

Wiederholung

2. Hydro- und Aerostatik

2.2 Fluiddruck in Kraftfeldern

- Druckverteilung aus Kräftegleichgew. am Massenelement

Hydrostatische Grundgleichung

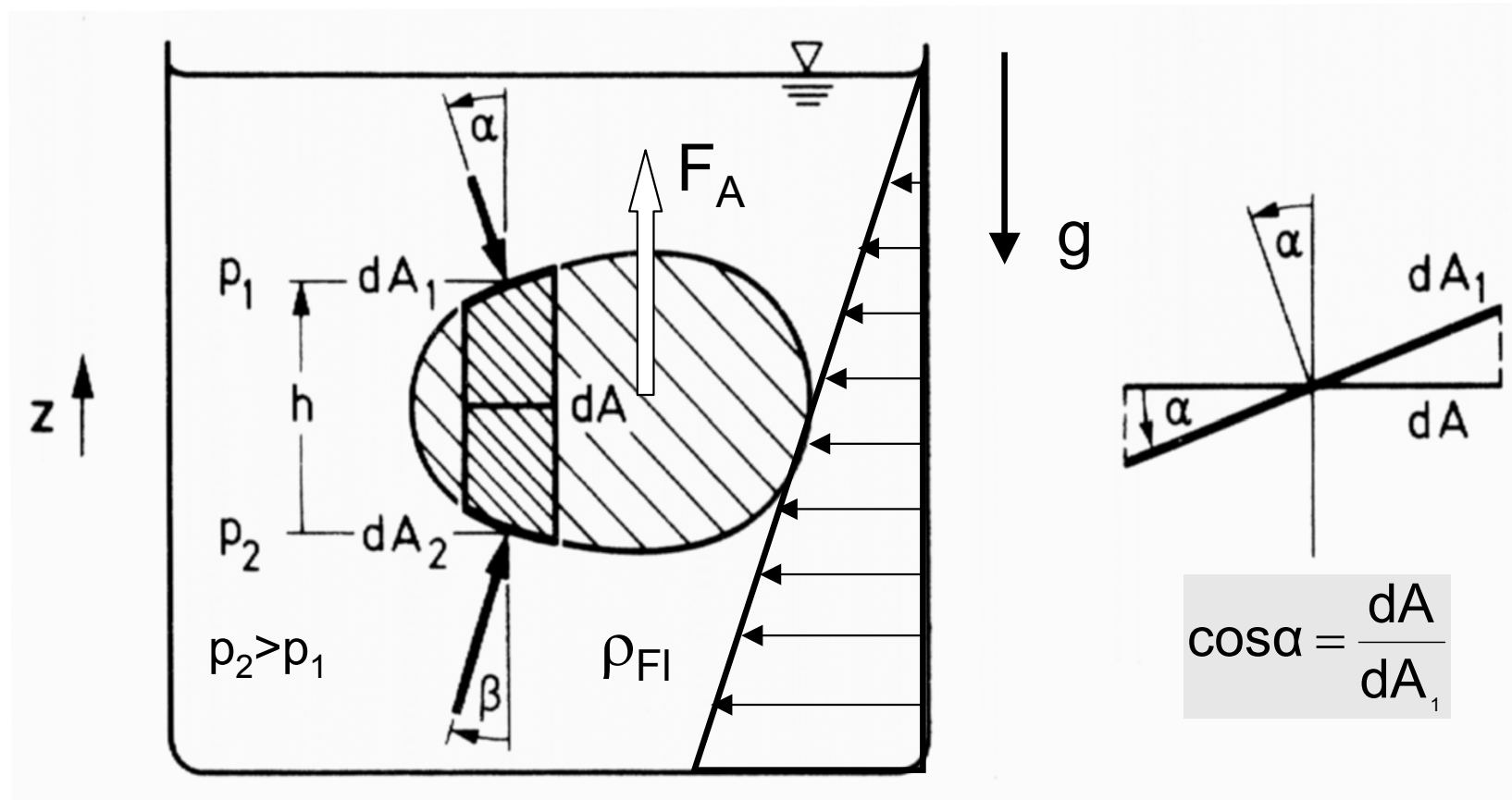
- Druckverteilung im Schwerfeld bei
 - **Flüssigkeiten ($\rho = \text{konst.}$)**
 - **Gasen (ideales Gas, große Höhenunterschiede)**
- Druckverteilung im Zentrifugal- und Schwerfeld
 - **Flüssigkeiten ($\rho = \text{konst.}$)**

