

Aufgabe 3:

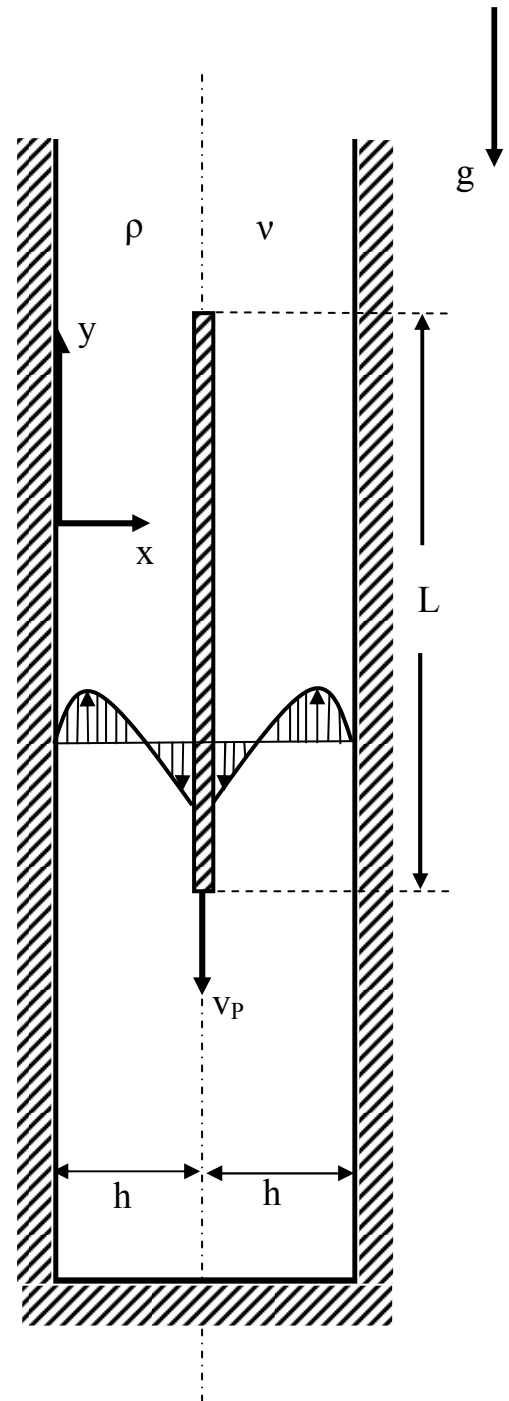
In einem vertikalen Spalt der Breite $2 \cdot h$, der unten geschlossen und mit Öl gefüllt ist (Newtonsches Medium mit konstanter Dichte ρ und kinematischer Zähigkeit ν), wird eine Platte mit der Breite b (senkrecht zur Zeichenebene), der Länge L und vernachlässigbarer Dicke mit konstanter Geschwindigkeit v_P so eingeführt, daß sie sich stets in der Mitte des Spaltes befindet (s. Abb.). Durch die Schleppwirkung der Platte wird in deren Nachbarschaft Öl abwärts transportiert. Aus Kontinuitätsgründen muß dann im restlichen Teil des Spaltes eine entsprechende Menge Öl aufwärts strömen, so daß sich das in der Abb. skizzierte Geschwindigkeitsprofil $v(x)$ ergibt. Wegen $h \ll L$ kann näherungsweise vorausgesetzt werden, daß sich das Geschwindigkeitsprofil in vertikaler Richtung über die ganze Länge L nicht ändert.

Unter der Annahme laminarer, ebener Spaltströmung bestimme man in Abhängigkeit gegebener Größen:

a) den Druckgradienten $\frac{dp}{dy}$, der sich im Spalt einstellt,

b) die Reibkraft \vec{F}_R , die das Öl auf die Platte ausübt, nach Größe und Richtung.

Gegeben sind: $\rho, \nu, h, v_P, b, L, g$.



