

TERMINE

Nächste Woche keine Übung am Dienstag

Montag: Rest Übungsblatt 6 am 13.12.

Mittwoch: Rest Übungsblatt 6 am 15.12.



Wiederholung

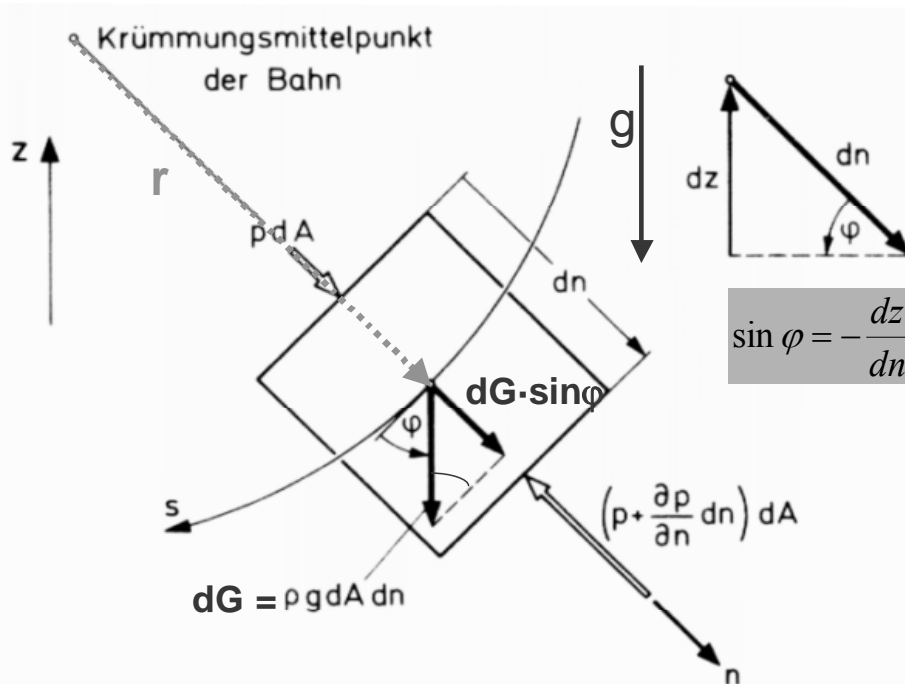
3. Hydro- und Aerodynamik

3.2 Grundgleichungen der Stromfadentheorie

3.2.2 Kräftegleichgewicht längs und quer zum Stromfaden

Reibungsfreie Strömung

Senkrecht zum Stromfadens



$$\frac{c^2}{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} + g \cdot \frac{dz}{dn}$$

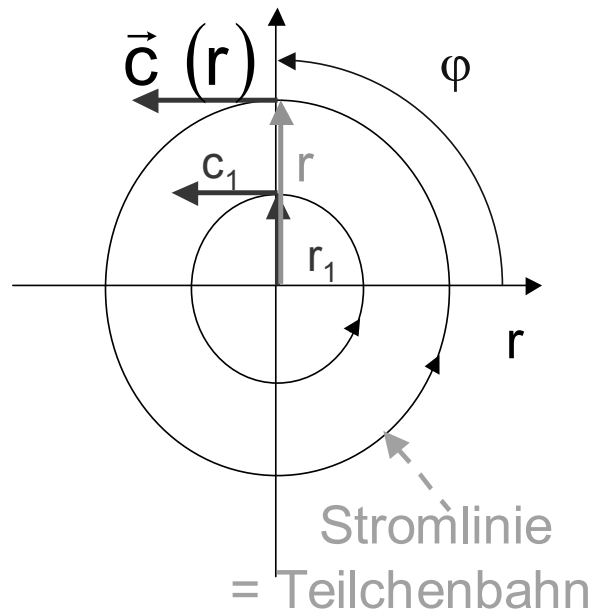
Ohne Schwerkrafteinfluss
(horizontal oder Gas bei
kleiner Höhendifferenz):

$$\frac{c^2}{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n}$$



Wiederholung

3.3.1 Bewegung auf konzentrischen Kreisbahnen



Reibungsfreie, stationäre Strömung
Kreissymmetrisch und isoenergetisch

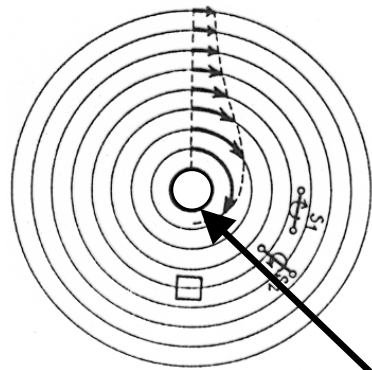
$$c(r) = \frac{\text{konst.}}{r} \sim \frac{1}{r}$$

- hyperbolische Verteilung ($\sim 1/r$)
=> Potentialwirbel
- im Kern ($r < r_1$) dominiert Reibung
=> Starrkörperwirbel ($\sim r$)

$$c(r) = \omega \cdot r = \frac{c_1}{r_1} \cdot r$$

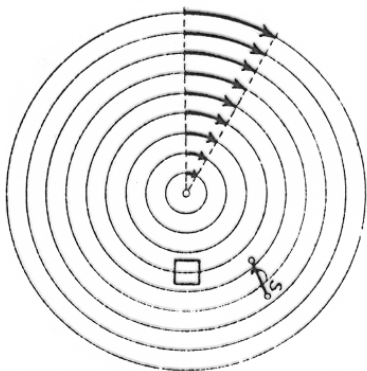
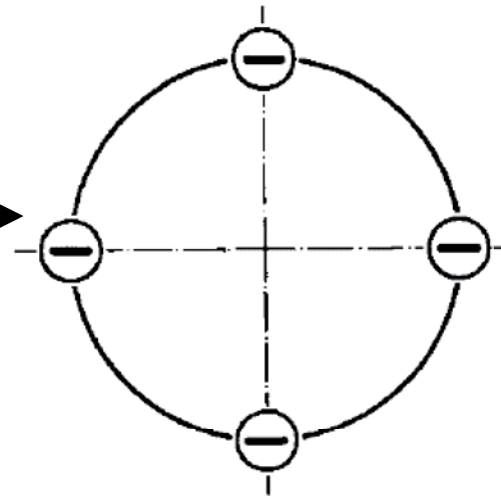
Wiederholung

3.3.1 Bewegung auf konzentrischen Kreisbahnen



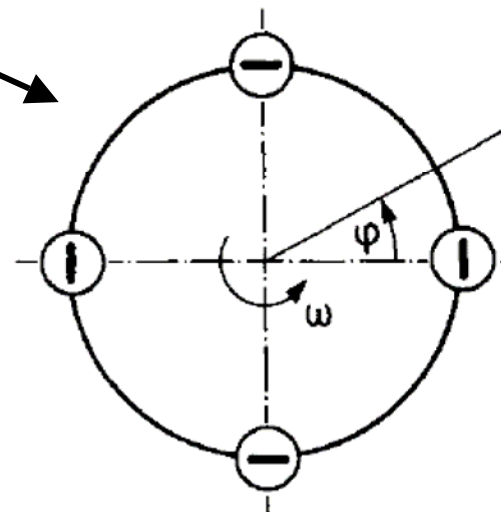
Potentialwirbel:

