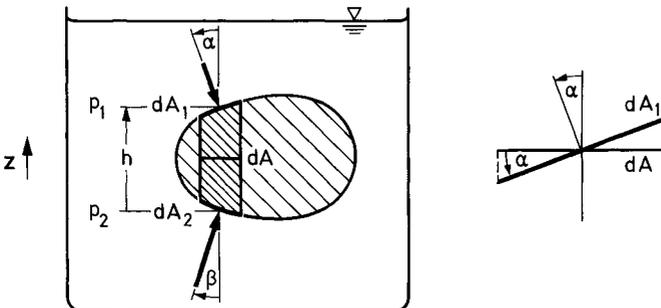
womit gezeigt ist, daß der Angriffspunkt der Kraft unter dem Schwerpunkt liegt. Diese Abweichung kann beträchtlich sein. In dem Spezialfall einer rechteckigen, ebenen, vertikalen Wand (Bild 2.12) ergibt sich z.B.

$$\ell_s = \frac{h}{2} \quad , \quad \ell_m = \frac{2}{3} h .$$

Die vorstehenden Überlegungen ergeben sofort die Erklärung des sogenannten **hydrostatischen Paradoxons** (Bild 2.13). Die resultierende Kraft auf die Bodenfläche der verschiedenen Behälter hängt gemäß (2.19) nur von  $A$ ,  $z_s$  und  $\rho$  ab, jedoch nicht von der **Gefäßform**. Die auf die Bodenfläche ausgeübte Kraft ist in allen skizzierten Fällen dieselbe, obwohl das Gewicht der in den Behältern enthaltenen Flüssigkeit verschieden ist.

### 2.4 Hydrostatischer Auftrieb. Druckkraft auf gekrümmte Flächen

Wir betrachten einen vollständig in einer Flüssigkeit eingetauchten Körper (Bild 2.14). Aufgrund der hydrostatischen Druckverteilung ist der Druck an der Körperunterseite größer



**Bild 2.14**  
Der hydrostatische Auftrieb

als an der Oberseite. Daraus resultiert eine vertikal gerichtete Kraft, der Auftrieb. Die Betrachtung wird zunächst für ein Körperelement durchgeführt:

$$\begin{aligned} dF_z &= p_2 dA_2 \cos \beta - p_1 dA_1 \cos \alpha = (p_2 - p_1) dA = \\ &= g \rho_{\text{Fl}} h dA = g \rho_{\text{Fl}} dV. \end{aligned}$$

Integration liefert

$$F_z = g \rho_{\text{Fl}} V, \quad (2.22)$$

d.h. der Auftrieb ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit (Archimedisches Prinzip). Diese Aussage kann unmittelbar zur Ermittlung von  $\rho_{\text{Körper}}$  oder  $\rho_{\text{Fluid}}$  benutzt werden. Für das Körpergewicht  $G$  gilt

$$G = g \rho_{\text{Körper}} V,$$

also mit (2.22)

$$\frac{G}{F_z} = \frac{\rho_{\text{Körper}}}{\rho_{\text{Fluid}}}. \quad (2.23)$$

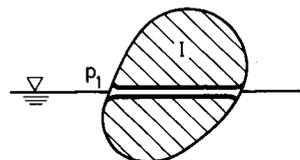
Ist eines der spezifischen Gewichte bekannt, so kann das andere ermittelt werden, wenn  $G$  und  $F_z$  gemessen wurden.

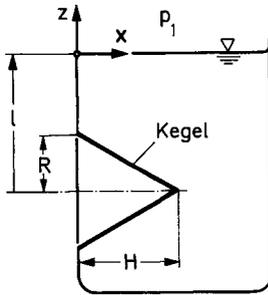
Das Archimedische Prinzip gilt auch für teilweise eingetauchte Körper (Bild 2.15). Zum Beweis wird längs der Flüssigkeitsoberfläche ein Schnitt durch den Körper gelegt mit konstantem Druck  $p_1$  längs der Schnittfläche. Das Druckintegral über den nichteingetauchten Körperteil (I) ergibt den Wert Null, da der Druck konstant ist. Was übrig bleibt, ist das Volumen des eingetauchten Teiles ( $= V$ ), und damit gilt auch hier (2.22).

Das Archimedische Prinzip kann sehr einfach zur Bestimmung der Kräfte auf **gekrümmte** Flächen angewandt werden, da die Integration über die beliebige Körperform hier bereits ein

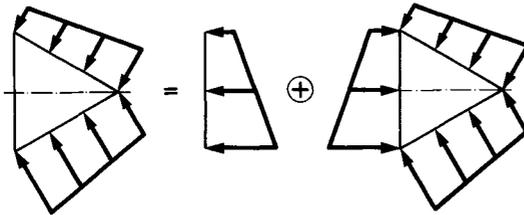
**Bild 2.15**

Das Archimedische Prinzip für den teilweise eingetauchten Körper





**Bild 2.16**  
Bestimmung der Kraft auf gekrümmte Flächen

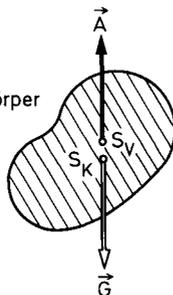


für allemal durchgeführt wurde. Wir erläutern dies an einem einfachen Beispiel (Bild 2.16). Ein Rotationskegel weist horizontal in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß. Wir ermitteln die Komponenten  $F_x$  und  $F_z$  der auf den Kegel wirkenden Kraft. Wir schneiden den Kegel frei und erhalten die angegebene Kraftverteilung. Die lineare Druckverteilung auf dem Kegelgrundriß nehmen wir auf - einmal positiv und einmal negativ. Dadurch haben wir einerseits einen völlig eingetauchten Körper (= Kegel), auf den wir das Archimedische Prinzip anwenden können, und andererseits eine ebene eingetauchte Fläche. Damit kommt

$$F_x = p_s \pi R^2 = (p_1 + g \rho_{Fl} \ell) \pi R^2,$$

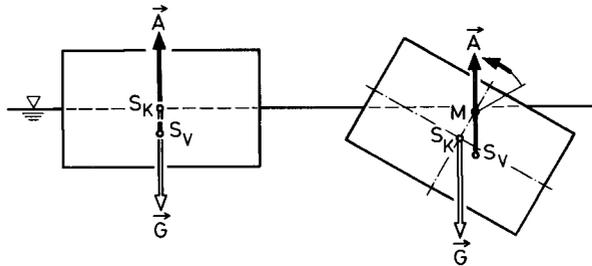
$$F_z = \frac{1}{3} g \rho_{Fl} \pi R^2 H.$$

eingetauchter  
schwimmender Körper

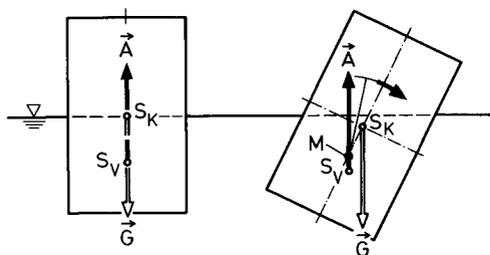


**Bild 2.17**  
Kräftegleichgewicht beim Schwimmen

**Bild 2.18**  
Stabiles Gleichgewicht  
beim Schwimmen



Eine weitere Anwendung betrifft das **Schwimmen** eines Körpers in einer Flüssigkeit. In diesem Fall handelt es sich um das **Kräftegleichgewicht** zwischen Auftrieb und Gewicht des Körpers. Bild 2.17 veranschaulicht dies.  $S_K$  ist der Körperschwerpunkt, während  $S_V$  den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit bezeichnet. Im allgemeinen ist  $S_K \neq S_V$ , da die Massen ungleich verteilt sein können oder der Körper nur teilweise eingetaucht ist. Daher entsteht die Frage nach der **Stabilität** dieses Gleichgewichtszustandes. Wir bringen hierzu den Körper geringfügig aus der Gleichgewichtslage heraus und diskutieren das Rückstellmoment der Auftriebskraft. In Bild 2.18 wird ein **stabiler** Fall betrachtet. Der Auftrieb liefert ein rückdrehendes Moment. Stabilität liegt offenbar immer dann vor, wenn das **Metazentrum**  $M$  oberhalb des Körperschwerpunktes liegt. Bild 2.19 illustriert einen **instabilen** Fall.  $M$  liegt unterhalb von  $S_K$ . Diese anschaulichen Betrachtungen sind einleuchtend und sehr einfach. Die quantitative Ermittlung, z.B. der Schwingungen um die Gleichgewichtslage, ist jedoch mit einigem Aufwand verbunden.



**Bild 2.19**  
Instabiles Gleichgewicht  
beim Schwimmen

### 3 Hydro- und Aerodynamik

#### 3.1 Stromfadentheorie

##### 3.1.1 Grundbegriffe

Für ein bewegtes Medium sind zu bestimmen

$$\vec{w} = (u, v, w), p, \rho, T. \tag{3.1}$$

Hierzu stehen - wie bereits einleitend hervorgehoben - sechs Gleichungen zur Verfügung. Im folgenden werden Spezialfälle dieser Gleichungen zum Studium der Bewegung untersucht. Die Gesamtheit der Größen (3.1) in dem betrachteten Raum- und Zeitbereich beschreibt ein **Strömungsfeld**. Dieses Feld heißt **stationär**, wenn alle Größen (3.1) nur Funktionen der Ortskoordinaten sind. Das Feld heißt dagegen **instationär**, wenn die Zeit als zusätzliche Variable auftritt.

Es gibt zwei verschiedene Beschreibungsmöglichkeiten für Strömungsfelder.

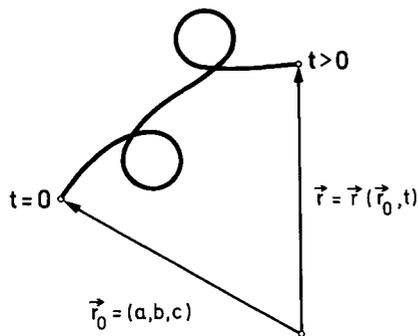
#### 1. Lagrangesche Methode (massen- oder teilchenfeste Betrachtung)

Hierbei wird das einzelne Teilchen bei seiner Bewegung im Raum verfolgt. Die jeweilige Position des Teilchens ist eine Funktion der Anfangslage

$$\vec{r}_0 = (a, b, c)$$

und der Zeit  $t$ . Die Teilchenbahn (Bild 3.1) schreibt sich damit in der Form

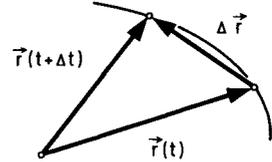
$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t). \tag{3.2}$$



**Bild 3.1**  
Bewegung längs der Teilchenbahn

**Bild 3.2**

Bildung der substantiellen Ableitung



Für die Geschwindigkeit  $\vec{w}$  und die Beschleunigung  $\vec{b}$  ergeben sich die folgenden materiellen oder substantiellen Ableitungen (Bild 3.2):

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)_{a,b,c} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (3.3)$$

$$\vec{b} = \left( \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \right)_{a,b,c} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (3.4)$$

Der Index a,b,c bedeutet, daß die Ableitung bei fester Anfangslage, also für ein und dasselbe Teilchen, durchgeführt wird. Die hierzu erforderlichen Messungen sind jedoch schwer zu realisieren. Man müßte sozusagen das Meßgerät mitfliegen lassen. Dagegen ist diese Beschreibung gut geeignet für Größen, die fest mit dem jeweiligen Teilchen verbunden sind. Zum Beispiel ist die unten eingeführte Wirbelstärke eine solche Größe. Alle Erhaltungssätze (Masse, Impuls und Energie) werden am besten so formuliert.

**2. Eulersche Methode** (ortsfeste Betrachtung)

Hierbei betrachten wir die Änderung der Strömungsgrößen an einer festen Stelle des Raumes, während die einzelnen Teilchen vorbeiziehen. Dies entspricht dem Vorgehen bei der Messung mit einem ortsfesten Meßgerät. Beide Darstellungen stehen in einem einfachen Zusammenhang. Für eine Teilcheneigenschaft  $f(x,y,z,t)$  liefert die Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \text{ grad } f. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Hier steht auf der linken Seite die substantielle Änderung, während rechts an erster Stelle die lokale Änderung auftritt. Der Unterschied beider wird durch den **konvektiven** Ausdruck  $\vec{w} \text{ grad } f$  gebildet. Er beschreibt in einfacher Weise den Einfluß des Geschwindigkeitsfeldes.

Am Beispiel  $f = T$ , d.h.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{w} \text{ grad } T,$$

kann man sich dies sehr leicht veranschaulichen.

**Teilchenbahnen** sind Kurven, die die Teilchen im Lauf der Zeit durchheilen. Ihre Differentialgleichung ergibt sich aus (3.2) und (3.3) zu

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \bar{w},$$

d.h.

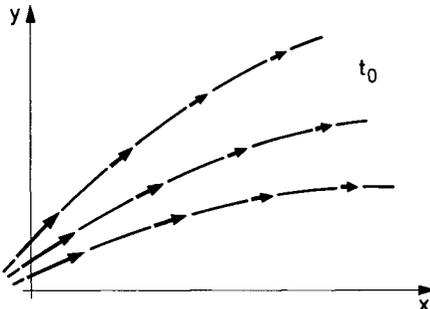
$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t) \quad , \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t). \quad (3.6)$$

Ist die Geschwindigkeit  $\bar{w}$  bekannt, so ergeben sich die Teilchenbahnen durch Integration.

**Stromlinien** sind Kurven, die zu jedem festen Zeitpunkt auf das Geschwindigkeitsfeld passen. Sie stellen ein momentanes Bild des Geschwindigkeitsfeldes dar (Bild 3.3). Zu einem späteren Zeitpunkt kann die Gestalt der Stromlinien ganz anders sein. Die Differentialgleichung in der  $(x, y)$ -Ebene lautet (Bild 3.4)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y, z, t)}{u(x, y, z, t)}.$$

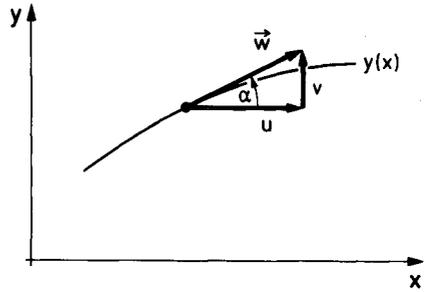
$t$  spielt hier die Rolle eines Parameters. Allgemein kann man die Differentialgleichungen in der folgenden Beziehung zusammenfassen



**Bild 3.3**

Stromlinien als momentanes Bild des Geschwindigkeitsfeldes

**Bild 3.4**  
Zur Differentialgleichung der Stromlinien

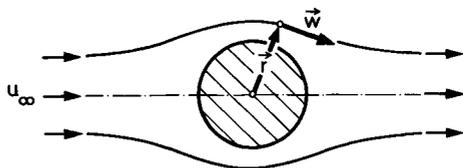


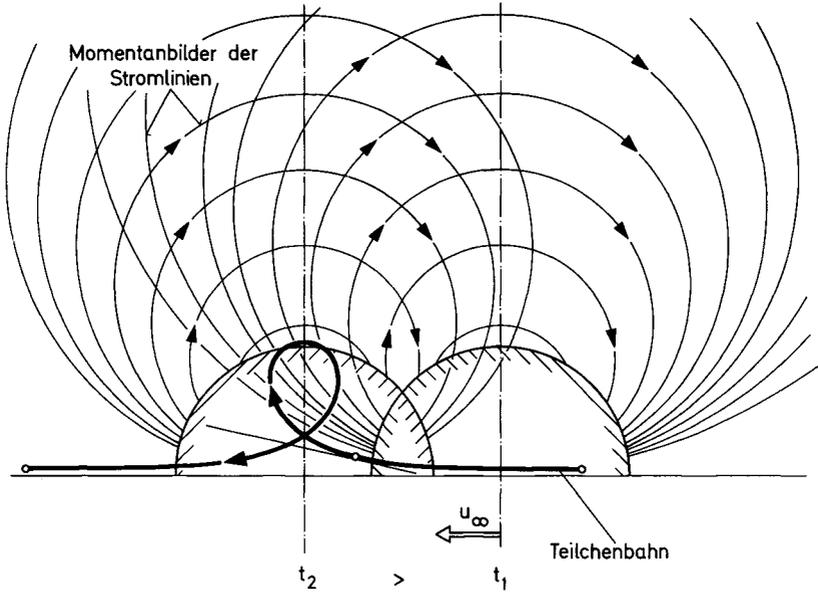
$$dx : dy : dz = u(x,y,z,t) : v(x,y,z,t) : w(x,y,z,t). \quad (3.7)$$

Bei **stationären** Strömungen fallen die Teilchenbahnen mit den Stromlinien zusammen. In (3.7) tritt dann keine Zeitabhängigkeit mehr auf. Bei **instationären** Strömungen unterscheiden sich dagegen im allgemeinen die beiden Kurvensysteme. Wir erläutern diese Problematik an einem einfachen Beispiel.

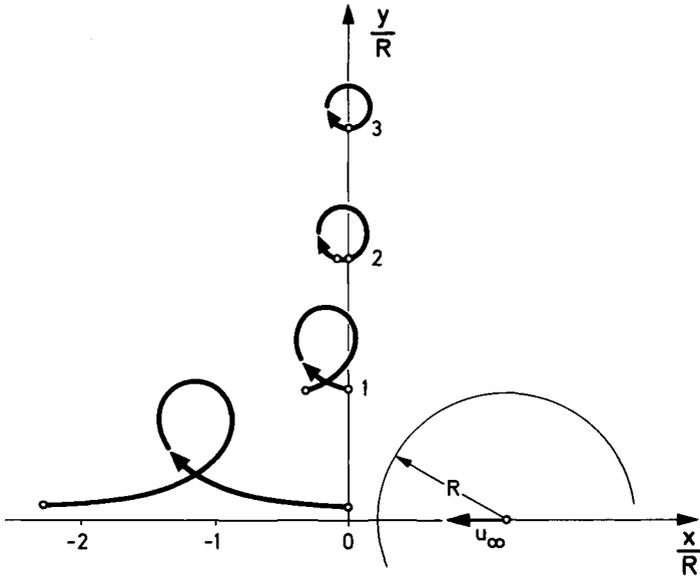
Wir betrachten die Umströmung eines ruhenden Zylinders mit der Anströmung  $u_\infty$  (Bild 3.5). Der Beobachter befinde sich auf dem Zylinder. Es handelt sich um eine **stationäre** Strömung. Die Teilchenbahnen stimmen mit den Stromlinien überein. Wir nehmen jetzt einen Wechsel des Bezugssystems vor, und zwar bewegen wir den Beobachter mit der Anströmung mit. Der Zylinder bewegt sich dann von rechts nach links mit der Geschwindigkeit  $-u_\infty$ . Jetzt handelt es sich um eine **instationäre** Strömung. Der Zylinder schiebt bei seiner Bewegung das Medium vor sich her, er drängt es dabei zur Seite und läßt es schließlich hinter sich. Bild 3.6 zeigt zu zwei verschiedenen Zeiten die Momentanbilder der Stromlinien sowie eine Teilchenbahn. In Bild 3.7 sind einige Teilchenbahnen für verschiedene Anfangslagen gezeichnet. Ist das Teilchen weit vom Zylinder in Querrichtung entfernt, so führt es eine nahezu kreisförmige Ausweichbewegung durch. Nähert man das Teilchen dem Zylinder, so führt es eine schleifenförmige Bewegung aus, deren horizontale Erstreckung bei Annäherung an die Achse immer größer wird. Die Diskussion dieser Teilchenbewegungen ist sehr interessant und vermittelt viele Einsichten in die Strömungslehre. Die quantitative Berechnung der Teilchenbahnen benutzt die unten entwickelte Potentialtheorie. Es ist ein Charakteristikum des behandelten Beispiels, daß die instationäre Strömung lediglich durch einen Wechsel des Bezugssystems zu einer stationären Strömung gemacht werden kann.

**Bild 3.5**  
Stationäre Umströmung des Kreiszylinders





**Bild 3.6**  
 Instationäre Strömung bei Bewegung des Zylinders. Momentanbilder der Stromlinien sowie Teilchenbahn



**Bild 3.7**  
 Verschiedene Teilchenbahnen bei der Zylinderbewegung

### 3.1.2 Grundgleichungen der Stromfadentheorie

Wir betrachten hier **reibungsfreie** Strömungen, die überdies bis auf wenige Ausnahmen **stationär** sein sollen. Für das Folgende ist der Begriff des **Stromfadens** entscheidend. Wir gehen aus von einer Stromlinie  $1 \rightarrow 2$  (Bild 3.8). In 1 betrachten wir die Querschnittsfläche  $A_1$ . Durch jeden Randpunkt von  $A_1$  zeichnen wir uns eine weitere Stromlinie. Diese hüllen eine **Stromröhre** ein. Der **Stromfaden** stellt eine Abstraktion dar. Hierbei beschränkt man sich auf die unmittelbare Umgebung der Stromlinie derart, daß die Änderungen aller Zustandsgrößen in der Querrichtung sehr viel kleiner als in der Längsrichtung ausfallen. Dadurch gibt es in jedem Querschnitt des Stromfadens nur jeweils einen Wert für Geschwindigkeit  $c$ , Druck  $p$ , Dichte  $\rho$  und Temperatur  $T$ . Diese Größen hängen dann nur von der Bogenlänge  $s$  und gegebenenfalls von der Zeit  $t$  ab. Damit handelt es sich um einen eindimensionalen Vorgang, dessen Behandlung sehr viel einfacher als der allgemeine Fall ist. Diese **Stromfadentheorie** ist ein wichtiges Hilfsmittel für die Strömungslehre. Will man Beispiele aus den Anwendungen hiermit behandeln, so muß man jedoch genau kontrollieren, ob die Voraussetzungen für die vorgenommene Idealisierung erfüllt sind. Insbesondere ist zu prüfen, ob die Änderungen der Zustandsgrößen in Querrichtung wirklich sehr viel kleiner als in Längsrichtung sind.

#### 1. Kontinuitätsgleichung (Konstanz des Massenstromes)

Der Mantel des Stromfadens besteht aus Stromlinien (Bild 3.8). Durch ihn tritt nichts hindurch. Daher ist die pro Zeiteinheit durch den Querschnitt tretende Masse

$$\dot{m} = \rho_1 c_1 A_1 = \rho_2 c_2 A_2 = \text{konst}$$

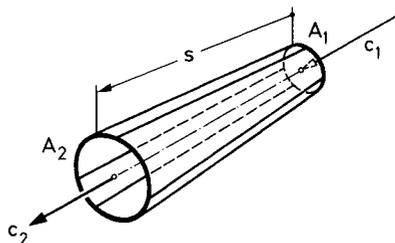
oder allgemein

$$\dot{m} = \rho c A = \text{konst.} \quad (3.8)$$

#### 2a. Kräftegleichgewicht in Richtung des Stromfadens

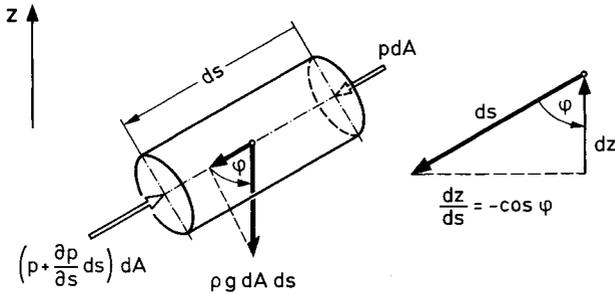
Bei der folgenden Betrachtung am infinitesimalen Stromfadenelement kann die Querschnittsänderung vernachlässigt werden. Sie liefert Glieder höherer Ordnung in den Differentialen. Wir wenden das Newtonsche Grundgesetz an (Bild 3.9):

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Summe der angreifenden Kräfte.} \quad (3.9)$$



**Bild 3.8**

Definition des Stromfadens



**Bild 3.9**  
Kräftegleichgewicht  
in Richtung des  
Stromfadens

Hierin ist

$$\text{Masse} = dm = \rho \, dA \, ds,$$

$$\text{Beschleunigung} = \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial s},$$

angreifende Kräfte = Druckkräfte + Gewicht =

$$= -\frac{\partial p}{\partial s} \, dA \, ds + \rho \, g \, dA \, ds \cos \varphi = -\left(\frac{\partial p}{\partial s} + \rho \, g \frac{\partial z}{\partial s}\right) dA \, ds.$$

(3.9) liefert die **Eulersche Gleichung** für den Stromfaden

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s}. \quad (3.10)$$

für **stationäre** Strömungen sind alle Größen nur Funktionen von  $s$ :

$$c \frac{dc}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{c^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} - g \frac{dz}{ds}. \quad (3.11)$$

Eine Integration längs des Stromfadens von 1  $\rightarrow$  2 ergibt

$$\frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0. \quad (3.12a)$$

Betrachten wir den Endzustand (2) als variabel, so wird

$$\frac{c^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g z = \text{konst.} \quad (3.12b)$$

Die Konstante faßt hierin die drei links stehenden Terme im Ausgangszustand (1) zusammen. Sie ist für alle Punkte des Stromfadens dieselbe, kann sich jedoch von Stromfaden zu Stromfaden ändern. (3.12) heißt **Bernoulli-Gleichung** und liefert einen wichtigen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Druck.

Für **instationäre** Strömungen tritt in der Bernoulli-Gleichung links das Zusatzglied

$$\int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t} ds \quad (3.13)$$

auf. Die Integration ist hier bei festem  $t$  längs der Stromlinie von  $1 \rightarrow 2$  durchzuführen. Dieser Ausdruck muß oft abgeschätzt und mit den in (3.12a) auftretenden Termen verglichen werden, um sicher zu sein, daß man stationär rechnen darf.

In der Bernoulli-Gleichung (3.12b) hat jedes Glied die Dimension einer Energie pro Masse. Dennoch handelt es sich hier **nicht** um den Energiesatz, sondern um ein Integral der Bewegungsgleichung. In der Kontinuumsmechanik ist dies wesentlich. Zur Auswertung des Integrals

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} \quad (3.14)$$

in (3.12a) muß aus einer Energiebilanz bekannt sein, was für eine Zustandsänderung von  $1 \rightarrow 2$  erfolgt. Wir kommen darauf zurück.

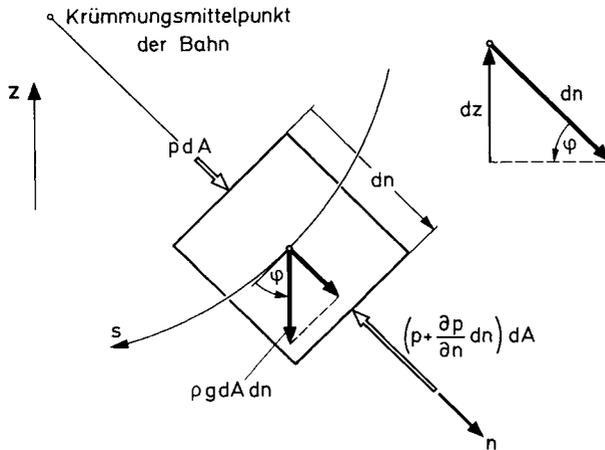
## 2b. Kräftegleichgewicht senkrecht zum Stromfaden

Stromfäden können Kräfte aufeinander ausüben. Bild 3.10 skizziert den Fall eines gekrümmten Stromfadens. Es ergeben sich der Reihe nach

$$\text{Masse} = dm = \rho dA dn ,$$

$$\text{Beschleunigung in normaler Richtung} = \frac{dc_n}{dt} = -\frac{c^2}{r} .$$

$r$  ist der lokale Krümmungsradius der Bahn. Das Minuszeichen tritt auf, da die Beschleunigung zum Krümmungsmittelpunkt weist.



**Bild 3.10**  
Kräftegleichgewicht  
senkrecht zum Strom-  
faden

$$\begin{aligned} \text{Angreifende Kräfte} &= -\frac{\partial p}{\partial n} dA dn + \rho g dA dn \sin \varphi = \\ &= -\left(\frac{\partial p}{\partial n} + \rho g \frac{\partial z}{\partial n}\right) dA dn. \end{aligned}$$

Damit kommt

$$\frac{c^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g \frac{\partial z}{\partial n}. \quad (3.15)$$

Ohne Schwerkraft haben wir ein Gleichgewicht zwischen Fliehkraft und Druckkraft:

$$\frac{c^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (3.16)$$

d.h. in radialer Richtung steigt der Druck an. Dieser Druckanstieg hält der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht.

### 3. Energiesatz für die stationäre Stromfadenströmung

Wir fassen die innere Energie ( $e$ ) und die kinetische Energie ( $1/2 c^2$ ) pro Masseneinheit zusammen:

$$e + \frac{1}{2} c^2. \quad (3.17)$$

Der Energiestrom im Stromfaden wird damit

$$\dot{E} = \left( e + \frac{1}{2} c^2 \right) \dot{m}. \quad (3.18)$$

In den beiden Querschnitten 1 und 2 erhalten wir:

$$\dot{E}_1 = \left( e_1 + \frac{1}{2} c_1^2 \right) \rho_1 c_1 A_1 = \left( e_1 + \frac{1}{2} c_1^2 \right) \dot{m}, \quad (3.19a)$$

$$\dot{E}_2 = \left( e_2 + \frac{1}{2} c_2^2 \right) \rho_2 c_2 A_2 = \left( e_2 + \frac{1}{2} c_2^2 \right) \dot{m}. \quad (3.19b)$$

Die Ursache für die Änderung des Energiestromes von 1 → 2 ist gegeben durch die Leistung der angreifenden Kräfte sowie durch die Leistung des Wärmestromes. Sehen wir auch hier von der Reibung ab und bezeichnen mit  $q$  die der Masseneinheit zugeführte Wärme, so wird

$$\dot{E}_2 - \dot{E}_1 = p_1 A_1 c_1 - p_2 A_2 c_2 + g(z_1 - z_2) \dot{m} + q \dot{m}. \quad (3.20)$$

Mit (3.19a,b) kommt

$$e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} c_2^2 + g z_2 = e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} c_1^2 + g z_1 + q \quad (3.21a)$$

oder mit der Enthalpie  $i = e + p/\rho$

$$i_2 + \frac{1}{2} c_2^2 + g z_2 = i_1 + \frac{1}{2} c_1^2 + g z_1 + q. \quad (3.21b)$$

Nehmen wir den Endzustand (2) wieder als variabel, so wird

$$i + \frac{1}{2} c^2 + g z - q = \text{konst.} \quad (3.22)$$

Diese Gleichung hat eine bemerkenswerte Verwandtschaft mit der Bernoulli-Gleichung (3.12b), mit der sie aber nur in Spezialfällen übereinstimmt. Wir kommen darauf zurück.

Wir fassen das Ergebnis zusammen. Längs des Stromfadens ( $s$ ) haben wir die folgenden drei nichtlinearen Gleichungen für die Variablen  $c$ ,  $p$  und  $\rho$  :

$$\dot{m} = \rho c A = \text{konst.}, \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{2} c^2 + \int \frac{dp}{\rho} + g z = \text{konst.} \quad (3.12b)$$

$$\frac{1}{2} c^2 + i + g z - q = \text{konst.} \quad (3.22)$$

A und q werden hierin als bekannt angesehen. Die Enthalpie i ist durch die Thermodynamik auf p und  $\rho$  zurückzuführen. Das Kräftegleichgewicht normal zum Stromfaden liefert die Druckänderung  $\partial p / \partial n$ , wenn mit dem obigen System c(s) und  $\rho(s)$  ermittelt wurden.

Anstelle der drei Grundgleichungen (3.8), (3.12b) und (3.22) kann man natürlich auch zu Kombinationen von ihnen übergehen. Subtrahiert man z.B. (3.12b) von (3.22), kommt

$$i - \int \frac{dp}{\rho} - q = \text{konst.}$$

Dem entspricht in Differentialform

$$di - \frac{dp}{\rho} = dq,$$

d.h. es kommt der erste Hauptsatz der Thermodynamik, der dann an die Stelle des Energiesatzes tritt. Wird keine Wärme zu- oder abgeführt, so ist (3.12b) mit (3.22) identisch. Dies ist der wichtige Spezialfall, in dem die Bernoulli-Gleichung mit dem Energiesatz übereinstimmt. Der Unterschied beider Gleichungen wird erst dann wesentlich, wenn Energieanteile auftreten, die in der Bewegungsgleichung nicht enthalten sind. Als Beispiele seien angeführt: Wärmezu- oder -abfuhr, Wärmeleitungsvorgänge, Strahlungsanteile.

Für einfache Zustandsänderungen können wir das in (3.12b) auftretende Integral leicht ermitteln.

$$\text{Isobar: } p = \text{konst} \quad , \quad \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (3.23a)$$

Es kommt der Energiesatz der Massenpunktmechanik:

kinetische + potentielle Energie = konst.

$$\text{Isochor: } \rho = \text{konst} \quad , \quad \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho}. \quad (3.23b)$$

**Isotherm:**  $T = \text{konst.}$

Die ideale Gasgleichung führt zu

$$\frac{dp}{\rho} = \mathbb{R} T \frac{d\rho}{\rho}, \quad \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \mathbb{R} T \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (3.23c)$$

**Isentrop:** Die reversible Adiabate  $\frac{p}{\rho_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^\kappa$ ,

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_1^{1/\kappa}}{\rho_1} \int_1^2 \frac{dp}{p^{1/\kappa}} = -\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]. \quad (3.23d)$$

### 3.1.3 Stromfadentheorie in Einzelausführungen

In diesem Abschnitt werden wir ausführlich unter anderem ein breites Spektrum von Beispielen behandeln. Dadurch versteht man viele typische Einzelheiten der Strömungslehre, auf die wir später immer wieder zurückgreifen.

#### 1. Bewegung auf konzentrischen Kreisbahnen (Wirbel)

Die Bewegung erfolge in einer Horizontalebene. Dann können wir von der Schwerkraft absehen. Wegen der Drehsymmetrie hängen alle Größen nur von  $r$  und nicht vom Polarkoordinatenwinkel  $\varphi$  ab. In radialer Richtung gilt (3.16):

$$\frac{c^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \quad (3.24)$$

und in Umfangsrichtung (3.12b):

$$\frac{1}{2} c^2 + \int^p \frac{dp}{\rho} = f(r). \quad (3.25)$$

Hier ist berücksichtigt, daß die Gesamtenergie  $f(r)$  grundsätzlich im Stromfeld von  $r$  abhängen kann. Setzen wir unten  $f(r) \equiv \text{konst}$  voraus, so beschränken wir uns auf isoenergetische Strömungen. Mit dieser zusätzlichen Voraussetzung werden durch die Bernoulli-Gleichung auch die Zustände auf verschiedenen Stromlinien miteinander verknüpft. Die Kontinuitätsgleichung liefert hier keine Aussage, da  $A = A(r)$  durch die Aufgabenstellung nicht

gegeben ist. (3.24) und (3.25) sind zwei Gleichungen für  $c$ ,  $p$  und  $\rho$ . Die Thermodynamik liefert mit einer Vorschrift über die Art der Zustandsänderung die fehlende Bedingung.

Für isoenergetische Strömungen gibt (3.25) mit (3.24)

$$0 = c \frac{dc}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = c \frac{dc}{dr} + \frac{c^2}{r},$$

d.h.

$$\frac{dc}{dr} = -\frac{c}{r}$$

mit der Lösung ( $r = r_1$ ,  $c = c_1$ )

$$c = \frac{c_1 r_1}{r}. \quad (3.26)$$

Dies ist eine hyperbolische Geschwindigkeitsverteilung  $c \sim 1/r$ . Man spricht von einem sogenannten **Potentialwirbel**. Für die Berechnung des **Druckes** beschränken wir uns auf isochore Vorgänge. (3.24) liefert

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{c^2}{r} = \frac{c_1^2 r_1^2}{r^3}$$

mit der Lösung ( $r = r_1$ ,  $p = p_1$ )

$$p = p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 r_1^2 \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (3.27)$$

Geschwindigkeit und Druck variieren im Potentialwirbel gegenläufig. Dies ist eine typische Aussage der Bernoulli-Gleichung (Bild 3.11). In der Nähe des Nullpunktes wachsen beide Größen beliebig an, was eine Folge unserer Voraussetzungen, insbesondere der Reibungsfreiheit, ist. Wir gebrauchen (3.26) und (3.27) nur für  $r \geq r_1$ . Bei einem viskosen Strömungsmedium spielt in der Nähe von  $r = 0$  die Reibung die entscheidende Rolle. Die Schubspannungen würden dort bei einer dem Potentialwirbel entsprechenden Geschwindigkeitsverteilung beliebig anwachsen. Die Natur hilft sich sozusagen selbst, und das Medium rotiert statt dessen wie ein starrer Körper (Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \text{konst}$ , Schubspannung  $\tau(r) \equiv 0$ ):

$$c = \omega r = \frac{c_1}{r_1} r. \quad (3.28)$$

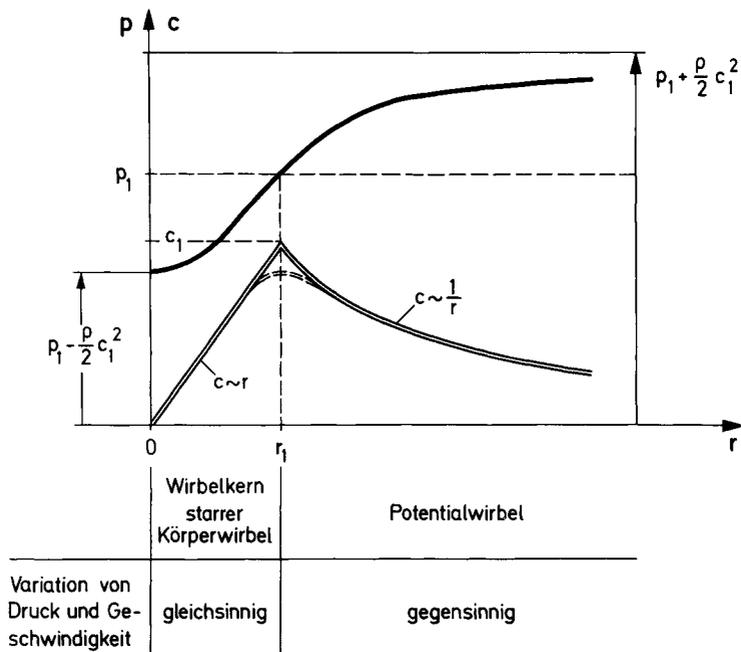


Bild 3.11

Geschwindigkeit und Druck im Wirbel

Zur Berechnung des zugehörigen Druckes können wir die Kräftegleichung in radialer Richtung (3.24) benutzen. Die Beziehung (3.24) kann darüber hinaus immer dann benutzt werden, wenn die Reibung nur durch Schubspannungen in tangentialer und nicht in normaler Richtung eingeht.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{c_1^2}{r_1^2} r$$

führt zu der Lösung ( $r = r_1$ ,  $p = p_1$ )

$$p = p_1 + \frac{\rho}{2} \frac{c_1^2}{r_1^2} (r^2 - r_1^2) \quad , \quad r \leq r_1 \quad . \quad (3.29)$$

Die Druckverteilung (3.29) geht bei  $r = r_1$  mit stetiger Tangente in (3.27) über. Für  $r < r_1$  variieren Geschwindigkeit und Druck gleichsinnig. Im sogenannten **Wirbelkern** kann ein erheblicher Unterdruck auftreten. Wir kommen darauf zurück. Eine Aussage über die Größe von  $r_1$  ist ohne explizite Berücksichtigung der Reibung nicht möglich.