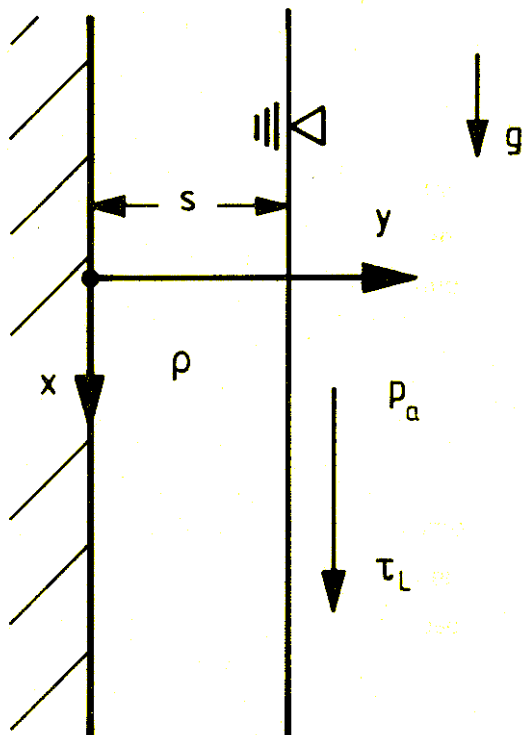
Aufgabe 3:

Ein inkompressibles NEWTONsches Medium (Dichte ρ) strömt unter dem Einfluß der Erdschwere g mit der konstanten Schichtdicke s an einer ebenen, vertikalen, ruhenden Wand herab. Die Strömung sei stationär und ausgebildet. Infolge von Temperaturunterschieden innerhalb der Schicht hängt die dynamische Zähigkeit μ des Mediums vom Wandabstand y ab:

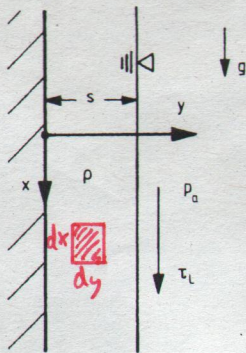
$$\mu(y) = \frac{\mu_0}{1 + \alpha \cdot \frac{y}{s}}, \text{ wobei } \alpha > 0 \text{ ist.}$$

Die freie Oberfläche der Schicht erfährt durch tangential vorbeistreichende Luft (konst. Druck p_a) eine abwärts gerichtete Schubspannung vom Betrag τ_L . Über eine Kräftebilanz am Massenelement bestimme man in Abhängigkeit gegebener Größen die Geschwindigkeit $u(y)$ im Medium. Hierbei verwende man das vorgegebene Koordinatensystem!

Gegeben sind: $\rho, \mu_0, \alpha, \tau_L, s, g$.



Aufgabe 3:



Kräftebilanz am Massenelement in
x-Richtung: (Tiefe ~~z~~ Zeichenebene: 1)

$$p \cdot dy \cdot 1 - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy \cdot 1 + s \cdot g \cdot dx dy \cdot 1 = 0$$

$$\hookrightarrow -\tau \cdot dx \cdot 1 + (\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy) dx \cdot 1 = 0 \quad (1)$$

da $p_a = \text{konst.}$ aufgebracht wird: $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$

$$\hookrightarrow \frac{d\tau}{dy} = -s \cdot g \hookrightarrow \tau(y) = C_1 - s \cdot g \cdot y$$

Randbed.: $\tau(y=s) = \tau_L \hookrightarrow \tau(y) = \tau_L + s \cdot g \cdot s \cdot (1 - \frac{y}{s})$

$$\hookrightarrow \mu \cdot \frac{du}{dy} = \tau = \tau_L + s \cdot g \cdot s \cdot (1 - \frac{y}{s}) \quad ; \quad \mu = s \cdot \nu$$

$$\hookrightarrow \text{mit } \mu = \frac{\mu_0}{1 + \alpha \cdot \frac{y}{s}} \hookrightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1 + \alpha \cdot \frac{y}{s}}{\mu_0} \cdot \left\{ \tau_L + s \cdot g \cdot s \cdot (1 - \frac{y}{s}) \right\}$$

\hookrightarrow mit Randbed.: $u(y=0) \stackrel{!}{=} 0$:

$$\hookrightarrow u(y) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \left\{ (\tau_L + s \cdot g \cdot s) \cdot y - s \cdot g \cdot \frac{y^2}{2} + \dots \right\}$$

$$\hookrightarrow + \alpha \cdot \left[(\tau_L + s \cdot g \cdot s) \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{s \cdot g}{s} \cdot \frac{y^3}{3} \right] \}$$