$$C_u(r) = \frac{C_{u1} \cdot r_1}{r} \quad \text{für } r > r_1$$

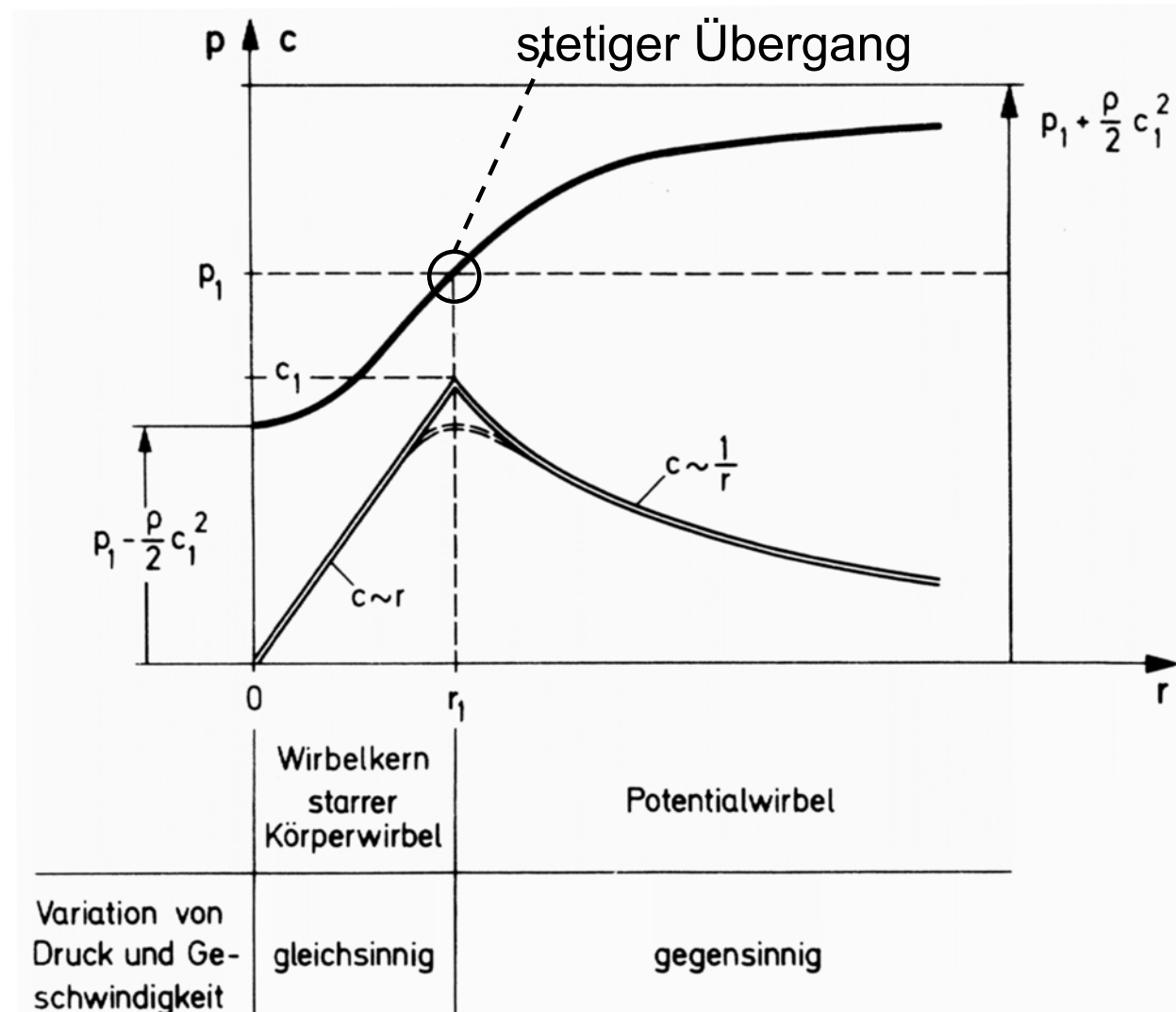


Starrkörper-Wirbel:

$$C_u(r) = \omega \cdot r \quad \text{für } r < r_1$$



Druck- und Geschwindigkeitsverteilung beim Potential- und Starr-Körper-Wirbel



r_1 bestimmbar, wenn Reibung berücksichtigt wird.



Spiralgalaxie

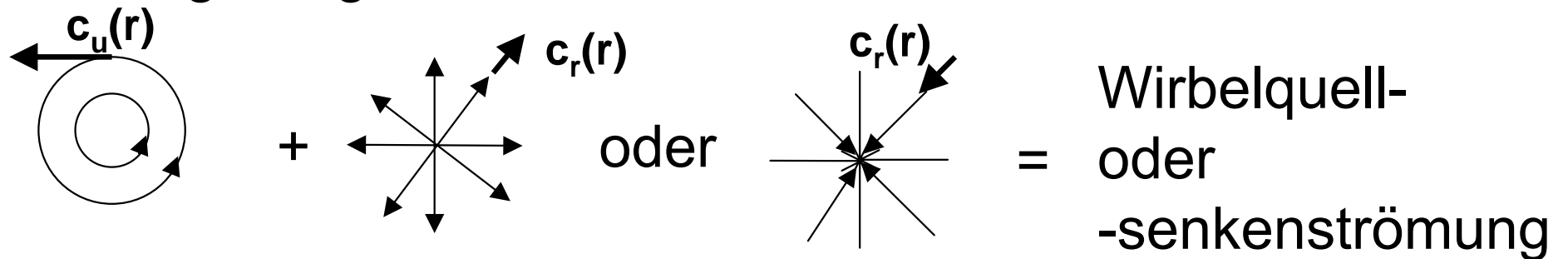


Stromfadentheorie – Wirbelströmungen



3.3.2 Wirbelquell- oder Wirbelsenkenströmung

Überlagerung von Potentialwirbel mit Quelle oder Senke:



Wirbel + Quelle oder Senke

$$c_u(r)$$

$$c_r > 0$$

$$c_r < 0$$

Potentialwirbel:

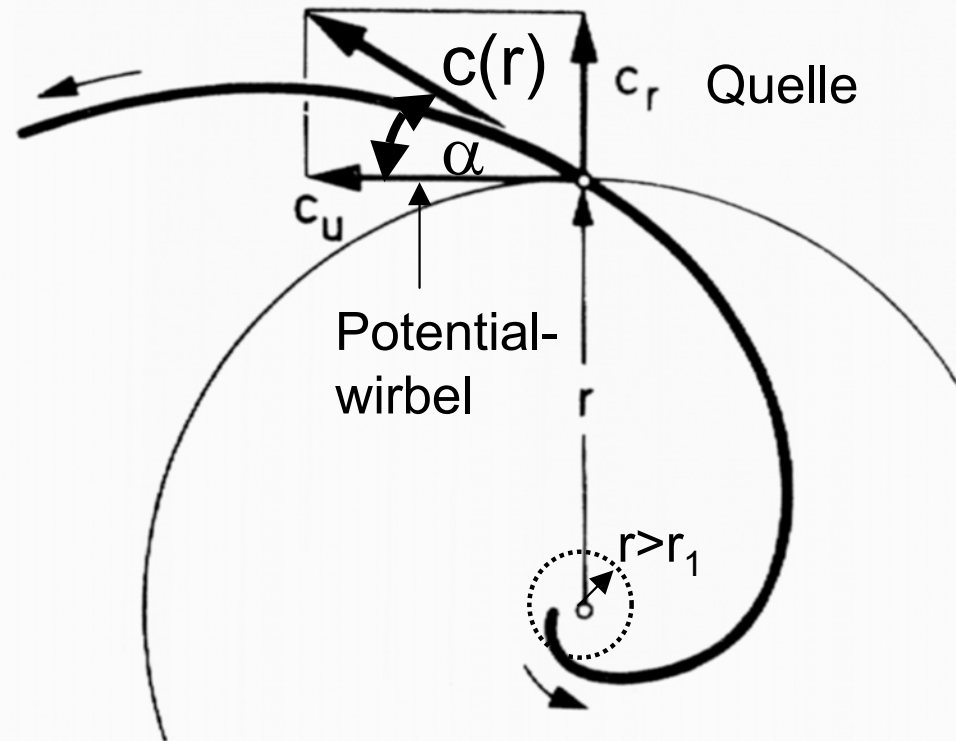
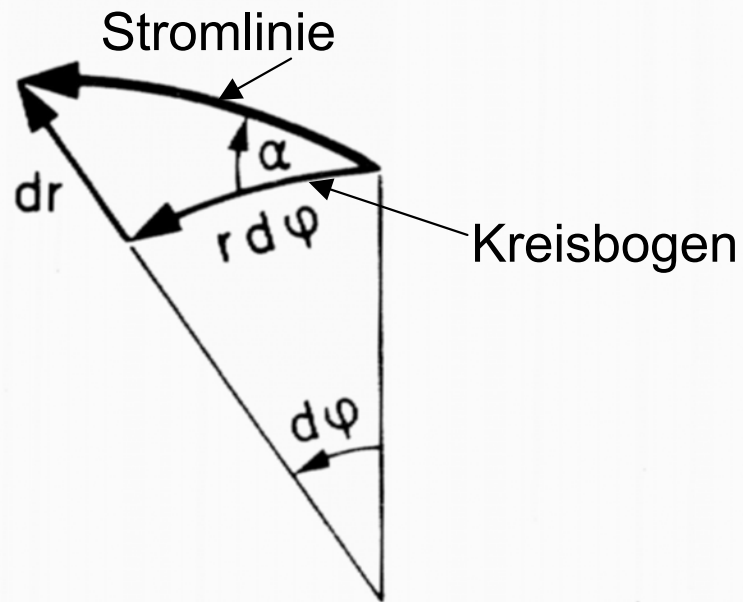
$$c_u(r) = \frac{c_{u1} \cdot r_1}{r}$$

Quelle/Senke:

$$c_r(r) = \frac{c_{r1} \cdot r_1}{r}$$



Wirbelquell- oder Wirbelsenkenströmung



Geschwindigkeitsverteilung:

$$c(r) = \sqrt{c_u^2 + c_r^2} = \sqrt{c_{u1}^2 + c_{r1}^2} \cdot \frac{r_1}{r} = \frac{\text{Konst.}}{r}$$

Stromlinie (aus $\tan \alpha = \text{konst.}$):

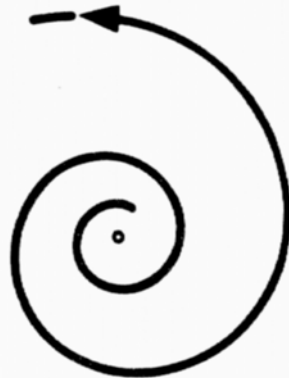
$$r(\varphi) = r_1 \cdot \exp\left[\frac{c_{r1}}{c_{u1}}(\varphi - \varphi_1)\right]$$

Mit:
 $\varphi = \varphi_1$ bei
 $r = r_1$



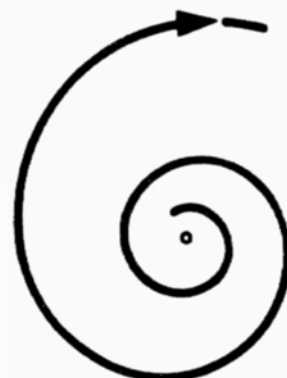
Stromlinien der Wirbelquell- oder Wirbelsenkenströmung

$$c_{u_1} > 0, c_{r_1} > 0$$



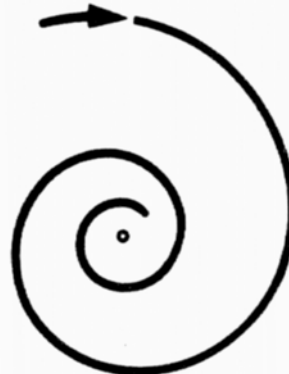
Wirbelquelle
(linksdrehend)

$$c_{u_1} < 0, c_{r_1} > 0$$



Wirbelquelle
(rechtsdrehend)

$$c_{u_1} < 0, c_{r_1} < 0$$



Wirbelsenke
(rechtsdrehend)