## 2. Wirbelquell- oder Wirbelsenkströmung

Für den **Potentialwirbel** gilt für die Umfangsgeschwindigkeit

$$c_u = \frac{c_{u1} r_1}{r}. \quad (3.30)$$

Genauso gilt für die **Quelle** oder **Senke** für die Radialgeschwindigkeit, wie wir später nachtragen,

$$c_r = \frac{c_{r1} r_1}{r}. \quad (3.31)$$

Überlagern wir beide Einzelfelder, so wird

$$c = \sqrt{c_r^2 + c_u^2} = \sqrt{c_{u1}^2 + c_{r1}^2} \frac{r_1}{r} = \frac{\text{konst}}{r}. \quad (3.32)$$

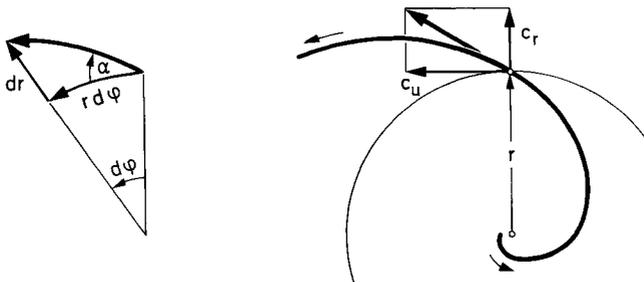
Auch in diesem Fall gilt  $c \sim 1/r$ . Die Bestimmung der Stromlinien erläutert Bild 3.12. Es ist

$$\tan \alpha = \frac{c_r}{c_u} = \frac{c_{r1}}{c_{u1}} = \text{konst} = \frac{dr}{r d\varphi}.$$

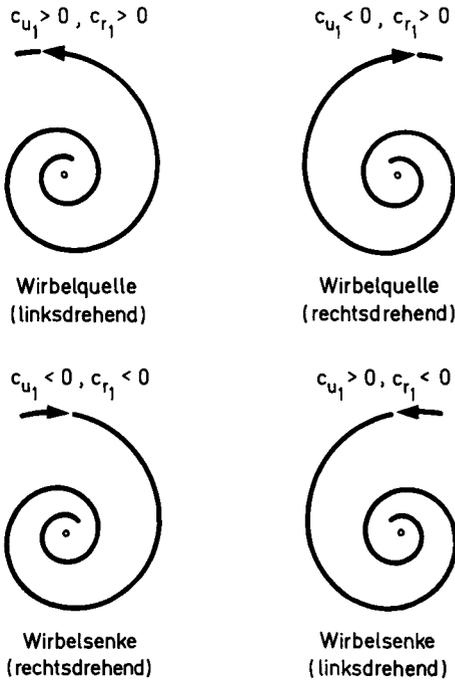
Die Integration führt auf logarithmische Spiralen ( $r = r_1$ ,  $\varphi = \varphi_1$ )

$$r = r_1 \exp \frac{c_{r1}}{c_{u1}} (\varphi - \varphi_1). \quad (3.33)$$

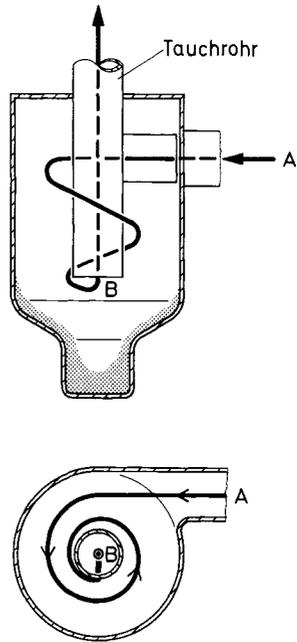
Bild 3.13 erläutert die verschiedenen Fallunterscheidungen, was den Drehsinn bzw. die Quell- oder Senkeneigenschaft angeht. Solche Wirbelströmungen treten in Natur und Technik sehr häufig auf, wobei die Größenordnungen ganz unterschiedlich sein können. Wir erinnern an Wirbelstürme, Hoch- und Tiefdruckgebiete der Meteorologie sowie Spiralnebel der Astrophysik. Als einfaches Anwendungsbeispiel führen wir die Strömung in einem **Zyklon** an. In Bild 3.14 ist ein solches Gerät im Grund- und Seitenriß skizziert. Ein mit Partikeln



**Bild 3.12**  
Bestimmung der  
Stromlinien der  
Wirbelquelle



**Bild 3.13**  
Fallunterscheidungen bei Wirbelquelle und -senke



**Bild 3.14**  
Strömung im Zyklon

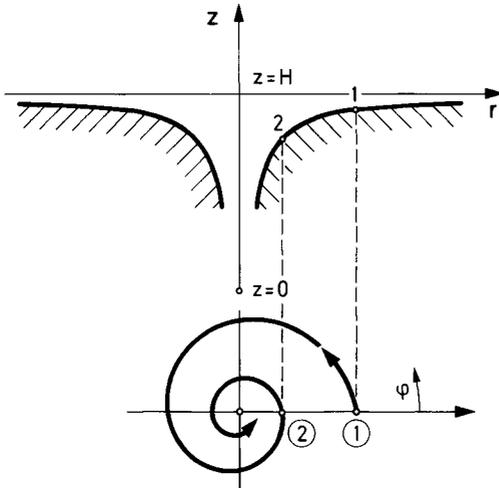
beladener Gasstrom (z.B. staubhaltige Luft) tritt tangential bei A in eine Kreisbahn. Es kommt zu einer Wirbelsenkenströmung, bei der das Gas im Tauchrohr B abgesaugt wird, während die Teilchen durch die Zentrifugalkraft nach außen geschleudert und unten aufgefangen werden. Die früher angeführte radiale Druckdifferenz spielt dabei eine erhebliche Rolle.

### 3. Drehbewegung unter Berücksichtigung der Schwere

Wir denken hierbei etwa an den Ausflußwirbel in einem Behälter mit freier Oberfläche. Durch den Ausfluß kommt es bei gleichzeitiger Drehbewegung zu einer Absenkung des Flüssigkeitsspiegels. Im Grundriß liegt in guter Näherung eine Wirbelsenkenströmung der oben besprochenen Art vor. Bild 3.15 enthält die auftretenden Bezeichnungen. Wir wenden die Bernoulli-Gleichung für  $\rho = \text{konst}$  längs der Stromlinie von  $1 \rightarrow 2$  an:

$$\frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g h_1 = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g h_2. \tag{3.34}$$

An der freien Oberfläche ist  $p_1 = p_2 = p$ . Lassen wir den Punkt  $1 \rightarrow \infty$  gehen, so wird  $c_1 \rightarrow 0$ ,  $h_1 \rightarrow H$ . Der Index 2 sei variabel, bei Vernachlässigung der Vertikalkomponente wird:



**Bild 3.15**  
Wirbelschenkelströmung mit freier  
Oberfläche im Schwerfeld

$c_2 = c = \text{konst}/r = K/r$ ,  $h_2 = z$ . (3.34) geht über in

$$gH = \frac{c^2}{2} + gz,$$

also

$$H - z = \frac{c^2}{2g} = \frac{K^2}{2g r^2}. \quad (3.35)$$

Es kommt also zu einer Spiegelabsenkung im Trichter  $\sim 1/r^2$ .

#### 4. Die verschiedenen Druckbegriffe und die Messung

Wir gehen aus von der Bernoulli-Gleichung bei  $\rho = \text{konst}$  im Schwerfeld:

$$p + \frac{\rho}{2} c^2 + \rho g z = \text{konst}. \quad (3.36)$$

Wir bezeichnen hierin der Reihe nach

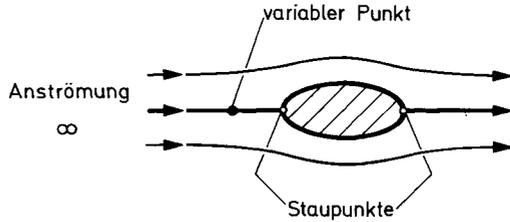
$$p = p_{\text{stat}} = \text{statischer Druck},$$

$$\frac{\rho}{2} c^2 = p_{\text{dyn}} = \text{dynamischer Druck}.$$

Es handelt sich um eine Kopplung zwischen Druck und Geschwindigkeit in jedem Punkt des

**Bild 3.16**

Umströmung eines Körpers.  
Druckbegriff



Geschwindigkeitsfeldes. Die Konstante wird durch geeignete Bezugswerte auf der jeweiligen Stromlinie festgelegt. Wir diskutieren dies im Spezialfall des **Umströmungsproblems** ohne Schwerfeld. Längs der **Staumstromlinie** (Bild 3.16) gilt

$$p_{\infty} + \frac{\rho}{2} c_{\infty}^2 = p + \frac{\rho}{2} c^2 = p_0 .$$

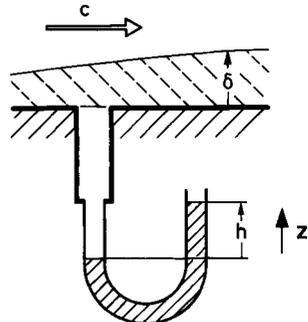
$p_0$  ist der Druck im Staupunkt und wird als Ruhedruck oder Gesamtdruck bezeichnet, also

$$p_{\text{stat}} + p_{\text{dyn}} = p_{\text{ges}} . \quad (3.37)$$

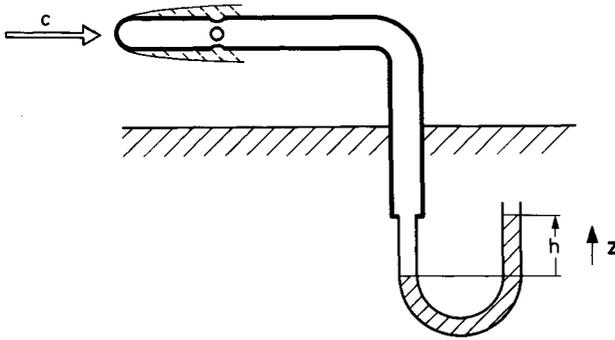
Zu beachten ist, daß, falls die Strömung durch Ansaugen aus einem Kessel oder aus der Atmosphäre zustande kommt, der Ruhedruck durch den Druck im Kessel bzw. in der Atmosphäre gegeben ist.

Die **Messung des statischen Druckes**  $p$  geschieht am einfachsten mit einer **Wandanbohrung** (Bild 3.17) oder mit einer **statischen Sonde** (Bild 3.18). Bei der letzteren sind Löcher zur Abnahme des Druckes auf dem Umfang verteilt. Diese müssen einen hinreichenden Abstand von der Sondenspitze und vom Sondenschaft besitzen, damit die durch den Körper hervorgerufene Störung bis dort abgeklungen ist. In beiden Fällen tritt eine Strömungsgrenzschicht auf. In ihr ist der Druck quer zur Strömungsrichtung praktisch konstant, er wird der Grenzschicht von außen aufgeprägt! Daher kann mit diesen Methoden der statische Druck der **Außenströmung** gemessen werden, denn auf diesen kommt es an.

Bei diesen Messungen ist der **Zusammenhang** zwischen **Druck** und **Steighöhe** im Manometer

**Bild 3.17**

Wandanbohrung (statischer Druck)



**Bild 3.18**  
Statische Sonde  
(statischer Druck)

wichtig. Bild 3.19 zeigt die eingehenden Bezeichnungen. Es ist

$$p' = p + g \rho_1 h' = p_1 + g \rho_2 h,$$

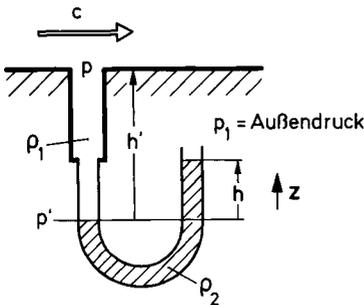
$$p - p_1 = g \rho_2 h - g \rho_1 h'.$$

Falls  $g \rho_1 h' \ll g \rho_2 h$ , was in den meisten Fällen zutrifft, gilt

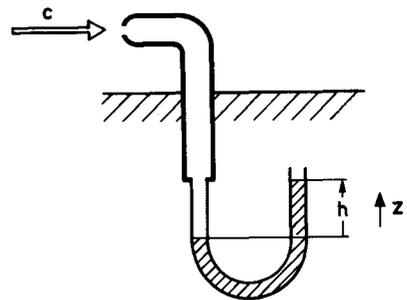
$$p - p_1 = \Delta p = g \rho_2 h = g \rho h. \tag{3.38}$$

Der **Gesamt- oder Ruhedruck**  $p_0$  kann durch Aufstau der Strömung im **Pitot-Rohr** (Hakenrohr) gemessen werden. Im Eintrittsquerschnitt entsteht ein Staupunkt (Bild 3.20).

Der **dynamische Druck**  $p_{dyn}$  lässt sich durch eine Kombination der beiden behandelten Methoden mit dem **Prandtl'schen Staurohr** ermitteln (Bild 3.21). Aus der Messung der Differenz

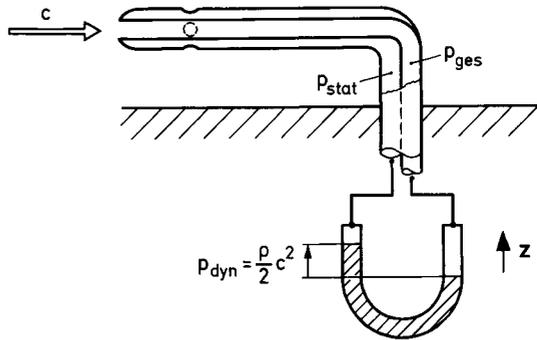


**Bild 3.19**  
Zusammenhang zwischen Druck und Steighöhe im Manometer



**Bild 3.20**  
Pitot-Rohr (Gesamtdruck)

**Bild 3.21**  
Prandtl'sches Staurohr (dynamischer Druck)



$$p_{\text{ges}} - p_{\text{stat}} = p_{\text{dyn}}$$

erhält man die Strömungsgeschwindigkeit  $c$  zu

$$c = \sqrt{\frac{2}{\rho} p_{\text{dyn}}} \quad (3.39)$$

$\rho$  ist hierin die Dichte des strömenden Mediums. Mit dem Prandtl'schen Staurohr kann man die Strömungsgeschwindigkeit bestimmen. Zu beachten ist, daß zwischen  $p_{\text{dyn}}$  und  $c$  der **nichtlineare** Zusammenhang (3.39) besteht. Ist das strömende Medium **Luft** ( $\rho = 1,226 \text{ kg/m}^3$ ), so gilt

$$c = 1,28 \sqrt{p_{\text{dyn}}} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad p_{\text{dyn}} \text{ in } \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}, \quad (3.40)$$

$$\text{d. h. } 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^{-5} \text{ bar} \quad \text{entspricht} \quad c = 1,28 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$1 \text{ cm WS} \approx 100 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^{-3} \text{ bar} \quad \text{sind dagegen} \quad c = 12,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ist das strömende Medium Wasser ( $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ), so ist

$$c = 0,045 \sqrt{p_{\text{dyn}}} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad p_{\text{dyn}} \text{ in } \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}, \quad (3.41)$$

$$\text{d. h. } 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^{-5} \text{ bar} \quad \text{entspricht} \quad c = 4,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$

$$100 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^{-3} \text{ bar} \quad \text{entsprechen} \quad c = 45 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

### 5. Ausströmen aus einem Behälter

Wir behandeln zunächst den **inkompressiblen** Fall und verfolgen einen Stromfaden von der Flüssigkeitsoberfläche (1) bis zum Austritt (2) (Bild 3.22). Die Bernoulli-Gleichung lautet

$$\frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2. \quad (3.42)$$

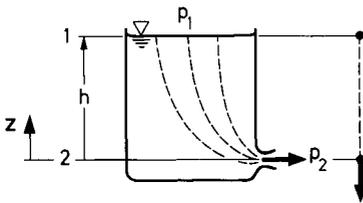
Ist der Querschnitt 1 sehr viel größer als der Querschnitt 2, so liefert die Kontinuität

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{A_2}{A_1} \ll 1,$$

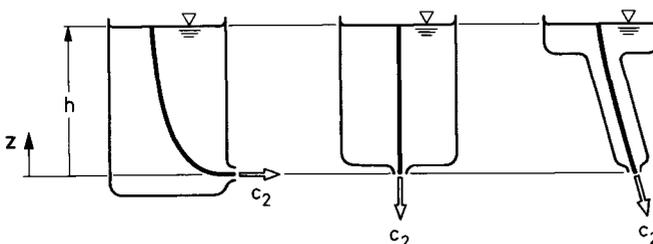
und wir können  $c_1^2/2$  in (3.42) streichen. Wir sprechen in diesem Fall von einem **großen** Reservoir. Bei (1) ist ein kontinuierlicher Zufluß erforderlich, um die Spiegelhöhe konstant zu halten. Für die Ausflußgeschwindigkeit  $c_2$  kommt

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) + 2 g h}. \quad (3.43)$$

Wir betrachten zwei **Sonderfälle**. Falls  $p_1 = p_2$  ist, wird  $c_2 = \sqrt{2 g h}$ . Dies ist die Torricellische Formel. Es kommt wegen der fehlenden Reibung dieselbe Geschwindigkeit wie im freien Fall aus der Höhe  $h$  und bei der Anfangsgeschwindigkeit  $c_1 = 0$  (Bild 3.22). Bemerkenswert ist weiter, daß  $c_2$  von der Ausfluß**richtung** unabhängig ist. Bild 3.23 erläutert dies, indem jeweils ein Stromfaden verfolgt wird.



**Bild 3.22**  
Ausfluß eines inkompressiblen Mediums aus einem Behälter



**Bild 3.23**  
Unabhängigkeit des Betrages der Geschwindigkeit von der Ausflußrichtung

Der zweite Sonderfall ist der Ausfluß unter Wirkung eines Überdruckes, also ohne Einfluß der Schwerkraft (Bild 3.24). Die Druckenergie wird in kinetische Energie und damit in Geschwindigkeit umgewandelt.

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)} = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}.$$

Wir wenden diese Beziehung auf atmosphärische Bewegungen an. Nehmen wir als Druckstufe  $\Delta p = 10 \text{ mbar} = 10^3 \text{ Pa}$ , so kommt mit  $\rho = 1,226 \text{ kg/m}^3$

$$c_2 \approx 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 140 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Dies ist eine beachtliche Geschwindigkeit bei der relativ kleinen Druckdifferenz. Bei größeren Druckunterschieden müssen wir die **Kompressibilität** berücksichtigen. Man spricht dann von der Gasdynamik. Die Bernoulli-Gleichung (3.12a) liefert bei horizontaler Bewegung und mit  $c_1 = 0$  im Reservoir (Bild 3.24)

$$c_2 = \sqrt{2 \int_{p_2}^{p_1} \frac{d p}{\rho}}. \quad (3.44)$$

Die Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit ist damit auf die Berechnung des bereits früher aufgetretenen Integrals

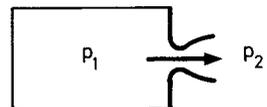
$$\int_{p_2}^{p_1} \frac{d p}{\rho}$$

zurückgeführt. Setzen wir auch hier **Isentropie** voraus, so wird aus (3.44) mit (3.23d)

$$c_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{R}{m} T_1 [\dots]} = \sqrt{2 c_p T_1 [\dots]}. \quad (3.45)$$

**Bild 3.24**

Ausfluß unter Wirkung eines Überdruckes



Dies ist die Formel von **Saint-Venant** und **Wantzell**. Sie stellt die Ausflußgeschwindigkeit  $c_2$  als Funktion der **Kessel-** oder **Ruhewerte** ( $p_1, \rho_1, T_1$ ) sowie des **Gegendruckes**  $p_2$  dar. Für die Realisierung dieser Geschwindigkeit spielt die **Form** der Düse, die an den Kessel angeschlossen ist, eine große Rolle. Diese geht über die Kontinuitätsgleichung ein, die bisher nicht berücksichtigt wurde. Wir diskutieren zunächst (3.45). Bei festgewählten Ruhewerten ergibt sich für  $p_2/p_1 \rightarrow 0$  die **Maximalgeschwindigkeit**

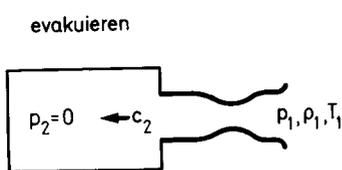
$$c_{2\max} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1}} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{R}{m} T_1}. \quad (3.46)$$

Unter Atmosphärenbedingungen kommt

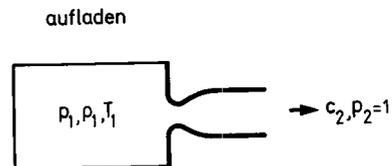
$$\begin{aligned} \kappa &= 1,40, \quad p_1 = 1 \text{ bar}, \quad \rho_1 = 1,226 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \\ c_{\max} &\approx 750 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dies ist ein bemerkenswertes Ergebnis, das handgreiflich den Einfluß der Kompressibilität zeigt. Der Wert (3.47) kann auf dem Umweg über die Ruhewerte erhöht werden. (3.46) bietet im wesentlichen zwei Möglichkeiten an. Wenn man den Kessel aufheizt, so steigt  $c_{\max} \sim \sqrt{T_1}$ . Hier tritt wiederum die typische Wurzelabhängigkeit von der Temperatur auf. Wirkungsvoller ist jedoch der Übergang zu leichteren Gasen, denn  $c_{\max} \sim 1/\sqrt{m}$ . Der Übergang von Luft zu Wasserstoff liefert für die Geschwindigkeit den Faktor 4. Der Extremfall  $p_2/p_1 \rightarrow 0$  läßt sich auf zweierlei Weise realisieren:

1. Wir halten  $p_1$  fest, z.B. = 1 bar, und evakuieren einen Behälter, d.h.  $p_2 = 0$ . Es kommt dann zum Einströmen ins Vakuum (Bild 3.25).
2. Wir halten  $p_2$  fest, z.B. = 1 bar, und laden einen Kessel auf, d.h.  $p_1 \rightarrow \infty$ . Dann kommt es zu einem Ausströmen (Bild 3.26).



**Bild 3.25**  
Einströmen ins Vakuum



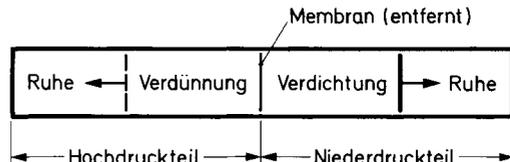
**Bild 3.26**  
Ausströmen aus einem Kessel unter hohem Druck

Beide Fälle sind zur Erzeugung von hohen Geschwindigkeiten im Gebrauch.

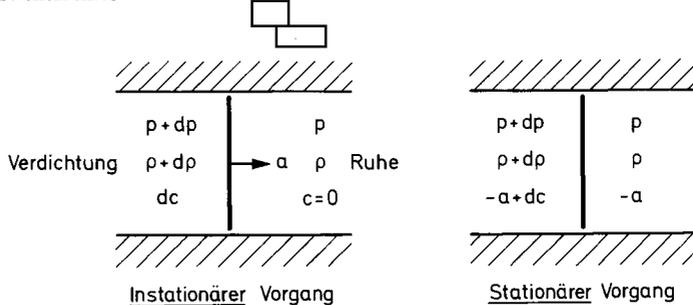
**6. Gasdynamische Betrachtungen. Die Strömung in der Laval-Düse. Der senkrechte Verdichtungsstoß**

Um die im letzten Abschnitt aufgetretenen Strömungsvorgänge zu verstehen, müssen wir uns mit dem Begriff der **Schallgeschwindigkeit** beschäftigen. Dies ist ein weiteres Charakteristikum kompressibler Strömungen.

Wir definieren die **Schallgeschwindigkeit** als Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner Störungen der Zustandsgrößen (= Schall) in einem ruhenden, kompressiblen Medium: Es handelt sich hierbei um eine **Signalgeschwindigkeit**, die wohl zu unterscheiden ist von der Strömungsgeschwindigkeit. Wir untersuchen die Wellenfortpflanzung in einem Kanal konstanten Querschnitts, einem sogenannten **Stoßwellenrohr**. Im Ausgangszustand ist es durch eine Membran in zwei Kammern eingeteilt. Rechts befindet sich der Niederdruckteil und links der höhere Druck (Bild 3.27). Wird die Membran entfernt, so läuft eine Verdichtung in den Niederdruckteil und eine Verdünnung in den Hochdruckteil. Handelt es sich um kleine Störungen, so laufen die Signale mit Schallgeschwindigkeit (=  $a$ ). Wir betrachten die Umgebung der nach rechts laufenden Wellenfront (Bild 3.28). Dies ist ein **instationärer** Vorgang, der durch Überlagerung von  $-a$  zu einem **stationären** gemacht werden kann. Wir wenden hierauf die Grundgleichungen der Stromfadentheorie an und linearisieren.



**Bild 3.27**  
Schema eines Stoßwellenrohrs



**Bild 3.28**  
Rechtsläufige Verdichtungswelle

**Kontinuität** bei konstantem Querschnitt:

$$\begin{aligned}
 -\rho a &= (\rho + d\rho)(-a + dc) = -\rho a - a d\rho + \rho dc + \dots, \\
 \frac{d\rho}{\rho} &= \frac{dc}{a}.
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

**Bernoulli-Gleichung:**

$$\begin{aligned}
 \frac{c^2}{2} + \int^p \frac{dp}{\rho} &= \text{konst}, \\
 \frac{a^2}{2} + \int^p \frac{dp}{\rho} &= \frac{(-a + dc)^2}{2} + \int^{p+dp} \frac{dp}{\rho}, \\
 \frac{a^2}{2} &= \frac{a^2}{2} - a dc + \int_p^{p+dp} \frac{dp}{\rho} + \dots = \frac{a^2}{2} - a dc + \frac{dp}{\rho} + \dots, \\
 a dc &= \frac{dp}{\rho}.
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

Wir kombinieren die Aussagen (3.48) und (3.49) miteinander:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s.
 \tag{3.50}$$

Die letzte Aussage ergibt sich daraus, daß sich die kleinen Störungen verlustlos, d.h. isentrop, ausbreiten. Die Schallgeschwindigkeit ist also an die Druck- und die Dichteänderungen in dem Medium gebunden. Gehört zu einer gewissen Druckstörung  $\Delta p$  eine geringe Dichteänderung  $\Delta \rho$ , so ist das Medium praktisch inkompressibel und die Schallgeschwindigkeit (3.50) groß. Ist dagegen die Dichteänderung beträchtlich, so herrscht Kompressibilität, und die Schallgeschwindigkeit ist gering.

Mit der isentropen Zustandsänderung

$$\frac{p}{p_1} = \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^k$$

und der idealen Gasgleichung wird aus (3.50)

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa \frac{R}{m} T. \tag{3.51}$$

Wieder ergeben sich die typischen Proportionalitäten  $a \sim \sqrt{T}$ ,  $a \sim 1/\sqrt{m}$ , wie wir sie soeben bei der Maximalgeschwindigkeit hergeleitet haben. Die Abhängigkeit von der Molmasse  $m$  ist gravierend. Für  $T = 300 \text{ K}$  gilt:

Gas	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	Luft
m in g/mol	32	28,016	2,016	~ 29
a in m/s	330	353	1316	347

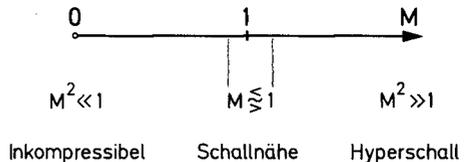
$a$  ist damit eine geeignete Bezugsgeschwindigkeit für alle kompressiblen Strömungen. Das Verhältnis Strömungsgeschwindigkeit/Schallgeschwindigkeit ist eine charakteristische Kennzahl und wird zu Ehren von **Ernst Mach**

$$\frac{c}{a} = M = \text{Machsche Zahl} \tag{3.52}$$

genannt. Diese Bezeichnung wurde 1928 von Ackeret eingeführt. Man unterscheidet danach

- Unterschallströmungen** mit  $M < 1$  und
- Überschallströmungen** mit  $M > 1$ .

Bild 3.29 zeigt dies etwas detaillierter. Es treten folgende Sonderfälle auf:  $M^2 \ll 1$  beschreibt die inkompressiblen Strömungen,  $M^2 \gg 1$  dagegen den sogenannten Hyperschall und  $M \gtrsim 1$  die schallnahen oder transsonischen Strömungen. Diese Unterscheidung hat sich als zweckmäßig erwiesen.



**Bild 3.29**  
Zuordnung der verschiedenen Strömungen zur Mach-Zahl

Die Eulersche Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} c \frac{dc}{dx} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dp} \frac{dp}{dx} = -\frac{a^2}{\rho} \frac{d\rho}{dx}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} &= -M^2 \frac{1}{c} \frac{dc}{dx}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Die relative Dichteänderung ist der relativen Geschwindigkeitsänderung längs des Stromfadens proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist  $M^2$ .

Für  $M \ll 1$  ist die relative Dichteänderung  $\ll$  als die relative Geschwindigkeitsänderung. Für  $M \gg 1$  ist die relative Dichteänderung  $\gg$  als die relative Geschwindigkeitsänderung. Bei  $M = 10$  kommt z.B. der Proportionalitätsfaktor 100.

Bei **inkompressibler Strömung**  $M^2 \ll 1$  überwiegt die Änderung der Geschwindigkeit die der Zustandsgrößen  $p, \rho, T$  bei weitem. Im **Hyperschall**  $M^2 \gg 1$  ist es umgekehrt. In **Schallnähe** sind alle Änderungen von derselben Größenordnung.

Die Kontinuitätsgleichung gibt den Einfluß der Querschnittsänderung. Differenzieren wir sie längs des Stromfadens, so wird

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0.$$

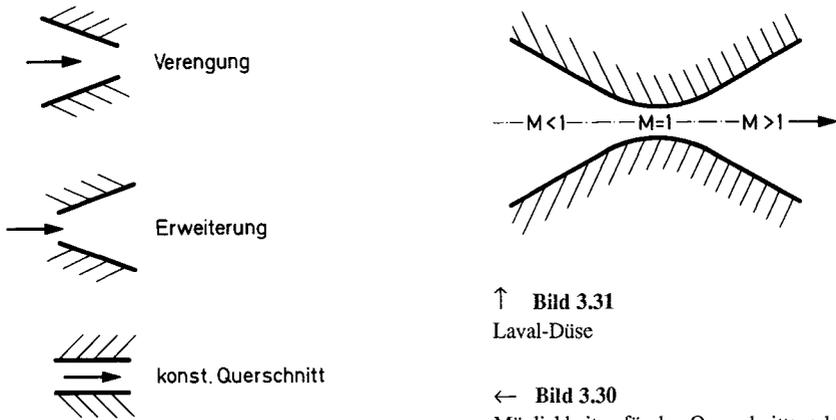
Berücksichtigen wir (3.53), so kommt

$$\frac{1}{c} \frac{dc}{dx} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx}. \quad (3.54)$$

Hierin sehen wir  $A(x)$  als gegeben, aber  $c(x)$  und  $M(x)$  als unbekannt an. (3.54) ermöglicht sofort eine **qualitative** Diskussion der Strömung in einer Düse. Ihr Zweck ist, die Strömung zu beschleunigen, d.h.  $dc/dx > 0$ .

Für	$M < 1$	verlangt dies	$dA/dx < 0$ ,
dagegen bei	$M > 1$		$dA/dx > 0$ .
Für	$M = 1$	ist notwendig	$dA/dx = 0$ (Bild 3.30).

Schieben wir diese drei Teilergebnisse zusammen, so kommen wir zwangsläufig zur Strömung in der **Laval-Düse** (Bild 3.31). In einem konvergenten Einlaß wird die Unterschallströmung beschleunigt; am engsten Querschnitt ist der Schalldurchgang. Im anschließenden divergenten Teil wird die Überschallströmung weiter beschleunigt. Letzteres ist eine direkte Folge der Gleichung (3.53). Im Überschall überwiegt die Dichteabnahme die Geschwindigkeitszunahme. Da  $\dot{m} = \rho c A = \text{konst}$  ist, muß hier also  $A$  in Strömungsrichtung zunehmen.



↑ Bild 3.31  
Laval-Düse

← Bild 3.30  
Möglichkeiten für den Querschnittsverlauf

Zur **quantitativen** Bestimmung der Strömung schreiben wir die Differentialgleichung (3.54) auf die beiden Funktionen  $M(x)$  und  $A(x)$  um. Wir differenzieren (3.52):

$$\frac{dc}{c} = \frac{da}{a} + \frac{dM}{M}$$

und benutzen (3.50), (3.51) sowie (3.53):

$$2 \frac{da}{a} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{a^2}{p} d\rho - \frac{d\rho}{\rho} = (\kappa - 1) \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 (\kappa - 1) \frac{dc}{c},$$

$$\frac{dM}{M} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right) \frac{dc}{c}.$$

Berücksichtigen wir dies in (3.54), so wird

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dx} = \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2}{M^2 - 1} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx}. \quad (3.55)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für  $M = M(x)$ , die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. Mit der Bedingung  $M^* = 1, A(M^* = 1) = A^*$  kommt

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (M^2 - 1)\right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}. \quad (3.56)$$

Hierdurch ist implizit die Mach-Zahl als Funktion des Düsenquerschnitts gegeben, wenn an

der engsten Stelle  $A^*$  Schallgeschwindigkeit herrscht. Wir wollen einen Überblick über alle möglichen Strömungen in einer Laval-Düse in Abhängigkeit von den Randbedingungen (Geometrie und wirksamer Gegendruck) erhalten. Dazu bestimmen wir das **Richtungsfeld** von (3.55), d.h. wir ermitteln in jedem Punkt der  $(x, M)$ -Ebene den Anstieg der Lösungskurve. Ausgezeichnete Richtungselemente sind:

$$\frac{dM}{dx} = 0 \quad , \quad \text{falls} \quad \frac{dA}{dx} = 0 \quad , \quad \text{solange} \quad M \neq 1 \quad ,$$

$$\frac{dM}{dx} = \infty \quad , \quad \text{falls} \quad M = 1 \quad , \quad \text{solange} \quad \frac{dA}{dx} \neq 0 \quad .$$

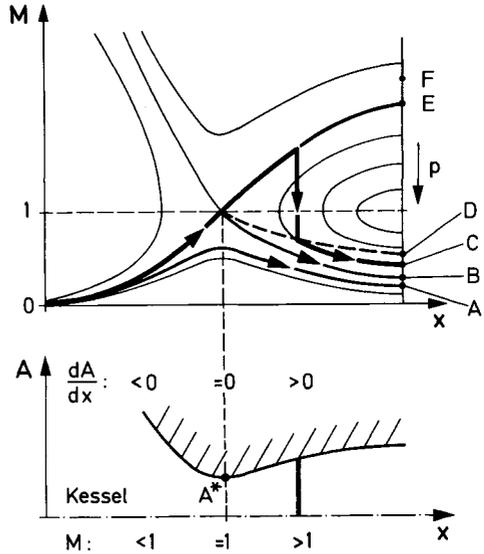
**Singuläre Punkte** liegen dort, wo der Faktor von  $dM/dx$  Null oder Unendlich ist. Nur dort können sich Integralkurven schneiden.  $M=0$  entspricht  $A \rightarrow \infty$ , d.h. dem Kessel. Hier sind unendlich viele Fortschreitungsrichtungen möglich.  $M=1$  und  $dA/dx=0$  führen in (3.55) zu einem unbestimmten Ausdruck. Die Anwendung der Bernoulli-L'Hospitalischen Regel liefert

$$\left( \frac{dM}{dx} \right)_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\frac{d^2 A}{dx^2}}{\frac{\kappa+1}{4} \frac{dA}{dx} A^*}} \quad . \quad (3.57)$$

Es ergeben sich **zwei** Fortschreitungsrichtungen, falls  $d^2 A/dx^2 > 0$ , das heißt am engsten Querschnitt. Es handelt sich dort um einen **Sattelpunkt**. Ist dagegen  $d^2 A/dx^2 < 0$ , was dem Maximum der Funktion  $A(x)$  entspricht, so kommt keine reelle Fortschreitungsrichtung. Es liegt ein **Wirbelpunkt** vor.

Nach diesen Vorbereitungen kann das Feld der Integralkurven sofort gezeichnet werden (Bild 3.32). Durch Variation des Druckes am Düsenende lassen sich die verschiedenen Strömungen realisieren. Bei geringer Differenz zwischen Kessel- und Gegendruck ( $A$ ) erhalten wir eine Unterschalldüse. (B) entspricht dem Fall, daß am engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit zwar erreicht, aber nicht durchschritten wird. Bei weiterer Druckabsenkung (C) erkennt man sofort, daß eine **stetige** Strömung nicht mehr möglich ist. Es kommt zu einem sogenannten (senkrechten) **Verdichtungsstoß**, in dem sich die Zustandsgrößen unstetig verändern. Die Geschwindigkeit sinkt auf Unterschall; Druck, Dichte und Temperatur steigen an. Bei weiterer Druckabsenkung wandert der Stoß zum Düsenende (D). Zwischen D und E tritt ein schiefer Stoß am Austritt auf. E bezeichnet den Grenzfall der idealen Laval-Düse. Hier liegt ein paralleler Strahl im Austritt vor. Bei weiterer Druckabsenkung (F) kommt es dort zu einer Expansion (Bild 3.33). Diese heuristische Beschreibung zeigt die Vielfalt der möglichen

**Bild 3.32**  
Mach-Zahl-Verlauf in der Laval-Düse bei verschiedenen Gegendrücken

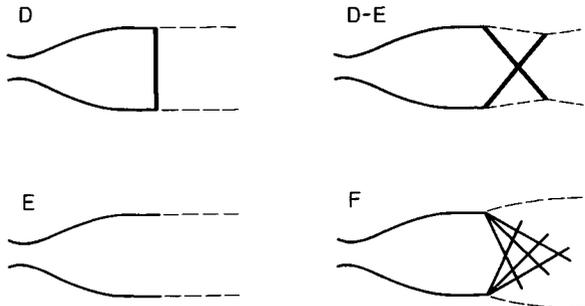


Strömungsvorgänge in Abhängigkeit von den Randbedingungen. Wir verfolgen im Augenblick nur die stetigen Strömungen. Auf die Berechnung der Verdichtungsstöße kommen wir am Ende dieses Abschnittes zurück.

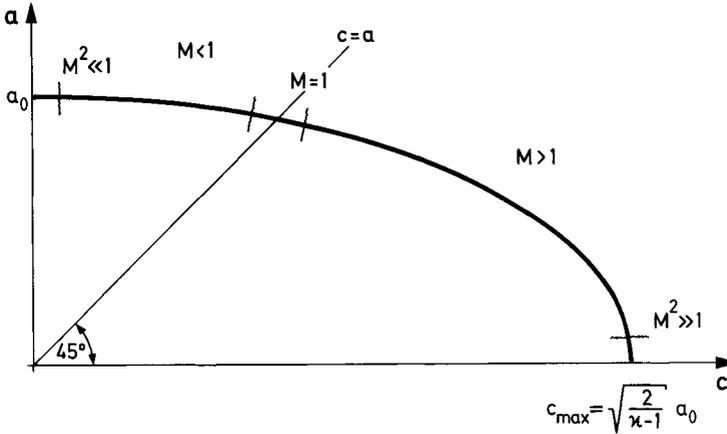
Wir verfügen damit in der Düse an jeder Stelle über die Mach-Zahl  $M(x)$ . Die Berechnung von  $p(x)$ ,  $\rho(x)$  und  $T(x)$  geschieht mit der **Bernoulli-Gleichung**. Für **isentrop**e Zustandsänderungen wird

$$\frac{c^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1} = \frac{c^2}{2} + c_p T = \text{konst.} \quad (3.58)$$

Die Konstante können wir auf zwei Wegen festlegen.



**Bild 3.33**  
Einfluß des Gegendruckes auf die Strömungsform in der Laval-Düse



**Bild 3.34**  
Energieellipse in der  $(c, a)$ -Ebene

1. Wir benutzen die **Kessel- oder Ruhewerte**<sup>1)</sup>:  $c=0, a_0, p_0, \rho_0, T_0$ . (3.58) schreibt sich damit

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1} = \frac{a_0^2}{\kappa-1} \quad (3.59)$$

oder als sogenannte Energieellipse

$$\left( \frac{c}{\sqrt{\frac{2}{\kappa-1}} a_0} \right)^2 + \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 = 1. \quad (3.60)$$

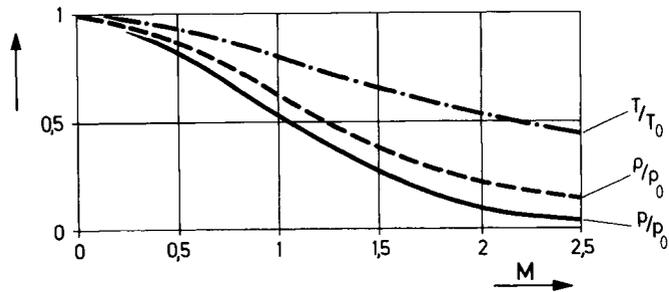
Diese Kurve (Bild 3.34) erfasst alle möglichen Strömungszustände mit den früher besprochenen Änderungen von Strömungs- und Schallgeschwindigkeit. Aus (3.59) folgt für  $T(x)$  sodann mit der Isentropie für  $\rho(x)$  und  $p(x)$ :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2}, \quad (3.61a)$$

<sup>1)</sup> Wir kennzeichnen im folgenden die Ruhewerte durch den Index 0, wie es in der Gasdynamik allgemein üblich ist.

**Bild 3.35**

$T, \rho, p$  als Funktionen der Mach-Zahl



$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}, \quad (3.61b)$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}. \quad (3.61c)$$

Bild 3.35 erläutert die unterschiedliche Variation der Zustandsgrößen. Charakteristisch sind die kritischen Werte bei  $M = 1$ .

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\kappa+1} = 0,833, \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = 0,634, \quad (3.62)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0,528.$$

Die Zahlenangaben beziehen sich auf  $\kappa = 1,40$ .

2. Als Bezugsgrößen können wir die **kritischen Werte** verwenden:  $c = a = a^*, p^*, \rho^*, T^*$ . Neben  $M = c/a$  tritt die **kritische Mach-Zahl**  $M^* = c/a^*$  auf. Für unveränderliche Ruhewerte ist  $a^*$  konstant. Die Normierung mit der kritischen Schallgeschwindigkeit hat also den praktischen Vorteil, daß im Nenner der Mach-Zahl keine lokale, d.h. variable, Schallgeschwindigkeit mehr steht.