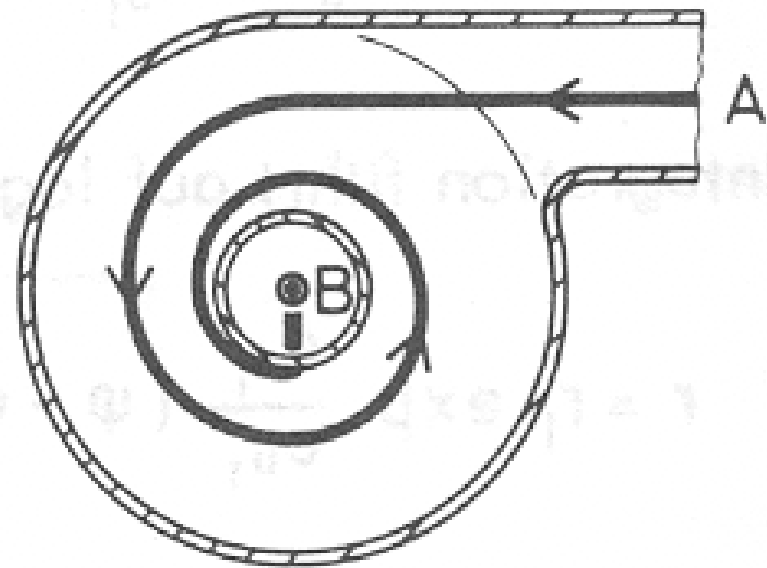
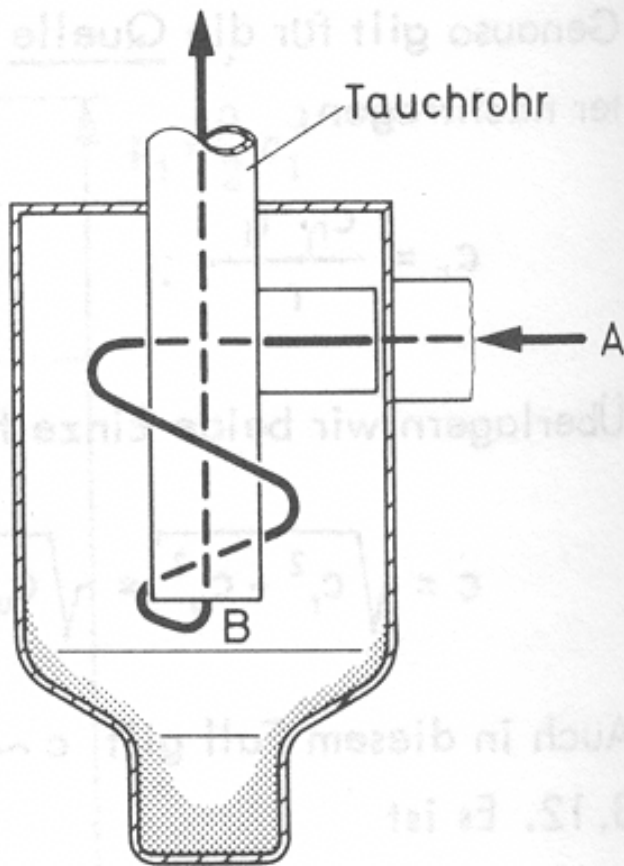
$$c_{u_1} > 0, c_{r_1} < 0$$



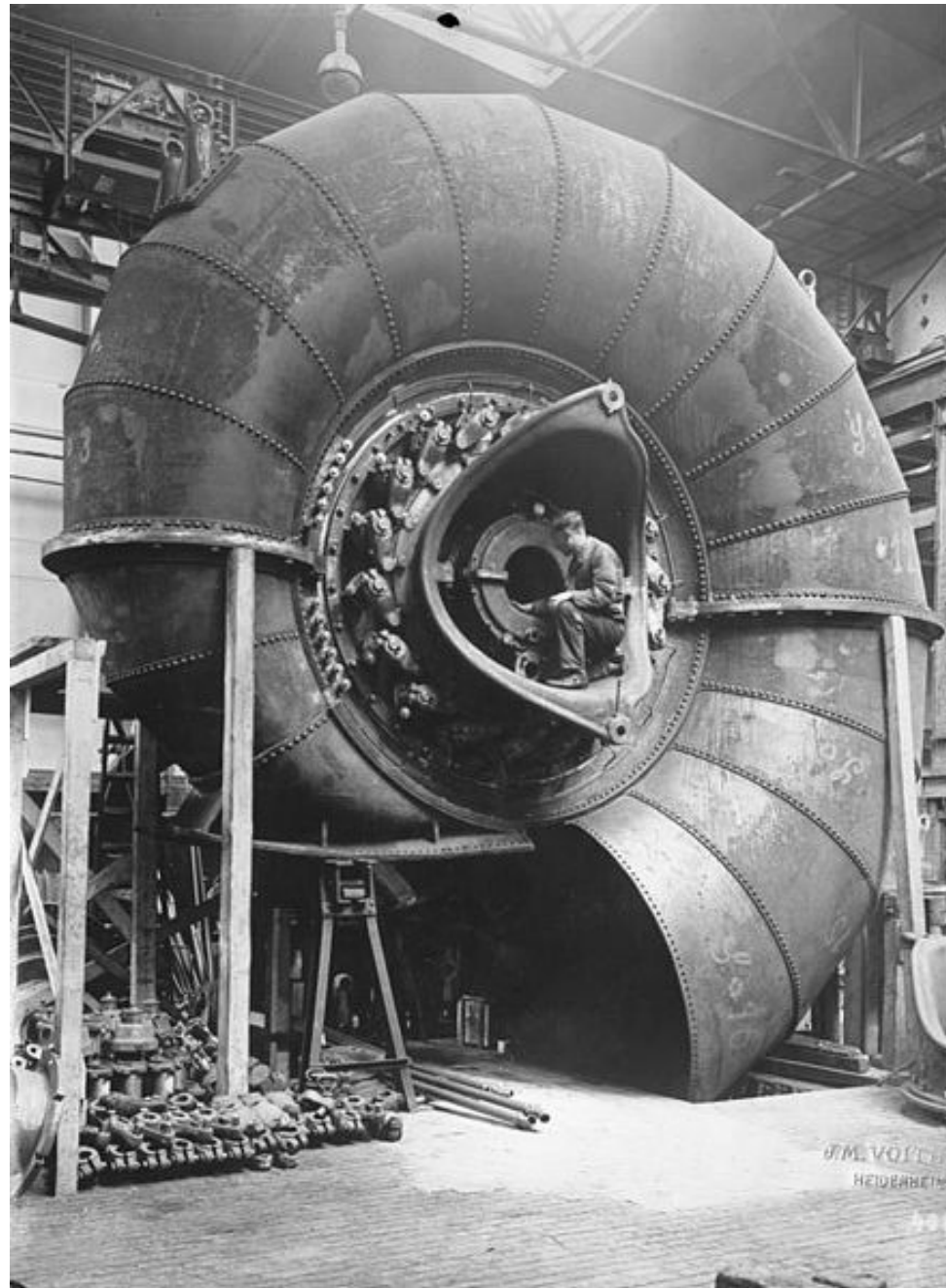
Wirbelsenke
(linksdrehend)



Staubabscheider (Zyklon)



Spiralgehäuse (Turbine)