Wir haben folgenden Variabilitätsbereich:

M	0	1	$\infty$
M*	0	1	$\sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}$

Zur letzteren Aussage betrachten wir das Einströmen in das Vakuum mit der Maximalgeschwindigkeit (3.46)

$$M_{\max}^* = \frac{c_{\max}}{a^*} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\kappa-1}} a_0}{a^*} = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}} \sqrt{\frac{T_0}{T^*}} = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \quad (= 2,45 \text{ für Luft}).$$

Damit ergibt sich folgender Rechengang: Aufgrund der bekannten Düsengeometrie  $A(x)$  bestimmen wir  $M(x)$ . Anschließend liefern (3.61a-c)  $T(x)$ ,  $\rho(x)$  und  $p(x)$ .

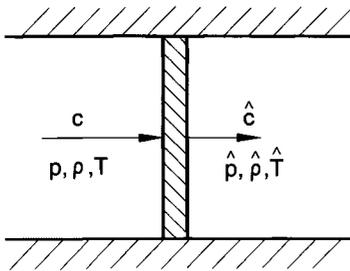
Wir kommen nun zur Behandlung des **senkrechten Verdichtungsstoßes**. Wir betrachten eine eindimensionale, stationäre Strömung im Stromfaden konstanten Querschnittes (Bild 3.36). Wir wenden die Erhaltungssätze für Masse, Impuls<sup>1)</sup> und Energie über die Stoßfront hinweg an.

$$\text{Kontinuität:} \quad \rho c = \hat{\rho} \hat{c},$$

$$\text{Impulssatz:} \quad p + \rho c^2 = \hat{p} + \hat{\rho} \hat{c}^2,$$

$$\text{Energiesatz:} \quad i + \frac{1}{2} c^2 = \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{c}^2,$$

mit der Enthalpie  $i = c_p T = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho}$  wird hieraus



**Bild 3.36**  
Senkrechter Verdichtungsstoß

<sup>1)</sup> Dies erfolgt im Vorgriff auf Kapitel 3.3.1

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} c^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}} + \frac{1}{2} \hat{c}^2.$$

Dieses System hat bei bekannten Ausgangswerten:  $c, p, \rho, T$  zwei Lösungen

$$\frac{\hat{c}}{c} = \frac{\hat{\rho}}{\rho} = \begin{cases} 1, \\ 1 - \frac{2}{\kappa+1} \left( 1 - \frac{\kappa p}{\rho c^2} \right), \end{cases}$$

$$\frac{\hat{p}}{p} = \begin{cases} 1, \\ 1 + 2 \frac{\kappa}{\kappa+1} \left( \frac{c^2 \rho}{\kappa p} - 1 \right). \end{cases}$$

Die erste Lösung ist die Identität, die zweite liefert die Zustandsänderungen über den Stoß. Mit der Schallgeschwindigkeit  $a$  (3.51), der Machzahl  $M$  (3.52) und der Entropie  $s$  der Masseneinheit kommt

$$\frac{\hat{c}}{c} = \frac{\hat{\rho}}{\rho} = 1 - \frac{2}{\kappa+1} \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right),$$

$$\frac{\hat{p}}{p} = 1 + 2 \frac{\kappa}{\kappa+1} (M^2 - 1),$$

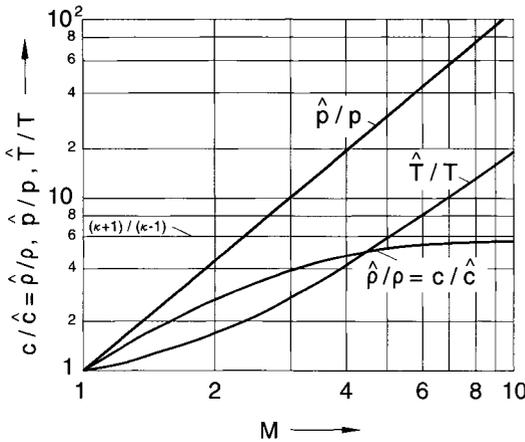
$$\frac{\hat{T}}{T} = \frac{\hat{p}}{p} \frac{\hat{\rho}}{\rho},$$

$$\frac{\hat{s} - s}{c_v} = \ln \left\{ \frac{\hat{p}}{p} \left( \frac{\hat{\rho}}{\rho} \right)^\kappa \right\} = \ln \left\{ \left[ 1 + 2 \frac{\kappa}{\kappa+1} (M^2 - 1) \right] \left[ 1 - \frac{2}{\kappa+1} \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) \right]^\kappa \right\}.$$

Die Änderung der Zustandsgrößen beim senkrechten Stoß zeigen Bild 3.37 und 3.38. Da  $\hat{s} - s > 0$  sein muß, kann (Bild 3.38) ein Stoß nur im Überschall  $M > 1$  auftreten. Dasselbe handelt es sich um eine Verdichtung (Bild 3.37) mit Übergang von Überschall auf Unterschall. Dies folgt aus der Prandtl-Relation für die kritischen Machzahlen:

$$M^* \cdot \hat{M}^* = 1.$$

Sie ist eine elementare Konsequenz der hergeleiteten Stoßgleichungen. Charakteristisch ist das Verhalten der Ruhewerte. Denken wir uns das Medium vor und nach dem Stoß in den Ruhezustand überführt, so lautet der Energiesatz über den Stoß hinweg



**Bild 3.37**

Die Stoßgrößen beim senkrechten Stoß als Funktion von  $M$  ( $\kappa = 1,40$ )

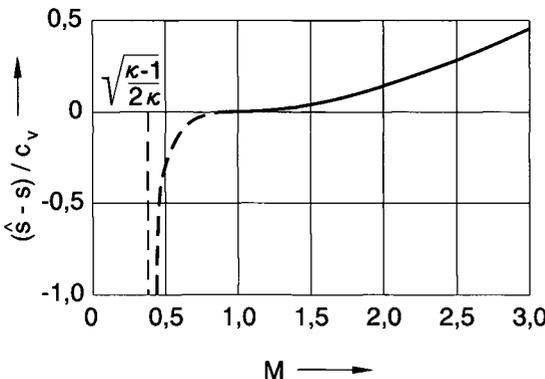
$$c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2} c^2 = c_p \hat{T} + \frac{1}{2} \hat{c}^2 = c_p \hat{T}_0,$$

d.h.  $T_0 = \hat{T}_0$  ,  $a_0 = \hat{a}_0$  ,  $a^* = \hat{a}^*$ .

Bei Druck und Dichte wird jeweils eine isentrope Abbremsung vor und nach dem Stoß vorgenommen. Verwendet man einen isothermen Vergleichsprozess, so kommt wegen

$$\hat{s}_0 - s_0 = \hat{s} - s = -(c_p - c_v) \ell_n \frac{\hat{p}_0}{\rho_0} = -(c_p - c_v) \ell_n \frac{\hat{p}_0}{\rho_0},$$

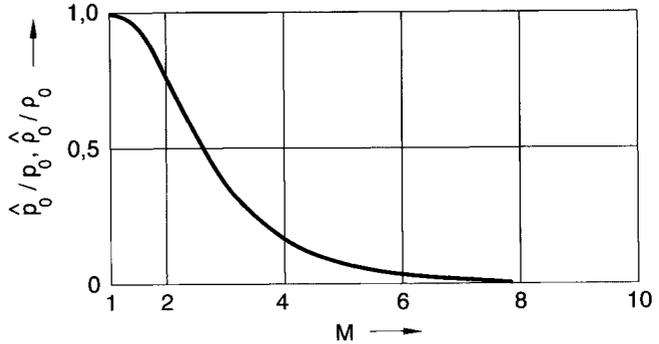
$$\frac{\hat{p}_0}{\rho_0} = \frac{\hat{p}_0}{\rho_0} = \left[ 1 + 2 \frac{\kappa}{\kappa + 1} (M^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{\kappa - 1}} \left[ 1 - \frac{2}{\kappa + 1} \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) \right]^{-\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$



**Bild 3.38**

Die Entropie beim senkrechten Verdichtungsstoß als Funktion von  $M$  ( $\kappa = 1,40$ )

**Bild 3.39**  
Ruhedruck- und Ruhedichteabnahme beim senkrechten Verdichtungsstoß als Funktion von M ( $\kappa = 1,40$ )



Die Ruhedruckabnahme ist in Schallnähe gering, für starke Stöße, d.h. für hohe Mach-Zahlen, ist sie dagegen beträchtlich (Bild 3.39).

Wir halten fest: Über den senkrechten Verdichtungsstoß

- nehmen zu:**  $p, \rho, T, s$
- nehmen ab:**  $c, M, p_0, \rho_0, p^*, \rho^*$
- bleiben konstant:**  $T_0, a_0, T^*, a^*!$

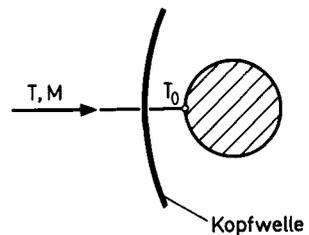
Zur Erläuterung der eingeführten Begriffe geben wir einige **Beispiele zur Gasdynamik**.

**1. Temperaturerhöhung im Staupunkt** eines Flugkörpers.

Auf der zentralen Stromlinie (Bild 3.40) kommt es zu einem Aufstau, der zu einer erheblichen Temperaturerhöhung führen kann. Wir können (3.61a) anwenden, um die Temperatur im Staupunkt (=  $T_0$ ) zu ermitteln. Für  $M > 1$  liegt eine Kopfwelle zwischen Anströmung und Körper. (3.61a) gilt über diesen Stoß hinweg, da diese Gleichung mit dem Energiesatz identisch ist, der für Verdichtungsstöße gilt:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2. \tag{3.63}$$

Für Luft wird damit



**Bild 3.40**  
Umströmung eines stumpfen Körpers

$$M = 2, \quad \frac{T_0}{T} = 1,8, \quad \text{d.h. bei } T = 300 \text{ K: } T_0 = 540 \text{ K} = 267^\circ\text{C},$$

$$M = 5, \quad \frac{T_0}{T} = 6, \quad T_0 = 1800 \text{ K} = 1527^\circ\text{C}.$$

Bei den letzten Temperaturen ist man bereits an der Grenze des Gültigkeitsbereiches der idealen Gase konstanter spezifischer Wärmen. Bei weiterer Steigerung treten Dissoziation, Ionisation etc. hinzu. Diese Effekte benötigen Energie und führen dazu, daß die sich aus (3.63) ergebende Staupunkttemperatur tatsächlich erheblich unterschritten wird.

2. Bis zu welcher Mach-Zahl (Geschwindigkeit) kann eine **Strömung** als **inkompressibel** angesehen werden? Wir verlangen, daß in einem solchen Fall die relative Dichteänderung kleiner als 1% sein soll. (3.61b) ergibt

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} = \frac{1}{1 + \frac{M^2}{2} + \dots} = 1 - \frac{M^2}{2} + \dots,$$

$$\left| \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right| = \frac{M^2}{2} + \dots \leq 0,01, \quad M \leq 0,14.$$

Diese Mach-Zahl führt bei Luft von Zimmertemperatur zu  $c \leq 50 \text{ m/s}$ .

3. Bestimmung der **Leckmenge eines Kessels bei überkritischem Zustand** (Bild 3.41). Die Leckstelle bildet einen kritischen Querschnitt  $A^*$ . Den Massenstrom führen wir auf die Kesselwerte zurück ( $\kappa = 1,40$ ):

$$\dot{m} = \rho^* c^* A^* = \rho^* a^* A^* = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \rho_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} a_0 A^* = 0,58 \rho_0 a_0 A^*;$$

mit  $a_0 = 347 \text{ m/s}$  wird

$$\frac{\dot{m}}{\rho_0 A^*} = 0,58 \cdot 347 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{s cm}^2} = 20 \frac{\text{Liter}}{\text{s cm}^2}.$$

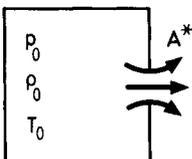
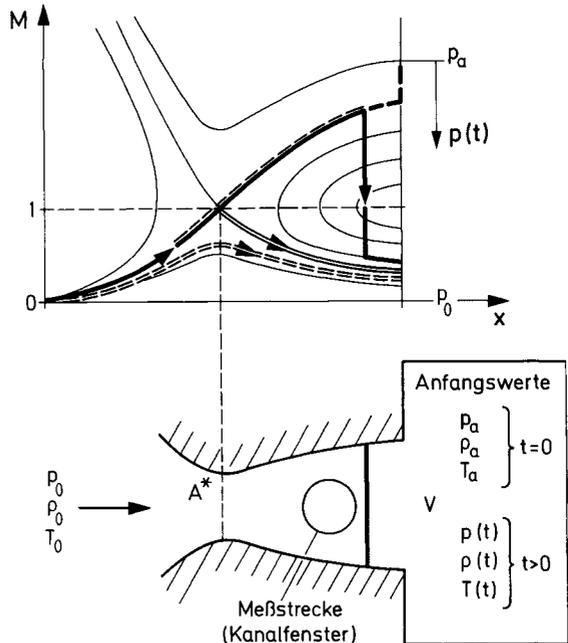


Bild 3.41

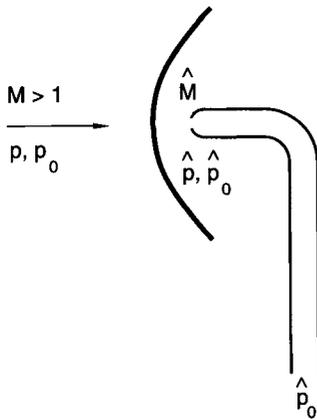
Ausfluß aus einem Kessel im überkritischen Fall

D.h. es strömen pro Sekunde durch den Quadratzentimeter 20 Liter Luft des Kesselzustandes. In 10 s sind dies bei  $100 \text{ cm}^2$  also  $20 \text{ m}^3$ , falls das kritische Druckgefälle aufrechterhalten bleibt. Diese Zahlen veranschaulichen den großen Massendurchsatz im engsten Querschnitt einer Laval-Düse. Sie ermitteln eine Vorstellung von dem Fassungsvermögen eines Reservoirs, das an eine solche Düse angeschlossen ist.

**4. Auffüllen eines Kessels** - Prinzip eines Überschallwindkanals. Wir schließen an einen evakuierten Kessel vom Volumen  $V$  eine Laval-Düse an (Bild 3.42). Im Kessel herrsche der Anfangszustand:  $p_a, \rho_a, T_a$ , außerhalb z.B. der der Atmosphäre  $p_0, \rho_0, T_0$ . Entfernen wir die trennende Membran, in Bild 3.42 z.B. am Düsenende vorzustellen, so kommt es ähnlich wie im Stoßwellenrohr zu einem instationären Startvorgang. Ist  $p_a/p_0$  genügend klein, so liegt eine Laval-Düsenströmung vor. Nach einer kurzen Anlaufphase stellt sich dann für wenige Sekunden die zum Druckverhältnis  $p_a/p_0$  gehörige stationäre Strömung ein. Dies ist die Meßzeit des Kanals. Während dieser Phase können in der Meßstrecke Modelle z.B. von Tragflügeln in Überschallanströmung untersucht werden. Die Strömung wird mit geeigneten Verfahren sichtbar gemacht und durch die Kanalfenster beobachtet. Allerdings wird hierbei der Kessel allmählich aufgefüllt. Die Zustandswerte  $p(t), \rho(t), T(t)$  lassen sich aus dem Volumen  $V$  und der Düsengeometrie berechnen. Mit fortschreitender Zeit, d.h. mit zunehmendem  $p(t)$ , werden die früher diskutierten Strömungszustände durchlaufen: Expansion, schiefer Stoß, senkrechter Stoß. Dieser senkrechte Stoß wandert unter Abschwächung zur Düsenkehle. Damit bricht dort der kritische Zustand zusammen, und wir haben eine Unterschallströmung, bis vollständiger Druckausgleich hergestellt ist.



**Bild 3.42**  
Auffüllen eines Kessels



**Bild 3.43**  
Pitotrohr in der Überschallströmung

5. Beim **Pitotrohr in Überschallströmung** (Bild 3.43) wird  $\hat{p}_0$  gemessen. Kennt man  $M$ , so kann man mit der Ruhedruckverlustformel  $p_0$  berechnen. Falls jedoch  $p$  oder  $\hat{p}$  und  $\hat{p}_0$  gemessen werden, kann  $M$  ermittelt werden. Hierzu wird der isentrope Zusammenhang (3.61c) benutzt. Wir geben die zugehörigen Formeln an, da sie für die Überschallmeßtechnik von Bedeutung sind:

$$\frac{\hat{p}_0}{p} = \frac{\left(\frac{\kappa+1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}(M^2 - 1)\right]^{\frac{1}{\kappa-1}}},$$

$$\frac{\hat{p}_0}{\hat{p}} = \frac{\left(\frac{\kappa+1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}(M^2 - 1)\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}.$$

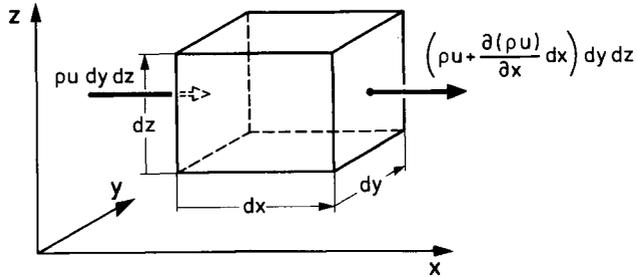
### 3.2 Reibungsfreie, ebene und räumliche Strömungen

Wir erweitern im Folgenden die eindimensionale Stromfadentheorie auf mehrere unabhängige Veränderliche und benutzen hierzu die Eulersche Methode.

#### 3.2.1 Kontinuität (= Massenerhaltung)

Wir betrachten einen raumfesten Kontrollbereich, einen Quader mit den Kantenlängen  $dx, dy,$

**Bild 3.44**  
Zur Herleitung der  
Kontinuität



$dz$  (Bild 3.44). Eine Änderung des Massenstromes durch die Berandung führt zu einer Massenänderung im Innern. Der Massenstrom durch die Oberfläche in  $x$ -Richtung ist

$$d\dot{m}_x = \rho u \, dy \, dz - \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dy \, dz = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \, dy \, dz.$$

Für alle drei Achsenrichtungen wird insgesamt

$$d\dot{m} = -\left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx \, dy \, dz. \quad (3.64)$$

Diese Gleichung bringt zum Ausdruck, daß sich der resultierende Massenstrom durch die Oberfläche in einer lokalen zeitlichen Massenzu- oder -abnahme im Innern wiederfinden muß. Mit anderen Worten: die Masse kann im Innern nur dadurch z.B. **zunehmen**, daß mehr ein- als ausströmt. (3.64) kann in verschiedener Form geschrieben werden:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{w}. \quad (3.65)$$

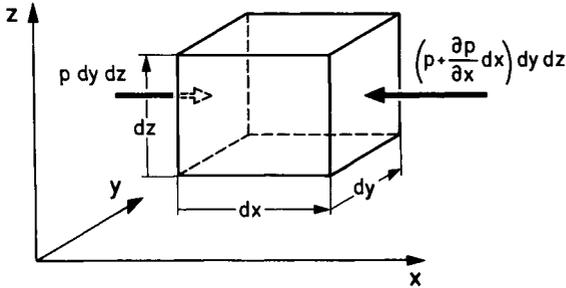
Hieraus folgt die physikalische Bedeutung der **Divergenz**

$$\operatorname{div} \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

als **relative Ergiebigkeit** des Stromfeldes.

### 3.2.2 Eulersche Bewegungsgleichungen

Wir wenden das Newtonsche Grundgesetz auf das raumfeste Massenelement an (Bild 3.45) und erhalten der Reihe nach



**Bild 3.45**  
Raumfestes Massenelement

$$\text{Masse} = dm = \rho \, dx \, dy \, dz ,$$

$$\text{Beschleunigung} = \frac{d\bar{w}}{dt} ,$$

$$\text{angreifende Kräfte} = \text{Massen- und Oberflächenkräfte} = \bar{f} \, dm - \text{grad } p \, dx \, dy \, dz ,$$

mit  $\bar{f} = (f_x, f_y, f_z)$  als der auf die Masse bezogenen Kraft. Also

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \bar{f} . \quad (3.66)$$

Insgesamt erhalten wir die Aussage: Kontinuität und Eulersche Gleichungen liefern vier Bedingungen für die fünf Unbekannten  $(u, v, w)$ ,  $p$  und  $\rho$ . Auch hier ist also eine zusätzliche Gleichung (Energiesatz!) erforderlich, um alle Unbekannten zu bestimmen.

### 3.2.3 Ebene, stationäre, inkompressible Potentialströmung

Dies ist ein für die Strömungslehre wichtiger Spezialfall, der uns ausführlich beschäftigen wird. Die Voraussetzung  $\rho = \text{konst}$  ersetzt die fehlende Gleichung. Streichen wir noch die Schwerkraft, so wird:

$$\text{Kontinuität:} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \quad (3.67)$$

$$\text{Eulersche Gleichungen:} \quad \left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} , \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} . \end{array} \right. \quad (3.68a)$$

$$(3.68b)$$

Diese Gleichungen für  $u$ ,  $v$  und  $p$  lassen sich auf zwei Beziehungen für  $u$  und  $v$  reduzieren. Wir differenzieren (3.68) nach  $y$  und (3.68b) nach  $x$  und subtrahieren. Benutzen wir (3.67) zur Vereinfachung, so wird

$$0 = u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3.69)$$

wobei die letzte Gleichung berücksichtigt, daß wir stationäre Strömungen untersuchen. (3.69) zeigt, daß

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \text{konst} \quad (3.70)$$

ist längs jeder Stromlinie. Grundsätzlich kann der Wert dieser Konstanten von Stromlinie zu Stromlinie variieren. Bei den von uns vorwiegend betrachteten **Umströmungsaufgaben** liegt eine konstante Anströmung im Unendlichen vor, d.h.  $u \rightarrow u_\infty$ ,  $v \rightarrow v_\infty$ . Im Limes  $x \rightarrow -\infty$  wird daher auf jeder Stromlinie aus (3.70)

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x \rightarrow -\infty} = 0.$$

Die Konstante ist also in unserem Fall gleich Null. Damit kommen die Grundgleichungen

$$\text{Kontinuität:} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.71a)$$

$$\text{Drehungsfreiheit:} \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (3.71b)$$

Wir erläutern den Begriff der **Drehung** an zwei einfachen Beispielen.

1. Beim starren Körperwirbel (Bild 3.46) gilt

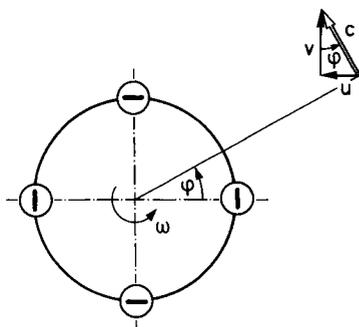
$$c = \omega r, \quad u = -\omega r \sin \varphi = -\omega y, \quad v = \omega r \cos \varphi = \omega x.$$

Also ist

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega,$$

und damit kann  $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$  als Maß für die lokale Drehung des Teilchens aufgefaßt werden.

2. Beim **Potentialwirbel** (Bild 3.47) ist



← Bild 3.46  
Starrer Körper-  
wirbel

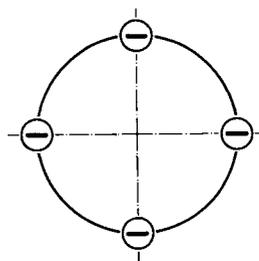


Bild 3.47 →  
Potentialwirbel

$$c = \frac{k}{r} ; \quad u = -k \frac{\sin \varphi}{r} = -k \frac{y}{x^2 + y^2} , \quad v = k \frac{\cos \varphi}{r} = k \frac{x}{x^2 + y^2} ,$$

und damit gilt

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 ,$$

d.h. hier liegt eine **drehungsfreie** Bewegung vor. Durch Integration der zwei Differentialgleichungen (3.71a,b) für  $u$  und  $v$  bestimmen wir das Geschwindigkeitsfeld. Anschließend wird der Druck mit der Bernoulli-Gleichung ermittelt. Es ergeben sich hier zwei mögliche Lösungswege.

1. Wir erfüllen die **Drehungsfreiheit** (3.71b) durch eine **Potentialfunktion**  $\phi(x,y)$ , d.h.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} , \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} . \quad (3.72)$$

Dann ergibt die **Kontinuität** (3.71a) die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \Delta \phi = 0 . \quad (3.73)$$

Für  $\phi$  ist damit die **Laplace-Gleichung** (= Potentialgleichung) unter den gegebenen Randbedingungen des Strömungsproblems zu lösen.

2. Wir erfüllen die **Kontinuität** (3.71a) durch eine **Stromfunktion**  $\Psi(x,y)$ , d.h.

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (3.74)$$

Die **Drehungsfreiheit** (3.71b) verlangt

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \Delta \Psi = 0.$$

D.h. auch für  $\Psi$  gilt die **Laplace-Gleichung**.

$\phi$  und  $\Psi$  haben eine wichtige physikalische Bedeutung:

1. Für die Höhenlinien der  $\Psi$ -Fläche, d.h. die Kurven  $\Psi = \text{konst}$ , gilt

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy = 0,$$

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{\Psi=\text{konst}} = \frac{v}{u}.$$

Mithin sind die Kurven  $\Psi = \text{konst}$  **Stromlinien**.

2. Für die Kurven  $\phi = \text{konst}$  kommt entsprechend

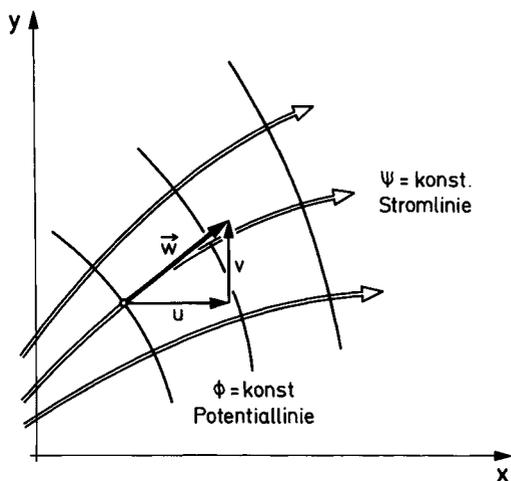
$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = u dx + v dy = 0,$$

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{\phi=\text{konst}} = -\frac{u}{v}.$$

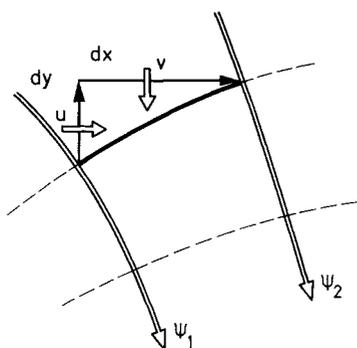
Die Kurven  $\phi = \text{konst}$ , die Potentiallinien, sind orthogonal zu den Stromlinien.  $\phi = \text{konst}$  und  $\Psi = \text{konst}$  bilden ein orthogonales Netz (Bild 3.48). Für den Volumenstrom, bezogen auf die Breiten- oder Tiefeneinheit, zwischen zwei Stromlinien gilt (Bild 3.49)

$$\dot{V}_{12} = \int_1^2 d\dot{V} = \int_1^2 (u dy - v dx) = \int_1^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \right) = \int_1^2 d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1. \quad (3.75)$$

D.h. die Differenz der  $\Psi$ -Werte zweier Stromlinien liefert im ebenen Fall den Volumenstrom

**Bild 3.48**

Orthogonales Netz der Potential- und Stromlinien

**Bild 3.49**

Berechnung des Volumenstroms zwischen zwei Stromlinien

pro Tiefeneinheit senkrecht zur Bildebene zwischen ihnen.

Wir besprechen nun allgemeine **Lösungsmethoden** der Gleichungen  $\Delta\phi = 0$  und  $\Delta\Psi = 0$ .

### 1. Jede differenzierbare **komplexe Funktion**

$$F(z) = F(x + iy) = H(x, y) \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

ist Lösung der Potentialgleichung  $\Delta H = 0$ , denn

$$\Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = F''(z) - F''(z) = 0.$$

### 2. Zerlegen wir das **komplexe Potential** $F(z)$ in Real- und Imaginärteil, so gilt

$$F(z) = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F = \phi(x,y) + i \Psi(x,y).$$

Zum Beweis differenzieren wir hier nach  $x$  und  $y$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} : F'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : iF'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

D.h. 
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

also

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

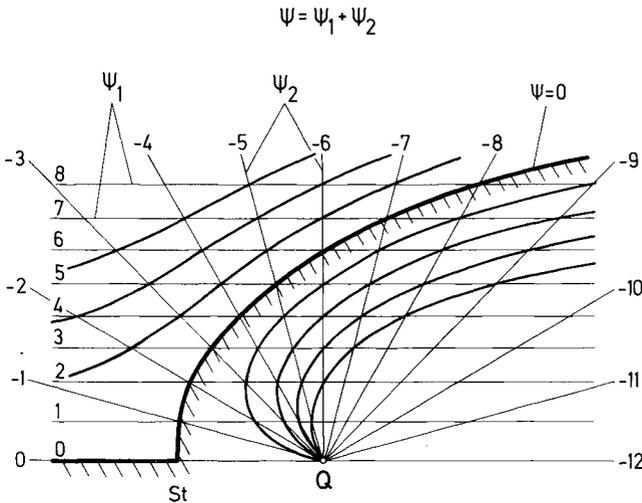
Dies sind die für Potential- und Stromfunktion geltenden Relationen (3.72) und (3.74), womit die Behauptung bewiesen ist. Sie heißen **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen** und spielen in der Funktionentheorie eine große Rolle.

Die vorstehenden Aussagen 1 und 2 sind für die Strömungslehre von grundsätzlichem Interesse. Zerlegt man also eine komplexe Funktion in Real- und Imaginärteil, so erhält man Potential- und Stromfunktion einer Potentialströmung. Die Schwierigkeit liegt offenbar darin, diejenigen Funktionen zu bestimmen, die die vorgegebenen **Randbedingungen** des Strömungsproblems erfüllen.

Eine weitere Eigenschaft der Differentialgleichungen  $\Delta \phi = 0$  und  $\Delta \Psi = 0$  ist ihre **Linearität**. Mit  $\phi_1$  und  $\phi_2$  ist auch  $c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2$  ( $c_1, c_2 = \text{konst}$ ) eine Lösung, denn

$$\Delta(c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2) = \Delta(c_1 \phi_1) + \Delta(c_2 \phi_2) = c_1 \Delta \phi_1 + c_2 \Delta \phi_2 = 0.$$

Diese Überlagerung kann auch graphisch erfolgen. Wir erläutern dies am Beispiel der Superposition von Parallelströmung ( $\Psi_1$ ) und Quelle ( $\Psi_2$ ). Bild 3.50 zeigt das Zustandekommen des neuen Feldes mit der Stromfunktion  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ . Jede Stromlinie kann als materielles Hindernis aufgefaßt und als umströmter Körper betrachtet werden. Nehmen wir die Staustromlinie, so haben wir ein Modell für die Umströmung eines stumpfen Halbkörpers. Diese Strömung wird uns bei der analytischen Behandlung erneut begegnen.



**Bild 3.50**  
Lineare Superposition von Parallelströmung und Quelle

Die Bernoulli-Gleichung gilt auch hier, wie man mit den Euler-Gleichungen (3.68a.b) und der Drehungsfreiheit (3.71b) leicht verifiziert:

$$p + \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) = p_\infty + \frac{\rho}{2} c_\infty^2 = p_0. \quad (3.76)$$

Für die dimensionslose Darstellung benutzen wir den **Druckkoeffizienten**

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} c_\infty^2} = \frac{\Delta p}{q} = 1 - \left( \frac{c}{c_\infty} \right)^2. \quad (3.77)$$

Ausgezeichnete Werte sind  $c_{p_\infty} = 0$  in der **Anströmung** sowie  $c_{p0} = 1$  in den **Staupunkten**.

### 3.2.4 Beispiele für elementare und zusammengesetzte Potentialströmungen

Wir diskutieren die in der Tabelle Seite 88-89 aufgeführten Beispiele. Zu Beginn werden wir uns kurz fassen, später ausführlicher sein. Wir sammeln dadurch Erfahrungen über einfache Stromfelder, die wir später benötigen.

#### 1. Parallelströmung

$$F(z) = (u_\infty - i v_\infty) z = (u_\infty - i v_\infty) (x + i y) = u_\infty x + v_\infty y + i (u_\infty y - v_\infty x),$$

$$\phi = u_\infty x + v_\infty y, \quad \Psi = u_\infty y - v_\infty x; \quad \phi_x = u = u_\infty, \quad \phi_y = v = v_\infty.$$

$$\text{Stromlinien } \Psi = \text{konst} : y = \frac{v_\infty}{u_\infty} x + \text{konst}.$$

## 2. Quell-Senkenströmung

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\varphi), \quad z = x + iy = r e^{i\varphi},$$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \Psi = \frac{Q}{2\pi} \varphi = \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x};$$

$$\phi_x = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \phi_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad c = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{Q}{2\pi r}.$$

$$\text{Volumenstrom: } \dot{V} = c \cdot 2\pi r \cdot 1 = Q = \text{Quell- oder Senkenstärke}$$

## 3. Wirbelströmung

$$F(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi} (-\varphi + i \ln r),$$

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \varphi, \quad \Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r; \quad \phi_x = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \phi_y = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$c = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

völlig analog der Quell-Senkenströmung.  $\Gamma$  heißt Zirkulation oder Wirbelstärke und ist ein Maß für die Intensität der Drehbewegung.

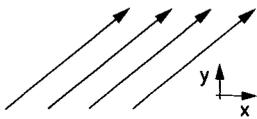
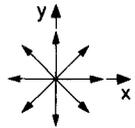
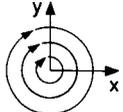
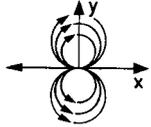
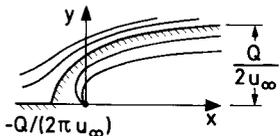
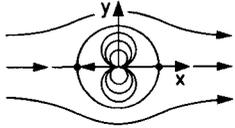
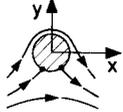
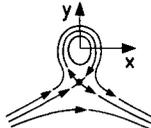
## 4. Dipolströmung

$$F(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{m(x - iy)}{x^2 + y^2},$$

$$\phi = \frac{m x}{x^2 + y^2}, \quad \Psi = -\frac{m y}{x^2 + y^2}; \quad c = \frac{m}{r^2}.$$

$$\text{Stromlinien: } \Psi = K = \text{konst} : x^2 + \left(y + \frac{m}{2K}\right)^2 = \frac{m^2}{4K^2},$$

komplexes Potential $F(z)$	Potential $\phi(x, y)$	Stromfunktion $\Psi(x, y)$
$(u_\infty - i v_\infty) z$ Parallelströmung	$u_\infty x + v_\infty y$	$u_\infty y - v_\infty x$
$\frac{Q}{2\pi} \ln z$ Quelle $Q > 0$ , Senke $Q < 0$	$\frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$	$\frac{Q}{2\pi} \varphi = \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}$
$\frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z$ Wirbel, $\Gamma > 0$ rechtsdrehend $\Gamma < 0$ linksdrehend	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}$	$\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
$\frac{m}{z}$ Dipol	$\frac{m x}{x^2 + y^2}$	$-\frac{m y}{x^2 + y^2}$
$u_\infty z + \frac{Q}{2\pi} \ln z$ Parallelström. + Quelle/Senke	$u_\infty x + \frac{Q}{2\pi} \ln r$	$u_\infty y + \frac{Q}{2\pi} \varphi$
$u_\infty \left( z + \frac{R^2}{z} \right)$ Parallelströmung + Dipol = Zylinderumströmung	$u_\infty x \left( 1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right)$	$u_\infty y \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right)$
$u_\infty \left( z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z$ Zylinderumströmung + Wirbel	$u_\infty x \left( 1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi$	$u_\infty y \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$
Parallelströmung + Wirbel	$u_\infty x - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi$	$u_\infty y + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

Geschwindigkeit			Stromlinien
u	v	c	$\Psi = \text{konst}$
$u_\infty$	$v_\infty$	$c_\infty = \sqrt{u_\infty^2 + v_\infty^2}$	
$\frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$	$\frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$	$\frac{Q}{2\pi r}$	
$\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$	$\frac{\Gamma}{2\pi r}$	
$m \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$	$-m \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$	$\frac{m}{r^2}$	
$u_\infty + \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$	$\frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$		
$2 u_\infty \sin^2 \varphi$	auf dem Zylinder: $-2 u_\infty \sin \varphi \cos \varphi$	$2 u_\infty  \sin \varphi $	
$2 u_\infty \sin^2 \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi R} \sin \varphi$	auf dem Zylinder: $-2 u_\infty \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi R} \cos \varphi$	$c = \left  2 u_\infty \sin \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right $	
$u_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$		

d.h. es kommen Kreise mit Mittelpunkt auf der  $y$ -Achse, die alle durch den Ursprung gehen. Der Dipol kann realisiert werden durch Überlagerung von Quelle und Senke, deren Abstand verschwindet und deren Intensität gleichzeitig über alle Grenzen wächst.

### 5. Überlagerung von Parallelströmung mit Quell-Senkenströmung

Wir behandeln den früher graphisch diskutierten Fall (Bild 3.50). Bei horizontaler Parallelströmung wird

$$F(z) = u_{\infty} z + \frac{Q}{2\pi} \ln z, \quad \phi = u_{\infty} x + \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \Psi = u_{\infty} y + \frac{Q}{2\pi} \varphi.$$

Für die Stromlinien kommt eine implizite transzendente Gleichung. Daher haben wir ihre Gestalt oben graphisch ermittelt:

$$u = u_{\infty} + \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Für Staupunkte gilt  $c = 0$  und damit  $u = 0$  und  $v = 0$ . Letzteres führt auf  $y_s = 0$  (Symmetrie zur  $x$ -Achse), ersteres dann auf  $x_s = -Q/2\pi u_{\infty}$ . Es gibt also genau einen Staupunkt, der bei einer Quelle ( $Q > 0$ ) links vom Nullpunkt und bei einer Senke ( $Q < 0$ ) rechts davon liegt:

$$c^2 = u_{\infty}^2 + \frac{Q u_{\infty}}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 + y^2},$$

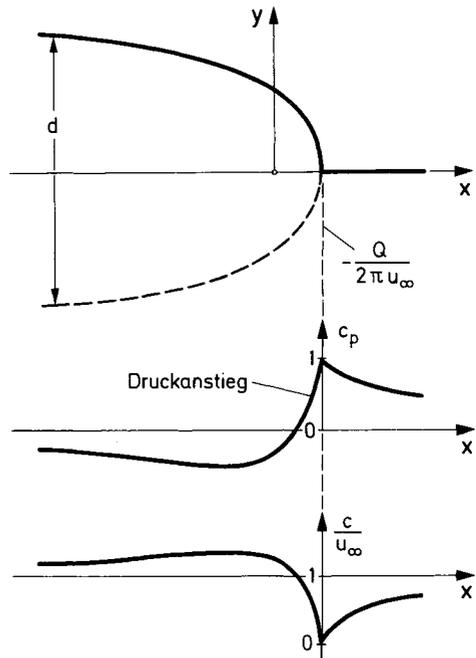
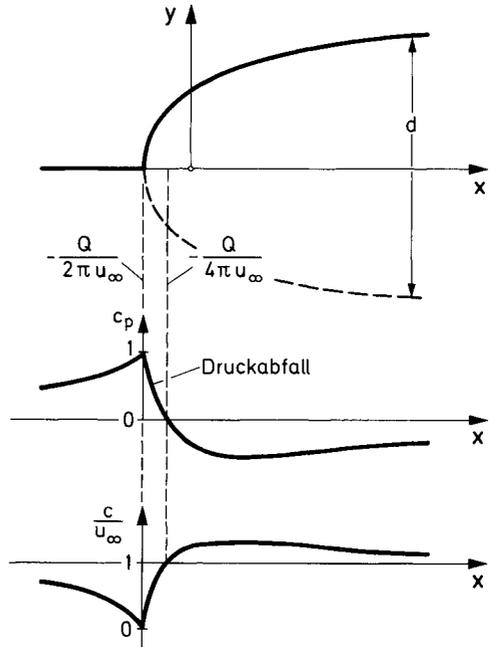
$$c_p = \frac{\Delta p}{q} = -\frac{Q}{\pi u_{\infty}} \frac{1}{x^2 + y^2} \left( x + \frac{Q}{4\pi u_{\infty}} \right).$$

Hiermit kann man den Verlauf der Druck- und Geschwindigkeitsverteilung auf der Staustromlinie diskutieren. In Bild 3.51 ist der Fall der Quelle skizziert. Vor dem Körper steigt der Druck, die Strömung wird abgebremst. Am Körper wird sie durch die Verdrängungswirkung beschleunigt, der Druck fällt ab. Hierbei wird die Anströmungsgeschwindigkeit überschritten. Im Unendlichen haben wir Parallelströmung. Es kommt also die Kontur eines **vorn stumpfen Halbkörpers**. Sein Durchmesser  $d_{\infty}$  ergibt sich aus einer Bilanz. Die aus der Quelle pro Zeiteinheit austretende Menge pro Tiefeneinheit  $\dot{V} = Q$  strömt rechts mit der Geschwindigkeit  $u_{\infty}$  ab, also  $\dot{V} = Q = u_{\infty} d_{\infty}$ , d.h.

$$d_{\infty} = \frac{Q}{u_{\infty}}. \quad (3.78)$$

In Bild 3.52 ist der Fall der Senke skizziert. Hier kommt es zur Umströmung eines **stumpfen Körperhecks**. Der Druck steigt bei Annäherung an den hinteren Staupunkt an, während die Strömung verzögert wird. Dies kann bei realen, d.h. reibungsbehafteten, Strömungen zu einer Ablösung der Grenzschicht führen. Die von uns ermittelte potentialtheoretische Druckverteilung

**Bild 3.51**  
Quelle in Parallelströmung



**Bild 3.52**  
Senke in Parallelströmung

ist der Grenzschicht aufgeprägt. Überlagern wir die in Bild 3.51 und Bild 3.52 diskutierten Einzelfälle bei gleicher Quell- und Senkenstärke, so kommt ein geschlossener Körper. Ein wichtiger Sonderfall wird jetzt behandelt.