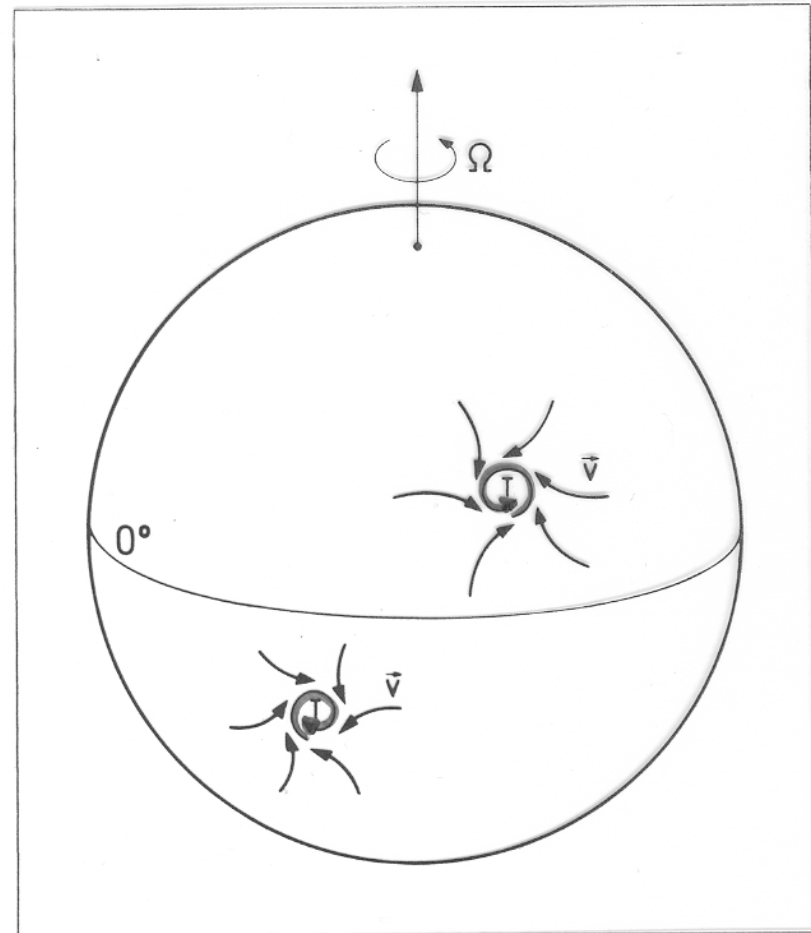
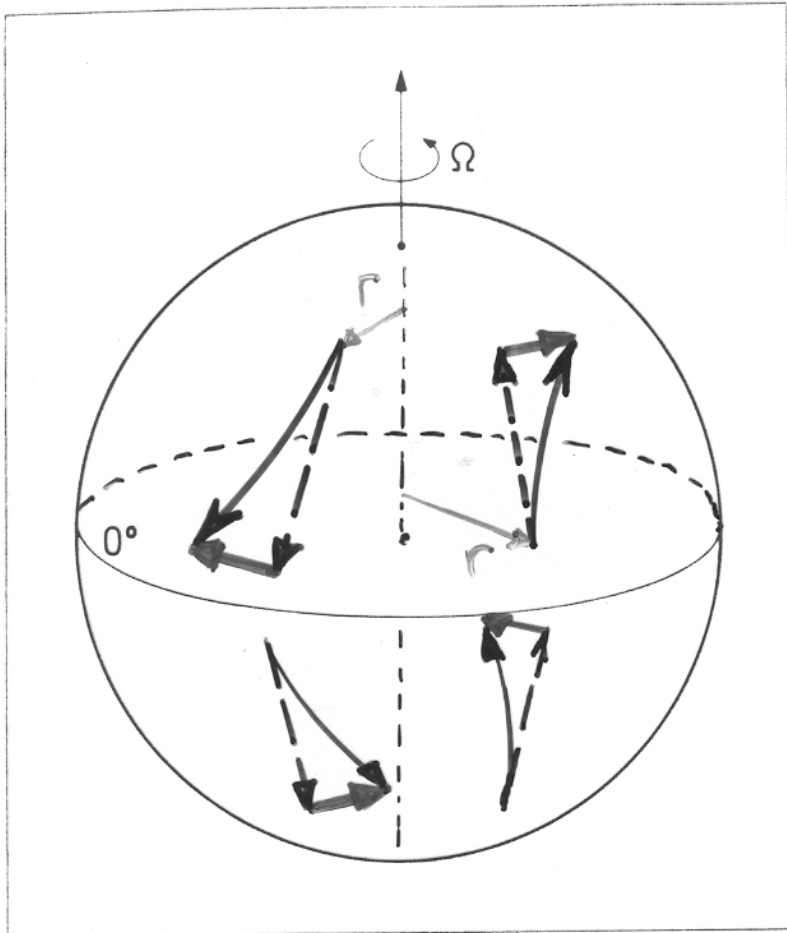
Bundesarchiv, Bild 102.11144
Foto: o. Ang. 1. Januar 1931

Tiefdruckwirbel über Island



Wolkenwirbel (Tiefdruckwirbel)

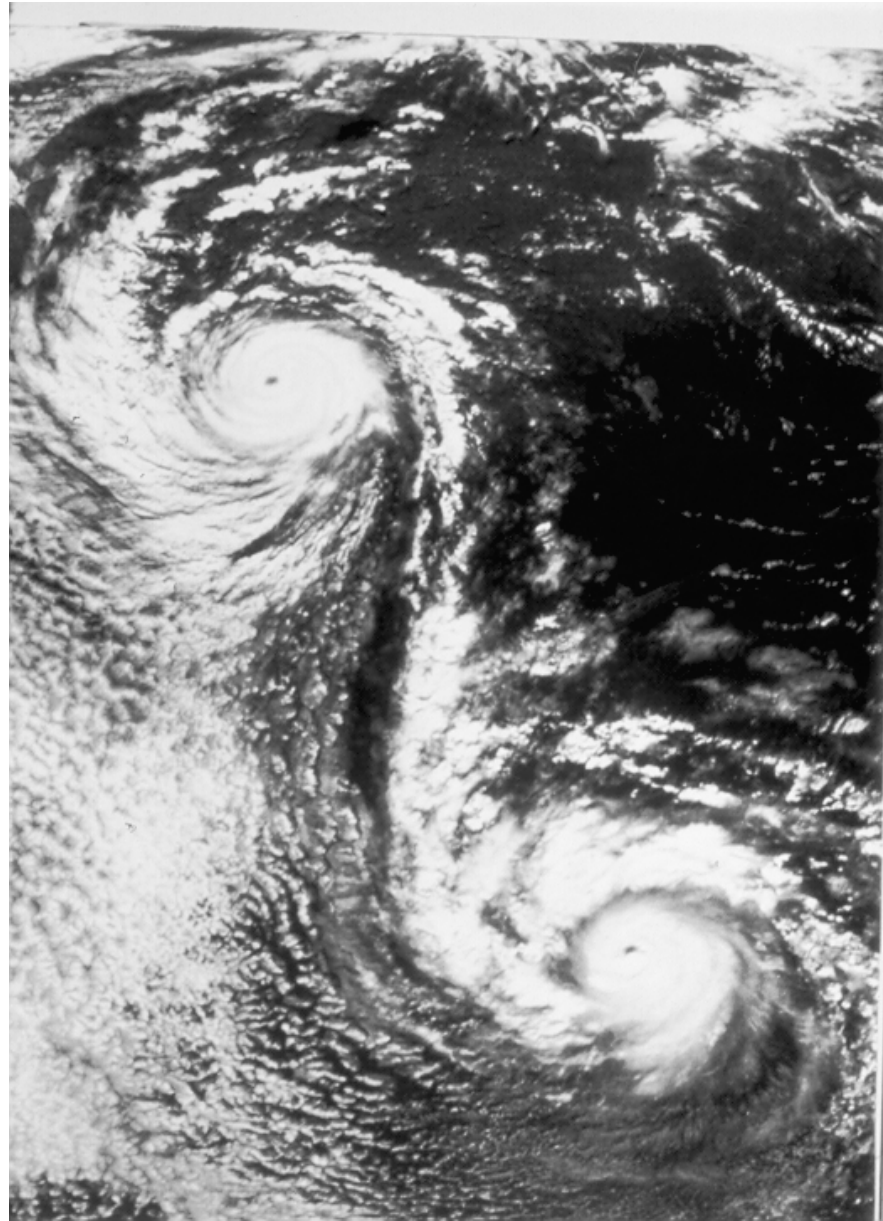
$$c(r) = \Omega \cdot r$$



Wirbelsturm (Tornado)



Sturmtiefgebiete nördlich von Hawaii



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Bewegung von Fluiden (= Flüssigkeiten und Gase)

- **Hydro- und Aerostatik**
 - => Druckverteilung in ruhenden Fluiden
 - => Druckverteilung in als Starrkörper rotierenden Fluiden
 - => Druckkräfte auf Wände und Körper (Auftrieb)
- **Reibungsfreie Strömungen**
 - => Massenerhaltung (Kontinuität)
 - => Euler- und Bernoulli Gleichung
 - => Kräftegleichgewicht senkrecht zum Stromfaden

Im Skript bis Kapitel 3.2

=> Beispiele / Anwendungen der Stromfadentheorie

Übungsblätter bis (inklusive) 7!



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

(Stoff-) Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen

Flüssigkeiten als inkompressibel ($\rho = \text{konst.}$)

Gase bei kleinen Geschwindigkeiten ebenfalls $\rho = \text{konst.}$

Gase bei hohen Geschwindigkeiten isentrop

Gase thermisch und kalorisch ideal = perfekt

Bei Gasen und nicht zu großen Höhenunterschieden:

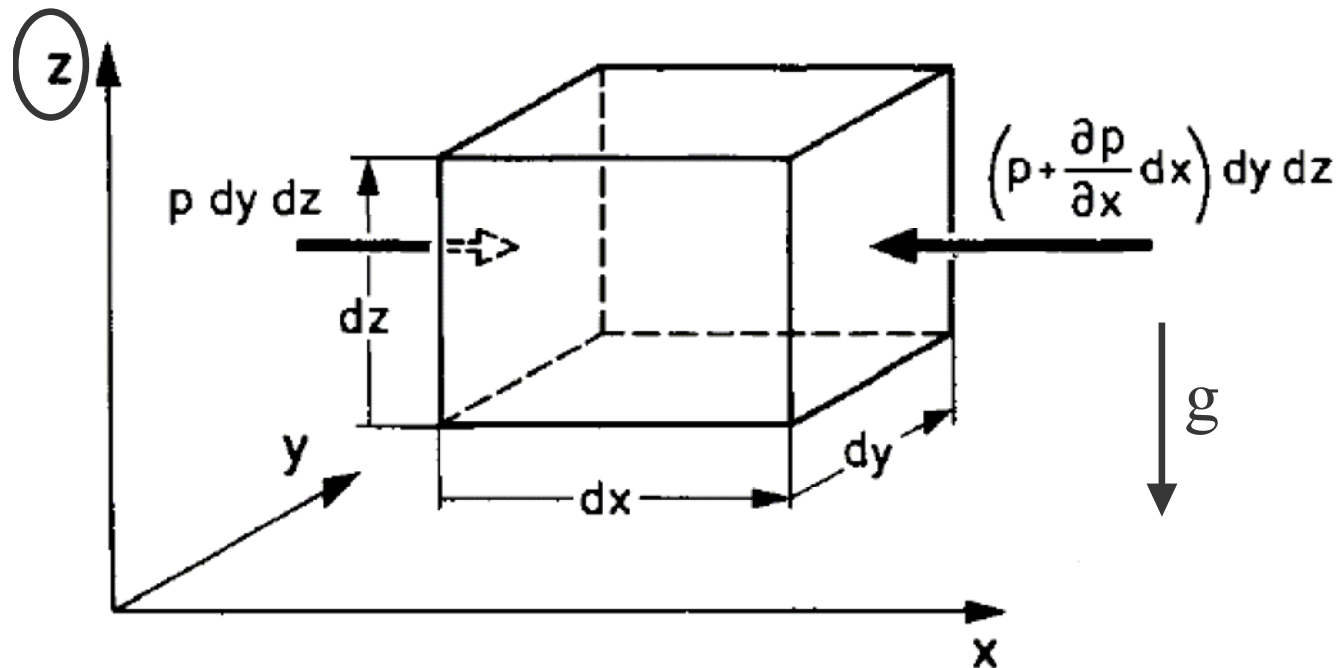
=> Einfluss der Schwerkraft vernachlässigbar

z.B. konstanter Atm.-druck, Bernoulli-Glg.