## 6. Überlagerung von Parallelströmung mit Dipolströmung

$$F(z) = u_\infty \left( z + \frac{R^2}{z} \right), \quad \Psi = u_\infty y \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Die Staustromlinie  $\Psi = 0$  ist durch  $y = 0$  bzw.  $x^2 + y^2 = R^2$  gegeben. Es handelt sich um die Zylinderumströmung. Auf dem Zylinder erhalten wir:  $c = 2 u_\infty |\sin \varphi|$ ,  $c_p = 1 - 4 \sin^2 \varphi$ . In Bild 3.53 sind Geschwindigkeit und Druck auf der Staustromlinie skizziert. Am Dickenmaximum ergibt sich die Geschwindigkeit  $c_{\max}/u_\infty = 2$ . Auf der Rückseite des Körpers tritt ein beträchtlicher Druckanstieg auf. Aufgrund der Symmetrie der Druckverteilung in x- und y-Richtung wird auf den Zylinder keine resultierende Kraft ausgeübt.

## 7. Überlagerung von Zylinderumströmung und Wirbel

Wir gehen noch einen Schritt weiter, indem wir dem in 6. behandelten Beispiel einen Wirbel überlagern. Das Schema in Bild 3.54 zeigt bereits die typischen Eigenschaften des Stromfeldes. Es kommt eine bezüglich der x-Achse **unsymmetrische** Strömung. Der Zylinder bleibt offenbar auch hier Stromlinie, da er in den beiden Teilfeldern Stromlinie ist. Allerdings gilt

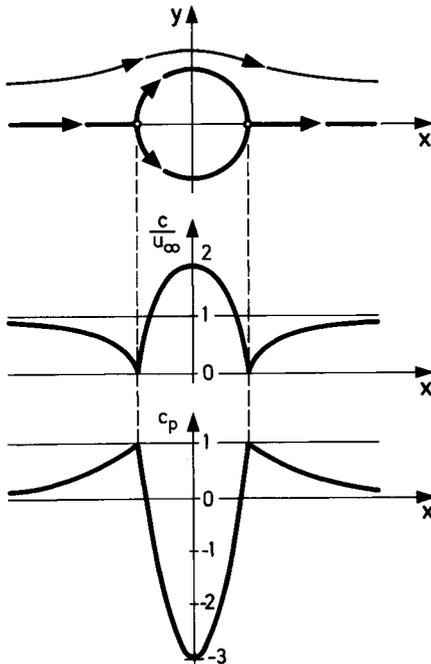
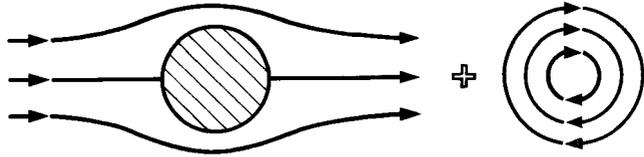


Bild 3.53

Geschwindigkeit und Druck bei der Zylinderumströmung

**Bild 3.54**  
 Schema der Überlagerung von Zylinderumströmung und Wirbel



auf ihm jetzt nicht  $\Psi = 0$ , sondern  $\Psi = \Gamma / (2 \pi) \ln R$ . Für Geschwindigkeit und Druck kommt auf dem Zylinder

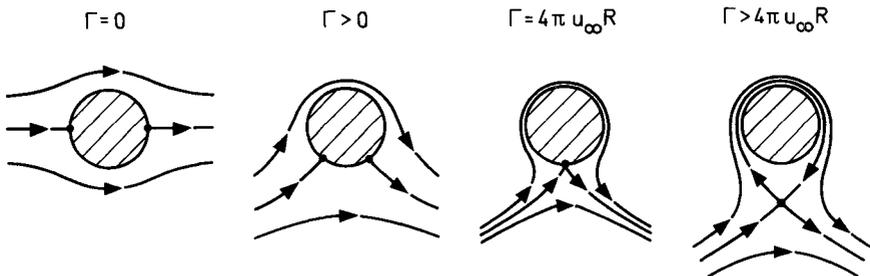
$$c = \left| 2 u_\infty \sin \varphi + \frac{\Gamma}{2 \pi R} \right|, \quad c_p = 1 - \left( \frac{c}{u_\infty} \right)^2 = 1 - \left( 2 \sin \varphi + \frac{\Gamma}{2 \pi u_\infty R} \right)^2. \quad (3.79)$$

Die Staupunkte liegen bei

$$\sin \varphi_s = - \frac{\Gamma}{4 \pi u_\infty R}.$$

Für einen rechts drehenden Wirbel ( $\Gamma > 0$ ) liegen die beiden Staupunkte im 3. und 4. Quadranten. In Bild 3.55 sind mögliche Stromfelder skizziert. Für  $\Gamma = 4 \pi u_\infty R$  fallen die beiden Staupunkte auf der Kontur ( $x = 0, y = -R$ ) zusammen. Ist  $\Gamma > 4 \pi u_\infty R$ , so wandert dieser Staupunkt auf der y-Achse in das Stromfeld. Die Strömung ist in jedem Fall zur y-Achse symmetrisch. Es entsteht hier eine Kraft senkrecht zur x-Achse, ein **Auftrieb**, die sogenannte **Magnus-Kraft**. Bild 3.56 erläutert die Berechnung dieser Kraft  $F_y$ :

$$d F_y = - \Delta p \sin \varphi R d \varphi b.$$



**Bild 3.55**  
 Zylinderumströmung mit Zirkulation

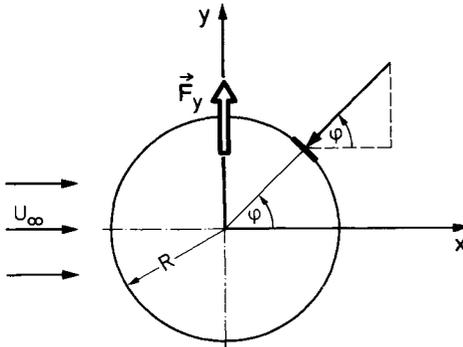


Bild 3.56

Berechnung der Auftriebskraft

$b$  ist die Breite des Zylinders senkrecht zur Zeichenebene. Das Vorzeichen ist so gewählt, daß ein Überdruck  $\Delta p > 0$  einen Abtrieb  $d F_y < 0$  hervorruft.

$$\begin{aligned}
 F_y &= -b R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \Delta p \sin \varphi \, d\varphi = \\
 &= -b R q \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \varphi \left[ 1 - 4 \sin^2 \varphi - \frac{2\Gamma}{\pi u_\infty R} \sin \varphi - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 u_\infty^2} \right] d\varphi = \\
 &= \frac{b q 2\Gamma}{\pi u_\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \rho u_\infty b \Gamma .
 \end{aligned}$$

$$F_y = \rho u_\infty b \Gamma \quad (3.80)$$

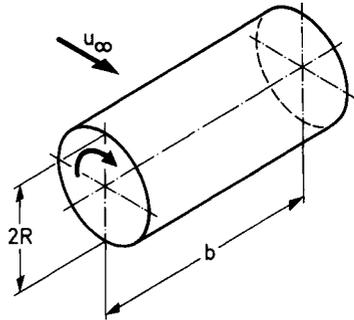
heißt **Kutta-Joukowski-Formel** für den Auftrieb. Danach ist der **Auftrieb** direkt **proportional** der **Zirkulation** (Wirbelstärke). Eine ganz entsprechende Rechnung zeigt, daß der **Widerstand** verschwindet. Aufgrund der Symmetrie des Stromfeldes war dies zu erwarten. Das Ergebnis gilt für Potentialströmungen ganz allgemein und wird als **D'Alembertsches Paradoxon** bezeichnet. Wir kommen unten darauf zurück.

Wir gehen zu dimensionslosen Größen über, um den obigen Auftrieb besser beurteilen zu können. Der Ansatz

$$F_y = q A c_a$$

**Bild 3.57**

Bezeichnungen bei der Zylinderumströmung



ergibt mit den Bezeichnungen von Bild 3.57  $A = 2 b R$  und der Kutta-Joukowski-Formel für den Auftriebskoeffizienten

$$c_a = \frac{\Gamma}{u_\infty R}. \quad (3.81)$$

Nehmen wir den Grenzfall, daß beide Staupunkte zusammenfallen,  $\Gamma = 4 \pi u_\infty R$ , so wird aus (3.81)

$$c_a = 4 \pi \approx 12,5. \quad (3.82)$$

Dies ist ein extrem hoher Wert im Vergleich mit Ergebnissen bei einem Tragflügel. Sie liegen dort etwa um eine Zehnerpotenz niedriger. Zum Beispiel gilt für die wenig angestellte (Winkel  $\alpha$ ) ebene Platte

$$c_a = 2 \pi \alpha.$$

Bei  $\alpha = 10^\circ \approx 0,175$  wird  $c_a \approx 1,1$ . Aufgrund des hohen Auftriebs beim rotierenden Zylinder hat es nicht an Versuchen gefehlt, diesen Effekt technisch zu nutzen. Beim **Flettner-Rotor** z.B. sollte die Querkraft zum Schiffsantrieb benutzt werden. Zwei vertikal stehende schnell rotierende Zylinder sorgten für den Antrieb. Technische Schwierigkeiten sowie das Auftreten eines beträchtlichen Widerstandes führten seinerzeit zum Abbruch der Versuche, obwohl  $c_a$ -Werte von etwa 9 realisiert werden konnten.

### 3.2.5 Potentialströmungen um vorgegebene Körper

Die bisher behandelten Beispiele dienen vorwiegend dem Sammeln von Erfahrungen auf

diesem Gebiet. In der vorliegenden Form sind sie noch nicht in der Lage, das Randwertproblem für einen **vorgegebenen Körper** zu lösen. Dazu dient z.B. die **Singularitätenmethode**, die für schlanke Körper in den Grundzügen dargestellt werden soll. Hierbei werden auf der Profilschne **kontinuierliche Verteilungen** von Singularitäten (Quellen/Senken, Wirbel) angebracht. Die Stärke derselben ist so zu bemessen, daß bei Überlagerung mit der Parallelströmung die vorgegebene Körperkontur als Stromlinie erscheint. Hierbei ist es so, daß für den symmetrischen Körper in nichtangestellter Strömung (Dickeneffekt) Quell- und Senkenverteilungen gebraucht werden, während für Anstellung und Wölbung Wirbelbelegungen verwendet werden. Im ersten Fall ist die Strömung symmetrisch zur x-Achse, während sie im zweiten Fall unsymmetrisch ist. Wir geben die Herleitung nur für den **Dickeneffekt** und verweisen bezüglich Anstellung und Wölbung auf die Spezialliteratur. Der Beitrag eines differentiellen Quell-Senkenelementes (Quellpunkt  $P_2(\xi, \eta)$ ) im Aufpunkt  $P_1(x, y)$  ist (Bild 3.58)

$$d\phi(x, y; \xi, \eta) = \frac{dQ(\xi, \eta)}{2\pi} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

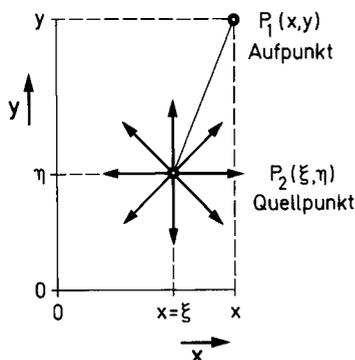
Belegen wir nur die Profilschne (=  $\xi$ -Achse), so ergeben sich die Geschwindigkeiten

$$d(u - u_\infty) = \frac{dQ(\xi)}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} \frac{dQ}{d\xi} d\xi,$$

$$dv = \frac{dQ(\xi)}{2\pi} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} \frac{dQ}{d\xi} d\xi.$$

Hierin ist  $dQ/d\xi$  die Quell-Senkendichte. Belegen wir die Länge  $\ell$ , so kommen die Integraldarstellungen

$$u(x, y) - u_\infty = \frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} \frac{dQ}{d\xi} d\xi, \quad (3.83a)$$



**Bild 3.58**  
Quell- und Aufpunkt

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} \frac{dQ}{d\xi} d\xi, \tag{3.83b}$$

Die Quell-Senkendichte  $dQ/d\xi$  ist hierin so zu bestimmen, daß die Körperkontur Stromlinie wird. Die Voraussetzung des **schlanken Körpers** führt in der Bedingung für die Stromlinie (3.7) zu der wesentlichen Vereinfachung

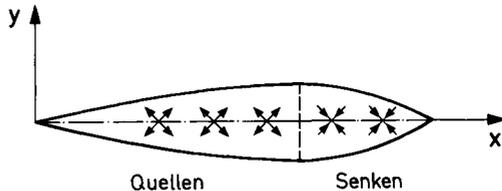
$$\frac{dh}{dx} = \frac{v(x, h(x))}{u(x, h(x))} \approx \frac{v(x, 0)}{u_\infty}. \tag{3.84}$$

Die Randbedingung wird damit auf der Profilhöhe erfüllt. Benutzen wir (3.84) in (3.83b), so kommt mit der Substitution  $\xi - x = y s$ ,  $d\xi = y ds$  in der Grenze  $y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{x}{y}}^{\frac{\ell-x}{y}} \frac{dQ(x+ys)}{d\xi} \frac{ds}{1+s^2} \xrightarrow{(y \rightarrow 0)} \frac{1}{2\pi} \frac{dQ}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{dQ}{dx} = u_\infty \frac{dh}{dx}, \\ \frac{dQ}{dx} &= 2 u_\infty \frac{dh}{dx}. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Dies ist ein sehr anschauliches Ergebnis. Quellen ( $dQ/dx > 0$ ) hat man dort anzubringen, wo sich der Körper erweitert, Senken dort, wo er zusammengezogen wird (Bild 3.59). (3.85) folgt im übrigen auch sofort aus der Formel für die Dicke des Halbkörpers (3.78), wenn man  $d = 2h$  setzt und links und rechts eine Abhängigkeit von  $x$  zuläßt. Dies berücksichtigt dann die Wirkung der Quellbelegung anstelle der dort zugelassenen einzelnen Singularität. (3.85) ergibt mit (3.83a,b) die Lösung unseres Problems. Was bleibt, ist eine reine Integrationsaufgabe:

$$\frac{u - u_\infty}{u_\infty} = \frac{1}{\pi} \int_0^\ell \frac{(x-\xi) \frac{dh}{d\xi}}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi, \tag{3.86a}$$



**Bild 3.59**  
Quell-Senkverteilung und Körperkontur

$$\frac{v}{u_\infty} = \frac{1}{\pi} \int_0^\ell \frac{y \frac{dh}{d\xi}}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi. \tag{3.86b}$$

Besonders wichtig ist die Geschwindigkeit **auf** dem Profil ( $y \rightarrow 0$ ). Es wird aus (3.86a)

$$\frac{u(x,0) - u_\infty}{u_\infty} = \frac{1}{\pi} \oint_0^\ell \frac{\frac{dh}{d\xi}}{x-\xi} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{x-\varepsilon} \dots + \int_{x+\varepsilon}^\ell \dots \right\}. \tag{3.87}$$

Das singuläre Integral ist hierin im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu bilden. Dabei wird die singuläre Stelle  $\xi = x$  symmetrisch ausgeschlossen und zur Grenze  $\varepsilon \rightarrow 0$  übergegangen (Bild 3.60). Wir berechnen die Geschwindigkeit für das Parabelzweieck:

$$h(x) = 4 h_{\max} x(1-x) = 2 \tau x(1-x) \quad , \quad 0 \leq x \leq l \quad (\hat{=} \ell). \tag{3.88}$$

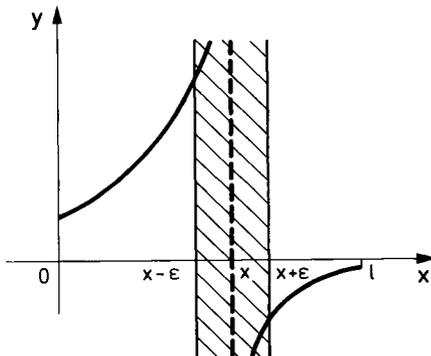
Der Dickenparameter des Profils ist

$$\tau = \frac{2 h_{\max}}{\ell}.$$

(3.87) führt zu (Bild 3.61)

$$\frac{u(x,0) - u_\infty}{u_\infty} = \frac{4\tau}{\pi} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{2} - x \right) \ell \ln \left| \frac{1-x}{x} \right| \right\} \quad , \quad -\infty < x < +\infty. \tag{3.89}$$

Im Dickenmaximum gilt



**Bild 3.60**  
Zur Berechnung des Cauchyschen Hauptwertes

$$\left( \frac{u - u_\infty}{u_\infty} \right)_{\max} = \frac{4\tau}{\pi} = 1,27\tau.$$

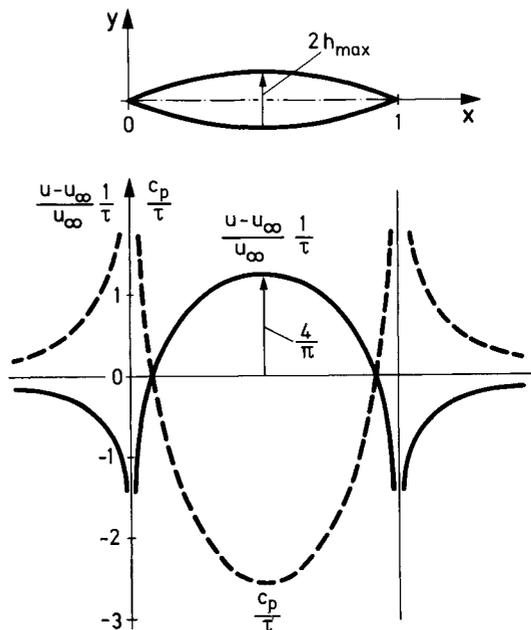
Die Geschwindigkeitsverteilung zeigt die früher gefundenen Charakteristika: vor dem Körper ein Aufstau, am Körper zunächst Beschleunigung, hinter dem Dickenmaximum wiederum Verzögerung bis zum hinteren Staupunkt. In den Staupunkten ergibt sich eine (schwache) logarithmische Singularität als Folge unserer vereinfachten Randbedingung. Dieser Fehler beeinflusst das Stromfeld nur geringfügig.

Der Druckkoeffizient (3.77) kann für die Umströmung schlanker Körper vereinfacht werden:

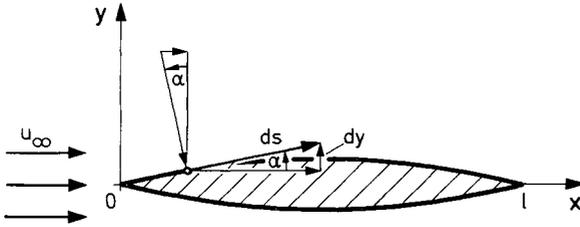
$$c^2 = u^2 + v^2 = (u_\infty + u - u_\infty)^2 + v^2 = u_\infty^2 + 2u_\infty(u - u_\infty) + \dots,$$

$$\frac{c^2}{u_\infty^2} = 1 + 2\frac{u - u_\infty}{u_\infty} + \dots,$$

$$c_p = \frac{\Delta p}{q} = 1 - \frac{c^2}{u_\infty^2} = -2\frac{u - u_\infty}{u_\infty}. \tag{3.90}$$



**Bild 3.61**  
Geschwindigkeit beim  
Parabelzweieck



**Bild 3.62**  
Zur Berechnung des Widerstandes beim schlanken Körper

Für den **Widerstand** des symmetrischen, schlanken Körpers erhalten wir (Bild 3.62)

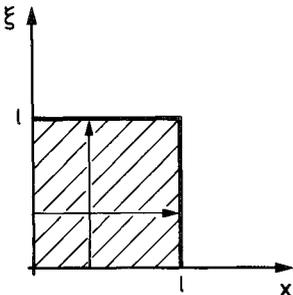
$$W = c_w \frac{\rho}{2} u_\infty^2 b l = 2 \int_0^\ell (p - p_\infty) \sin \alpha b ds = 2 b \int_0^\ell (p - p_\infty) \frac{dh}{dx} dx, \quad (3.91)$$

$$c_w = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell c_p \frac{dh}{dx} dx = -\frac{4}{\ell} \int_0^\ell \frac{u - u_\infty}{u_\infty} \frac{dh}{dx} dx = -\frac{4}{\pi \ell} \int_0^\ell \left( \int_0^\ell \frac{\frac{dh}{d\xi}}{x - \xi} d\xi \right) \frac{dh}{dx} dx.$$

Das in dieser Darstellung auftretende Doppelintegral J ist Null. Dies erkennt man sofort durch Vertauschung der Integrationsvariablen und anschließende Änderung der Integrationsreihenfolge (Bild 3.63)

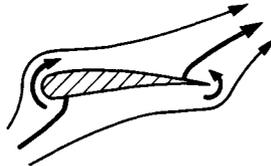
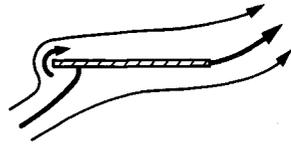
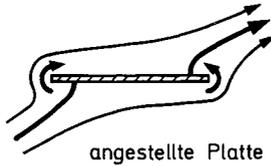
$$J = \int_0^\ell \left( \int_0^\ell \frac{\frac{dh}{d\xi}}{x - \xi} d\xi \right) \frac{dh}{dx} dx = (\text{Vertauschung der Variablen}) =$$

$$= \int_0^\ell \left( \int_0^\ell \frac{\frac{dh}{dx}}{\xi - x} dx \right) \frac{dh}{d\xi} d\xi = (\text{Änderung der Reihenfolge}) =$$

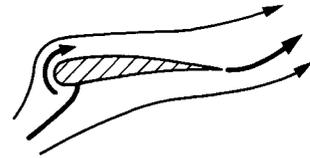


**Bild 3.63**  
Zur Vertauschung der Integrationsreihenfolge

**Bild 3.64**  
Umströmungen der angestellten Platte und eines Tragflügels



$\Gamma = 0, A = 0$



Kutta - Joukowski Fall  
 $\Gamma \neq 0, A \neq 0$  tragender Flügel

$$= \int_0^{\ell} \left( \int_0^{\ell} \frac{\frac{dh}{d\xi}}{\xi - x} d\xi \right) \frac{dh}{dx} dx = -J,$$

$J = 0.$

Der Widerstand ist Null. Damit ist im Rahmen unserer Theorie das **D'Alembertsche Paradoxon** für Potentialströmungen bewiesen.

Liegt eine zur x-Achse **unsymmetrische Strömung** vor, die durch eine **Anstellung** und/oder eine **Wölbung** erzeugt wird, so ist eine zusätzliche **Wirbelbelegung** der Profilschne erforderlich. Die Rechnung verläuft ähnlich wie oben, allerdings mit dem Unterschied, daß sich keine eindeutige Lösung ergibt. Die Gesamtzirkulation des Profils  $\Gamma$  bleibt hierbei frei wählbar. Sie wird erst durch eine zusätzliche Bedingung, die in gewisser Weise die Reibung berücksichtigt, festgelegt. Wir diskutieren dies qualitativ für den Fall der angestellten Platte und des Tragflügels (Bild 3.64). Zu Beginn der Bewegung (Anfahrvorgang) liegt eine antisymmetrische Wirbelverteilung vor (Bild 3.64 links). Die Plattenvorder- und -hinterkante wird umströmt. Die Gesamtzirkulation  $\Gamma$  verschwindet und nach (3.80) damit auch der Auftrieb. Es kommt sehr rasch zu einer Ablösung an der Hinterkante, die dazu führt, daß diese nicht mehr umströmt wird. Dann ist die sogenannte **Kutta-Joukowski-Bedingung** des glatten Abflusses erfüllt. Die Gesamtzirkulation ist hierdurch eindeutig festgelegt und von Null verschieden, genauso der Auftrieb. Dies ist der stationäre Endzustand des tragenden Flügels (Bild 3.64 rechts).

### 3.3 Strömung mit Reibung

Die bisherigen Betrachtungen dienen als Vorbereitung für die Behandlung der Strömungen mit

Verlusten.

### 3.3.1 Impulssatz mit Anwendungen

Dieser allgemeine Satz ist eine Bilanzaussage. Bei seiner Anwendung gehen zahlreiche Erfahrungen aus der Strömungslehre ein. Hierbei werden uns die an speziellen Stromfeldern gesammelten Einsichten zugute kommen.

Der Impuls eines Massenelements ist

$$d\vec{J} = \vec{w} dm = \rho \vec{w} dV. \quad (3.92)$$

Für ein Fluid vom Volumen  $V(t)$  gilt damit

$$\vec{J} = \int_{V(t)} \rho \vec{w} dV. \quad (3.93)$$

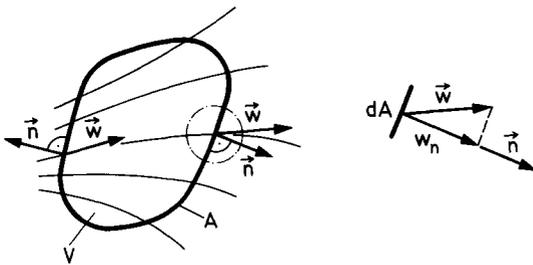
Der Impulssatz lautet: **Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der Resultierenden der äußeren Kräfte.** Als äußere Kräfte  $\vec{F}_a$  treten wie gewohnt Massen- und Oberflächenkräfte des im Volumen  $V$  eingeschlossenen Fluids auf:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{w} dV = \sum \vec{F}_a. \quad (3.94)$$

Es handelt sich jetzt um die Umformung der Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{w} dV.$$

Die Herleitung kann anschaulich analog zur Kontinuität (3.64) erfolgen. Ersetzen wir den Integranden durch die skalare Funktion  $f(x,y,z,t)$ , so gilt (Bild 3.65)



**Bild 3.65**

Zur Ableitung des Volumenintegrals

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_A f(\vec{w} \vec{n}) dA. \quad (3.95)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite beschreibt die lokale Änderung von  $f$  im Innern. Das zweite Integral gibt den resultierenden Strom durch die Oberfläche.  $\vec{n}$  ist die äußere Normale, und  $(\vec{w} \vec{n}) dA = d\dot{V}$  ist der Volumenstrom durch das Oberflächenelement  $dA$ . Ersetzen wir  $f$  durch  $\rho$ , so kommt für die **Erhaltung der Masse**

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho(\vec{w} \vec{n}) dA = \text{(Gaußscher Satz)} = \\ &= \int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{w}) \right\} dV, \end{aligned}$$

d.h. es gilt (3.65). Ersetzen wir  $f$  der Reihe nach durch die Komponenten von  $\rho \vec{w}$  und fassen alles zusammen, so geht (3.94) über in

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{w} dV = \int_V \frac{\partial \rho \vec{w}}{\partial t} dV + \int_A \rho \vec{w}(\vec{w} \vec{n}) dA = \sum \vec{F}_a. \quad (3.96)$$

Der erste Anteil beschreibt die lokale Impulsänderung. Hierzu ist eine Kenntnis der Strömungsgrößen **im** Volumen erforderlich. Der zweite Anteil gibt den Impulsstrom durch die Oberfläche. Hier treten die Variablen nur **am Rande** auf.

Für **stationäre** Strömungen fällt das Volumenintegral fort. Die Strömungsdaten werden nur **auf** der Oberfläche des **Kontrollbereiches** benötigt.

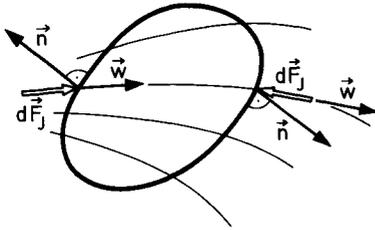
$$\int_A \rho \vec{w}(\vec{w} \vec{n}) dA = \sum \vec{F}_a. \quad (3.97)$$

Definieren wir als **Impulskraft**  $\vec{F}_J$

$$\vec{F}_J = - \int_A \rho \vec{w}(\vec{w} \vec{n}) dA, \quad (3.98)$$

so schreibt sich (3.97) in der sehr einfachen Form

$$\vec{F}_J + \sum \vec{F}_a = 0. \quad (3.99)$$



**Bild 3.66**  
Kontrollbereich mit Bezeichnungen

Für die **Impulskraft** (3.98) gilt, daß sie lokal **parallel** zu  $\vec{w}$  liegt und stets **ins Innere des Kontrollbereiches** gerichtet ist (Bild 3.66), denn

$$d\vec{F}_J = -\rho \vec{w}(\vec{w} \cdot \vec{n}) dA. \quad (3.100)$$

Sind also die Strömungsdaten **auf** der Berandung bekannt, so sind Rückschlüsse auf die angreifenden Kräfte möglich. Bei der Anwendung dieses Satzes kommt es sehr auf eine geeignete Wahl des Kontrollbereiches an. Dabei gehen viele Erfahrungen ein, die wir früher gesammelt haben. Es ist wichtig, daß, abgesehen von der Stationarität, keine weiteren Voraussetzungen erforderlich sind. Insbesondere sind **verlustbehaftete Strömungen** mit eingeschlossen. Die Verluste gehen hier über die Randvorgaben ein.

Wir behandeln jetzt einige **Beispiele**.

### 1. Durchströmen eines Krümmers

Erfragt ist die vom strömenden Medium auf die Innenwand ausgeübte Kraft. Wir nehmen Geschwindigkeit  $\vec{w}$  und Druck  $p$  am Eintritt (1) und am Austritt (2) als bekannt an (Bild 3.67). Sehen wir von der Schwerkraft ab, so lautet (3.99) hier

$$0 = \sum \vec{F}_a + \vec{F}_J = \vec{F}_{D1} + \vec{F}_{D2} + \vec{F}_{3,4} + \vec{F}_{J1} + \vec{F}_{J2}.$$

Mit der Druckkraft

$$\vec{F}_D = - \int_A p \vec{n} dA \quad (3.101)$$

und  $\vec{F}_{3,4}$  als Kraft, die die Innenwand des Krümmers auf das strömende Medium überträgt.  $\vec{R} = -\vec{F}_{3,4}$  ist die gesuchte Resultierende, die von der Strömung auf die Krümmerinnenwand ausgeübt wird. Impulskräfte treten auf den Rändern (3, 4) nicht auf, da sie nicht durchströmt werden. Das Krafteck (Bild 3.68) liefert das Ergebnis nach Größe und Richtung. Bei der quantitativen Behandlung muß man beachten, daß die Vorgaben in den Querschnitten (1) und (2) in der Regel nicht konstant sind. Für Impuls und Druckkraft sind dann die Integrale (3.98) sowie (3.101) auszuwerten. Für die Geschwindigkeit am Ein- und Austritt zeigt Bild 3.69 eine Möglichkeit. Durch diese Vorgaben werden die **Verluste** im Stromfeld berücksichtigt.

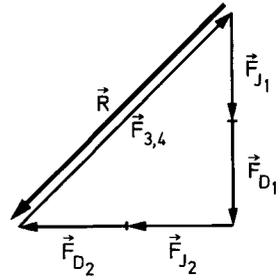
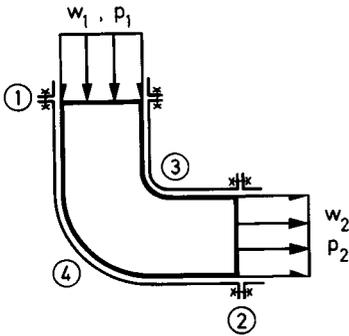
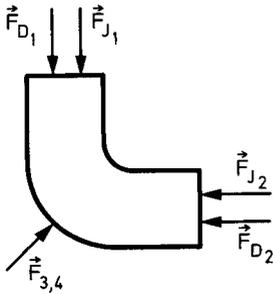


Bild 3.68  
Krafteck beim Krümmer



← Bild 3.67  
Krümmerströmung

Wir behandeln dasselbe Problem noch einmal bei **geändertem Kontrollraum**. Der Krümmer sei frei ausblasend, und die Kontrollfläche werde an der **Krümmeraußenwand** entlang geführt. Dadurch erhalten wir diesmal die **insgesamt** auf den Krümmer übertragene Kraft. Wir schneiden am Eintritt durch die Bolzen, die die Flanschverbindung halten.  $\vec{F}_B$  ist die zunächst willkürlich angenommene gesuchte Haltekraft, die den Krümmer im Gleichgewicht hält.

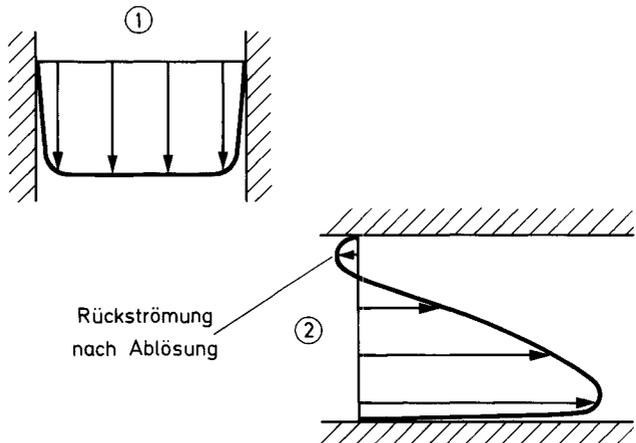


Bild 3.69  
Geschwindigkeit am Ein- und Austritt

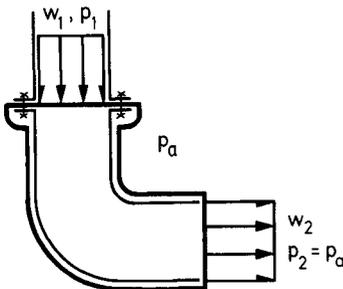
Gegeben sind:  $w_1$  und  $p_1$  sowie  $w_2$  und  $p_2 = p_a$ . Den Kontrollraum zeigt Bild 3.70. Tragen wir alle Kräfte ein, so kommt Bild 3.71.  $\vec{F}_{D3,4}$  ist die durch den Außendruck  $p_a$  auf den Krümmerrmantel ausgeübte Druckkraft. Der Impulssatz lautet

$$\vec{F}_{J1} + \vec{F}_{J2} + \vec{F}_{D1} + \vec{F}_{D2} + \vec{F}_{D3,4} + \vec{F}_B = 0.$$

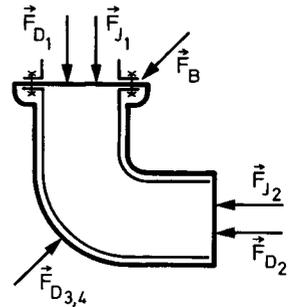
Die Druckkräfte lassen sich hierin einfach zusammenfassen

$$\begin{aligned} \vec{F}_{D1} + \vec{F}_{D2} + \vec{F}_{D3,4} &= - \left\{ \int_{A_1} (p_1 - p_a) \vec{n} dA + \int_{A_1} p_a \vec{n} dA + \int_{A_2} p_a \vec{n} dA + \int_{A_{3,4}} p_a \vec{n} dA \right\} = \\ &= - \int_{A_1} (p_1 - p_a) \vec{n} dA. \end{aligned}$$

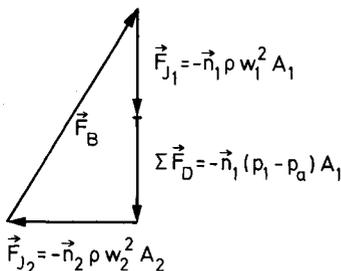
Die letzten drei Integrale ergeben in der Summe Null, da ein konstanter Druck auf eine geschlossene Fläche keine resultierende Kraft ausübt. Sind Geschwindigkeit und Druck überdies im jeweiligen Querschnitt konstant, so gilt Bild 3.72.



← Bild 3.70  
Kontrollraum  
umschließt den  
Krümmer



↑ Bild 3.71  
Kräfte am Kontrollraum



← Bild 3.72  
Krafteck beim Krümmer

**2. Düse und Diffusor frei ausblasend**

Wir suchen die Haltekraft  $\vec{F}_B$ , die in der Flanschverbindung an der Düse angreift. Vorgegeben sind Geschwindigkeit  $w$  und Druck  $p$  jeweils konstant über  $A_1$  und  $A_2$ ,  $\rho = \text{konst}$ , außerdem  $p_2 = p_a$ . Bild 3.73 zeigt eine zweckmäßige Wahl des Kontrollraumes und Bild 3.74 die angreifenden Kräfte. Die Richtung von  $\vec{F}_B$  ist wieder willkürlich angenommen; sie wird durch den Impulssatz bestimmt. In der  $x$ -Richtung wird

$$\rho w_1^2 A_1 + p_1 A_1 - \rho w_2^2 A_2 - p_a A_1 + F_B = 0.$$

Also mit der Kontinuität  $w_1 A_1 = w_2 A_2$

$$F_B = \rho w_2^2 \left( A_2 - \frac{A_2^2}{A_1} \right) + (p_a - p_1) A_1. \tag{3.102}$$

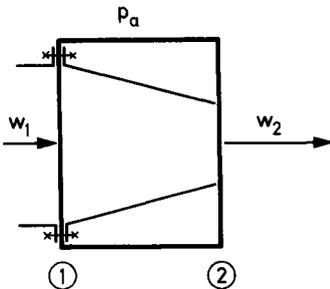
Setzen wir hier zusätzlich **reibungsfreie** Strömung voraus, so führt die Bernoulli-Gleichung zu

$$p_1 - p_a = \frac{\rho}{2} (w_2^2 - w_1^2) = \frac{\rho}{2} w_2^2 \left( 1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right).$$

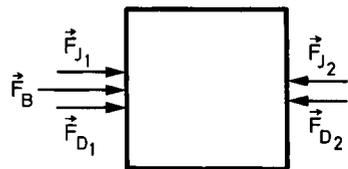
Damit wird aus (3.102)

$$F_B = -\frac{\rho}{2} w_2^2 A_1 \left( 1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} - 2 \frac{A_2}{A_1} + 2 \frac{A_2^2}{A_1^2} \right),$$

$$R = -F_B = \frac{\rho}{2} w_2^2 A_1 \left( 1 - \frac{A_2}{A_1} \right)^2 = \frac{\rho}{2} w_1^2 A_1 \left( \frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2. \tag{3.103}$$



**Bild 3.73**  
Kontrollraum bei der Düsenströmung



**Bild 3.74**  
Kräfte am Kontrollraum

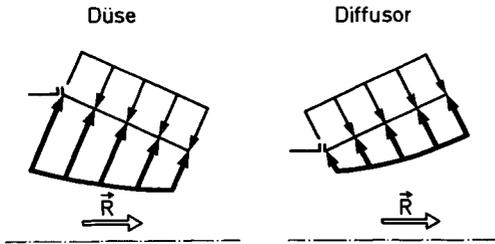


Bild 3.75

Druckverteilung bei Düse und Diffusor

Dies ist die insgesamt auf die Düse übertragene Kraft. Sie wirkt **in** Strömungsrichtung, und zwar gleichgültig ob  $A_2 < A_1$  (Düse) oder  $A_2 > A_1$  (Diffusor) ist. Die Bolzen werden also in jedem Fall auf Zug beansprucht. Dieses Ergebnis kann man sich sofort auch anschaulich aufgrund der Druckverteilung klarmachen (Bild 3.75). Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß dieses Resultat nur unter den gemachten Voraussetzungen richtig ist. Für kompressible Strömungen ergibt sich z.B. bei der Laval-Düse ein ganz anderes Ergebnis. Hier kommt ein **Schub**, der zum Antrieb dient. Der Leser diskutiere diesen Fall!

### 3. Carnotscher Stoßdiffusor

Wir betrachten einen Diffusor mit unstetiger Querschnittserweiterung (Bild 3.76). Fragen der Platzersparnis führen u.a. zu einer solchen Bauweise. Im einzelnen liegt ein komplizierter Strömungsvorgang vor. Es kommt zu einer Ablösung an der scharfen Kante mit anschließendem Vermischungsvorgang. Die Drucksteigerung von 1  $\rightarrow$  2 kann ermittelt werden, ohne daß **alle** Einzelheiten der Strömung bekannt sind. Als Voraussetzungen benutzen wir:

- $w_1$  und  $w_2$  sind konstant über den jeweiligen Querschnitt.
- $p_1$  ist konstant über den ganzen Querschnitt (Fläche  $A_2$ !) infolge Ablösung.
- Die Wandreibung an der Diffusorinnenwand kann vernachlässigt werden.
- Stationäre Strömung.

Die Annahme a) erfordert, daß der Diffusor eine Länge von etwa 8 Durchmessern hat. Mit den später hergeleiteten Ergebnissen kann man abschätzen, daß auf einer solchen Länge der Druckabfall durch Wandreibung sehr gering ist.

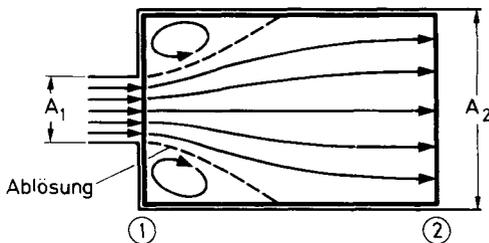


Bild 3.76

Strömung im Carnot-Diffusor

Der Impulssatz lautet unter diesen Annahmen für ein inkompressibles Strömungsmedium

$$\rho w_1^2 A_1 + p_1 A_2 - \rho w_2^2 A_2 - p_2 A_2 = 0.$$

Mit der Kontinuität wird

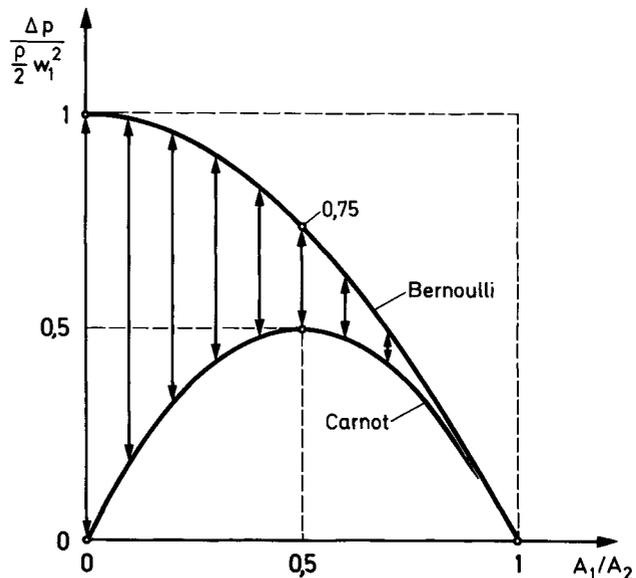
$$\Delta p_{\text{Carnot}} = p_2 - p_1 = \rho w_1^2 \frac{A_1}{A_2} - \rho w_2^2 = \rho w_1 w_2 - \rho w_2^2,$$

$$\frac{\Delta p_c}{\frac{\rho}{2} w_1^2} = 2 \frac{w_2}{w_1} \left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right) = 2 \frac{A_1}{A_2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right). \quad (3.104)$$

Bei stetiger Querschnittsänderung und reibungsfreier Strömung kommt im Idealfall für den sogenannten Bernoulli-Diffusor

$$\frac{\Delta p_{\text{id}}}{\frac{\rho}{2} w_1^2} = \frac{p_2 - p_1}{\frac{\rho}{2} w_1^2} = 1 - \frac{w_2^2}{w_1^2} = 1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}. \quad (3.105)$$

Der Druckrückgewinn ist im idealen Diffusor stets größer als im Carnot-Diffusor (Bild 3.77). Der Unterschied beider Kurven stellt ein Maß für den Verlust dar:



**Bild 3.77**  
Druckrückgewinn  
beim idealen Diffusor  
und bei Carnot

$$\frac{\Delta p_{v,c}}{\frac{\rho}{2} w_1^2} = \frac{\Delta p_{id} - \Delta p_c}{\frac{\rho}{2} w_1^2} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2. \quad (3.106)$$

Er fällt besonders ins Gewicht im Grenzfall  $A_1/A_2 \rightarrow 0$ . Hier kommt es zu einem Ausblasen in den Halbraum ( $A_1$  fest,  $A_2 \rightarrow \infty$ ). Mit Bernoulli ist  $w_2 = 0$  und  $\Delta p \rightarrow \rho/2 w_1^2$ , d.h. der Druck steigt um genau den dynamischen Druck. Beim Carnot-Diffusor kommt dagegen keine Drucksteigerung. Die gesamte kinetische Energie der Zuströmung bewirkt durch Vermischung eine Erwärmung des Mediums.

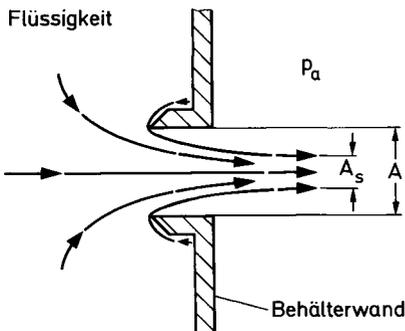
Die Bezeichnung **Stoßdiffusor** rührt von der Analogie zum Carnot-Stoß zwischen zwei unelastischen Massen her. Dem Verlust der kinetischen Energie dort entspricht der Druckverlust hier.

#### 4. Borda-Mündung

Wir betrachten den Ausfluß aus einer **scharfkantigen** Mündung (Bild 3.78). Hier kommt es zu einer Strahlkontraktion von  $A \rightarrow A_s$ , da eine sprunghafte Umlenkung nicht möglich ist. Das strömende Medium schafft sich sozusagen selbst einen abgerundeten Auslauf. Auf die freie Strahlbegrenzung wirkt hierbei der konstante Druck  $p_a$  der Umgebung. Die Größe der Strahlkontraktion ist mit dem Impulssatz zu ermitteln. Wir betrachten hierzu den Ausfluß aus einem Behälter mit einer Borda-Mündung (Bild 3.79). Rechnen wir nur mit dem Überdruck gegenüber der Atmosphäre, so kommt in x-Richtung ein Gleichgewicht zwischen der **Druckkraft** (2.19)

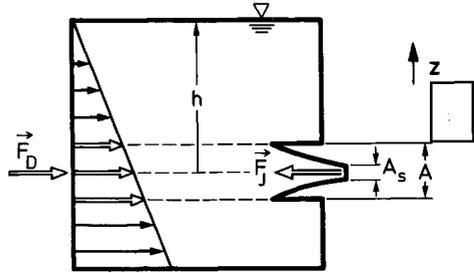
$$F_D = g \rho h A$$

auf die linke Berandung und der **Impulskraft** im Strahl



**Bild 3.78**  
Strömung durch eine Borda-Mündung

**Bild 3.79**  
Kontrollbereich beim Ausfluß mit Borda-Mündung



$$F_J = \rho w^2 A_s.$$

Setzen wir beide Größen gleich, so wird die Strahlkontraktion

$$\frac{A_s}{A} = \frac{g h}{w^2}.$$

Benutzen wir hierin die Torricellische Ausflußformel  $w = \sqrt{2gh}$ , so ist

$$\frac{A_s}{A} = \frac{1}{2}. \tag{3.107}$$

Die Experimente ergeben größere Werte: 0,5 bis 0,6, je nachdem, wie weit die scharfkantige Mündung in den Behälter ragt. 0,6 entspricht dem Grenzfall, daß die Mündung bündig mit der Behälterwand ist.

### 5. Schub eines luftatmenden Triebwerkes

Wir wenden den Impulssatz auf ein Triebwerk eines Flugzeuges an. Die Kontrollflächen seien dabei so weit vom Triebwerk entfernt, daß auf ihnen der Druck  $p = p_\infty$  ist (Bild 3.80). Der Fangquerschnitt  $A_\infty$  wird durch den Antrieb auf den Strahlquerschnitt  $A_s$  verringert unter gleichzeitiger Steigerung der Geschwindigkeit  $u_\infty \rightarrow u_s$ . Eine **Massenstrombilanz** für den Bereich **außerhalb** des Triebwerkes liefert

$$\rho_\infty u_\infty (A - A_\infty) + \dot{m} = \rho_\infty u_\infty (A - A_s),$$

$$\dot{m} = \rho_\infty u_\infty (A_\infty - A_s).$$

Es kommt also zu einem Zustrom von Masse durch die seitlichen Kontrollflächen. Dies führt dort zu einer Impulskraft, deren x-Komponente den Wert hat:

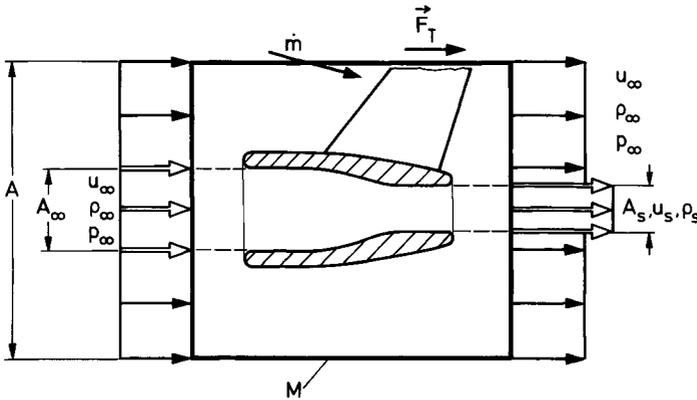


Bild 3.80  
Kontrollflächen beim  
Triebwerk

$$F_{J,x} = - \int_M \rho \bar{w}_x (\bar{w} \cdot \bar{n}) dA = u_\infty \dot{m} = \rho_\infty u_\infty^2 (A_\infty - A_s).$$

Damit lautet der Impulssatz

$$\rho_\infty u_\infty^2 A + \rho_\infty u_\infty^2 (A_\infty - A_s) - \rho_s u_s^2 A_s - \rho_\infty u_\infty^2 (A - A_s) + F_T = 0.$$

Hierin ist  $F_T$  die Haltekraft, die an der Triebwerksbefestigung auftritt, damit Gleichgewicht herrscht. Für sie kommt

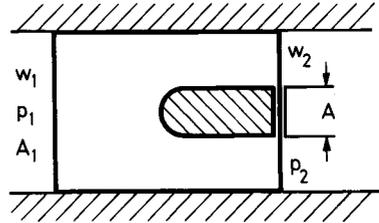
$$F_T = \rho_s u_s^2 A_s - \rho_\infty u_\infty^2 A_\infty = \dot{m}_T (u_s - u_\infty) \quad (3.108)$$

mit  $\dot{m}_T = \rho_s u_s A_s = \rho_\infty u_\infty A_\infty$  als Massenstrom im Triebwerk. Für den Schub gilt  $S = -F_T$ . Er ist direkt proportional erstens dem Massenstrom  $\dot{m}$  und zweitens der Geschwindigkeitssteigerung im Strahl gegenüber der Umgebung  $u_s - u_\infty$ . Dadurch wird klar, welche Möglichkeiten zur Steigerung des Schubs bestehen.

## 6. Widerstand eines Halbkörpers im Kanal

Wir untersuchen die inkompressible, reibungsfreie Umströmung eines Halbkörpers in einem Kanal (Bild 3.81). Hier liegt ein **endlicher** Strömungsquerschnitt vor, und es kommt zu einigen Unterschieden gegenüber früheren Betrachtungen. Insbesondere gilt hier nicht das d'Alembertsche Paradoxon. Es ergibt sich ein **Widerstand**, den wir mit dem Impulssatz ermitteln können. Zur Bestimmung der Kraftwirkung auf einen Körper ist entscheidend, welche Bedingungen auf der **Rückseite** des Körpers herrschen. Bei einem Halbkörper sind diese a priori nicht definiert. Wir bringen daher im Querschnitt (2), in genügender Entfernung von der Körperspitze, einen Schnitt an und setzen daselbst zusätzlich  $p = p_2$  voraus. Jetzt kommt für die Grundgleichungen

**Bild 3.81**  
Umströmung eines Halbkörpers im Kanal



$$\text{Kontinuität: } w_1 A_1 = w_2 A_2 \text{ mit } A_2 = A_1 - A. \tag{3.109}$$

$$\text{Impulssatz: } \rho w_1^2 A_1 + p_1 A_1 - \rho w_2^2 A_2 - p_2 A_1 + F_K = 0. \tag{3.110}$$

Hier ist  $F_K$  die Haltekraft des Körpers und  $W = -F_K$  der Widerstand:

$$W = \rho w_1^2 A_1 - \rho w_2^2 A_2 + (p_1 - p_2) A_1. \tag{3.111}$$

Die Bernoulli-Gleichung liefert für die betrachtete reibungsfreie Strömung mit der Kontinuität

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (w_2^2 - w_1^2) = \frac{\rho}{2} w_1^2 \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right).$$

Dies führt mit (3.111) zu

$$W = \frac{\rho}{2} w_1^2 A_1 \left( 1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = \frac{\rho}{2} w_1^2 A \frac{\frac{A}{A_1}}{\left( 1 - \frac{A}{A_1} \right)^2}. \tag{3.112}$$

Hierin können wir

$$c_w = \frac{\frac{A}{A_1}}{\left( 1 - \frac{A}{A_1} \right)^2} \tag{3.113}$$

als dimensionslosen Widerstandsbeiwert für einen Körper im Kanal auffassen.  $A/A_1$  ist das charakteristische Flächenverhältnis, das ein Maß für die Versperrung liefert. Für  $A_1/A_2 \rightarrow 1$ , d.h. im unendlich ausgedehnten Stromfeld, ist  $W \rightarrow 0$ .

### 3.3.2 Drehimpulssatz mit Anwendung

Analog zum Impulssatz gibt es eine entsprechende Aussage über die Momente. Dies ist für viele Anwendungen wichtig. Denn erst hierdurch ergeben sich die Angriffspunkte der vorstehend ermittelten Kräfte. Besonders interessant sind diese Betrachtungen für Strömungsmaschinen. Es ergibt sich zwanglos die beim Durchströmen eines Laufrades aufgenommene oder abgegebene Leistung.

Der Drehimpuls eines Massenelementes ist

$$d\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{w}) \, dm = \rho(\vec{r} \times \vec{w}) \, dV. \quad (3.114)$$

Für ein Fluid des Volumens  $V(t)$  ist also

$$\vec{L} = \int_{V(t)} \rho(\vec{r} \times \vec{w}) \, dV. \quad (3.115)$$

**Die zeitliche Änderung dieses Drehimpulses ist gleich der Summe aller angreifenden äußeren Momente** ( $= \sum \vec{M}_a$ ).

Letztere resultieren aus den früher besprochenen Massen- und Oberflächenkräften ( $= \sum \vec{F}_a$ ).

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\vec{r} \times \vec{w}) \, dV = \sum \vec{M}_a. \quad (3.116)$$

Wir benutzen auch hier für jede Komponente die Beziehung (3.95) und fassen anschließend alles zusammen:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r} \times \vec{w}) \, dV = \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r} \times \vec{w})}{\partial t} \, dV + \int_A \rho(\vec{r} \times \vec{w})(\vec{w} \cdot \vec{n}) \, dA = \sum \vec{M}_a.$$

Die Diskussion ist ähnlich wie im Fall des Impulssatzes. Für **stationäre** Strömungen fällt das Volumenintegral fort, und wir benötigen die Strömungsdaten wieder nur **auf** der Oberfläche des Kontrollbereiches:

$$\int_A \rho(\vec{r} \times \vec{w})(\vec{w} \cdot \vec{n}) \, dA = \sum \vec{M}_a. \quad (3.117)$$

Diese Voraussetzung ist diesmal etwas problematisch. Bei einer Strömungsmaschine handelt es sich vorwiegend um eine instationäre Strömung. Erst in einem mit dem Laufrad rotierenden System kann man von einer stationären Strömung sprechen. Definieren wir als **Impulsmoment**  $\vec{M}_J$  analog zu (3.98):

$$\vec{M}_J = - \int_A \rho (\vec{r} \times \vec{w})(\vec{w} \cdot \vec{n}) dA, \tag{3.118}$$

so schreibt sich (3.117) ähnlich wie der Impulssatz in der sehr einfachen Form

$$\vec{M}_J + \sum \vec{M}_a = 0. \tag{3.119}$$

Für das **Impulsmoment** (3.118) gilt, daß es lokal **parallel** zu  $\vec{r} \times \vec{w}$  liegt, denn

$$d \vec{M}_J = - \rho (\vec{r} \times \vec{w})(\vec{w} \cdot \vec{n}) dA. \tag{3.120}$$

Die Bedeutung wird an einem Beispiel erläutert.

**1. Durchströmen eines radialen Laufrades**

Ein Turbinenlaufrad (Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ ) werde radial von außen nach innen durchströmt (Bild 3.82). Das Fluid tritt bei  $r_1$  mit der absoluten Geschwindigkeit  $\vec{c}_1 = (c_{1r}, c_{1u})$  in den Laufradkanal ein und verläßt ihn bei  $r_2 < r_1$  mit der Absolutgeschwindigkeit  $\vec{c}_2 = (c_{2r}, c_{2u})$ . Legen wir den Kontrollbereich so, daß er mit einem Schaufelkanal zusammenfällt (Bild 3.83), so ist

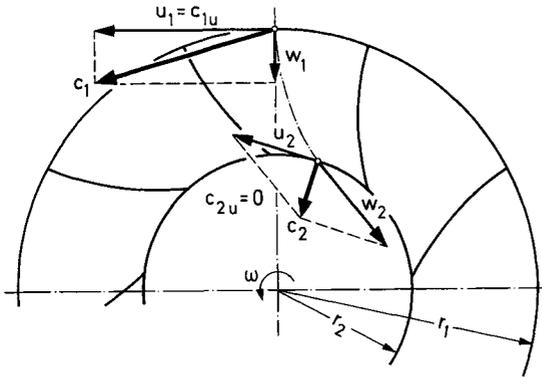
$$0 = \sum \vec{M}_a + \vec{M}_J = \vec{M}_s + \vec{M}_{J1} + \vec{M}_{J2}.$$

Die Druckkräfte am Ein- und Austritt geben kein Moment, da sie radial gerichtet sind.  $\vec{M}_s$  ist das von den Schaufeln (also von außen!) an das Fluid übertragene Moment.  $-\vec{M}_s = \vec{M}_{Tu}$  ist dann das an der Welle abzunehmende nutzbare Turbinenmoment. Mit  $\vec{w} = \vec{c}_1$  bzw.  $\vec{c}_2$  wird

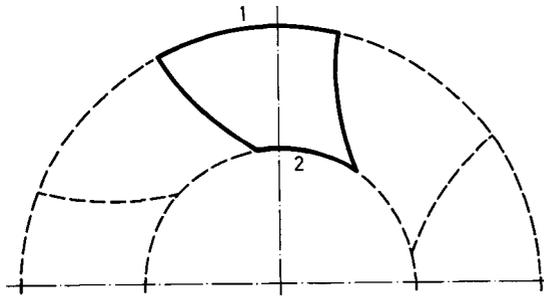
$$M_{J1} = \int_{\varphi} \rho r_1^2 c_{1u} c_{1r} d\varphi b,$$

$$M_{J2} = - \int_{\varphi} \rho r_2^2 c_{2u} c_{2r} d\varphi b,$$

$b$  = Breite des Laufrades. Sind die Geschwindigkeiten auf den entsprechenden Radien konstant, so vereinfachen sich die allgemein gültigen Darstellungen zu



**Bild 3.82**  
Durchströmen eines Turbinenlaufrades



**Bild 3.83**  
Kontrollbereich im Schaufelkanal

$$M_{J1} = \dot{m} r_1 c_{1u} \quad , \quad M_{J2} = - \dot{m} r_2 c_{2u} \quad ,$$

$$M_{Tu} = \dot{m} (r_1 c_{1u} - r_2 c_{2u}) \quad . \quad (3.121)$$

Wir wollen hierin  $\dot{m}$  bereits als gesamten Massenstrom durch das Laufrad auffassen. Für die Radleistung folgt ( $r_1 \omega = u_1$ ,  $r_2 \omega = u_2$ )

$$P = M_{Tu} \omega = \dot{m} (u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u}) \quad . \quad (3.122)$$

Die pro Masseneinheit abgegebene (spezifische) Arbeit ist

$$\frac{P}{\dot{m}} = u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u} \quad . \quad (3.123)$$

Diese Gleichung ist als **Eulersche Turbinengleichung** bekannt. Sie gilt bei Vorzeichenumkehr der rechten Seite unverändert auch für ein Pumpenlaufrad. Es handelt sich dann bei (3.123) um die spezifische vom Fluid aufgenommene Arbeit. Beide Fälle unterscheiden sich nur in der

Richtung der Energieübertragung zwischen dem die Maschine durchströmenden Fluid und den rotierenden Bauteilen. Man spricht häufig auch von **Kraftmaschinen** (Turbinen) und **Arbeitsmaschinen** (Pumpen).

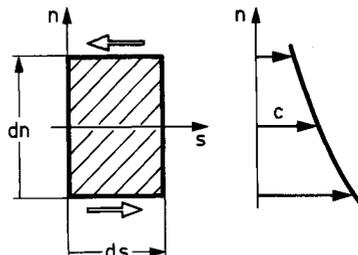
Abschließend sei ein Spezialfall von (3.121) hervorgehoben. Liegt ein Laufrad vor, auf das kein Moment bei der Durchströmung übertragen wird, d.h. ist  $M_{Tu} = 0$ , so gilt offenbar entweder  $\dot{m} = 0$  oder  $r c_u = \text{konst.}$  Der erste Fall ist trivial, im zweiten Fall ist die Umfangskomponente die eines Potentialwirbels. Die Strömung erfolgt auf Spiralbahnen (Kapitel 3.1.3).

### 3.3.3 Grundsätzliches zum Reibungseinfluß - Kennzahlen

Mit dem Impulssatz können, wie wir gesehen haben, Reibungsverluste berücksichtigt werden. Sie gehen auf dem Umweg über die Vorgaben auf der Berandung des Kontrollraumes ein. Diese können Messungen oder Rechnungen entnommen werden. Wir wollen in einem besonders einfachen Fall den Reibungseinfluß quantitativ ermitteln. Im wesentlichen handelt es sich hierbei um eine Erweiterung der früher besprochenen Stromfadentheorie.  $s$  und  $n$  bezeichnen die Koordinaten in Strömungsrichtung und senkrecht dazu (Bild 3.84). Es soll hier nur der Einfluß der tangential zur Strömungsrichtung wirkenden Schubspannung  $\tau$  untersucht werden. Bei der vollständigen Betrachtung tritt ein Reibungstensor auf. Wir kommen unten darauf zurück. Die einzelnen Schichten sind durch die innere Reibung miteinander verheftet. Dies ist die Ursache für die Schubspannung  $\tau$ . Wir schneiden ein Massenelement heraus und wählen ein **beliebiges** Geschwindigkeitsprofil in  $n$ -Richtung (Bild 3.84 rechts). Die Pfeile geben die Richtungen der Reibungskräfte an, die von **außen** auf das betrachtete Element übertragen werden (Bild 3.84 links). Sie hängen von dem gewählten Profil ab. Es entsteht hier eine kleine Schwierigkeit bei der richtigen Wahl des Vorzeichens, weshalb dieses Beispiel ausführlich diskutiert wird. Für den in Bild 3.84 skizzierten Fall kommt

$$\frac{\text{Reibungskraft}}{\text{Masse}} = \frac{dR}{dm} = \frac{\{-(|\tau| + d|\tau|) + |\tau|\} ds db}{\rho ds dn db} = -\frac{1}{\rho} \frac{d|\tau|}{dn}, \quad (3.124)$$

worin der Betrag der Schubspannung  $|\tau|$  mit dem Newtonschen Ansatz gegeben ist durch



**Bild 3.84**  
Zum Reibungseinfluß im Stromfaden

$$|\tau| = \begin{cases} \eta \frac{\partial c}{\partial n}, & \frac{\partial c}{\partial n} > 0, \\ -\eta \frac{\partial c}{\partial n}, & \frac{\partial c}{\partial n} < 0. \end{cases} \quad (3.125)$$

Tragen wir für den in Bild 3.84 dargestellten Fall (3.125) in (3.124) ein, so wird

$$\frac{dR}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} \left( \eta \frac{\partial c}{\partial n} \right). \quad (3.126)$$

Wählt man ein anderes Geschwindigkeitsprofil in Bild 3.84, z.B. mit  $\partial c / \partial n > 0$ , so kommt wiederum (3.126). Im Spezialfall  $\eta = \text{konst}$  vereinfacht sich (3.126) zu

$$\frac{dR}{dm} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 c}{\partial n^2} = \nu \frac{\partial^2 c}{\partial n^2}. \quad (3.127)$$

Die Reibungskraft hängt also von der zweiten Ableitung der Geschwindigkeit ab. Die Ursache hierfür liegt offenbar darin, daß es auf die **Änderung** der Schubspannung senkrecht zum Stromfaden ankommt. Bei der Couette-Strömung erfährt ein Teilchen demnach keine resultierende Reibungskraft!

Wir stellen jetzt einige auf ein Massenelement wirkende Kräfte zusammen. Es handelt sich dabei um typische Vertreter der entsprechenden Einflüsse. In der untersten Zeile sind die einzelnen Terme durch charakteristische Bezugsgrößen für Zeit ( $t$ ), Länge ( $\ell$ ), Geschwindigkeit ( $c$ ), Dichte ( $\rho$ ) und Druck ( $p$ ) des Stromfadens dargestellt. Wir benutzen in beiden Achsenrichtungen  $s$  und  $n$  denselben Längenmaßstab  $\ell$ .

physikalischer Effekt	Trägheit		Druck	Schwere	Reibung
	a	b			
$\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$	$\frac{\partial c}{\partial t}$	$c \frac{\partial c}{\partial s}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}$	$g \frac{\partial z}{\partial s}$	$\nu \frac{\partial^2 c}{\partial n^2}$
charakteristische Größen	$\frac{c}{t}$	$\frac{c^2}{\ell}$	$\frac{p}{\rho \ell}$	$g$	$\frac{\nu c}{\ell^2}$

Aus diesen fünf typischen Kräften lassen sich vier unabhängige dimensionslose Kraftverhält-

nisse (= Kennzahlen) bilden. Diese **Kennzahlen** charakterisieren ein Stromfeld und beschreiben die eingehenden physikalischen Effekte. Wir erhalten der Reihe nach:

$$1. \quad \frac{\text{Druckkraft}}{\text{Trägheitskraft (b)}} \sim \frac{\frac{p}{\rho c^2}}{\frac{\rho \ell}{\rho c^2}} = \frac{p}{\rho c^2} = \text{Euler- oder Newton-Zahl} = \quad (3.128)$$

$$= \text{Eu} = \text{Ne}.$$

Für ein kompressibles Medium wird

$$\text{Eu} = \frac{p}{\rho c^2} = \frac{\kappa p}{\rho} \frac{1}{c^2} \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa M^2},$$

wodurch sich ein Zusammenhang mit der Mach-Zahl ergibt. Euler-Zahlen sind uns bereits wiederholt begegnet. Wir erinnern z.B. an den Druckkoeffizienten (3.77).

$$2. \quad \frac{\text{Trägheitskraft (b)}}{\text{Schwerkraft}} \sim \frac{c^2}{\ell g} = \text{Froude-Zahl} = \text{Fr}. \quad (3.129)$$

Die Froude-Zahl ist überall dort von Wichtigkeit, wo die Schwerkraft die Strömung wesentlich beeinflusst, z.B. in Gewässern mit freier Oberfläche.

$$3. \quad \frac{\text{Trägheitskraft (a)}}{\text{Trägheitskraft (b)}} \sim \frac{\ell}{t c} = \text{Strouhal-Zahl} = \text{Str}. \quad (3.130)$$

Diese Kennzahl charakterisiert **instationäre** Strömungsvorgänge, wie sie z.B. in allen periodisch arbeitenden Kraft- und Arbeitsmaschinen auftreten. Die Strouhal-Zahl geht ein, wenn man das instationäre Glied der Bernoulli-Gleichung (3.13) ins Verhältnis zu den stationären Termen setzt. Dies ist oft erforderlich um festzustellen, ob eine Strömung als stationär angesehen werden kann. Hierzu muß  $\text{Str} \ll 1$  sein.

$$4. \quad \frac{\text{Trägheitskraft (b)}}{\text{Reibungskraft}} \sim \frac{\frac{c^2}{\rho \ell}}{\frac{\mu v}{\rho \ell^2}} = \frac{c \ell}{\nu} = \text{Reynolds-Zahl} = \text{Re}. \quad (3.131)$$

Diese wichtige Kennzahl erfaßt den Reibungseinfluß. Ist

$$\text{Re} = \frac{c \ell}{\nu} \gg 1, \quad (3.131a)$$

d.h. ist die Trägheitskraft (b) sehr viel größer als die Reibungskraft, so ist die Reibung **innerhalb** des Stromfeldes von geringem Einfluß. Die Viskosität spielt nur in Wandnähe aufgrund der Haftbedingung in der Grenzschicht eine Rolle (Bild 3.85). Dies ist der Ausgangspunkt der Prandtl'schen Grenzschichttheorie. Ist

$$\text{Re} = \frac{c \ell}{\nu} \lesssim 1, \quad (3.131b)$$

so ist die Reibung im ganzen Stromfeld von Bedeutung. Durch  $\text{Re} \lesssim 1$  werden sogenannte schleichende Strömungen (= Stokessche Strömungen) erfaßt. Hier können die nichtlinearen Trägheitsglieder in den Bewegungsgleichungen oft ganz vernachlässigt werden. Die Druckkräfte stehen mit den Reibungskräften im Gleichgewicht. Beispiele sind die Bewegungen in sehr zähen Ölen. Allerdings ist (3.131b) auch wichtig für Strömungen bei extrem geringer Dichte, denn die Reynolds-Zahl

$$\text{Re} = \frac{\rho c \ell}{\eta}$$

wird mit  $\rho$  klein. Diese Überlegungen spielen z.B. bei Satellitenbewegungen am Rande der Atmosphäre, aber auch im Labor z.B. bei Vakuumpumpen eine Rolle.

Schwierigkeiten können sich manchmal bei der Wahl der geeigneten Bezugsgrößen für die Kennzahlen ergeben. Hier bedarf es einer gewissen Erfahrung, um diejenigen Bestimmungsstücke herauszufinden, die für die Physik der jeweiligen Strömung entscheidend sind. Manchmal gibt es mehrere Möglichkeiten. Zum Beispiel kann in der Re-Zahl der Grenzschichtströmung (Bild 3.85) als Längenmaßstab die Grenzschichtdicke  $\delta$  verwendet werden. In gleicher Weise kann

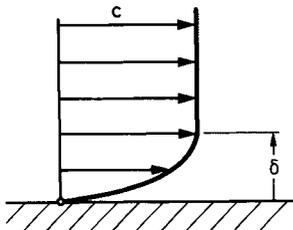


Bild 3.85  
Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht

man auch die Lauflänge  $\ell$ , von der Körperspitze bis zur betrachteten Stelle, benutzen. Sinnvoll sind beide Bildungen, obwohl sie zu verschiedenen Größenordnungen der Re-Zahl führen.

Die wichtigste Anwendung der Kennzahlen liegt darin, daß es mit ihrer Hilfe möglich ist, **geometrisch ähnliche Stromfelder** ineinander umzurechnen. Dies ist die Grundlage aller **Modellversuche**, wo, aufgrund von Messungen am geometrisch ähnlich verkleinerten Modell z.B. im Wind- oder Wasserkanal, Aussagen über die Großausführung gemacht werden sollen. Wir kommen später darauf zurück.

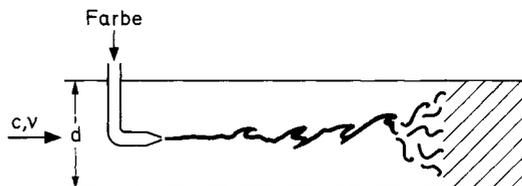
### 3.3.4 Laminare und turbulente Strömung

Wir beobachten im Experiment zwei grundsätzlich verschiedene Strömungszustände. Sie wurden qualitativ von **Hagen** beschrieben, von **Reynolds** erstmalig quantitativ erfaßt. Der experimentelle Tatbestand wird anhand des Reynoldsschen Farbfadenversuches erläutert (Bild 3.86). Ein viskoses Medium (kinematische Viskosität  $\nu$ ) strömt durch ein Rohr kreisförmigen Querschnitts (Durchmesser  $d$ ) mit der Geschwindigkeit  $c$ . Durch eine Drossel kann der Volumenstrom geändert werden. Ein Farbfaden wird als Strömungsanzeiger verwendet.

1. Ist die Reynolds-Zahl klein, d.h.  $Re = c d / \nu < 2300$ , so liegt eine **laminare** Strömung vor. Die makroskopisch beobachtbare Strömung erfolgt in parallelen Schichten (lamina = Schicht, Scheibe). Mikroskopisch, d.h. molekular, erfolgt ein regelloser Impulsaustausch der einzelnen Schichten untereinander, der, wie wir früher feststellten, die Ursache der inneren Reibung ist.
2. Ist die Reynolds-Zahl groß, d.h.  $Re = c d / \nu > 2300$ , so spricht man von **turbulenter** Strömung. Hier tritt im Gegensatz zu oben ein makroskopischer, sichtbarer Austausch auf. Es handelt sich um eine instationäre, wirbelartige Zufallsbewegung.

Reynolds hat den Übergang der laminaren in die turbulente Strömung (sogenannter laminar-turbulenter Umschlag) untersucht und gefunden, daß dieser allein von der Kennzahl  $c d / \nu$  abhängt. Aufgrund von Beobachtungen hat er vermutet, daß es sich hierbei um ein **Stabilitätsproblem** handelt. Die laminare Strömung wird bei höheren Reynolds-Zahlen instabil gegenüber Störungen, d.h. kleine Störungen, die in Natur und Technik immer vorhanden sind, rufen in einem solchen Fall große Wirkungen hervor, die die laminare Strömung schließlich in die turbulente Strömung überführen.

**Bild 3.86**  
Reynoldsscher Farbfadenversuch



Diese anschauliche Erfassung des turbulenten Zustandes führt zur **Reynoldsschen Beschreibung turbulenter Strömungen**. Hierbei wird die instationäre Feldgröße (z.B. die Geschwindigkeit  $u(x,y,z,t)$ ) additiv in einen zeitlichen Mittelwert  $\bar{u}(x,y,z)$  und eine Schwankungsgröße  $u'(x,y,z,t)$  zerlegt.

$$u(x,y,z,t) = \bar{u}(x,y,z) + u'(x,y,z,t), \quad (3.132)$$

$$v = \bar{v} + v' \quad , \quad w = \bar{w} + w' .$$

Der zeitliche Mittelwert am festen Ort ist definiert durch

$$\bar{u}(x,y,z) = \frac{1}{T} \int_0^T u(x,y,z,t) dt . \quad (3.133)$$

$T$  ist hierin so groß gewählt, daß eine weitere Zunahme keine spürbare Änderung von  $\bar{u}$  ergibt. (3.133) hat zur Folge, daß die zeitlichen Mittelwerte der Schwankungsgrößen verschwinden:

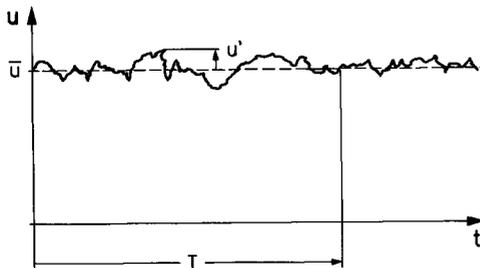
$$\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = 0 . \quad (3.134)$$

Diese Schwankungsgeschwindigkeiten  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ , die die charakteristischen Eigenschaften turbulenter Strömungen enthalten, lassen sich mit einer **Hitzdrahtsonde** bestimmen. Hierbei wird die Abkühlung eines erwärmten Platindrahtes als Maß für die Schwankungen benutzt. In einem festen Raumpunkt  $(x,y,z)$  erhält man eine Darstellung wie in Bild 3.87.

Zur Charakterisierung des **Turbulenzgrades** ( $=Tu$ ) in einem Stromfeld dient die dimensionslose Bildung

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{(u')^2}}}{\bar{u}} . \quad (3.135)$$

Im Zähler steht als charakteristisches Maß für die Schwankungsgröße die Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat. Sie wird ins Verhältnis gesetzt zur mittleren Strömungsgeschwindigkeit



**Bild 3.87**  
Hitzdrahtsignal als Funktion der Zeit

an der betrachteten Stelle.

### 3.3.5 Geschwindigkeitsverteilung und Druckabfall in Kreisrohren bei laminarer und turbulenter Strömung

#### 1. Laminare Rohrströmung (Hagen-Poiseuille-Strömung)

Wir betrachten eine horizontale Rohrstrecke. Die Strömung sei **ausgebildet**, d.h. das Geschwindigkeitsprofil ändert sich in x-Richtung nicht. Dies setzt voraus, daß wir uns in genügender Entfernung vom Einlauf befinden. Auf eine Abschätzung dieser Strecke kommen wir später zurück. Bei einer Schichtenströmung im Rohr ist der Druck, wie in der Grenzschicht, über den Querschnitt konstant. Man beachte hierzu (3.16) im Fall  $r \rightarrow \infty$ . Eine Druckdifferenz in Strömungsrichtung hält die Bewegung aufrecht. Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils wenden wir den Impulssatz auf einen coaxialen Zylinder an (Bild 3.88). Es herrscht Gleichgewicht zwischen den Druckkräften und der Reibungskraft. Eine resultierende Impulskraft geht hier nicht ein, da die Strömung ausgebildet ist. Wir erhalten für den in Bild 3.88 skizzierten Fall

$$\pi r^2 p_1 - \pi r^2 p_2 - |\tau| 2 \pi r \ell = 0.$$

Hierin gilt analog zu (3.125)

$$|\tau| = \begin{cases} -\eta \frac{dc}{dr}, & \frac{dc}{dr} < 0, \\ \eta \frac{dc}{dr}, & \frac{dc}{dr} > 0, \end{cases}$$

$$|\tau| = (p_1 - p_2) \frac{r}{2\ell} = \frac{\Delta p}{2\ell} r = -\eta \frac{dc}{dr}. \quad (3.136)$$

Die Schubspannung ist damit eine **lineare** Funktion von  $r$ . Geht man in Bild 3.88 von einem

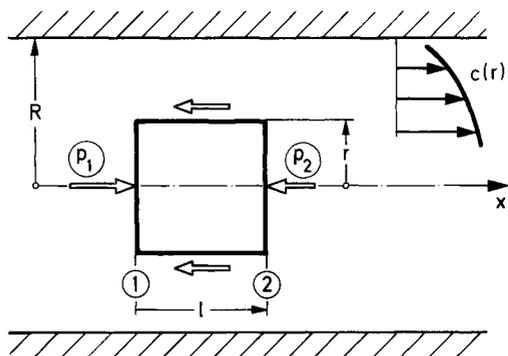


Bild 3.88

Anwendung des Impulssatzes auf die laminare Strömung im Kreisrohr

anderen Geschwindigkeitsverlauf aus, so kommt derselbe Zusammenhang wie oben, nämlich

$$\frac{dc}{dr} = -\frac{\Delta p}{\ell} \frac{1}{2\eta} r.$$

Integration liefert mit der Haftbedingung ( $r = R, c = 0$ )

$$c(r) = \frac{\Delta p}{\ell} \frac{R^2}{4\eta} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = c_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (3.137)$$

Es kommt eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung mit der Maximalgeschwindigkeit

$$c_{\max} = \frac{\Delta p}{\ell} \frac{R^2}{4\eta} \quad (3.138)$$

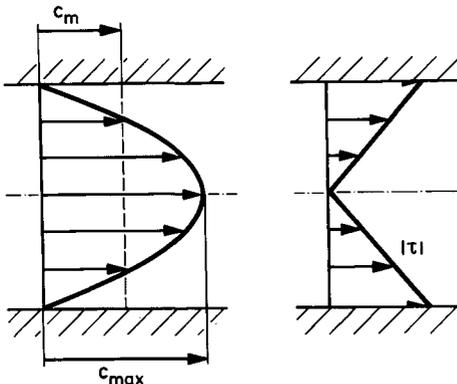
auf der Rotationsachse (Bild 3.89). Durch Integration wird der Volumenstrom

$$\dot{V} = c_m A = \int c \, dA = \int_{r=0}^R c_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r \, dr = \pi R^2 \frac{c_{\max}}{2} = A \frac{c_{\max}}{2}. \quad (3.139)$$

Für das volumetrische Mittel der Geschwindigkeit  $c_m$  wird also

$$c_m = \frac{1}{2} c_{\max}. \quad (3.140)$$

Damit kommt für den Volumenstrom die Darstellung



**Bild 3.89**

Geschwindigkeit und Schubspannung für die laminare Strömung im Kreisrohr

$$\dot{V} = c_m A = \frac{1}{2} c_{\max} A = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 \ell \eta}.$$

Also ergeben sich die Proportionalitäten

$$\dot{V} \sim \Delta p, \quad \dot{V} \sim R^4. \quad (3.141)$$

Diese Aussagen werden als Hagen-Poiseuille-Gesetz bezeichnet. Sie zeigen die charakteristischen Abhängigkeiten des Volumenstromes.  $\dot{V} \sim R^4$  ist insbesondere für Anwendungen im Bereich der Medizin von Wichtigkeit. Verkleinerung von  $R$  kann zu einer drastischen Reduktion von  $\dot{V}$  führen!