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

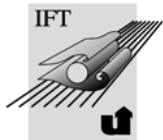
Hydro- und Aerostatische Grundgleichung



$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = f_z$$

Massenkraft:

$$\vec{f} = \{f_x, f_y, f_z\}$$

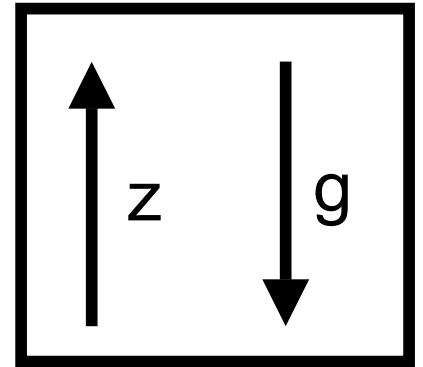


Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Hydro- und Aerostatische Grundgleichung

1. Nur Schwerkrafteinfluss: $\vec{f}_1 = (0, 0, -g)$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g$$



- inkompressibles Fluid ($\rho = \text{konst.}$): $p(z) = -\rho g z + \text{konst.}$

- $\rho = \rho(p, T)$, ideales Gas:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{m} \cdot T = R \cdot T$$

2. Schwerkrafteinfluss und Starrkörperrotation ($\rho = \text{konst.}$):

$$\vec{f}_3 = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = (f_x, f_y, f_z) = (\omega^2 \cdot x, \omega^2 \cdot y, -g)$$

$$p(x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot (x^2 + y^2) - \rho \cdot g \cdot z + C$$



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Druckkraft auf ebene Behälterwände

inkompressibles Fluid ($\rho = \text{konst.}$)

=> **Druckkraft auf Wand =
Druck im Flächenschwerpunkt x benetzte Fläche**

$$|\vec{F}_D| = p_S \cdot A$$

$$p_S = p_1 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot z_S$$

WENN über Oberfläche p_1 und z in Richtung von g !

WENN über Oberfläche und außen überall p_1 , DANN

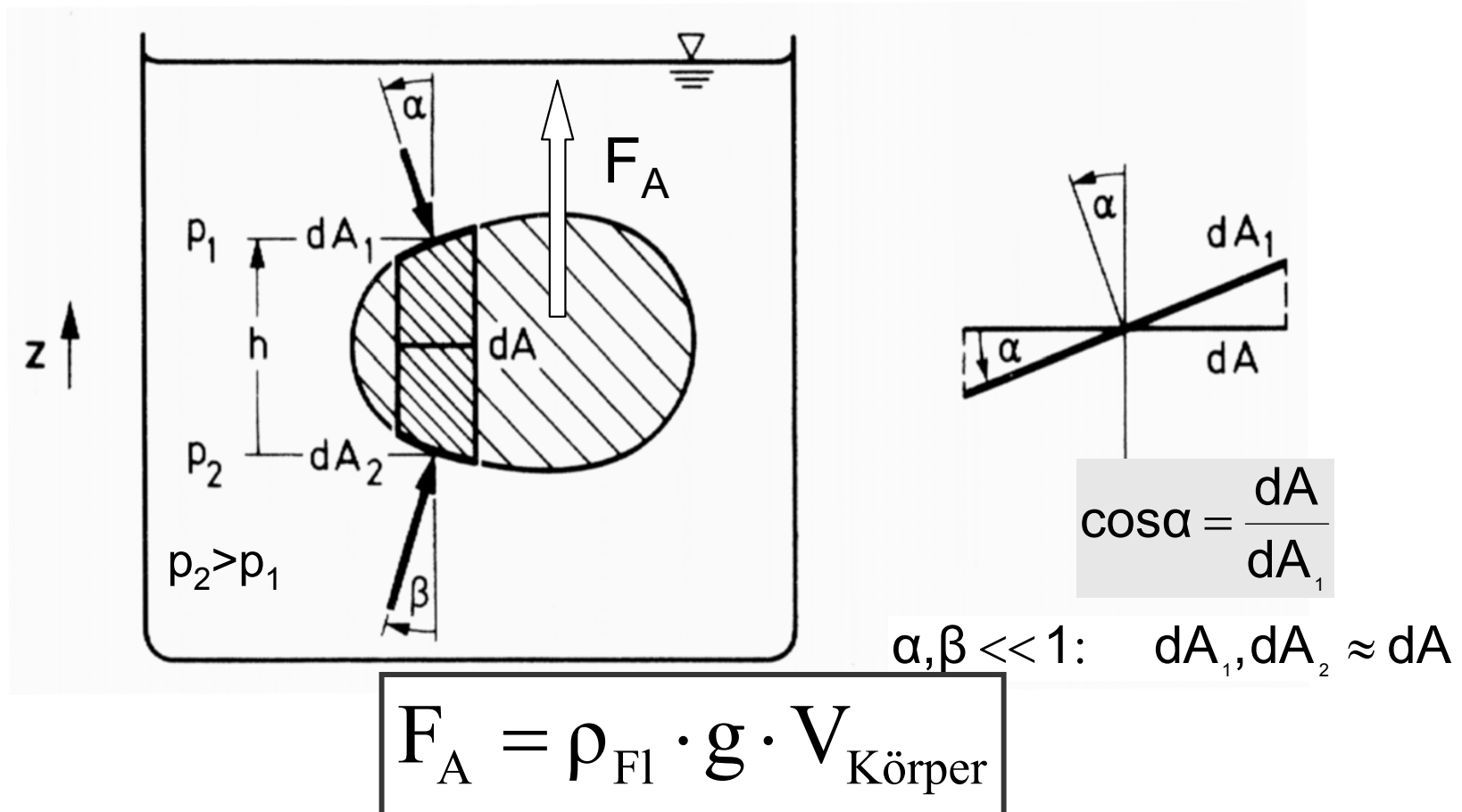
$$F_{res} = |\vec{F}_{res}| = \rho_{Fl} \cdot g \cdot z_S \cdot A$$

=> **Für diesen Fall: Angriffspunkt von F_{res} unterhalb des
Flächenschwerpunkts (Moment)**



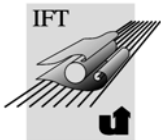
Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Hydrostatik: Auftrieb für $\rho = \text{konst.}$



Auftrieb = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit

Auftrieb = resultierende Druckkraft auf Körper



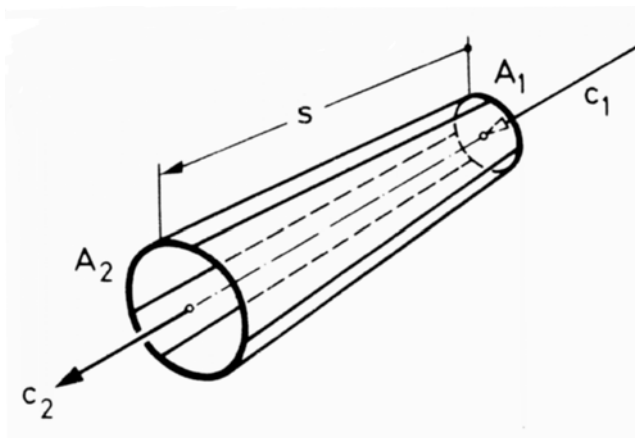
Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Massenerhaltung / Kontinuität

$$\text{Massenstrom } \dot{m}: \quad \dot{m} = \rho \cdot c \cdot A \stackrel{!}{=} \text{konst.} ; \quad \dot{m} = \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

In der Hydrodynamik (inkompressibles Fluid: $\rho = \text{konst.}$):

$$\text{Volumenstrom } \dot{V}: \quad \dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} = c \cdot A ; \quad \dot{V} = \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] = \left[\frac{\text{Liter}}{\text{s}} \right]$$

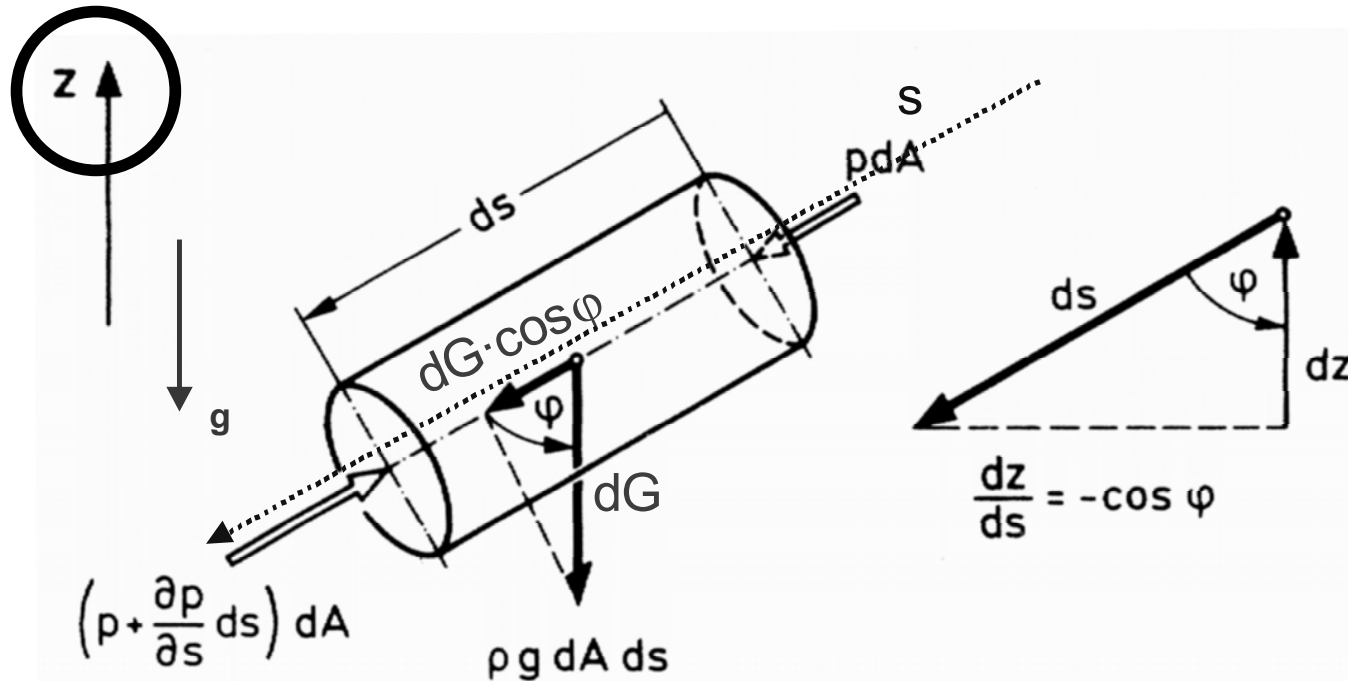


$$\dot{m}_1 = \rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A_2 = \dot{m}_2$$



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Kräftegleichgewicht in Richtung des Stromfadens



EULER-Gleichung:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \cdot \frac{dz}{ds}$$

BERNOULLI-Gleichung durch Integration:

$$\int \frac{\partial c}{\partial t} ds + \frac{c^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + g \cdot z = \text{konst.}$$



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Druckintegral in stationärer BERNOLLI-Gleichung

a) Isobar: $\int_p \frac{dp}{\rho} = 0$

b) Isochor: $\rho = \text{konst.}$ (inkompressibel)

$$\int_p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho}$$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = \text{konst.}$$

c) Isotherm: $T = \text{konst.}$

$$\int_p \frac{dp}{\rho} = \frac{R}{m} \cdot T \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$$

d) Isentrop:

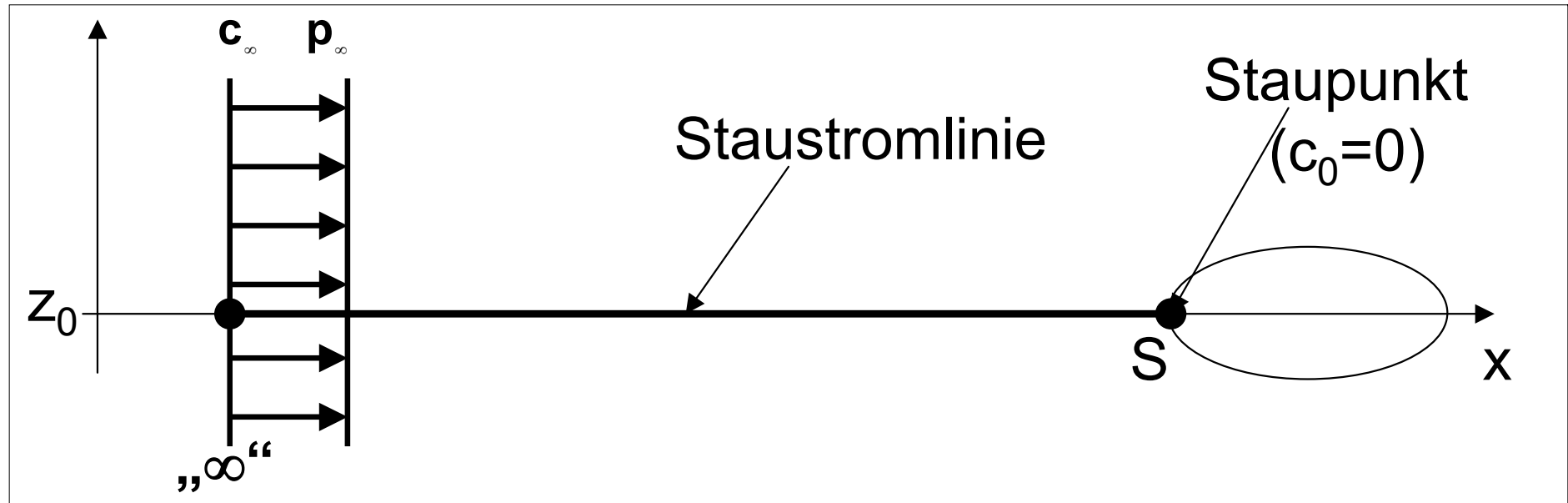


$$\int_p \frac{dp}{\rho} = -\frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]$$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \cancel{g \cdot z} = \text{konst.}$$

Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Die verschiedenen Druckbegriffe und ihre Messung



$\rho = \text{konst.:}$

$$\frac{\rho}{2} \cdot c_\infty^2 + p_\infty = p_0$$

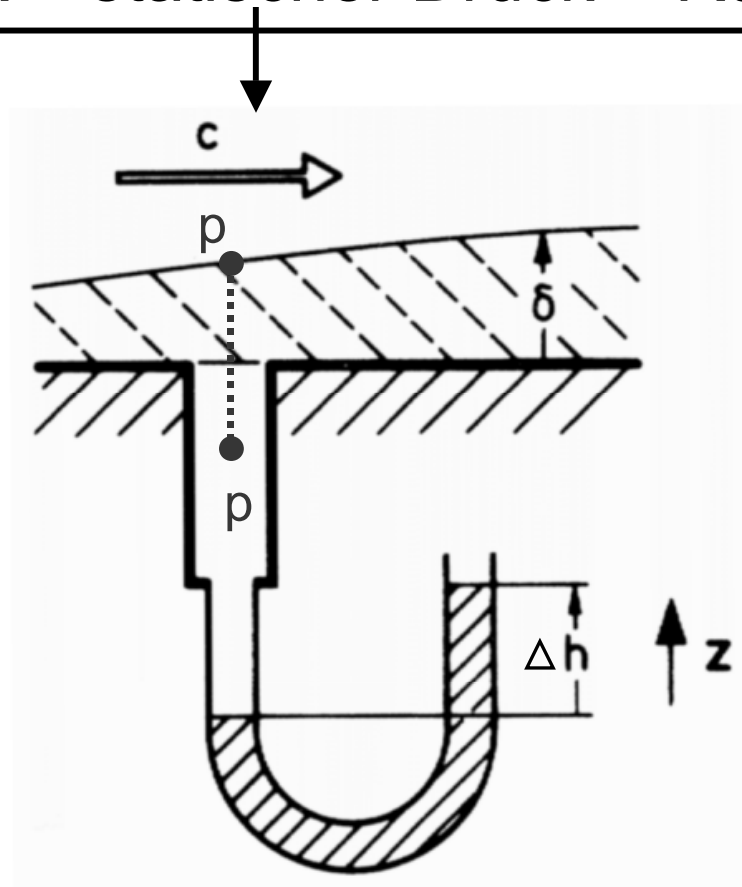
Dynamischer Druck + statischer Druck = Ruhe-/Gesamtdruck



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Druckmessung: Wandanbohrung und Drucksonden