Bisher haben wir die Frage untersucht, welche Geschwindigkeit sich als Folge der Druckdifferenz  $\Delta p$  einstellt. Für die Anwendungen ist die Umkehrung der Fragestellung von Interesse: Wie groß ist die **Druckabnahme** (= Druckverlust)  $\Delta p$  in einer Rohrleitung bei vorgegebenem Volumenstrom? In dieser Druckabnahme in Strömungsrichtung äußert sich der Reibungseinfluß. Das Geschwindigkeitsprofil bleibt dabei ungeändert. Fassen wir (3.138) und (3.140) zusammen, so wird

$$\Delta p = \frac{4 \eta \ell c_{\max}}{R^2} = \frac{8 \rho v \ell c_m}{R^2}.$$

Wir spalten diesen Ausdruck auf, indem wir charakteristische Größen zusammenfassen:

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} c_m^2 \frac{\ell}{D} \lambda_{\text{lam}}, \quad \lambda_{\text{lam}} = \frac{64}{\text{Re}_D}, \quad \text{Re}_D = \frac{c_m D}{\nu}. \quad (3.142)$$

Der erste Anteil auf der rechten Seite liefert die Dimension des Druckes, der zweite Anteil charakterisiert die Geometrie, der dritte enthält die Physik des Rohrreibungsvorganges.  $\lambda$  wird als Verlustkoeffizient bezeichnet. Dieser Aufbau der Druckverlustformel ist typisch. Er wird uns noch wiederholt begegnen. (3.142) enthält die weiteren interessanten Aussagen:

$$\Delta p \sim \ell, \quad \Delta p \sim c_m. \quad (3.143)$$

Der Druckabfall ist eine lineare Funktion der Rohrlänge. Das ist plausibel, da bei **ausgebildeter** Strömung kein Rohrabschnitt ausgezeichnet ist. Daher kommt nur eine **lineare** Funktion in Frage.  $\Delta p \sim c_m$  ist typisch für **laminare** Strömungen.

In den Anwendungen sind z.B. vorgegeben:  $\dot{V}$ ,  $A$ ,  $\ell$ ,  $\rho$ ,  $\nu$ . Aus  $\dot{V} = c_m A$  folgt  $c_m = \dot{V}/A$  und damit  $\text{Re}_D = (c_m/\nu) \sqrt{4 A/\pi}$ . Hiermit prüfen wir nach, ob  $\text{Re}_D \gtrsim 2300$  ist. Liegt der laminare Fall vor, kann der Druckabfall mit (3.142) berechnet werden. In der Praxis handelt es sich jedoch weitgehend um turbulente Strömungen, weshalb wir uns jetzt ausführlich mit diesem Fall beschäftigen.

## 2. Turbulente Rohrströmung

Die turbulente Strömung ist ungleich schwieriger als die laminare zu behandeln. In technischen Anwendungen interessieren häufig gar nicht alle Einzelheiten des Strömungsfeldes. Oft reicht es, wenn man die **zeitlichen Mittelwerte** kennt. Wir setzen voraus, daß für diese im Rohr eine ausgebildete Strömung vorliegt. Den Kontrollraum erstrecken wir über den ganzen Rohrquerschnitt (Bild 3.90). Es besteht ein Gleichgewicht zwischen Druck- und Wandschubspannungskräften

$$\pi R^2 \bar{p}_1 - \pi R^2 \bar{p}_2 - |\bar{\tau}_w| 2 \pi R \ell = 0,$$

$$\Delta \bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = |\bar{\tau}_w| \frac{2 \ell}{R}. \quad (3.144)$$

Für die Wandschubspannung machen wir den Dimensionsansatz

$$|\bar{\tau}_w| = \frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2 \sigma. \quad (3.145)$$

Hierin bedeutet  $\bar{c}_m$  den zeitlichen und räumlichen Mittelwert der Geschwindigkeit. Man erhält ihn aus der Funktion  $c(r,t)$ , indem man nacheinander die Mittelbildungen (3.133) und (3.139) ausführt. Tägt man (3.145) in (3.144) ein, so wird mit der Abkürzung  $4 \sigma = \lambda_{\text{turb}}$

$$\Delta \bar{p} = \frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2 \frac{\ell}{D} \lambda_{\text{turb}}. \quad (3.146)$$

Der Aufbau der Druckverlustformel ist genauso wie im laminaren Fall (3.142). Allerdings muß diesmal  $\lambda_{\text{turb}}$  aus Experimenten ermittelt werden. Eine theoretische Berechnung ist bisher nicht möglich. Man erhält

### 1. durch Interpolation von Meßergebnissen (Blasius-Formel)

$$\lambda_{\text{turb}} = \frac{0,3164}{\text{Re}_D^{1/4}}, \quad \text{gültig bis } \text{Re}_D \sim 10^5, \quad (3.147a)$$

### 2. implizite Darstellung von Prandtl

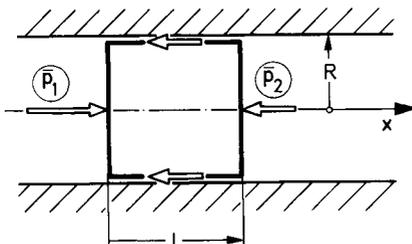


Bild 3.90

Kontrollbereich für die turbulente Strömung im Kreisrohr

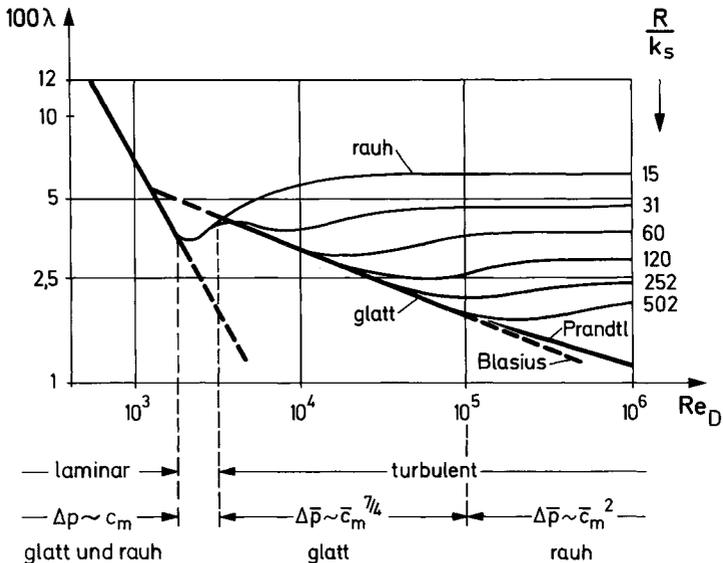
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{turb}}}} = 2 \log^{10} \left( \text{Re}_D \sqrt{\lambda_{\text{turb}}} \right) - 0,8, \text{ gültig bis } \text{Re}_D \sim 3 \cdot 10^6. \quad (3.147b)$$

In Bild 3.91 sind die laminare Gesetzmäßigkeit sowie die obigen Beziehungen eingetragen. Darüber hinaus findet man auch die Ergebnisse für **rauhe Rohre**, die im nächsten Abschnitt ausführlich diskutiert werden. Man spricht in diesem Zusammenhang vom **Nikuradse-Diagramm**.  $R/k_s$  heißt Sandkornrauigkeitsparameter.  $k_s$  ist ein typisches Maß für die Sandkornrauigkeit (Bild 3.92). Zunehmende Rauigkeit, d.h. abnehmendes  $R/k_s$ , bedeutet Anwachsen des Druckverlustes. Wir kommen hierauf ausführlich zurück.

Aus dem **Blasius-Gesetz** folgt eine interessante Konsequenz für die (zeitlich gemittelte) **Geschwindigkeit**. Wir tragen (3.147a) in (3.145) ein und sehen von Zahlenfaktoren ab:

$$|\bar{v}_w| = \frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2 \frac{\lambda_{\text{turb}}}{4} \sim \rho \bar{c}_m^{7/4} v^{1/4} R^{-1/4} \sim \rho \bar{c}_{\text{max}}^{7/4} v^{1/4} R^{-1/4}. \quad (3.148)$$

Wir benutzen für das Geschwindigkeitsprofil einen Potenzansatz mit freiem Exponenten  $m$ :



**Bild 3.91**  
Verlustkoeffizient  $\lambda$  als Funktion der Reynolds-Zahl und Rauigkeit beim Kreisrohr (Nikuradse-Diagramm)

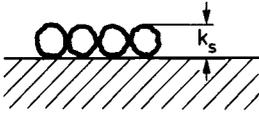


Bild 3.92

Definition der Sandkornrauigkeit  $k_s$ 

$$\bar{c}(y) = \bar{c}_{\max} \left( \frac{y}{R} \right)^m \quad (3.149)$$

$y$  ist hierin der wandnormale Abstand  $y = R - r$ . Wir lösen (3.149) nach  $\bar{c}_{\max}$  auf und tragen dies in (3.148) ein:

$$|\bar{\tau}_w| \sim \rho \bar{c}^{7/4} y^{-7m/4} \nu^{1/4} R^{7m/4-1/4} \quad (3.150)$$

Prandtl und v. Kármán haben die Hypothese ausgesprochen, daß diese turbulente Wandschubspannung vom Rohrradius unabhängig sein sollte. Das heißt, die turbulente Strömung ist mehr oder weniger durch die lokalen Daten des Stromfeldes bestimmt. Im obigen Fall wird damit

$$m = \frac{1}{7}, \quad \bar{c} = \bar{c}_{\max} \left( \frac{y}{R} \right)^{1/7} = \bar{c}_{\max} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{1/7} \quad (3.151)$$

Dies ist das wichtige 1/7-Potenzgesetz, dessen Gültigkeit mit der des Blasius-Gesetzes übereinstimmt.

In Bild 3.93 sind das laminare (3.137) und das turbulente Geschwindigkeitsprofil (3.151) für

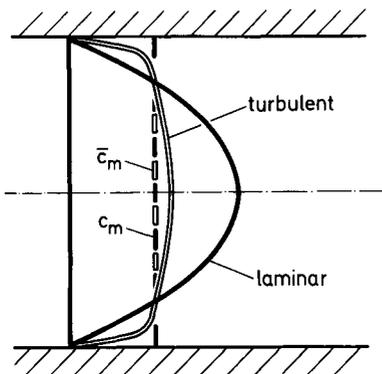


Bild 3.93

Laminare und turbulente Geschwindigkeitsprofil im Kreisrohr

denselben Volumenstrom gezeichnet. Das turbulente Profil ist rechteckförmiger als das laminare. Wir besprechen einige Aussagen im Detail.

1. Für  $m = 1/7$  ist  $\bar{c}_m = 0,816 \bar{c}_{\max}$ . Das Geschwindigkeitsprofil (3.151) hat zwei kleine Schönheitsfehler. An der Rohrwand ergibt sich ein unendlicher Anstieg. Das ist unbedenklich, da in unmittelbarer Wandnähe die Strömung laminar ist (Reibungsunterschicht) und daher das obige Gesetz dort nicht benötigt wird. An der Rohrachse tritt ein Knick im Geschwindigkeitsprofil auf.
2. Mit wachsender Reynolds-Zahl wird der Exponent in (3.151) kleiner, d.h. das Profil wird immer rechteckförmiger. Die Ursache hierfür liegt darin, daß der makroskopische Queraustausch das Bestreben hat, das Geschwindigkeitsprofil auszugleichen und möglichst gleichförmig über den Querschnitt zu gestalten.

### 3.3.6 Laminare und turbulente Strömung durch raue Rohre (Nikuradse-Diagramm)

Wir diskutieren Bild 3.91 im einzelnen. Das Wesentliche läßt sich in zwei Punkten zusammenfassen.

1. Für **laminare** Strömung ist  $\lambda = f(\text{Re})$ , d.h. der Druckverlustbeiwert hängt nicht von der Rauigkeit ab.
2. Für **turbulente** Strömungen gilt die Alternative

$$\text{a. } \lambda = g \left( \text{Re}, \frac{R}{k_s} \right) \quad \text{für } 2 \cdot 10^3 < \text{Re} < 3 \cdot 10^5,$$

$$\text{b. } \lambda = h \left( \frac{R}{k_s} \right) \quad \text{für } 3 \cdot 10^5 < \text{Re}.$$

Im Bereich mittlerer Reynolds-Zahlen ( $2 \cdot 10^3 < \text{Re} < 3 \cdot 10^5$ ) treten also beide Argumente auf, während für höhere Reynolds-Zahlen nur die Rauigkeit eingeht. Diese charakteristischen Abhängigkeiten lassen sich folgendermaßen anschaulich begründen.

1. Bei **laminarer** Strömung tritt kein nennenswerter Einfluß der Rauigkeit auf, da der makroskopische Queraustausch fehlt. Die **Schichten**strömung schafft sich sozusagen selbst eine glatte Wand und deckt die Rauigkeiten zu.

2a.b. Bei **turbulenter** Strömung kommt es entscheidend darauf an, ob die Rauigkeiten noch von der wandnahen laminaren Unterschicht zugedeckt werden - dann nennt man das Rohr **hydraulisch glatt** - oder ob sie aus dieser Schicht herausragen und damit die vollturbulente Strömung wesentlich beeinflussen.

Diese wichtige Vorstellung wollen wir quantitativ bestätigen. Wir schätzen dazu die Dicke der laminaren Unterschicht  $\Delta$  ab. In ihr soll die Geschwindigkeit linear von Null bis etwa  $1/2 \bar{c}_m$  ansteigen (Bild 3.94). Die Wandschubspannung läßt sich auf zweierlei Art darstellen:

$$|\bar{\tau}_w| = \frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2 \frac{\lambda_{\text{turb}}}{4} = \eta \left( \frac{d\bar{c}}{dy} \right)_w = \rho \nu \frac{1}{2} \frac{\bar{c}_m}{\Delta},$$

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{4}{\lambda_{\text{turb}}} \frac{1}{\text{Re}_D}. \quad (3.152)$$

Benutzen wir hierin die Blasius-Formel (3.147), so wird

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{12,64}{\text{Re}_D^{3/4}} \quad (3.153)$$

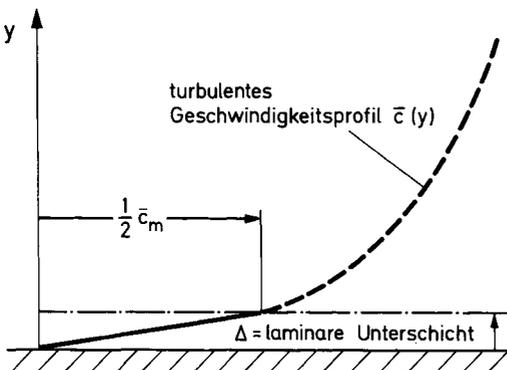
$\Delta/D$  nimmt also mit wachsender Reynolds-Zahl ab. Dies bestätigt die frühere Aussage, daß das Geschwindigkeitsprofil mit zunehmender Reynolds-Zahl immer rechteckförmiger wird.

Ein Zahlenbeispiel zur Größenordnung von  $\Delta$ :

$$\text{Re}_D = 10^4, \quad \lambda_{\text{turb}} = 0,03, \quad \frac{\Delta}{D} \approx 10^{-2}, \quad D = 10 \text{ cm}, \quad \Delta \approx 1 \text{ mm}.$$

Der wesentliche Geschwindigkeitsanstieg erfolgt in Wandnähe, also auf einer Strecke von etwa 1% des Durchmessers!

Mit der Abschätzung (3.152) können wir die obigen Feststellungen 2a. b. leicht begründen. Wir diskutieren zwei typische Zahlenbeispiele.



**Bild 3.94**

Definition der Dicke der laminaren Unterschicht  $\Delta$

$$1. \quad \text{Re}_D = 10^5, \quad \lambda_{\text{turb}} = 0,04, \quad \frac{R}{k_s} \approx 30.$$

Hier zeigen wir, daß die Rauigkeiten aus der Unterschicht herausragen. Mit (3.152) wird nämlich

$$\frac{R}{\Delta} = \frac{\lambda_{\text{turb}} \text{Re}_D}{8} = \frac{0,04 \cdot 10^5}{8} = 500 \gg \frac{R}{k_s} = 30, \text{ d.h. } k_s \gg \Delta.$$

$$2. \quad \text{Re}_D = 10^4, \quad \lambda_{\text{turb}} = 0,03, \quad \frac{R}{k_s} \approx 60.$$

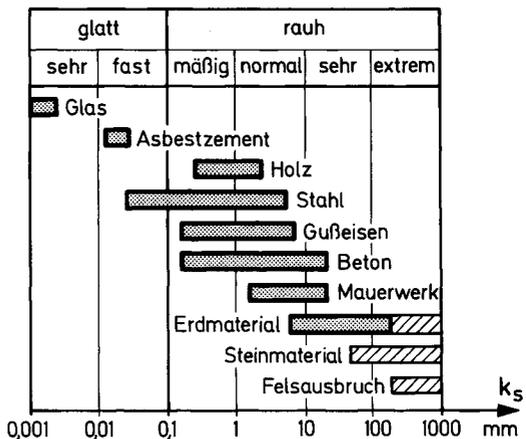
Jetzt kommt

$$\frac{R}{\Delta} = \frac{0,03 \cdot 10^4}{8} = 37,5 < \frac{R}{k_s}, \text{ d.h. } k_s < \Delta.$$

Das heißt, die Rauigkeiten werden von der Unterschicht zugedeckt. Das Rohr ist hydraulisch glatt.

Der Übergang zu **technisch rauhen Rohren** wird durch den Begriff der **äquivalenten Sandkornrauigkeit** ermöglicht. Darunter versteht man diejenige Sandkornrauigkeit  $k_s$ , die bei gleicher Reynolds-Zahl den gleichen Verlustbeiwert  $\lambda$  liefert. Bild 3.95 gibt einige Rauigkeitswerte für technisch wichtige Fälle.

Liegt ein Rohr **nichtkreisförmigen Querschnittes** vor, so verwendet man im **turbulenten** Fall als charakteristisches Längenmaß den **hydraulischen Durchmesser**  $D_h$  anstelle von  $D$  :



**Bild 3.95**  
Äquivalente Sandkornrauigkeiten

$$D_h = \frac{4A}{U} \quad (3.154)$$

mit  $A$  = Querschnittsfläche und  $U$  = benetzter Umfang. Für den Druckverlust gilt

$$\Delta \bar{p} = \frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2 \frac{\ell}{D_h} \lambda_{\text{turb}} \quad , \quad Re_{D_h} = \frac{\bar{c}_m D_h}{\nu} \quad (3.155)$$

Man beachte, daß diese Aussage auf turbulente Strömungen beschränkt ist. Dasselbst ist die Geschwindigkeit nahezu konstant über den Querschnitt. Hieran dürfte es liegen, daß in diesen Fällen eine Umrechnung auf den hydraulischen Durchmesser möglich ist. Bei laminaren Strömungen trifft dies nicht zu, und eine entsprechende Darstellung ist nicht richtig.

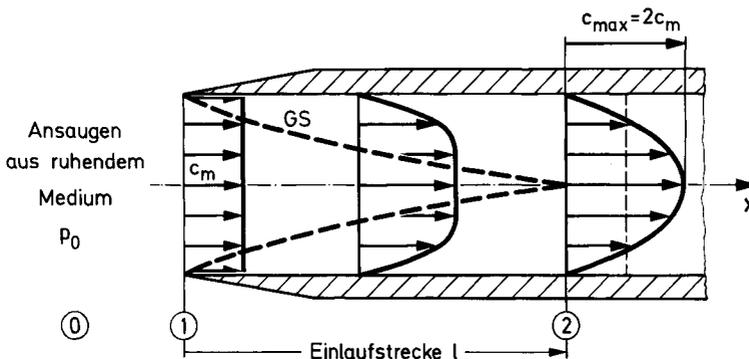
### 3.3.7 Strömung in der Einlaufstrecke

Bisher haben wir uns mit der ausgebildeten Strömung im Rohr beschäftigt. Wir diskutieren jetzt die Verhältnisse am Rohreinlauf.

#### 1. Laminare Strömung

Das Fluid wird aus dem Ruhezustand (0) angesaugt (Bild 3.96). Im Eintrittsquerschnitt (1) ist die Geschwindigkeit konstant =  $c_m$ . Der Reibungseinfluß führt stromab zur Bildung einer Grenzschicht. Die Einlaufstrecke  $\ell$  endet dort, wo diese Grenzschicht (GS) auf die Rohrachse auftrifft (2). Von da ab herrscht ausgebildete Strömung. Mit anderen Worten: die Grenzschicht füllt von da ab das ganze Rohr. Es ist plausibel, daß der Druckverlust in der Einlaufstrecke größer ist als bei ausgebildeter Strömung. Dies deshalb, da

1. die Wandschubspannung größer ist und



**Bild 3.96**

Strömung in der Einlaufstrecke eines Kreisrohres

2. zur Abänderung des Geschwindigkeitsprofils ① → ② eine zusätzliche Druckdifferenz erforderlich ist.

Wir können den Druckabfall in der Einlaufstrecke leicht bestimmen. Wegen des nahezu reibungslosen Verhaltens der Kernströmung außerhalb der Grenzschicht rechnen wir auf der Rohrachse von ① → ② mit der Bernoulli-Gleichung

$$p_0 = p_1 + \frac{\rho}{2} c_m^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_{\max}^2 = p_2 + 4 \frac{\rho}{2} c_m^2,$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 3 \frac{\rho}{2} c_m^2.$$

Es kommt also der beträchtliche Druckabfall von drei dynamischen Drücken. Eine Rechnung zur Bestimmung der Länge der Einlaufstrecke muß natürlich den Verlauf der Wandschubspannung berücksichtigen. Mit dem Impulssatz kann man den ganzen Vorgang diskutieren. Eine Näherungsrechnung ergibt

$$\frac{\ell}{D} \approx 0,03 \operatorname{Re}_D, \quad \operatorname{Re}_D = \frac{c_m D}{\nu}. \quad (3.156)$$

Ein Zahlenbeispiel veranschaulicht die Größenordnung

$$\operatorname{Re}_D = 2 \cdot 10^3 \text{ (obere Grenze)}, \quad \frac{\ell}{D} \sim 60.$$

Wir berechnen hiermit zum Vergleich den Reibungsdruckabfall für die **ausgebildete** Strömung auf derselben Strecke:

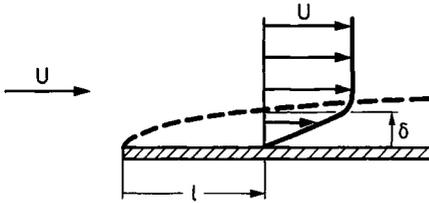
$$\Delta p = \frac{\rho}{2} c_m^2 \frac{\ell}{D} \frac{64}{\operatorname{Re}_D} = \frac{\rho}{2} c_m^2 \cdot 0,03 \cdot 64 = 1,92 \frac{\rho}{2} c_m^2.$$

Der zusätzliche Druckverlust in der Einlaufstrecke beträgt demnach

$$\Delta p = 1,08 \frac{\rho}{2} c_m^2.$$

Wir geben an dieser Stelle eine Abschätzung der **Länge der Einlaufstrecke**. Wir benutzen hier bereits ein Ergebnis der Plattengrenzschicht (Bild 3.97). Für die Grenzschichtdicke  $\delta$  gilt

$$\frac{\delta}{\ell} = \frac{3,5}{\sqrt{\operatorname{Re}_\ell}} = \frac{3,5}{\sqrt{\frac{U \ell}{\nu}}}. \quad (3.157)$$

**Bild 3.97**

Bezeichnungen bei der Plattengrenzschicht

Wir wenden diese Beziehung auf die Einlaufstrecke im Rohr an. Es ist klar, daß wir hier eine starke Vereinfachung durchführen. Der räumliche Einfluß des Rohres bleibt unberücksichtigt. Am Ende der Einlaufstrecke ist  $\delta = D/2$ ;  $U$  entspricht in der Rohrströmung  $c_{\max} = 2 \cdot c_m$ . (3.157) ergibt hiermit

$$\frac{\delta}{\ell} = \frac{D}{2\ell} = \frac{3,5}{\sqrt{\frac{2c_m \ell}{vD} D}}$$

$$\frac{\ell}{D} = 0,04 \operatorname{Re}_D .$$

Dies stimmt, zumindest was die Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl angeht, mit (3.156) überein. Der vernachlässigte räumliche Effekt kommt in dem zu großen Zahlenkoeffizienten zum Ausdruck.

## 2. Turbulente Strömung

Die Einlaufstrecke ist kaum von der Reynolds-Zahl abhängig. Die Angaben schwanken:

$$\frac{\ell}{D} \sim 20 \text{ bis } 30 ,$$

je nachdem, wie genau das Endprofil erfaßt wird. Grundsätzlich gilt, daß diese Einlaufstrecke kürzer ist als im laminaren Fall. Das ausgebildete turbulente Geschwindigkeitsprofil ist nahezu rechteckförmig und besitzt damit schon eine enge Verwandtschaft mit dem Einlaufprofil. Der zusätzliche Druckabfall durch Umformung des Geschwindigkeitsprofils ist ebenfalls nicht erheblich, da auf der Rohrachse nur eine geringfügige Beschleunigung auftritt. Im Gültigkeitsbereich des Blasius-Gesetzes gilt

$$\bar{p}_1 + \frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2 = \bar{p}_2 + \frac{\rho}{2} \bar{c}_{\max}^2 = \bar{p}_2 + 1,50 \frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2 ,$$

$$\Delta \bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = 0,5 \frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2 .$$

Der Zahlenkoeffizient ist hier erheblich kleiner als im laminaren Fall. Er nimmt mit größer werdender Reynolds-Zahl noch weiter ab.

### 3.3.8 Geschwindigkeitsschwankungen und scheinbare Schubspannungen

Wir beschäftigen uns jetzt mit den Details turbulenter Strömungen und gehen auf die Reynoldssche Zerlegung der Geschwindigkeiten in Abschnitt 3.3.4 zurück. Wir bestimmen die Wirkung der Schwankungsgeschwindigkeiten bei einem einfachen Strömungsmodell. Die Hauptströmungsrichtung soll in x-Richtung liegen (Bild 3.98). Wir interessieren uns für die Impulskraft, die von den Schwankungsgeschwindigkeiten im zeitlichen Mittel auf eine bestimmte Kontrollfläche übertragen wird.

1. Die Kontrollfläche sei **senkrecht** zur x-Achse (Bild 3.99):

$$d \vec{F}_j = -\rho \bar{w} (\bar{w} \vec{n}) dA,$$

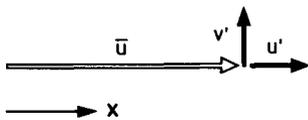
$$\left| \frac{d F_{j,x}}{dA} \right| = \rho u^2.$$

Wir bilden das zeitliche Mittel dieser Normalspannung:

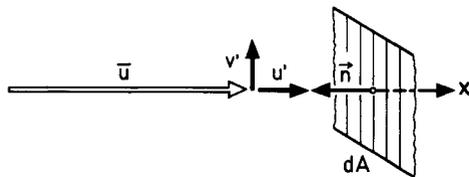
$$\rho \overline{u^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho u^2 dt = \rho \overline{(\bar{u} + u')^2} = \rho \overline{(\bar{u}^2 + 2 \bar{u} u' + u'^2)} = \rho (\bar{u}^2 + \overline{u'^2}). \quad (3.158)$$

Durch diese Schwankungen kommt ein zusätzlicher Anteil.

2. Die Kontrollfläche liege **in** x-Richtung (Bild 3.100):

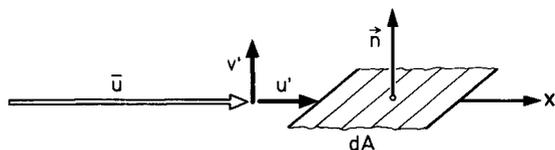


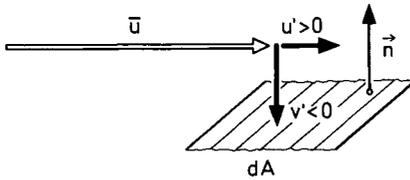
**Bild 3.98**  
Strömung mit Schwankungsgeschwindigkeiten



**Bild 3.99**  
Hauptströmungsrichtung normal zur Kontrollfläche

**Bild 3.100**  
Hauptströmungsrichtung tangential zur Kontrollfläche



**Bild 3.101**

Zur Ermittlung des Vorzeichens der scheinbaren Schubspannung

$$\left| \frac{d F_{J,x}}{d A} \right| = \rho u v .$$

Das zeitliche Mittel dieser Tangentialspannung wird:

$$\rho \overline{u v} = \rho \overline{(u + u') v'} = \rho \overline{u' v'} .$$

Wir erkennen, daß es hier nur aufgrund der beiden Schwankungsgeschwindigkeiten  $u'$  und  $v'$  zu einem Beitrag kommt. Wir diskutieren das Vorzeichen. Wir betrachten Teilchen, die, von oben kommend, die Kontrollfläche durchlaufen (Bild 3.101).  $u' > 0$ ,  $v' < 0$  führen zu  $\overline{\tau} > 0$ , d.h. zu einer positiven Tangentialspannung, die von der Strömung an die Kontrollfläche übertragen wird. Wir definieren daher als

$$\text{Reynoldssche scheinbare Schubspannung} = \overline{\tau} = -\rho \overline{u' v'} . \quad (3.159)$$

Betrachten wir sowohl diesen makroskopischen Austausch als auch die molekularen Vorgänge, so erhalten wir insgesamt bei turbulenter Strömung

$$\overline{\tau}_{\text{ges}} = \eta \frac{d \overline{u}}{d y} - \rho \overline{u' v'} . \quad (3.160)$$

Diese Darstellung gilt gemäß unserer Herleitung nur für eine eindimensionale Grundströmung. Im allgemeinen Fall tritt ein Spannungstensor auf. Wir kommen hierauf bei der Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen zurück.

Wir behandeln zwei Grenzfälle von (3.160).

1. In unmittelbarer Wandnähe ( $v' \rightarrow 0$ ) kommt

$$\overline{\tau}_{\text{ges}} = \eta \frac{d \overline{u}}{d y} . \quad (3.161a)$$

Diese Darstellung in der (laminaren) Reibungsunterschicht bestätigt die von uns früher gemachten Ansätze.

2. In **großem Wandabstand**, sogenannte freie Turbulenz, ist  $\bar{u} \approx \text{konst}$  und damit

$$\bar{\tau}_{\text{ges}} = -\rho \overline{u' v'} . \quad (3.161b)$$

Wir schätzen beide Anteile bei der Rohrströmung ab:

$$\left| \bar{\tau}_1 \right| = \eta \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| = \rho \nu \frac{1}{2} \frac{\bar{c}_m}{\Delta} , \quad \frac{\left| \bar{\tau}_1 \right|}{\rho \bar{c}_m^2} = \frac{1}{2} \frac{\nu}{\Delta \bar{c}_m} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\Delta}{D} \text{Re}_D} = \frac{\lambda_{\text{turb}}}{8} \quad (3.162a)$$

Bei  $\text{Re}_D = 10^5$  gilt für das glatte Rohr  $\lambda_{\text{turb}} = 1,7 \cdot 10^{-2}$ , also

$$\frac{\left| \bar{\tau}_1 \right|}{\rho \bar{c}_m^2} = 2,1 \cdot 10^{-3} .$$

Die Schwankungsgeschwindigkeiten betragen einige Prozente der mittleren Geschwindigkeit; mit  $\bar{u} \sim \bar{c}_m$  wird

$$\left| \bar{\tau}_2 \right| = \left| \rho \overline{u' v'} \right| , \quad \frac{\left| \bar{\tau}_2 \right|}{\rho \bar{u}^2} = \left| \frac{\overline{u' v'}}{\bar{u} \bar{u}} \right| \sim 5\% \cdot 5\% = 2,5 \cdot 10^{-3} . \quad (3.162b)$$

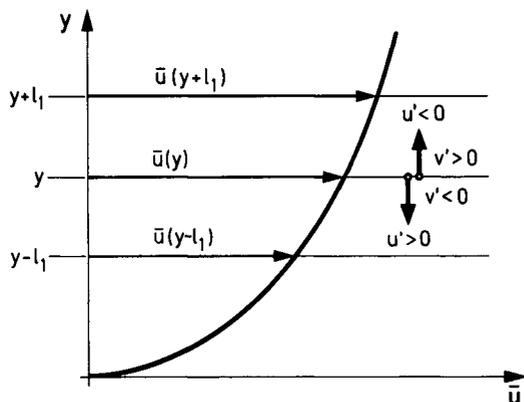
Wir sehen, daß bei genügend hoher Reynolds-Zahl der zweite Anteil überwiegt.

### 3.3.9 Prandtlscher Mischungswegansatz für die Schwankungsgeschwindigkeiten

Die Problematik bei der Anwendung von (3.160) liegt darin, daß wir bisher wenig Informationen über die Schwankungsgeschwindigkeiten besitzen. Wir gehen hier wieder von einer mittleren Bewegung in x-Richtung aus:

$$u = \bar{u}(y) + u' , \quad v = v' ,$$

und suchen eine Darstellung der Größen  $u', v'$  durch  $\bar{u}(y)$ . Analog zur kinetischen Gastheorie (Abschnitt 1.3) führen wir den **Prandtschen Mischungsweg** ein. Wir verstehen darunter diejenige Länge, die ein Turbulenzelement im Mittel zurücklegt, bevor es sich mit der Umgebung vermischt und damit seine Individualität aufgibt (Bild 3.102). Dies ist ein makroskopisches Analogon zur mittleren freien Weglänge der Gaskinetik. Im einzelnen geht die Überlegung wie folgt: Ein Teilchen aus der Schicht  $y$  gelangt bei  $v' > 0$  in das Niveau



**Bild 3.102**  
Zum Prandtl'schen Mischungswegansatz

$y + \ell_1$ . Dort hat es für den in Bild 3.102 skizzierten Fall eine Untergeschwindigkeit gegenüber der Umgebung von der Größe

$$\bar{u}(y) - \bar{u}(y + \ell_1) = -\ell_1 \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Diese Untergeschwindigkeit faßt Prandtl als Geschwindigkeitsschwankung im Niveau  $y + \ell_1$  auf, d.h.

$$u' = -\ell_1 \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (3.163a)$$

Aus Kontinuitätsgründen wird ganz entsprechend angesetzt

$$v' = \ell_2 \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (3.163b)$$

Damit ist auch das richtige Vorzeichen gegeben, wie man an Bild 3.102 sofort bestätigt. Für die Reynoldssche scheinbare Schubspannung kommt jetzt

$$\bar{\tau} = -\rho \overline{u'v'} = \rho \ell_1 \ell_2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \rho \ell^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2. \quad (3.164a)$$

Für ein beliebiges Geschwindigkeitsprofil (z.B. mit  $d\bar{u}/dy < 0$ ) gilt unter Beachtung des Vorzeichens

$$\bar{\tau} = \rho \ell^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \cdot \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (3.164b)$$

$\ell$  ist hierin ein charakteristischer Längenmaßstab für die Vermischung in turbulenten

Strömungen (= Prandtl'scher Mischungsweg). Er muß als Funktion von  $y$  dem Experiment entnommen werden, weshalb diese Theorie als halbempirisch bezeichnet wird. Wichtig ist in (3.164a,b) die Abhängigkeit vom **Quadrat** des Geschwindigkeitsgradienten. Dies weist auf typische Unterschiede zur laminaren Strömung hin. Aus (3.160) wird mit (3.164a)

$$\bar{\tau}_{\text{ges}} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} + \rho \ell^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad (3.165)$$

Wir diskutieren einige Eigenschaften der turbulenten Strömung in der Nähe einer Wand.

1. In der (laminaren) **Reibungsunterschicht** ist  $\ell \rightarrow 0$ .

$$\bar{\tau}_{\text{ges}} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{\tau}_w,$$

$$\bar{u}(y) = \frac{\bar{\tau}_w}{\eta} y.$$

Mit der sogenannten **Wandschubspannungsgeschwindigkeit**

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho}} \quad (3.166)$$

wird

$$\frac{\bar{u}(y)}{u_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu} = y^+ \quad (3.167)$$

Die Geschwindigkeit ist eine lineare Funktion von  $y$ .  $y^+$  ist ein in geeigneter Weise dimensionslos gemachter Wandabstand. Die Größenordnung der Wandschubspannungsgeschwindigkeit läßt sich mit den Daten der Rohrströmung ( $\text{Re}_D = 10^5$ ,  $\lambda_{\text{turb}} = 1,7 \cdot 10^{-2}$ ) abschätzen:

$$\frac{u_\tau}{\bar{u}} = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}^2}} \sim \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho c_m^2}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{turb}}}{8}} = 0,05.$$

Wir kommen also in dieselbe Größenordnung wie die Schwankungsgeschwindigkeiten und können damit  $u_\tau$  als Maß für  $u'$  und  $v'$  auffassen.

2. Außerhalb der Reibungsunterschicht - aber immer noch in Wandnähe - gilt

$$\bar{\tau}_{\text{ges}} = \rho \ell^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

Wir sprechen hier von der **Wandturbulenz** (Bild 3.103). Prandtl machte die Annahme, daß

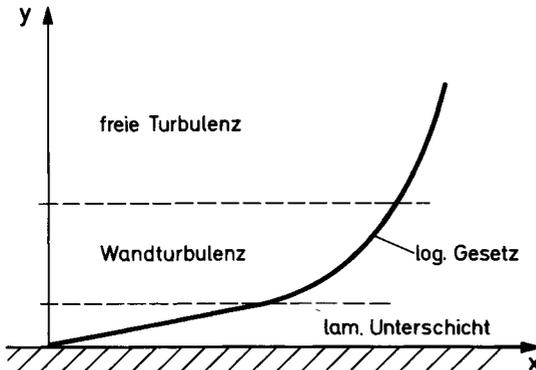


Bild 3.103

Die verschiedenen Geschwindigkeitsprofile in turbulenter Strömung

auch hier  $\bar{\tau}_{\text{ges}} = \bar{\tau}_w = \text{konst}$  ist sowie  $\ell = \kappa y$  mit  $\kappa = \text{konst}$ . Damit wird

$$\bar{\tau}_w = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

Wir können dies als eine Bestimmungsgleichung für das Geschwindigkeitsprofil  $\bar{u}(y)$  auffassen. Integration führt mit den Bezeichnungen (3.166) und (3.167) zu

$$\frac{\bar{u}(y)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C.$$

Die beiden Konstanten  $\kappa$  und  $C$  werden im Experiment bestimmt. Es kommt das **logarithmische Geschwindigkeitsprofil**

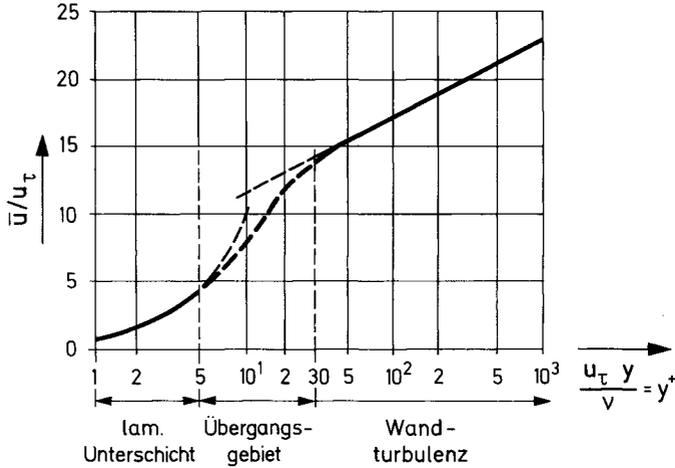
$$\frac{\bar{u}(y)}{u_\tau} = 2,5 \ln y^+ + 5,5. \quad (3.168)$$

Diese universelle Gesetzmäßigkeit gilt außerhalb der (laminaren) Unterschicht, so daß die Singularität an der Wand bei  $y = 0$  nicht von Bedeutung ist. Bei größerem Wandabstand schließt an (3.168) die freie Turbulenz an. Bild 3.104 enthält die beiden Gesetzmäßigkeiten (3.167) und (3.168) in halblogarithmischer Darstellung. Die in Abschnitt 3.3.6 durchgeführte Abschätzung der Unterschichtdicke  $\Delta$  führt zu der Aussage:

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} = \frac{u_\tau \Delta}{\nu} = \frac{u_\tau}{\bar{u}} \frac{\bar{u} D}{\nu} \frac{\Delta}{D} \approx 0,05 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2} = 5.$$

Nach einem Übergangsbereich ( $5 < y^+ < 30$ ) beginnt der vollturbulente Bereich.

**Bild 3.104**  
Die Geschwindigkeitsprofile in halblogarithmischer Auftragung



### 3.3.10 Allgemeine Form der Navier-Stokes-Gleichungen

Wir gehen analog vor wie bei der Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen. Das Newtonsche Grundgesetz wird auf ein Massenelement angewandt (Bild 3.105). Als Folge der Reibung tritt eine auf jedes Oberflächenelement wirkende Kraft auf, die wir nach den drei Achsenrichtungen zerlegen. Beziehen wir die jeweilige Kraft auf die Fläche, so ergeben sich zwei **Schubspannungen** in der Fläche und eine **Normalspannung** senkrecht zur Fläche. Den statischen Druck  $p$  denken wir uns hier bereits abgespalten. Die Indizierung der Spannungen erfolgt so, daß der erste Index die Stellung des Flächenelementes (durch die Flächennormale) charakterisiert. Der zweite gibt die Kraftrichtung an. Die Kräftebilanz in  $x$ -Richtung lautet

$$\begin{aligned}
 dm \frac{du}{dt} &= f_x dm - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \\
 &+ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dx dy dz, \\
 \frac{du}{dt} &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right). \tag{3.169}
 \end{aligned}$$

Die restlichen zwei Gleichungen ergeben sich durch zyklische Vertauschung. Der Reibungseinfluß wird durch die folgende Spannungsmatrix erfaßt:

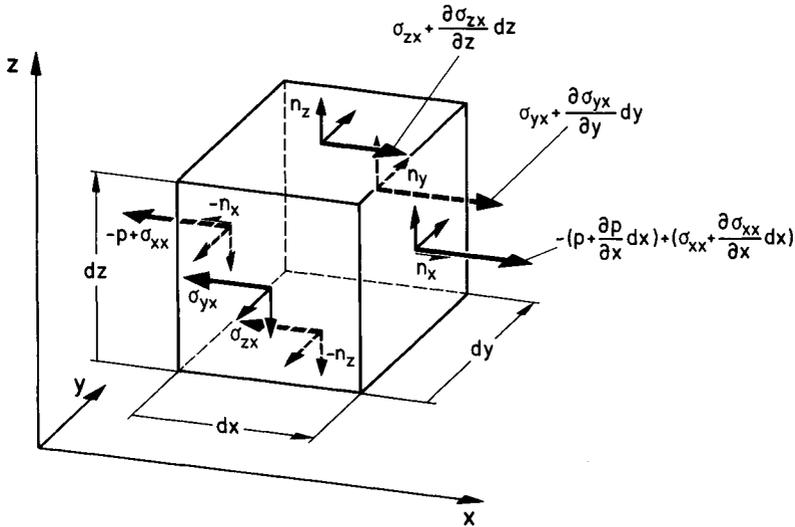


Bild 3.105

Kräftegleichgewicht am Massenelement mit Reibung

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.170)$$

Das Momentengleichgewicht für jedes Flächenelement ergibt die Aussage der Symmetrie  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ . Damit treten in (3.170) nur noch sechs unabhängige Größen auf. Die eigentliche Schwierigkeit liegt in der Darstellung der  $\sigma_{ik}$  durch die Geschwindigkeitskomponenten. Das heißt, es geht um die dreidimensionale Verallgemeinerung des (eindimensionalen) Newtonschen Schubspannungsansatzes. In Fortsetzung der elementaren Betrachtungen von Kapitel 1.2 wird für Newtonsche Fluide ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Deformationsgeschwindigkeiten postuliert. Der folgende Stokessche Ansatz erfüllt darüber hinaus einige naheliegende, notwendige Symmetrieeigenschaften:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \sigma_{xy} &= \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \sigma_{xz} &= \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.171)$$

$\bar{\eta}$  ist hierin ein zweiter Viskositätskoeffizient. Diese Größe tritt bei inkompressibler Strömung nicht auf. Man erkennt unmittelbar den früher behandelten Spezialfall des eindimensionalen Newtonschen Schubspannungsansatzes. Beschränken wir uns auf inkompressible Strömungen mit  $\eta = \text{konst.}$ , so erhalten wir die Navier-Stokes-Gleichungen in der Form

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right), \dots, \dots, \quad (3.172)$$

wobei wieder die beiden nicht angeführten Gleichungen durch zyklische Vertauschung entstehen. In Vektorform lautet das System

$$\frac{d\bar{\mathbf{w}}}{dt} = \bar{\mathbf{f}} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \bar{\mathbf{w}}. \quad (3.173)$$

Hinzu tritt wie früher die Kontinuitätsaussage, womit vier Differentialgleichungen für  $\bar{\mathbf{w}} = (u, v, w)$  und  $p$  vorliegen. Man beachte, daß hier  $\rho = \text{konst.}$  vorausgesetzt wurde und daher keine weitere Gleichung erforderlich ist. Die **Ordnung** der Navier-Stokes-Gleichungen ist **höher** als die der Eulerschen Differentialgleichungen. Dies ermöglichtes, daß die Haftbedingung an der Körperoberfläche erfüllt werden kann. Die Navier-Stokes-Gleichungen sind in gleicher Weise **nichtlinear** wie die Eulerschen Gleichungen. Das liegt an den konvektiven Gliedern. Exakte Lösungen sind nur in wenigen Fällen bekannt. Wir besprechen im nächsten Abschnitt zwei Beispiele, um Eigenschaften dieser Strömungen kennenzulernen.

### 3.3.11 Spezielle Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

#### 1. Ausgebildete laminare Spaltströmung

Wir setzen eine ausgebildete Schichtenströmung eines inkompressiblen Mediums im ebenen Spalt ( $-h \leq y \leq h, -\infty < x < \infty$ ) voraus (Bild 3.106). Dies ergibt  $v = w = 0$  und  $u = u(y)$ . Die Kontinuitätsgleichung ist erfüllt. Es kommt bei Vernachlässigung der Schwere

$$1. \text{ Navier-Stokes-Gleichung: } \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{d^2 u(y)}{dy^2}, \quad (3.174a)$$

$$2. \text{ und } 3. \text{ Navier-Stokes-Gleichung: } \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (3.174b)$$

Die letzten beiden Aussagen ergeben  $p = p(x)$ . Der Druck ist im Spalt quer zur Strömung konstant. Dies erinnert an das Grenzschichtkonzept. Hier ist sozusagen der ganze Spalt mit Grenzschicht ausgefüllt. (3.174a) führt mit  $p = p(x)$  sofort zu

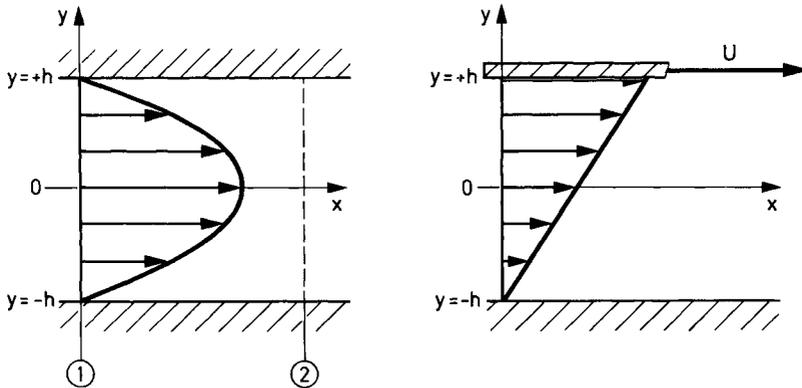


Bild 3.106

Poiseuille- und Couette-Strömung im ebenen Spalt

$$\frac{dp}{dx} = \text{konst.} \quad , \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = \text{konst.} \quad (3.175)$$

Das heißt, der Druckgradient ist konstant, und für  $u(y)$  kommt eine sehr einfache, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zweimalige Integration ergibt

$$u(y) = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + Ay + B \quad , \quad A, B = \text{konst.} \quad (3.176)$$

Für die **Poiseuille-Strömung** ( $u(\pm h) = 0$ ) kommt der parabolische Verlauf

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) = u_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right), \quad (3.177)$$

dagegen erhalten wir für die **Couette-Strömung** ( $u(-h) = 0$ ,  $u(+h) = U$ ,  $dp/dx = 0$ ) die lineare Funktion

$$u(y) = \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h}\right). \quad (3.178)$$

Die Lösung für die Poiseuille-Strömung im Spalt entspricht völlig der früher diskutierten Rohrströmung. Wir bestimmen wie dort den Volumenstrom ( $b$  ist die Breitenerstreckung der Strömung)

$$\dot{V} = u_m 2 h b = b \int_{-h}^h u dy = b u_{\max} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) dy = \frac{2}{3} u_{\max} 2 h b,$$

$$u_m = \frac{2}{3} u_{\max}. \quad (3.179)$$

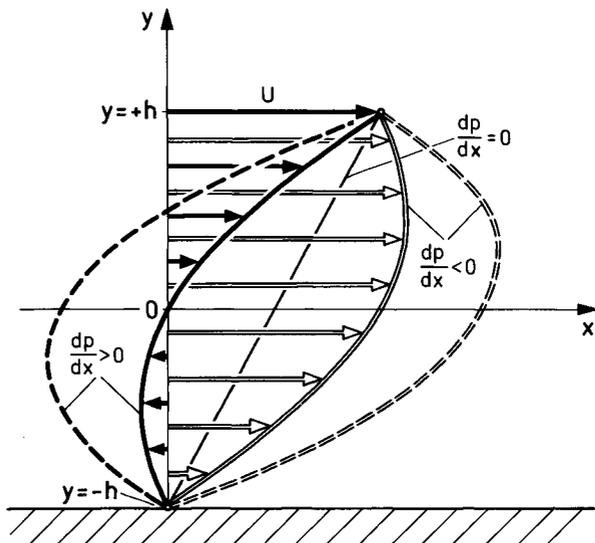
Für den Druckabfall auf der Spaltlänge  $\ell$  kommt damit

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} u_m^2 \frac{\ell}{2 h} \frac{24}{\text{Re}}, \quad \text{Re} = \frac{u_m 2 h}{\nu}. \quad (3.180)$$

Dasselbe Ergebnis liefert der Impulssatz. Der Leser bestätige dies. Die beiden Lösungen (3.177) und (3.178) lassen sich linear überlagern, weil in diesem Spezialfall die konvektiven Glieder fortfallen und damit die Navier-Stokes-Gleichungen linear sind:

$$u(y) = -\frac{h^2}{2 \eta} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) + \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h}\right). \quad (3.181)$$

Die obere Berandung des Spaltes wird mit der Geschwindigkeit  $U$  bewegt, die untere ruht. Dem ganzen Stromfeld ist der Druckgradient  $dp/dx \geq 0$  aufgeprägt. In Abhängigkeit von der Größe von  $dp/dx$  ergeben sich interessante Geschwindigkeitsverteilungen. Es kann z.B. zu Rückströmungen in der Nähe der ruhenden Wand kommen. Hier reicht der Antrieb der



**Bild 3.107**  
Überlagerung von Poiseuille- und Couette-Strömung im ebenen Spalt mit Rückströmung

oberen Berandung offenbar nicht aus, den Druckanstieg im ganzen Spalt zu überwinden (Bild 3.107). Die Lösung (3.181) beschreibt z.B. die Strömung im **Schmierspalt** zwischen Welle und Lagerschale, wenn man die Krümmung des Spaltes vernachlässigt (kleine Spaltweiten). Dort bildet sich die Druckverteilung aufgrund der Spaltgeometrie aus, d.h. sie wird durch den veränderlichen Abstand von Welle und Lager aufgebaut.

## 2. Rayleigh-Stokessches Problem für die Platte

Die soeben behandelte Spaltströmung schloß unmittelbar an die früher berechnete Rohrströmung an. Jetzt diskutieren wir eine ganz andere Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen, die uns zwanglos zur Behandlung der Grenzschichttheorie führen wird.

Eine unendlich ausgedehnte horizontale Platte wird in einer ruhenden Umgebung ruckartig auf die Geschwindigkeit  $U$  gebracht. Durch den Reibungseinfluß wird das über der Platte befindliche Fluid allmählich mitgenommen (Bild 3.108). Der Reibungseinfluß breitet sich im Laufe der Zeit immer weiter in Querrichtung ( $y$ ) aus, mit anderen Worten: die Grenzschicht wächst mit der Zeit an. Wir bestimmen nun ihre Dicke. Die Strömung ist ausgebildet, so daß jede Ableitung nach  $x$  verschwindet und  $v = 0$  ist. Es verbleibt damit  $u = u(y, t)$ . Die Anfangs-Randbedingungen des Problems sind

$$t \leq 0 : u = 0 \quad , \quad y \geq 0 \quad , \quad (3.182)$$

$$t > 0 : u(0, t) = U \quad , \quad u(\infty, t) = 0 \quad .$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen ergeben bei Vernachlässigung der Schwere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad (3.183a)$$

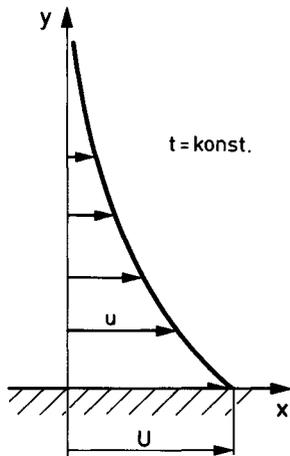
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad . \quad (3.183b)$$

Der Druck ist also quer zur Strömungsrichtung konstant. Diese charakteristische Eigenschaft der Grenzschichten ist hier exakt erfüllt. (3.183a) ist vom Typ der Wärmeleitungsgleichung und kann unter den Bedingungen (3.182) leicht gelöst werden. Wir fassen  $y$  und  $t$  zu der neuen, dimensionslosen Variablen

$$\frac{y}{\sqrt{\nu t}} = s$$

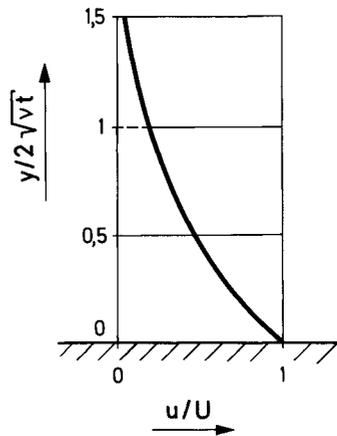
zusammen. (3.183a) und (3.182) gehen dann für

$$\frac{u(y, t)}{U} = f(s)$$



← Bild 3.108  
Rayleigh-Stokes-  
Strömung für die  
ruckartig bewegte  
Platte

Bild 3.109 →  
Universelles Geschwindigkeitsprofil bei der ruckartig bewegten Platte



über in die gewöhnliche Differentialgleichung mit den folgenden Randbedingungen:

$$f''(s) + \frac{s}{2} f'(s) = 0 \quad , \quad f(0) = 1 \quad , \quad f(\infty) = 0.$$

Als Lösung erhalten wir die Fehlerfunktion

$$\frac{u(y, t)}{U} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{vt}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{vt}}\right). \quad (3.184)$$

Es ergibt sich ein einziges Geschwindigkeitsprofil, das von der Variablen  $y / 2 \sqrt{v t}$  abhängt (Bild 3.109). Hieraus kann für jeden Wandabstand  $y$  zu jeder Zeit  $t$  die Geschwindigkeit bestimmt werden. Wir wollen mit (3.184) die Dicke  $\delta$  derjenigen Fluidschicht bestimmen, die bei der Bewegung der Platte mitgenommen wird. Für  $y = \delta$  sei  $u/U = 0,01$ . (3.184) liefert hierfür

$$\delta \approx 4 \sqrt{v t}. \quad (3.185)$$

Diese Schichtdicke nimmt also, wie zu erwarten, mit der Zeit zu. Für Reibungs- und Wärmeleitungsvorgänge ist die Wurzelabhängigkeit charakteristisch. Geht man von der Zeit zu der Länge  $\ell = t \cdot U$  über, so wird

$$\frac{\delta}{\ell} \approx \frac{4}{\sqrt{\frac{U \ell}{v}}} = \frac{4}{\sqrt{Re_\ell}}. \quad (3.186)$$

Damit ergibt sich zwangsläufig ein Zugang zur Grenzschichttheorie, denn  $\delta$  kann als Reibungsschichtdicke und  $\ell$  als zugehörige Lauflänge aufgefaßt werden. Es tritt die für laminare Grenzschichten typische Abhängigkeit  $\sim 1/\sqrt{\text{Re}_\ell}$  auf, die uns später immer wieder begegnen wird. Wichtig ist für das Folgende, daß die obigen Aussagen aus den Navier-Stokes-Gleichungen ohne weitere Vernachlässigungen hergeleitet wurden.

### 3.3.12 Einführung in die Grenzschichttheorie

Für hohe Re-Zahlen ( $\text{Re} = U \ell / \nu \gg 1$ ) spielt die Reibung nur in der wandnahen Grenzschicht (Dicke  $\delta$ ) eine Rolle (Bild 3.110). Dort erfolgt der Anstieg der Geschwindigkeit von Null auf den Wert der Außenströmung. Wir bestimmen  $\delta$  für den Spezialfall der längsangeströmten Platte bei laminarer Strömung. Außerdem sei die Strömung stationär und inkompressibel. Wir werden dabei die Beziehung (3.186) bestätigen. Mit Hilfe der früher diskutierten Kennzahlen erkennt man sofort, daß bei der Platte für die Grenzschichtdicke bei  $x = \ell$  eine Abhängigkeit der Form

$$\frac{\delta}{\ell} = f(\text{Re}_\ell) \quad (3.187)$$

bestehen muß. Mit dem Impulssatz kann man die Funktion  $f$  leicht ermitteln. Wir wählen hierzu als Kontrollfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen  $x$  und  $\delta(x)$  (Bild 3.111). Der Druck wird der Grenzschicht von der Außenströmung aufgeprägt ( $\partial p / \partial y = 0$ ). Bei der Platte ist  $p$  im Außenraum konstant. Daher ist der Druck in diesem Fall auch in der Grenzschicht konstant. Wir beginnen mit einer Kontinuitätsaussage. Für die Massenströme durch die Kontrollflächen 1, 2, 3 kommt ( $b =$  Breite der betrachteten Grenzschicht)  $\dot{m}_1 = \rho U \delta b$ ,

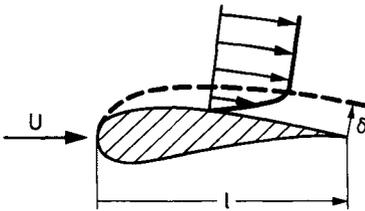


Bild 3.110  
Strömungsgrenzschicht am Flügel

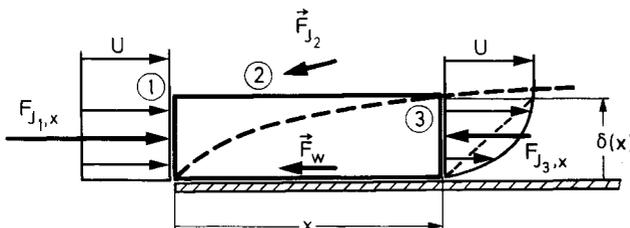


Bild 3.111  
Kontrollflächen für die Plattengrenzschicht

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{m}_3 &= \rho b \int_0^\delta u \, dy = (\text{speziell beim linearen Profil}) = \\
 &= \rho b \frac{U}{\delta} \int_0^\delta y \, dy = \frac{1}{2} \rho U \delta b, \\
 \dot{m}_2 &= \dot{m}_1 - \dot{m}_3 = \rho b \left( U \delta - \int_0^\delta u \, dy \right) = (\text{lineares Profil}) = \\
 &= \frac{1}{2} \rho U \delta b.
 \end{aligned} \right\} (3.188a)$$

Durch die obere Berandung tritt Masse aus, da der Massenstrom in ③ kleiner ist als in ①. Die Grenzschicht hat damit eine Verdrängungswirkung. Dieser Effekt ruft eine Impulskraft auf der Fläche ② hervor. Wir erhalten der Reihe nach

$$\left. \begin{aligned}
 F_{J_{1,x}} &= \rho U^2 \delta b, \\
 F_{J_{2,x}} &= -\rho U \int_{\textcircled{2}} (\tilde{w} \tilde{n}) \, dA = -U \dot{m}_2 = (\text{lineares Profil}) = \\
 &= -\frac{1}{2} \rho U^2 \delta b, \\
 F_{J_{3,x}} &= -\rho b \int_0^\delta u^2 \, dy = (\text{lineares Profil}) = -\frac{1}{3} \rho U^2 \delta b.
 \end{aligned} \right\} (3.188b)$$

Die Wandreibungskraft wird

$$\begin{aligned}
 F_{w,x} &= -b \int_0^x \tau_w \, dx = -b \int_0^x \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \, dx = (\text{lineares Profil}) = \\
 &= -\eta U b \int_0^x \frac{dx}{\delta(x)}.
 \end{aligned} \tag{3.188c}$$

Dabei wurde das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht durch eine lineare Funktion ersetzt. Dies dient lediglich zur Vereinfachung der Rechnungen. Der Impulssatz liefert den Zusammenhang

$$\frac{U \delta(x)}{6 \nu} = \int_0^x \frac{dx}{\delta(x)}.$$

Durch Differentiation nach  $x$  entsteht für  $\delta(x)$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{U}{6\nu} \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{1}{\delta(x)},$$

die sich mit der Anfangsbedingung  $\delta(0) = 0$  sofort lösen läßt. Ersetzen wir  $x$  durch die Lauflänge  $\ell$ , so wird

$$\frac{\delta}{\ell} = \frac{3,46}{\sqrt{\frac{U\ell}{\nu}}} = \frac{3,46}{\sqrt{Re_\ell}}. \quad (3.189)$$

Wir bestätigen damit die bereits früher benutzten charakteristischen Aussagen über die Grenzschicht. Für  $Re_\ell \gg 1$  ist  $\delta/\ell \ll 1$ , wobei die typische Abhängigkeit  $\delta/\ell \sim 1/\sqrt{Re_\ell}$  auftritt. Ein Zahlenbeispiel erläutert die Größenordnung

$$Re_\ell = 5 \cdot 10^5 \text{ (obere Grenze)}, \quad \delta/\ell \approx 5 \cdot 10^{-3}, \quad \ell = 1 \text{ m}, \quad \delta \approx 5 \text{ mm}.$$

Für die Anwendungen sind die Wandschubspannung  $\tau_w(x)$  sowie die Wandreibungskraft  $W_R$  von Wichtigkeit.

Mit den obigen Ergebnissen kommt

$$\tau_w = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \text{ (lineares Profil)} = \eta \frac{U}{\delta(x)} = \frac{\rho}{2} U^2 \frac{0,577}{\sqrt{\frac{Ux}{\nu}}}. \quad (3.190)$$

Charakteristisch ist die Abhängigkeit  $\tau_w \sim 1/\delta(x) \sim 1/\sqrt{x}$ . Für den dimensionslosen Beiwert ergibt sich

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2} U^2} = \frac{0,577}{\sqrt{Re_x}}. \quad (3.191a)$$

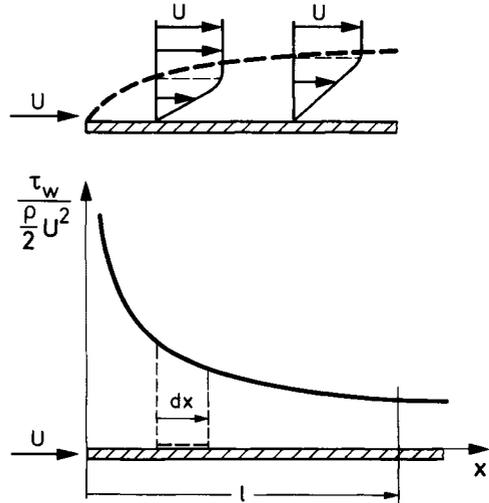
Die exakte Lösung der Grenzschichtgleichungen, d.h. ohne Benutzung des linearen Geschwindigkeitsprofils, ergibt

$$c_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}. \quad (3.191b)$$

Die Reynolds-Zahl-Abhängigkeit bleibt erhalten, lediglich der Zahlenkoeffizient wird geändert. Durch Integration erhalten wir die Wandreibungskraft (Bild 3.112):

**Bild 3.112**

Zur Berechnung der Wandreibungskraft



$$d W_R = b \tau_w dx \quad , \quad W_R = b \int_0^\ell \tau_w dx .$$

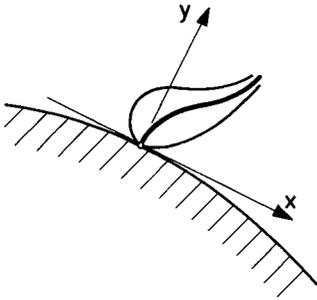
Der dimensionslose Beiwert ergibt sich zu

$$\zeta = \frac{W_R}{\frac{\rho}{2} U^2 b \ell} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2} U^2} dx = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell c_f dx ,$$

$$\zeta = \frac{1,328}{\sqrt{Re_\ell}} . \tag{3.192}$$

Wird die Platte beidseitig benetzt, so kommt der Faktor 2. Wieder tritt die Abhängigkeit  $\zeta \sim 1/\sqrt{Re_\ell}$  auf. Variiert die Reynolds-Zahl von  $10^4$  bis  $10^6$ , so ändert sich die Größenordnung  $\zeta$  von 1% auf 1‰. Dies sind typische Größenordnungen des (laminaren) Reibungskoeffizienten.

Wir kommen jetzt zu einigen grundsätzlichen Aussagen über **laminare Grenzschichten an gekrümmten Wänden**. Die Außengeschwindigkeit und der Druck sind nun nicht mehr konstant. Sie müssen mit den (oben besprochenen) Methoden der Potentialtheorie ermittelt werden. Am Rand der Grenzschicht sehen wir sie jetzt als bekannte Funktion von  $x$  an. In Abhängigkeit dieser aufgeprägten äußeren Druckverteilung stellen sich nun in der Grenzschicht unterschiedliche Geschwindigkeitsprofile ein. Bild 3.113 zeigt einige dieser Möglichkeiten.

**Bild 3.113**

Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht an einer gekrümmten Oberfläche

Wir sehen, daß es dabei zu erheblichen Änderungen der wandnahen (inneren) Geschwindigkeiten kommen kann. Die Steigung der Wandtangente an das Geschwindigkeitsprofil kann Null (Ablösung) oder sogar negativ (Rückströmung) werden. Demgegenüber ändern sich die Außengeschwindigkeiten nur relativ wenig. Auf einer mäßig gekrümmten Körperoberfläche ( $u = v = 0$ ) liefert die erste Navier-Stokes-Gleichung den Zusammenhang

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_w = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w. \quad (3.193a)$$

Die zweite Navier-Stokes-Gleichung reduziert sich im Fall hoher Reynolds-Zahl - wie beim Rohr und Spalt - zu der Aussage

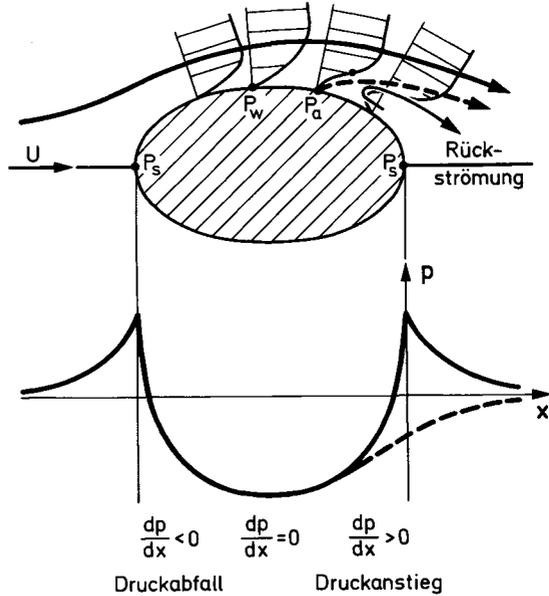
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (3.193b)$$

Kombinieren wir beide Beziehungen, so gilt mit  $p = p(x)$  als der der Grenzschicht aufgeprägten Druckverteilung der Potentialströmung auf dem umströmten Körper

$$\frac{1}{\rho} \frac{d p(x)}{d x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w. \quad (3.194)$$

Die rechte Seite ist ein Maß für die **Krümmung** des Geschwindigkeitsprofils am Körper. Die linke Seite können wir als eine vorgegebene Funktion betrachten. An dieser Stelle gehen die Kenntnisse der Theorie der Potentialströmungen ein. In Bild 3.114 ist ein typischer Fall der laminaren Profilumströmung (unterkritisch) diskutiert. Ausgangspunkt ist die Druckverteilung auf der Profilstromlinie. Auf der Körpervorderseite haben wir ein völliges Geschwindigkeitsprofil. Dort ist  $d p/d x < 0$ , die Strömung wird beschleunigt. Im Dickenmaximum ist  $d p/d x = 0$ . Nach (3.194) tritt dort ein Wendepunkt im Geschwindigkeitsprofil auf ( $P_w$ ). Auf der Rückseite des Körpers wird die Strömung verzögert,  $d p/d x > 0$ . Die **inneren** Geschwindigkeiten nehmen stark ab, die Wandtangente steilt sich auf, der Wendepunkt wandert ins Innere der Grenzschicht. Ist die Wandtangente normal zur

**Bild 3.114**  
 Druckverlauf und Grenzschichtprofile bei laminarer Profilumströmung



Oberfläche ( $P_a$ ), so beginnt die Ablösung. Stromabwärts kommt es zu Rückströmungen. Diese rückläufigen Bewegungen können auf der Körperrückseite die Potentialdruckverteilung erheblich ändern.

Wir unterscheiden zwei typische Fälle bei Profilumströmungen:

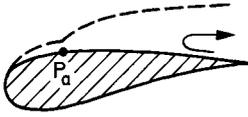
1.  $Re_\ell = U \ell / \nu < 5 \cdot 10^5$ : unterkritische Umströmung mit laminarer Ablösung (Bild 3.115). Hier liegt durchweg eine laminare Strömung vor, die aufgrund des aufgeprägten Druckanstieges zur Ablösung kommt.
2.  $Re_\ell = U \ell / \nu > 5 \cdot 10^5$ : überkritische Umströmung mit turbulenter Ablösung (Bild 3.116). Hier erfolgt der laminar-turbulente Umschlag ( $P_u$ ) nach der Lauflänge  $\ell_u$ . Die anschließende turbulente Grenzschicht löst in  $P_a$  ab.

Für den umströmten Körper ist die kritische Reynolds-Zahl

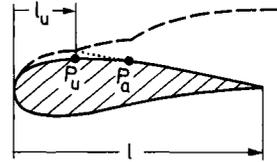
$$Re_{krit} = \frac{U \ell_u}{\nu} = 5 \cdot 10^5 - 10^6, \tag{3.195}$$

also

$$\frac{\ell_u}{\ell} = \frac{Re_{krit}}{Re_\ell} \approx \frac{5 \cdot 10^5}{Re_\ell}. \tag{3.196}$$

**Bild 3.115**

Unterkritische Profilumströmung mit laminarer Ablösung

**Bild 3.116**

Überkritische Profilumströmung mit turbulenter Ablösung

Mit wachsender Reynolds-Zahl nimmt  $l_u/l$  ab. Zu  $Re_\ell = 10^7$  gehört z.B.  $l_u/l \approx 5 \cdot 10^{-2}$ . Hier kommt es also bereits nach kurzer Lauflänge zum Umschlag.

Zwischen den kritischen Reynolds-Zahlen beim Rohr und Flügel, d.h. beim Durchströmen und Umströmen, gibt es einen einfachen Zusammenhang (Bild 3.117). Es besteht die Korrespondenz:

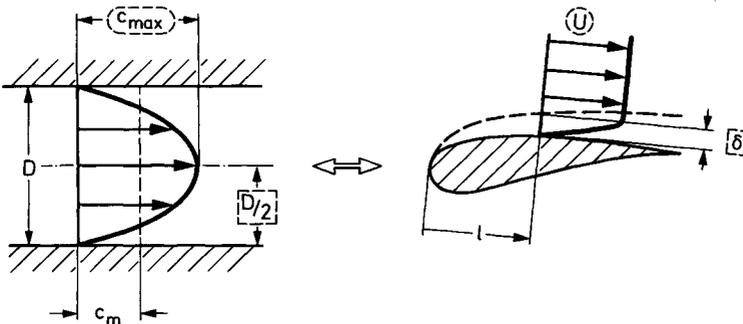
$$c_{\max} = 2 c_m \Rightarrow U,$$

$$\frac{D}{2} \Rightarrow \delta.$$

Damit lassen sich die Reynolds-Zahlen wie folgt umrechnen:

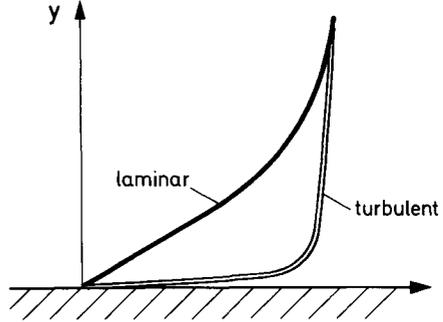
$$Re_D = \frac{c_m D}{\nu} \Rightarrow \frac{U}{2} \frac{2 \delta}{\nu} = \frac{U \delta}{\nu} = Re_\delta.$$

Der Reynolds-Zahl bei der Rohrströmung entspricht damit die mit der Grenzschichtdicke  $\delta$  gebildete Reynolds-Zahl beim Flügel.

**Bild 3.117**

Zusammenhang der Reynolds-Zahlen beim Rohr und Flügel

**Bild 3.118**  
Turbulentes und laminares Geschwindigkeitsprofil bei der Plattenströmung



$$Re_\delta = \frac{U \delta}{\nu} = \frac{U \ell}{\nu} \frac{\delta}{\ell} = (\text{Plattengrenzschicht}) = 3,46 \sqrt{Re_\ell} ,$$

$$Re_D = 3,46 \sqrt{Re_\ell} . \tag{3.197}$$

Dies ist der Zusammenhang der Reynolds-Zahlen bei den zwei typischen Strömungsproblemen. Der wesentliche Unterschied liegt in den verschiedenen charakteristischen Längenmaßstäben.

Das turbulente Geschwindigkeitsprofil ist stets völliger als das laminare (Bild 3.118). Diese von der Rohrströmung her bekannte Aussage gilt genauso auch bei Umströmungsproblemen. Für die Platte stellen wir das laminare und das turbulente Ergebnis zusammen:

$$\frac{W_R}{\frac{\rho}{2} U^2 b \ell} = \zeta = \begin{cases} \frac{1,328}{\sqrt{Re_\ell}} , & \text{laminar ,} \\ \frac{0,074}{(Re_\ell)^{1/5}} , & \text{turbulent .} \end{cases} \tag{3.198}$$

Die folgende Tabelle erläutert die Größenordnungen.

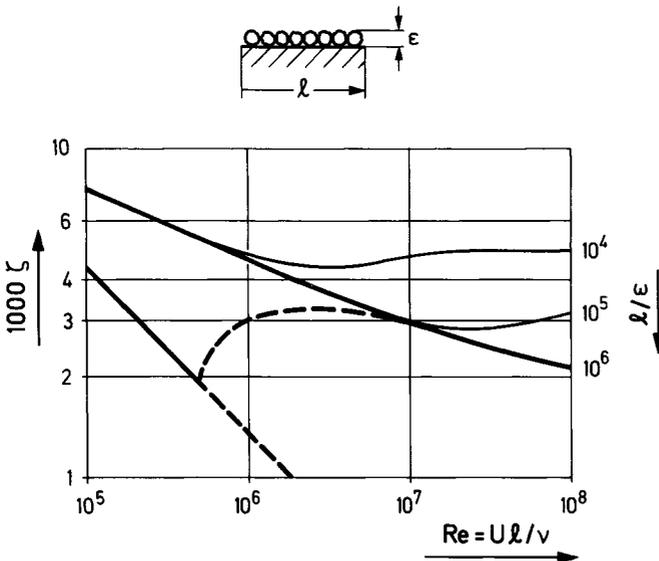
	$Re_\ell$	$\zeta$
laminar	$10^6$ (obere Grenze)	$1,3 \cdot 10^{-3}$
turbulent	$10^5$ $10^6$ $5 \cdot 10^7$	$7,4 \cdot 10^{-3}$ $4,7 \cdot 10^{-3}$ $2,1 \cdot 10^{-3}$

Bei gleicher Reynolds-Zahl ist also  $\zeta_{\text{turb}} > \zeta_{\text{lam}}$  und damit ist der **Reibungswiderstand** der laminaren Strömung kleiner als der der turbulenten. Diese Tatsache hat im Flugzeugbau zur Entwicklung der sogenannten Laminarprofile geführt. Hier wird durch geeignete Wahl der Profilform der Umschlagpunkt möglichst weit zum Körperheck verschoben, damit die laminare Grenzschicht lange erhalten bleibt. Man muß dabei allerdings beachten, daß neben dem Reibungswiderstand noch der **Druckwiderstand** auftritt. Erst beide Anteile zusammen ergeben den **Gesamtwiderstand**. Das Verhältnis der beiden Komponenten kann dabei in weiten Grenzen variieren. Bei der längsangeströmten Platte tritt z.B. nur Reibungswiderstand auf, bei der quergestellten Platte dagegen nur Druckwiderstand. Wir kommen darauf im nächsten Abschnitt zurück.

Für den Reibungswiderstand  $\zeta$  der rauen Platte gilt eine dem Nikuradse-Diagramm ähnliche Darstellung (Bild 3.119). Die Platte ist hydraulisch glatt, wenn die folgende Abschätzung gilt ( $\epsilon$  = Erhebung der äquivalenten Sandkornrauigkeit):

$$\frac{U \epsilon}{\nu} = \text{Re}_\ell \frac{\epsilon}{\ell} \leq 100. \tag{3.199}$$

Das zulässige Rauigkeitsverhältnis  $\epsilon/\ell$  nimmt mit wachsender Reynolds-Zahl ab. Bei einem Hochgeschwindigkeitsflugzeug sei z.B.  $U = 500 \text{ m/s}$ ,  $\ell = 3 \text{ m}$ ,  $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\text{Re}_\ell = 10^8$ ,  $(\epsilon/\ell)_{\text{zul}} = 10^{-6}$ ,  $\epsilon_{\text{zul}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ . Bild 3.119 liefert hierzu  $\zeta = 0,002$ . Erhöhen wir die Rauigkeit um eine Zehnerpotenz auf  $\epsilon = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$ , so wird  $\zeta = 0,0033$ . Zum Unterschied gegenüber der Rohrströmung kommt es bei der Plattenströmung nicht zu einer ausgebildeten Strömung. Die Grenzschichtdicke nimmt in Strömungsrichtung ständig zu, und damit wächst



**Bild 3.119**  
Widerstandsbeiwert  $\zeta$  der Platte als Funktion von Rauigkeit und Reynolds-Zahl

die (laminare) Reibungsunterschicht ebenfalls. Rauigkeiten wirken sich vorn also wesentlich gravierender aus als weiter stromabwärts, wo sie gegebenenfalls bereits in der Unterschicht verschwinden. Eine besonders gute Bearbeitung der vorderen Partien des umströmten Körpers dürfte sich daher in vielen Fällen lohnen.

### 3.3.13 Energiesatz

Neben dem Kräftegleichgewicht, in Form der Navier-Stokes-Gleichungen, spielt die **Energiebilanz** im Stromfeld eine wichtige Rolle. Wir erweitern jetzt die früher angestellte elementare Betrachtung (3.17) - (3.22) auf den Fall der mehrdimensionalen, instationären Strömung mit Reibung, Wärmeleitung, äußerer Wärmezu- und -abfuhr etc.