Dynamischer Druck + statischer Druck = Ruhe-/Gesamtdruck



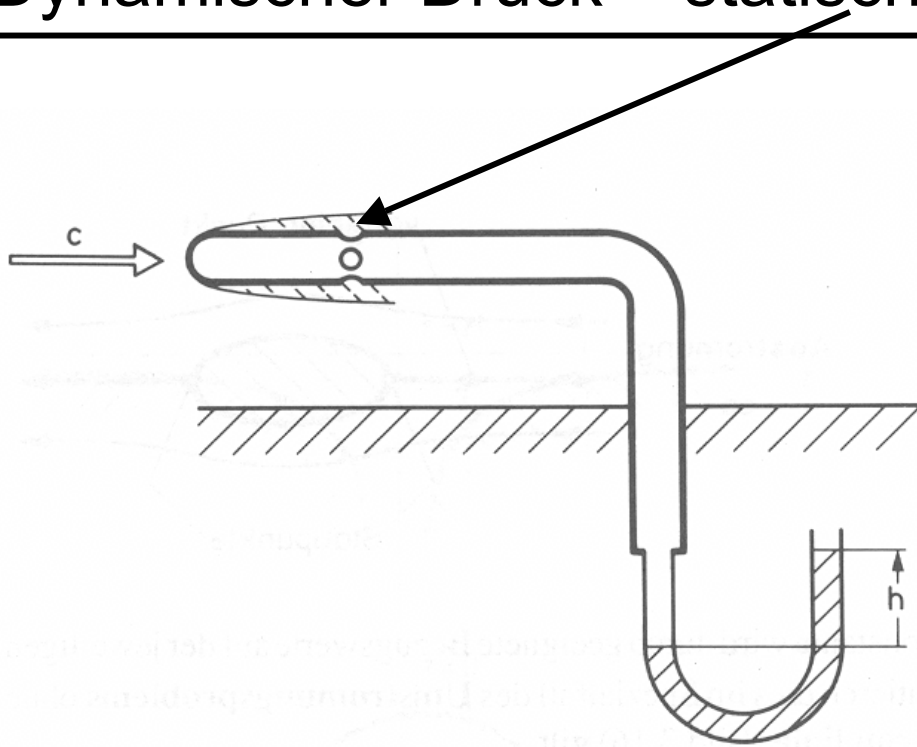
Wandanbohrung



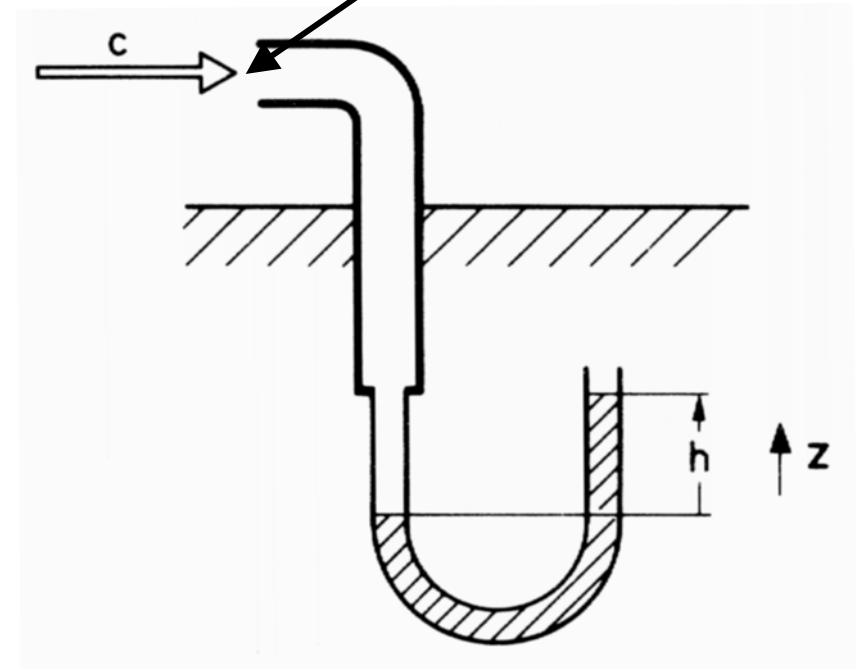
Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Druckmessung: Wandanbohrung und Drucksonden

Dynamischer Druck + statischer Druck = Ruhe-/Gesamtdruck



Statische
Drucksonde



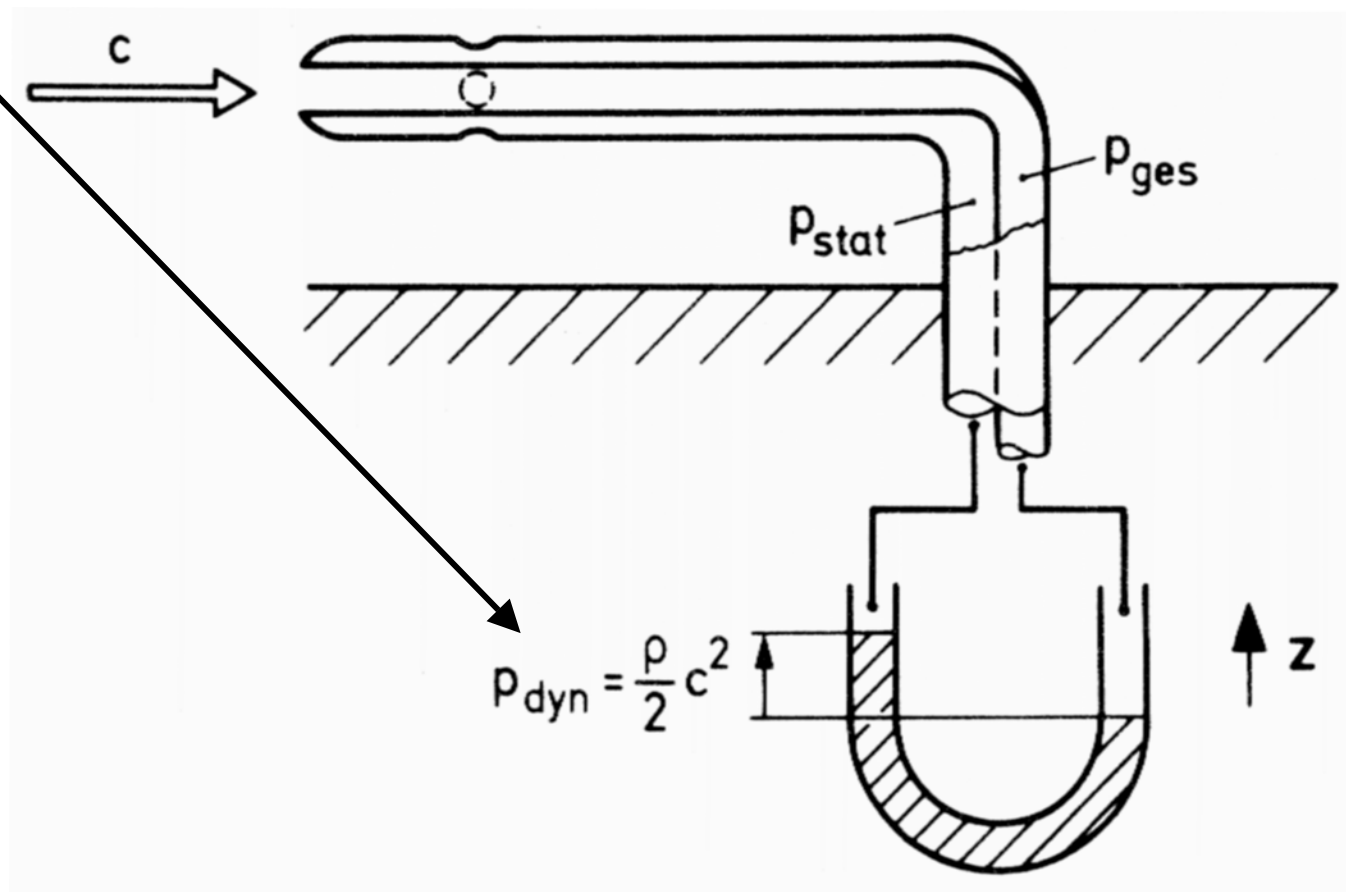
PITOT-Rohr
(Hakensonde)



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Druckmessung: Wandanbohrung und Drucksonden

Dynamischer Druck + statischer Druck = Ruhe-/Gesamtdruck



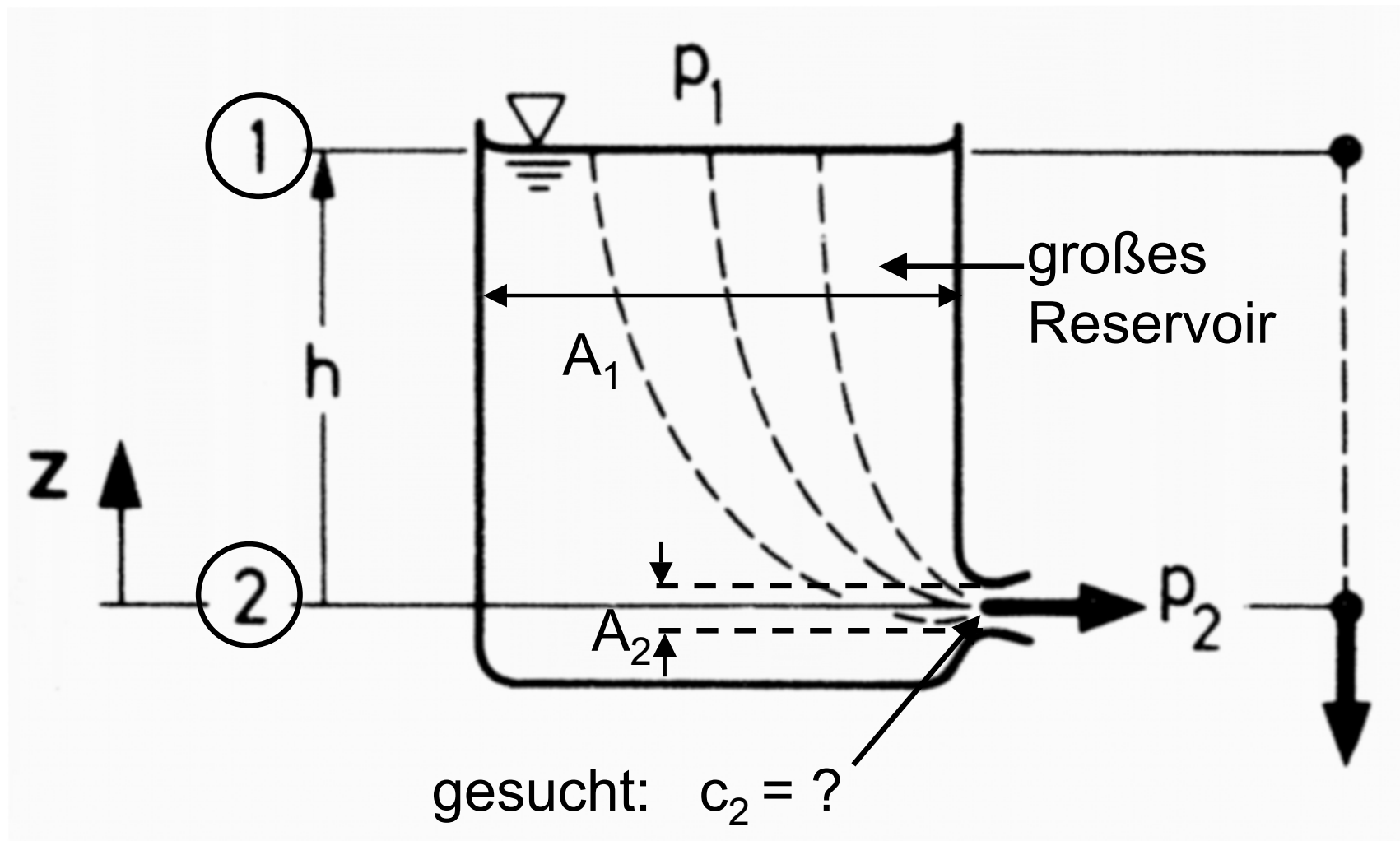
PRANDTL-Sonde



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Ausströmen aus Gefäßen und Reservoirs (groß)

a) inkompressibel: $\rho = \text{konst.}$ (Flüssigkeit)



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Ausströmen aus Gefäßen und Reservoirs (groß)

a) inkompressibel: $\rho = \text{konst.}$ (Flüssigkeit)

- großes Reservoir, großer Behälter: $c_1 \approx 0$
- aus Bernoulli-Gleichung:

$$c_2 = \sqrt{2 \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) \right)} = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho} + 2gh}$$

Spezialfälle:

1. $p_1 = p_2$:

$$c_2 = \sqrt{2gh}$$

Ausflussformel nach Toricelli

2. Ausströmen infolge Überdruck (horizontal, $z_1 = z_2$)

$$c_2 = \sqrt{2\Delta p / \rho}$$

Wegen $\rho = \text{konst.}$ nur für Gas bei kleiner Geschwindigkeit ($c_2 < 70 \text{ m/s}$)



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Ausströmen aus Gefäßen und Reservoirs (groß)

b) kompressibel: $\rho = \rho(p,T)$ (Gas bei hohen Geschwindigkeiten)

- großes Reservoir, großer Behälter: $c_1 \approx 0$
- ideales Gas, **isentropische Zustandsänderung**
- aus Bernoulli-Gleichung:

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left(1 - \left[\frac{p_2}{p_1} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)}$$

Ausflussformel von Saint-Venant und Wantzell



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Stromfadentheorie kompressibler Strömungen

Bernoulli Gleichung

$$\frac{c^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{2} + c_p T = \text{konstant}$$

Mit: $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa \frac{R}{m} T$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1} = \text{konstant}$$

=> Festlegung der Konstante durch Ruhegrößen (Index 0)

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right)^{-1} \quad \frac{a}{a_0} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right)^{-1/2}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

Mit Mach Zahl:

$$M = \frac{c}{a}$$



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Stromfadentheorie kompressibler Strömungen

Kritische Größen (Index *, $M = 1$):

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\kappa + 1} \quad \kappa=1,4 \quad = 0,833$$

$$\frac{a^*}{a_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{1/2} \quad \kappa=1,4 \quad = 0,913$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad \kappa=1,4 \quad = 0,634$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad \kappa=1,4 \quad = 0,528$$

Variabler Querschnitt:

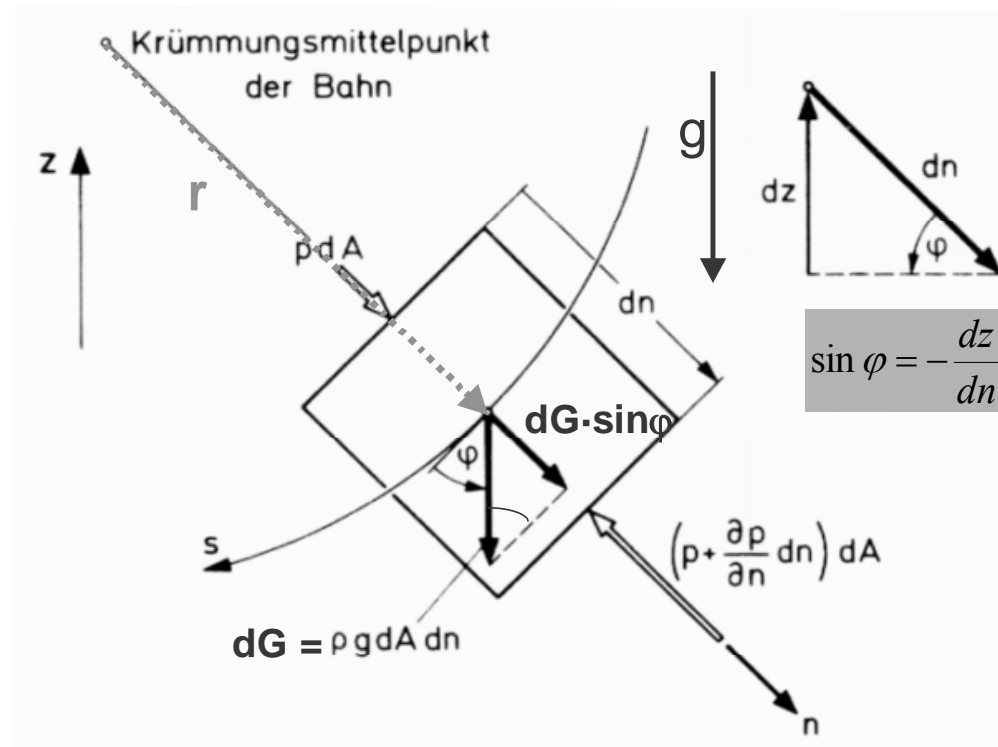
$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (M^2 - 1) \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}$$



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Kräftegleichgewicht senkrecht zum Stromfaden

Gekrümmte Stromfäden üben Kräfte aufeinander aus



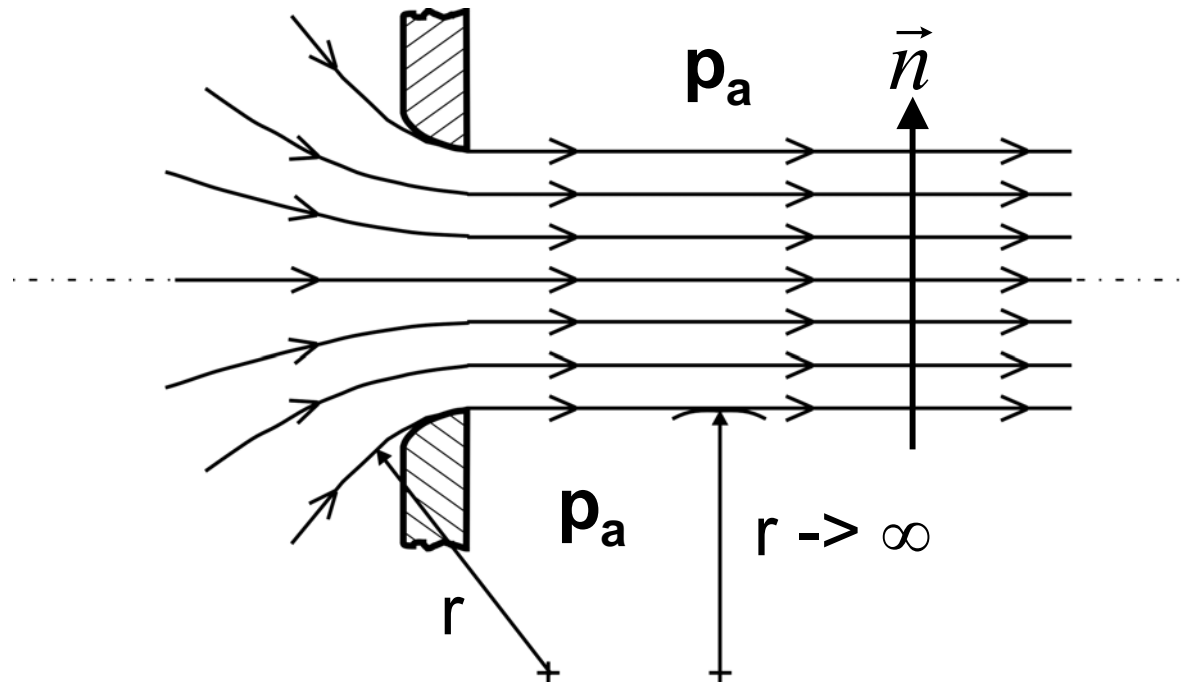
$$\frac{c^2}{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} + g \cdot \frac{dz}{dn}$$



Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

Kräftegleichgewicht senkrecht zum Stromfaden

Gekrümmte Stromfäden üben Kräfte aufeinander aus



Freistrahلبedingung: der Druck im Freistrahл wird von der ruhenden Umgebung aufgeprägt. Hier: es herrscht überall p_a .

Im Strahl Reibung / Verwirbelung: Stromfaden nur bis Freistrahл!



Klausurtermine

Einführung in die Fluid- und Thermodynamik

1. Termin: Samstag, 29. Januar 2011
2. Termin: Samstag, 26. März 2011



**Viel Erfolg und DANKE für die – meist – ungeteilte
Aufmerksamkeit.**