Fassen wir wie in (3.17) die innere Energie ( $e$ ) und die kinetische Energie ( $1/2 c^2$ ) zusammen, so ist deren totale zeitliche Änderung im Volumen  $V$  durch die Leistung aller im folgenden aufgeführten Anteile gegeben:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left( e + \frac{1}{2} c^2 \right) dV = \quad (3.200)$$

= Leistung der Massenkkräfte  $\vec{f}$  (Schwerkraft, elektrische-, magnetische Feldkräfte), der Oberflächenkräfte (Druck-, Reibungskräfte), der Wärmeströme durch Leitung, Strahlung oder Reaktionen  $\dot{q}_s$ . Benutzen wir die Bilder 3.105 und 3.65 sowie (3.95), so wird aus (3.200)

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} c^2 \right) \right] dV + \iint_A \rho \left( e + \frac{1}{2} c^2 \right) (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA = (\text{Gaußscher Satz}) \\ &= \iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{1}{2} c^2 \right) + \text{div} \left[ \rho \vec{w} \left( e + \frac{1}{2} c^2 \right) \right] \right\} dV = \\ &= \iiint_V \rho (\vec{f} \cdot \vec{w}) dV - \iint_A p (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA + \quad (3.201) \\ &+ \iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx} + v \sigma_{xy} + w \sigma_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \sigma_{yy} + w \sigma_{yz} + u \sigma_{yx}) \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial z} (w \sigma_{zz} + u \sigma_{zx} + v \sigma_{zy}) \right\} dV \\ &+ \iint_A \lambda (\text{grad } T \cdot \vec{n}) dA + \iiint_V \rho \dot{q}_s dV. \end{aligned}$$

Hierin kann man wiederum mit dem Gaußschen Satz alle auftretenden Oberflächenintegrale in Volumenintegrale umformen. Der Integrand muß insgesamt verschwinden, da das Volumen

V beliebig ist. Wir erhalten aus (3.201) die folgende umfangreiche Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} c^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} c^2 \right) \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho v \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} c^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho w \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} c^2 \right) \right] = \\
 & \quad = \rho (u f_x + v f_y + w f_z) + u \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) + v \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \right) \\
 & \quad + w \left( \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \right) + \left[ \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right. \\
 & \quad \left. + \sigma_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \sigma_{yz} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \sigma_{zx} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho \dot{q}_s .
 \end{aligned} \tag{3.202}$$

Man benutzt hierin im gestrichelt eingerahmten Anteil die Navier-Stokes-Gleichungen (NS Gl.) (3.169) in der folgenden Form:  $u \cdot$  (1. NS Gl.) +  $v \cdot$  (2. NS Gl.) +  $w \cdot$  (3. NS Gl.) und die Kontinuitätsgleichung (3.65). Differenziert man alles aus, faßt geeignet zusammen, so kommt mit der Abkürzung  $\phi$  für den durchgehend eingerahmten Anteil (=Dissipation)

$$\frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{di}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = T \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + \phi + \dot{q}_s . \tag{3.203}$$

Hier stehen auf der rechten Gleichungsseite die durch Wärmeleitung, Reibung (Dissipation  $\phi$ ), Strahlung sowie durch Reaktionen zugeführten Wärmen, die zu einer Entropiezunahme beitragen. Diese Aussage entspricht völlig dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik

$$T ds = \delta q ,$$

worin rechts alle dem Massenelement zu- oder abgeführten Wärmen aufzunehmen sind.

Wir behandeln einen Spezialfall. Wendet man (3.203) auf das ideale Gas konstanter spezifischer Wärme an, so kommt mit  $e = c_v T$ ,  $i = c_p T$  und  $\lambda = \text{konst}$  sofort die folgende

### Wärmetransportgleichung

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt} &= \lambda \operatorname{div} (\operatorname{grad} T) + \rho \phi + \rho \dot{q}_s \\ &= \lambda \Delta T + \rho \phi + \rho \dot{q}_s, \end{aligned} \quad (3.204)$$

die eine Verallgemeinerung der bekannten Fourierschen Wärmeleitungsgleichung ist.

#### 3.3.14 Widerstand und Druckverlust

Der Gesamtwiderstand (1) ist die Summe aus Reibungswiderstand (2) und Druckwiderstand (3). Was die Messungen betrifft, so ergibt sich (1) aus einer einfachen Kraftmessung und (3) durch Integration der Druckverteilung über den Körper. Der in der Regel schwerer meßbare Anteil (2) stellt sich dann als Differenz der Terme (1) und (3) dar. Der Druckwiderstand (3) kann von erheblicher Größenordnung sein, da durch eine Ablösung die potentialtheoretische Druckverteilung in der Nähe des Körperhecks wesentlich geändert werden kann. Das gegenseitige Größenverhältnis von (2) zu (3) kann ganz verschieden sein, wie wir im letzten Abschnitt bereits festgestellt haben. Daher muß eine Optimierung stets beide Einflüsse berücksichtigen. Es gelten folgende Aussagen:

1. Der **Reibungswiderstand** ist dadurch zu minimieren, daß man nach Möglichkeit für eine laminare Grenzschicht sorgt.
2. Den **Druckwiderstand** kann man dadurch verringern, daß man die Ablösestelle möglichst weit ans Körperheck verschiebt.

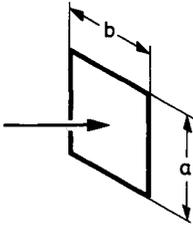
Beide Einflüsse überlagern sich und variieren teilweise gegenläufig. Bei der Besprechung des Widerstandes der Kugel kommen wir hierauf zurück.

#### A Umströmungsprobleme

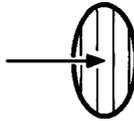
Wir kommen jetzt auf die ganz am Anfang diskutierten Grundaufgaben der Strömungslehre zurück. In diesem Abschnitt handelt es sich hauptsächlich um den **Widerstand** eines Körpers in einer Strömung:

$$W = \frac{\rho}{2} c^2 A c_w. \quad (3.205)$$

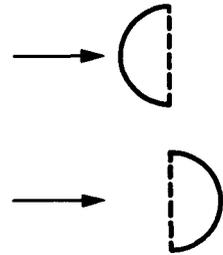
$c$  ist die Anströmgeschwindigkeit und  $A$  eine charakteristische Bezugsfläche. Der dimensionslose Widerstandsbeiwert  $c_w$  hängt hierbei von allen Kennzahlen des Problems:  $Re$ ,  $M$  etc., ab.



**Bild 3.120**  
Strömung gegen eine Rechteckplatte



**Bild 3.121**  
Strömung gegen eine Kreisscheibe



**Bild 3.122**  
Strömung gegen eine Halbkugel

### 1. Kennzahlunabhängige Körperformen

Hierbei ist in der Regel eine Ablösung an einer scharfen Kante fixiert. Eine Reynolds-Zahl-Unabhängigkeit liegt bei genügend hoher Reynolds-Zahl vor. Der Körper besitzt vornehmlich Druckwiderstand.

Strömung normal gegen eine **Rechteckplatte** (Bild 3.120):

a / b	1	2	4	10	18	$\infty$
$c_w$	1,10	1,15	1,19	1,29	1,40	2,01

**Kreisscheibe** (Bild 3.121)  $c_w = 1,11$

**Halbkugel** (Bild 3.122)

ohne Boden  $c_w = 0,34$ ,

mit Boden  $c_w = 0,42$ .

ohne Deckfläche  $c_w = 1,33$ ,

mit Deckfläche  $c_w = 1,17$ .

### 2. Kennzahlabhängige Körperformen

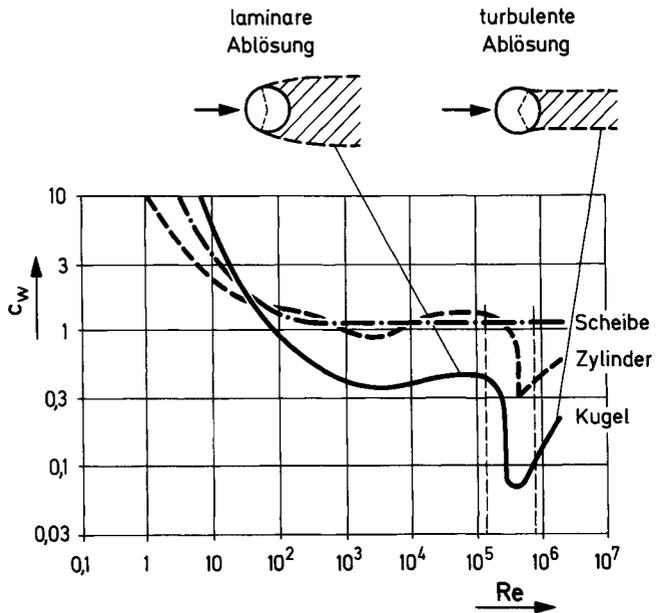
Jetzt ist die Lage des Ablösepunktes von der Reynolds-Zahl abhängig. Bei der **Kugel** gilt für  $Re \lesssim 1$  die Stokessche Formel (= schleichende Strömung)  $c_w = 24/Re$ . Hierin sind 1/3 Druckwiderstand und 2/3 Reibungswiderstand. Für größere Reynolds-Zahlen ist (Bild 3.123):

	unterkritisch	überkritisch	
Re	$2 \cdot 10^4$ bis $3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$10^6$
$c_w$	0,47	0,09	0,13

Beim **Zylinder** gilt entsprechend (Bild 3.123):

	unterkritisch	überkritisch
Re	$\sim 2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$
$c_w$	1,2	0,3 - 0,4

Bemerkenswert ist in beiden Fällen der rapide Widerstandsabfall beim Umschlag der laminaren in die turbulente Grenzschichtströmung. Beim Überschreiten von  $Re_{krit} \approx 5 \cdot 10^5$  nimmt der Druckwiderstand erheblich ab, da die turbulente Grenzschicht aufgrund des



**Bild 3.123**  
Widerstands-  
koeffizienten von  
Kugel, Zylinder  
und Scheibe als  
Funktion der  
Reynolds-Zahl

größeren Energieaustausches mit der Außenströmung erst später ablöst als die laminare. Prandtl konnte dies mit einem Draht, der auf der Stirnseite der Kugel auflag (Stolperdraht) und dadurch die Strömung turbulent machte, überzeugend nachweisen. Im vorliegenden Fall ist es so, daß die **Abnahme** des Druckwiderstandes die **Zunahme** des Reibungswiderstandes überkompensiert derart, daß der Gesamtwiderstand beträchtlich sinkt. Hier spielt also der Druckwiderstand und dessen Variation die entscheidende Rolle. Dabei ist zu beachten, daß die spezielle Körperform ganz wesentlich eingeht. Liegt ein anderer Körper vor, so kann sich das Verhältnis umkehren. Der Leser kann nach diesen Vorbereitungen leicht die verschiedenen Fälle selbst diskutieren.

## B Durchströmungsprobleme

Hier geht es vornehmlich um die Bestimmung des **Druckverlustes**  $\Delta p_v$ :

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} c_m^2 \zeta_v. \quad (3.206)$$

$\zeta_v$  bezeichnet den Verlustkoeffizienten und hängt wie  $c_w$  von den dimensionslosen Kenngrößen des jeweiligen Problems ab. Wir sind früher wiederholt auf eine solche Darstellung gestoßen. Im folgenden werden einige Ergebnisse für das gerade Rohr, den Diffusor und den Krümmer zusammengestellt. Diese drei Beispiele stellen die wichtigsten Elemente einer Rohrleitung dar.

**1. Gerades Rohr.** Hier verweisen wir auf die in Kapitel 3.3.5 und 3.3.6 gemachten Ausführungen. Bei ausgebildeter Strömung ist

$$\zeta_v = \lambda \frac{\ell}{D}, \quad (3.207)$$

wobei  $\lambda = f(\text{Re}, R/k_s)$  durch das Nikuradse-Diagramm (Bild 3.91) gegeben ist. Handelt es sich um die Strömung in der Einlaufstrecke, so muß man auf (3.206) zurückgehen.

**2. Diffusor.** In diesem Zusammenhang erinnern wir zunächst an den Grenzfall des Carnot-Diffusors. Vergleichen wir (3.206) mit (3.106), so wird

$$\zeta_v = \frac{\Delta p_{v,c}}{\frac{\rho}{2} c_m^2} = \frac{\Delta p_{id} - \Delta p_c}{\frac{\rho}{2} c_m^2} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2. \quad (3.208)$$

Für den Diffusor mit stetiger Querschnittserweiterung gilt

$$\zeta_v = k(\alpha) \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

mit  $\alpha$  als Öffnungswinkel:

$\alpha$	5°	7,5°	10°	15°	20°
k	0,13	0,14	0,16	0,27	0,43

**3. Krümmer.** Dieses Element sei hier kurz dargestellt, da wir es früher nicht behandelt haben. Verabredungsgemäß wird nur der **Zusatz**druckverlust gegenüber dem geraden Rohr gleicher Länge angegeben. Die Größenordnung ist aus Bild 3.124 zu entnehmen ( $Re = 10^5$ ). Danach reduziert bereits eine unprofilierte Schaufel den Druckverlustkoeffizienten von 1,4 auf 0,76. Ein Kreisbogengitter führt zu 0,20. Profilierung der Schaufeln reduziert den  $\zeta$ -Wert erneut bis auf etwa 0,10.

Benutzt man  $\zeta_{kr}$  in (3.207), so kann man eine dem Krümmerverlust äquivalente Rohrlänge definieren:

$$\frac{\ell}{D} = \frac{\zeta_{kr}}{\lambda} \tag{3.209}$$

Einem Krümmer mit  $\zeta_{kr} = 0,20$  entspricht damit z.B. ein gerades Rohrstück ( $Re = 10^5, \lambda = 0,02$ ) von

$$\frac{\ell}{D} = 10.$$

Der additive Druckverlust des geraden Rohres gleicher Länge eines Krümmers ist ( $Re = 10^5, \lambda = 0,02, \ell/D_h \approx 3$ )

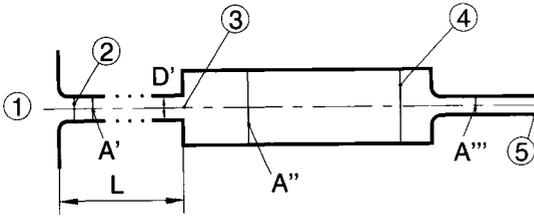
$$\zeta = 0,06.$$

Dies entspricht dem halben Wert eines sehr guten Krümmers.

Wir erläutern die Ergebnisse dieses Abschnittes an einem Beispiel. Ein inkompressibles Medium strömt stationär durch die in Bild 3.125 angegebene Leitung mit dem Volumenstrom

$\zeta$	1.4	0.76	0.20
Krümmer Variante			
		1 Schaufel	Gitter

**Bild 3.124**  
Widerstandsbeiwerte von Krümmern

**Bild 3.125**

Zum Druckverlust in einer durchströmten Leitung. Kessel ①, langes Rohr (Reibung) ② → ③, Carnot-Diffusor ③ → ④, kurzes Rohr (ohne Reibung) ④ → ⑤.

$\dot{V}$ . Gesucht ist der Druckverlust  $p_1 - p_5$ . Wir benutzen abschnittsweise unterschiedliche Strömungsmodelle und die zugehörigen Gleichungen:

$$\text{Bernoulli-Gleichung } \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} : p_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2,$$

$$\text{Rohrströmung } \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3} : p_2 = p_3 + \frac{\rho}{2} c_m^2 \frac{L}{D'} \lambda,$$

$$\text{Carnot-Diffusor } \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4} : p_4 = p_3 + \frac{\rho}{2} c_3^2 2 \frac{A'}{A''} \left(1 - \frac{A'}{A''}\right),$$

$$\text{Bernoulli-Gleichung } \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{5} : p_4 + \frac{\rho}{2} c_4^2 = p_5 + \frac{\rho}{2} c_5^2,$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung: } \dot{V} = c_2 A' = c_m A' = c_3 A' = c_4 A'' = c_5 A'''.$$

Durch Elimination von  $p_2$ ,  $p_3$  und  $p_4$  erhält man

$$p_1 = p_5 + \frac{\rho}{2} c_5^2 + \frac{\rho}{2} c_m^2 \frac{L}{D'} \lambda + \frac{\rho}{2} c_m^2 \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2,$$

worin  $c_5 = \dot{V}/A'''$  und  $c_m = \dot{V}/A'$  gegeben sind. Gemäß (3.206), (3.207) und (3.208) läßt sich das Ergebnis in der folgenden Form schreiben:

$$p_1 = p_5 + \frac{\rho}{2} c_5^2 + \Delta p_{v,\text{Rohr}} + \Delta p_{v,\text{Carnot}}.$$

Dies wird häufig als sogenannte **Bernoulli-Gleichung mit Verlustgliedern** bezeichnet. Man hat also auf der rechten Seite lediglich die einzelnen Druckverluste der durchströmten Leitung additiv zu berücksichtigen. Das vereinfacht die Betrachtungen oft erheblich, setzt aber einige Erfahrungen im Umgang mit den verschiedenen Verlustgliedern voraus.

### 3.3.15 Ähnlichkeitsbetrachtungen

Anhand von Beispielen haben wir oben eine ganze Reihe von Aussagen über Widerstand und Druckverlust gemacht. Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu einer allgemeinen Diskussion dieser Größen, insbesondere was ihre Abhängigkeit von den früher eingeführten Kennzahlen angeht (Kapitel 3.3.3). Dies führt zwangsläufig zu Ähnlichkeitsüberlegungen und Modellgesetzen, die für die Anwendungen sehr wichtig sind. Erneut tritt die schon in der Einleitung besprochene Alternative von Umströmungs- und Durchströmungsproblemen auf. Wir besprechen diese Fragestellungen der Reihe nach.

#### 1. Umströmungsaufgaben

Wir untersuchen einen Körper, der von einem Fluid ( $\eta$ ,  $\rho$ ) mit der Geschwindigkeit  $c$  umströmt wird (Bild 3.126). Modell und Großausführung sollen zueinander geometrisch ähnlich sein. Damit charakterisiert die Länge  $\ell$  eindeutig das jeweilige Körperexemplar. Interessieren wir uns für den Widerstand  $W$ , so besteht eine Abhängigkeit der Form

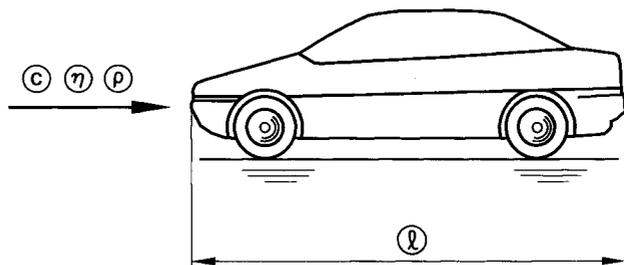
$$W = f(c, \ell, \rho, \eta). \quad (3.210)$$

Hierin treten also vier unabhängige Variable ( $c, \ell, \rho, \eta$ ) auf, und es bedarf dementsprechend vieler Messungen, um die Funktion  $f$  zu bestimmen. Diese charakterisiert die jeweilige Körperklasse. Geht man zu einer anderen Form des Körpers über, so tritt an die Stelle von  $f$  eine andere Funktion. Der Übergang zu dimensionslosen Größen führt zu einer erheblichen Reduktion der Zahl der Variablen und damit natürlich auch der erforderlichen Messungen. Wir führen dies exemplarisch am obigen Beispiel vor.

In der Mechanik treten drei Basisgrößen (Masse, Länge, Zeit oder Kraft, Länge, Zeit) auf. Demgemäß wählen wir aus dem Satz der oben eingehenden physikalischen Größen ( $W, c, \ell, \rho, \eta$ ) drei aus, z.B. ( $c, \ell, \rho$ ), und stellen die übrigen zwei dimensionsmäßig durch Potenzprodukte dieser drei dar. Die Dimension einer Größe  $a$  bezeichnen wir hier mit  $[a]$ :

$$[W] = [c]^a \cdot [\ell]^b \cdot [\rho]^c, \quad (3.210a)$$

$$[\eta] = [c]^A \cdot [\ell]^B \cdot [\rho]^C. \quad (3.210b)$$



**Bild 3.126**  
Umströmung eines Körpers

Gehen wir hierin zu Kraft (F), Länge (L), Zeit (T) über, so wird

$$F = L^a T^{-a} L^b F^c L^{-4c} T^{2c}, \quad (3.211a)$$

$$F L^{-2} T = L^A T^{-A} L^B F^C L^{-4C} T^{2C}. \quad (3.211b)$$

Ein Exponentenvergleich bei den Basisgrößen führt zu

$$a = 2, b = 2, c = 1,$$

$$A = 1, B = 1, C = 1.$$

Damit reduzieren sich die fünf eingehenden physikalischen Größen auf die zwei Kennzahlen

$$\frac{W}{\frac{\rho}{2} c^2 \ell^2} = \pi_1, \quad \frac{c \ell}{v} = \pi_2. \quad (3.212)$$

Der funktionale Zusammenhang (3.210) zieht jetzt eine Abhängigkeit der Form

$$\frac{W}{\frac{\rho}{2} c^2 \ell^2} = h \left( \frac{c \ell}{v} \right) = h(\text{Re}_\ell) \quad (3.213)$$

nach sich. Damit ist die Zahl der erforderlichen Messungen außerordentlich reduziert. Der Widerstandsbeiwert hängt nur noch von der Reynolds-Zahl ab. In dieser komprimierten Form lassen sich alle früheren Widerstandsdarstellungen zusammenfassen. (3.213) gilt für Modell und Großausführung in gleicher Weise. Die Umrechnung vom einen zum anderen Fall kann sofort vorgenommen werden.

## 2. Durchströmungsaufgaben

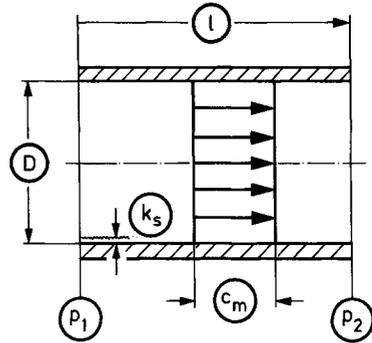
Wir beginnen mit dem horizontalen Kreisrohr (Bild 3.127). Ein Fluid ( $v, \rho$ ) durchströmt ein Rohrstück ( $\ell, D, k_s$ ) mit der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{c}_m$ . Dabei ergibt sich der Druckabfall  $\Delta \bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2$ . Es besteht eine Abhängigkeit der Form

$$\Delta \bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = f(\ell, D, k_s; \rho, v, \bar{c}_m). \quad (3.214)$$

Wir gehen auch hier zu den Dimensionen über und stellen beispielsweise  $\Delta \bar{p}, D, k_s, v$  durch  $\ell, \rho, \bar{c}_m$  dar. Mit einer ähnlichen Rechnung wie oben kommen diesmal vier Kenngrößen

$$\frac{\Delta \bar{p}}{\frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2} = \pi_1, \quad \frac{\bar{c}_m D}{v} = \pi_2, \quad \frac{\ell}{D} = \pi_3, \quad \frac{k_s}{D} = \pi_4. \quad (3.215)$$

**Bild 3.127**  
Durchströmung eines horizontalen, geraden  
Kreisrohres



Die Abhängigkeit (3.214) führt zu dem funktionalen Zusammenhang

$$\frac{\Delta \bar{p}}{\frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2} = F\left(\frac{\ell}{D}, \frac{\bar{c}_m D}{\nu}, \frac{k_s}{D}\right). \tag{3.216}$$

Diese Beziehung gilt allgemein, d.h. auch in der Einlaufstrecke. Liegt speziell eine ausgebildete Strömung vor, so ist kein Rohrabschnitt gegenüber einem anderen ausgezeichnet. In diesem Fall muß  $F$  eine lineare Funktion von  $\ell/D$  sein. Damit wird aus (3.216)

$$\frac{\Delta \bar{p}}{\frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2} = \frac{\ell}{D} \lambda\left(\text{Re}_D, \frac{k_s}{D}\right), \tag{3.217}$$

womit die früheren Darstellungen für laminare und turbulente Strömungen erfaßt werden. Vergleicht man (3.214) mit (3.217), so erkennt man sofort den erzielten Fortschritt. Die Zahl der erforderlichen Messungen ist außerordentlich reduziert. Das Nikuradse-Diagramm liefert die Funktion  $\lambda$ , und als unabhängige Variablen gehen hier allein die Reynolds-Zahlen und der Rauigkeitsparameter ein. Auch in diesem Fall gilt (3.217) für Modell und Großausführung in gleicher Weise. Geometrisch ähnliche Strömungen werden durch gleiche Werte von  $\ell/D$  und  $k_s/D$  beschrieben. Betrachtet man eine Düse oder einen Diffusor, so tritt als zusätzlicher Parameter z.B. das Durchmesser Verhältnis

$$\frac{D_1}{D_2} = \pi_5 \tag{3.218}$$

auf. An dieser Stelle kann natürlich auch das Flächenverhältnis  $A_1/A_2$  bzw. ein charakteristischer Winkel  $\alpha$  benutzt werden. Berücksichtigt man dies in (3.216), so gilt allgemein

$$\frac{\Delta \bar{p}}{\frac{\rho}{2} \bar{c}_m^2} = G \left( \frac{\ell}{D_1}, \frac{D_1}{D_2}, \frac{\bar{c}_m D}{v}, \frac{k_s}{D_1} \right). \quad (3.219)$$

Durch Spezialisierung kommt z.B. die Formel für den Carnot-Diffusor (3.208). Der Leser diskutiere ausführlich die hierzu erforderlichen Voraussetzungen und vergleiche insbesondere die frühere Herleitung mit dem Impulssatz.

## TABELLE

DIMENSIONEN und EINHEITEN der wichtigsten auftretenden Größen:

GRÖSSE, Bezeichnung	DIMENSIONEN		EINHEITEN
	F, L, T, $\vartheta$	M, L, T, $\vartheta$	
Länge	L	L	Meter, m
Kraft	F	MLT <sup>-2</sup>	Newton, N
Masse	FL <sup>-1</sup> T <sup>2</sup>	M	Kilogramm, kg
Zeit	T	T	Sekunde, s
Temperatur	$\vartheta$	$\vartheta$	Kelvin, K
Geschwindigkeit	LT <sup>-1</sup>	LT <sup>-1</sup>	m/s
Beschleunigung	LT <sup>-2</sup>	LT <sup>-2</sup>	m/s <sup>2</sup>
Druck, Spannung	FL <sup>-2</sup>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	Pascal, Pa = N/m <sup>2</sup>
Moment, Arbeit, Energie	FL	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	Joule, J = Ws = Nm
Leistung, Energiestrom	FLT <sup>-1</sup>	ML <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>	Watt, W = N m/s
Dichte $\rho$	FL <sup>-4</sup> T <sup>2</sup>	ML <sup>-3</sup>	kg/m <sup>3</sup>
Massenstrom $\dot{m}$	FL <sup>-1</sup> T	MT <sup>-1</sup>	kg/s
dyn. Viskosität $\eta$	FL <sup>-2</sup> T	ML <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>	Pas = N s/m <sup>2</sup>
kin. Viskosität $\nu$	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>	m <sup>2</sup> /s
Ausdehnungskoeffizient $\alpha$	$\vartheta^{-1}$	$\vartheta^{-1}$	1/K
spez. Wärme $c_p, c_v$	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> $\vartheta^{-1}$	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> $\vartheta^{-1}$	J/kg K
Wärmeleitfähigkeit $\lambda$	FT <sup>-1</sup> $\vartheta^{-1}$	MLT <sup>-3</sup> $\vartheta^{-1}$	W/m K
Oberflächenspannung $\sigma$	FL <sup>-1</sup>	MT <sup>-2</sup>	N/m
Temperaturleitfähigkeit $k = \lambda / \rho c_p$	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>	m <sup>2</sup> /s
Wärmeübergangszahl $\alpha$	FL <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup> $\vartheta^{-1}$	MT <sup>-3</sup> $\vartheta^{-1}$	W/m <sup>2</sup> K
spezielle Gaskonstante $\beta_R$	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> $\vartheta^{-1}$	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> $\vartheta^{-1}$	J/kg K
Entropie s	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> $\vartheta^{-1}$	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> $\vartheta^{-1}$	J/kg K

## Ausgewählte Literatur

### A) Allgemeine Strömungslehre

- Albring, W.: Angewandte Strömungslehre. Berlin 1996 (6.Aufl.)  
 Becker, E.: Technische Strömungslehre. Stuttgart 1993 (6.Aufl.)  
 Eck, B.: Technische Strömungslehre. Berlin/Heidelberg/New York 1966 (7.Aufl.)  
 Gersten, K.: Einführung in die Strömungsmechanik. Aachen 2003  
 Leiter, E.: Strömungsmechanik nach Vorlesungen von K.Oswatitsch. Braunschweig 1990  
 Oertel, H.jr., Böhle, M. und Dohrmann, U.: Strömungsmechanik. Wiesbaden 2006 (4.Aufl.)  
 Oertel, H.jr., Böhle, M. und Dohrmann, U.: Übungsbuch Strömungsmechanik. Wiesbaden 2006 (5.Aufl.)  
 Oswatitsch, K.: Physikalische Grundlagen der Strömungslehre. Handbuch der Physik. Bd. VIII/1. Berlin/Heidelberg/New York 1959  
 Prandtl, L.: Führer durch die Strömungslehre. Neubearbeitung v. Oertel, H.jr., (Hrsg.). Wiesbaden 2002 (11.Aufl.)  
 Schade, H. und Kunz, E.: Strömungslehre. Berlin/New York 2007 (3.Aufl.)  
 Truckenbrodt, E.: Fluidmechanik I,II. Berlin 1998 (4.Aufl.)  
 Wieghart, K.: Theoretische Strömungslehre. Hannover 2006 (2.Aufl.)  
 Zieryp, J. und Bühler, K.: Strömungsmechanik E 120 – 186. Hütte. Berlin/Heidelberg/New York 2004 (32.Aufl.)  
 Zieryp, J. und Bühler, K.: Strömungsmechanik. Berlin/Heidelberg/New York 1991

### B) Teilgebiete der Strömungslehre

- Becker, E.: Gasdynamik. Stuttgart 1982  
 Keune, F. und Burg, K.: Singularitätenverfahren der Strömungslehre. Karlsruhe 1975  
 Oertel, H.jr. und Laurien, E.: Numerische Strömungsmechanik. Wiesbaden 2003 (2.Aufl.)  
 Oswatitsch, K.: Grundlagen der Gasdynamik. Wien 1987  
 Schlichting, H., Gersten, K.: Grenzschichttheorie. Berlin 2006 (10.Aufl.)  
 Schlichting, H. und Truckenbrodt, E.: Aerodynamik des Flugzeuges. 2 Bde. Berlin 2001 (3.Aufl.)  
 Schneider, W.: Mathematische Methoden der Strömungsmechanik. Braunschweig 1978  
 Zieryp, J.: Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre. Karlsruhe 1991 (3. Aufl.)  
 Zieryp, J.: Strömungen mit Energiezufuhr. Karlsruhe 1990 (2.Aufl.)  
 Zieryp, J.: Theoretische Gasdynamik. Karlsruhe 1991 (4.Aufl.)

**Namen- und Sachverzeichnis**

- Ableitung, substantielle oder materielle 41
- Ackeret, J. 65
- Adhäsion 23
- Ähnlichkeitsbetrachtungen 165
- Aerodynamik 2, 40
- Aerostatik 2, 27
- Aggregatzustände 5
- Albring, W. 170
- Anlaufstrecke 132
- Archimedes von Syrakus 37
- Archimedisches Prinzip 37
- Auffüllen eines Kessels 77
- Auftrieb 93
- Auftrieb, hydrostatischer 36
- Auftriebskoeffizient 95
- Barometer 31
- Becker, E. 170
- Benetzung, vollständige 25
- Bernoulli, D. 2
- Bernoulli-Diffusor 109
- Bernoulli-Gleichung 47
- Bernoulli-Gleichung mit Verlustgliedern 164
- Bingham, E.C. 8
- Bingham-Medium 8
- Blasius, H. 126
- Blasius-Formel 126
- Böhle, M. 170
- Boltzmann, L. 4
- Boltzmann-Konstante 4
- Borda, J. Ch. de 110
- Borda-Mündung 110
- Boyle, R. 13
- Brown, R. 4
- Brownsche Molekularbewegung 4
- Bühler, K. 170
- Burg, K. 170
- Carnot, S. 108
- Carnot-Diffusor 108
- Cauchy, A.L. 85
- Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen 85
- Cauchyscher Hauptwert 98
- Couette, M. 6
- Couette-Strömung 6, 144
- Dämpfungszyylinder 7
- D'Alembert, J. 2
- D'Alembertsches Paradoxon 101
- Deformationsgeschwindigkeit 7
- Diffusor 107, 162
- Dimensionsbetrachtung 13
- Dipol in Parallelströmung 92
- Dipolströmung 87
- Dissipation 158
- Drehimpulssatz 114
- Drehungsfreiheit 81
- Druck, dynamischer 58
- Druck, hydrostatischer 27
- Druck, statischer 28, 58
- Druck im Schwerfeld 34
- Druck in geschichteten Medien 35
- Druckabfall in Kreisrohren 123
- Druckkoeffizient 86, 99
- Druckrückgewinn 109
- Druckverlust 162
- Druckwiderstand 156, 159
- Düse 107
- Durchmesser, hydraulischer 131
- Eck, B. 170
- Einlaufstrecke 132
- Elastizität 5
- Energiebilanz 157
- Energieellipse 70
- Energiesatz 48
- Enthalpie 49, 72
- Entropie 73, 75
- Erhaltung der Masse 103
- Euler, L. 2

- Eulersche Bewegungsgleichungen 79  
 Eulersche Gleichung 46  
 Eulersche Methode 41  
 Eulersche Turbinengleichung 116  
 Euler-Zahl 119
- Feder, elastische 8  
 Flächenkrümmung, mittlere 23  
 Flettner, A. 95  
 Flettner-Rotor 95  
 Fließfunktion 7  
 Fließspannung 8  
 Fluide 1  
 Fourier, J.B.J. 2  
 Froude, W. 119  
 Froude-Zahl 119
- Gas, ideal 15  
 Gasgleichung, ideale 15  
 Gaskinetik 11  
 Gaskonstante, allgemeine (molare) 15  
 Gaskonstante, spezifische, spezielle 15  
 Gay-Lussac, J.L. 14  
 Gersten, K. 170  
 Gesamtdruck 58  
 Gleitmodul 6  
 Grenzschichttheorie 3, 148
- Haftbedingung 3  
 Hagen, G. 3  
 Hagen-Poiseuille-Gesetz 125  
 Halbkörperumströmung 90  
 Halbkörperwiderstand 112  
 Halbkugelumströmung 160  
 Helmholtz, H.v. 2  
 Hitzdrahtmethode 122  
 Hooke, R. 5  
 hydraulisch glatt 129  
 Hydrodynamik 2, 40  
 Hydrostatik 2, 27  
 Hyperschall 66
- Impulskraft 103  
 Impulsmoment 115
- Impulssatz 102  
 instationär 43, 47
- Joukowski, N.J. 94  
 Joule, J.P. 15
- Kapillardruck 25  
 Kapillarhebung, -senkung 26  
 Kapillarität 15, 23  
 Kármán, Th. v. 128,  
 Kennzahlen 119  
 Keune, F. 170  
 Kirchhoff, G. 2  
 Körperwirbel, starrer 52, 81  
 Kontinuitätsgleichung 45, 78, 80  
 Kontrollbereich 103  
 Kreisscheibenumströmung 160  
 Krümmer 163  
 Krümmerströmung 104  
 Kugelwiderstand 161  
 Kunz, E. 170  
 Kutta, W. 94  
 Kutta-Joukowski-Bedingung 101  
 Kutta-Joukowski-Formel 94
- Lagrange, J.L. 40  
 Lagrangesche Methode 40  
 laminare Strömung 121  
 Laplace, P.S. 82  
 Laplace-Gleichung 82  
 Laurien, E. 170  
 Laval, C.G.P. de 63  
 Laval-Düse 66  
 Leiter, E. 170  
 L'Hospital, G. Fr. A. de 68
- Mach, E. 65  
 Machsche Zahl 65  
 Mach-Zahl, kritische 71  
 Magnus, H.G. 93  
 Magnus-Kraft 93  
 Mariotte, E. 13

- Massenkräfte 28  
 Maximalgeschwindigkeit 62  
 Metazentrum 39  
 Minimalflächen 16, 22  
 Molekülgeschwindigkeit, mittlere 4  
 Molmasse 15  
  
 Navier, L. 136  
 Navier-Stokes-Gleichungen 143  
 Newton, I. 2  
 Newton-Zahl 119  
 Newtonsches Fluid 7  
 Newtonsches Grundgesetz 45  
 Nicht-Newtonsches Fluid 7  
 Nikuradse, J. 127  
 Nikuradse-Diagramm 127  
  
 Oberflächenenergie, spezifische 17  
 Oberflächenkräfte 28  
 Oberflächenspannung 17  
 Oertel, H. jr. 170  
 Oswatitsch, K. 170  
  
 Paradoxon, hydrostatisches 36  
 Parallelströmung 86  
 Pascal, B. 31  
 Pitot, H. 58  
 Pitot-Rohr 58  
 Pitotrohr in Überschallströmung 78  
 Poiseuille, J.L. 3  
 Poiseuille-Strömung 144  
 Potential, komplexes 84  
 Potentialfunktion 82  
 Potentiallinien 83  
 Potentialströmung 80  
 Potentialwirbel 52  
 Prandtl, L. 3, 128, 137, 170  
 Prandtlscher Mischungsweg 137  
 Prandtsches Staurohr 58  
 Prandtl-Relation 73  
 Prandtl-Zahl 11  
 Prozesse, isentrope 14, 51  
 Prozesse, isobare 14, 50  
 Prozesse, isochore 14, 50  
  
 Prozesse, isotherme 14, 51  
  
 Quelle in Parallelströmung 90  
 Quell-Senkenströmung 87  
  
 Randwinkel 25  
 Rayleigh, J.W. 2  
 Rayleigh-Stokessches Problem 146  
 Rechteckplatte 160  
 Reibung, innere 12  
 Reibungswiderstand 151, 155, 159  
 Reynolds, O. 3  
 Reynolds-Zahl 119  
 Reynoldssche Beschreibung turbulenter Strömungen 122  
 Reynoldsscher Farbfadenversuch 121  
 Reynoldssche scheinbare Schubspannung 136  
 Rheologie 6  
 Riemann, B. 85  
 Ruhedichteabnahme 75  
 Ruhedruck 58, 62  
 Ruhedruckabnahme 75  
 Ruhetemperatur 74  
  
 Saint-Venant, A. Barré de 62  
 Sandkornrauigkeit 128  
 Sandkornrauigkeit, äquivalente 131  
 Sattelfläche 22  
 Senke in Parallelströmung 90  
 Singularitätenmethode 96  
 Sonde, statische 57  
  
 Schade, H. 170  
 Schallgeschwindigkeit 64  
 Schallnähe 66  
 Scherung 6  
 Schlichting, H. 170  
 Schmierspalt 146  
 Schneider, W. 170  
 Schubmodul 6  
 Schubspannung 7, 13, 118  
 Schubspannungen, scheinbare 136

- Schwankungsgeschwindigkeiten 122  
 Schwimmen 39
- stationär 40, 43, 46  
 Steighöhe, kapillare 25  
 Steiner, J. 35  
 Steinerscher Satz 35  
 Stokes, G.G. 120  
 Stokesscher Ansatz 142  
 Stoßwellenrohr 63  
 Strahlkontraktion 110  
 Stratosphäre 33  
 Strömungsgrenzschicht 3  
 Stromfaden 45  
 Stromfadentheorie 45, 51  
 Stromfunktion 82  
 Stromlinien 43  
 Stromröhre 45  
 Strouhal, V. 119  
 Strouhal-Zahl 119
- Teilchenbahnen 42  
 Temperaturgrenzschicht 3  
 Torricelli, E. 31  
 Torricellische Formel 60  
 Triebwerkschub 112  
 Troposphäre 33  
 Truckenbrodt, E. 170  
 Turbinenlaufrad 116  
 turbulente Strömung 121  
 Turbulenzgrad 122
- Unterschicht, laminare 130
- Verdichtungsstoß 68  
 Verdichtungsstoß, senkrechter 72  
 Viskoelastizität 8  
 Viskosität 7  
 Viskosität, dynamische 7  
 Viskosität, kinematische 7
- Waals, J.D. van der 4  
 Wärmeleitung 11  
 Wärmetransportgleichung 159  
 Wandanbohrung 57  
 Wandschubspannungsgeschwindigkeit 139  
 Wandturbulenz 139  
 Wantzell, P.L. 62  
 Weglänge, mittlere freie 4, 12  
 Widerstand 156, 159  
 Wieghardt, K. 170  
 Wirbel 51  
 Wirbelkern 53  
 Wirbelquelle, -senke 54  
 Wirbelstärke 41, 87  
 Wirbelströmung 87
- Zentrifugalkraft 30  
 Zierep, J. 170  
 Zirkulation 87  
 Zylinderumströmung mit Wirbel 92  
 Zylinderwiderstand 161