2.3 Druckkraft auf ebene Behälterwände ($\rho = \text{konst.}$)

2.4 Hydrostatischer Auftrieb (Druckkraft auf gekrümmte Wände ($\rho = \text{konst.}$))



Wiederholung



$$F_A = \rho_{Fl} \cdot g \cdot V$$

**Auftrieb = Gewicht der
verdrängten Flüssigkeit**

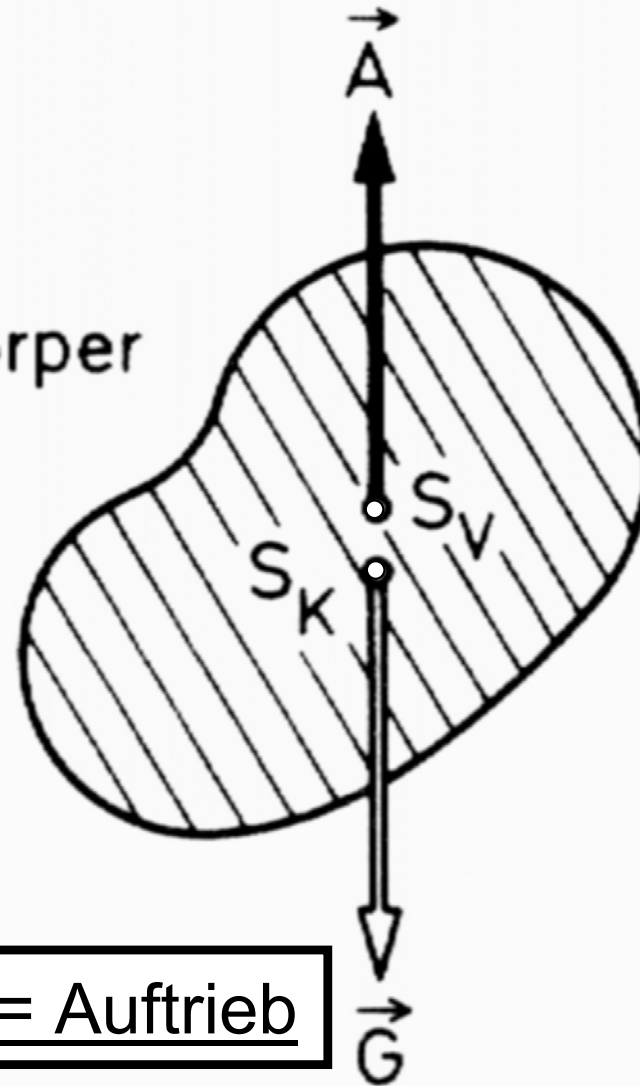
Wiederholung

Schwimmen/Schweben

eingetauchter
schwimmender Körper

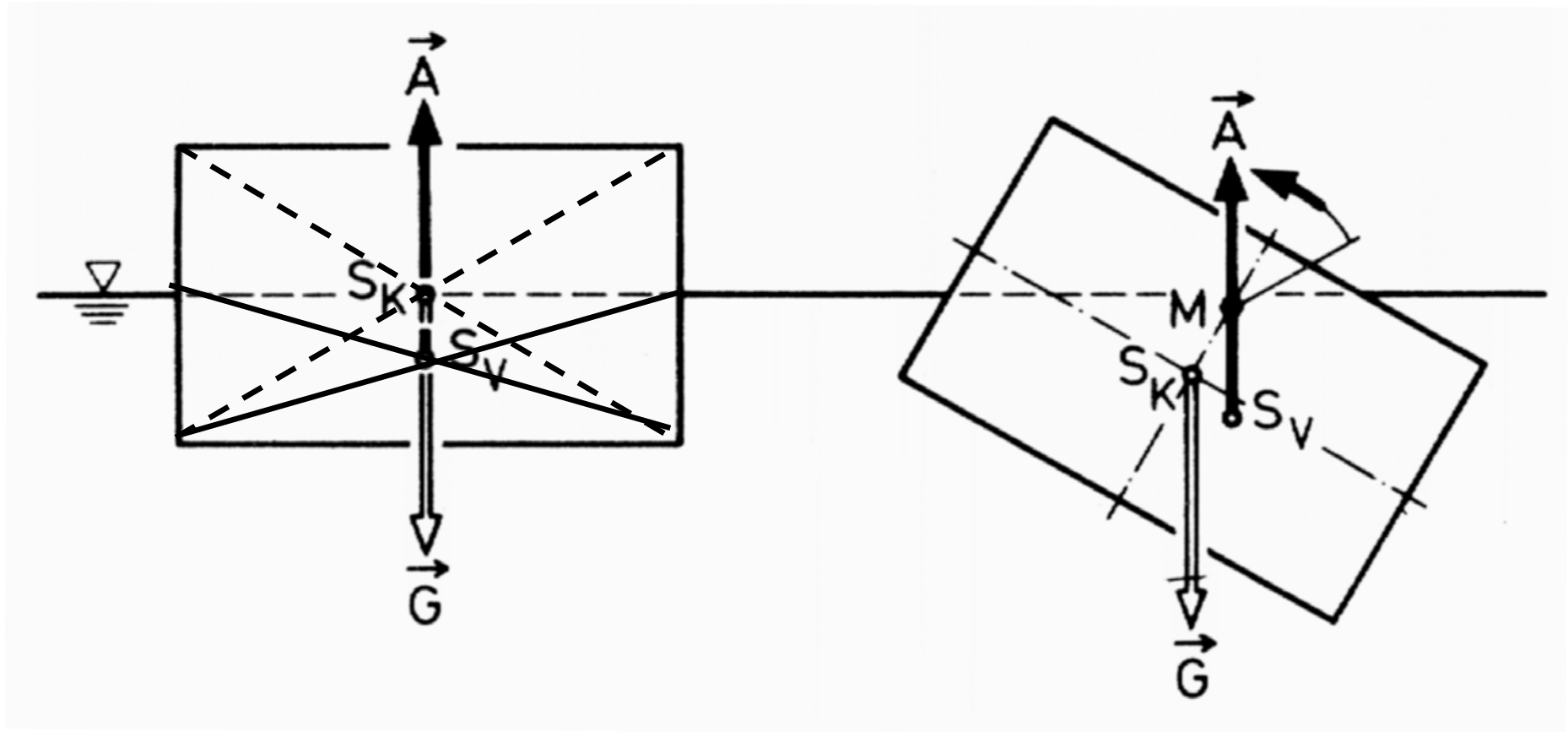
S_V = Schwerpunkt der
verdrängten Flüssigkeit

S_K = Körperschwerpunkt



Schwimmen/Schweben: Gewicht = Auftrieb

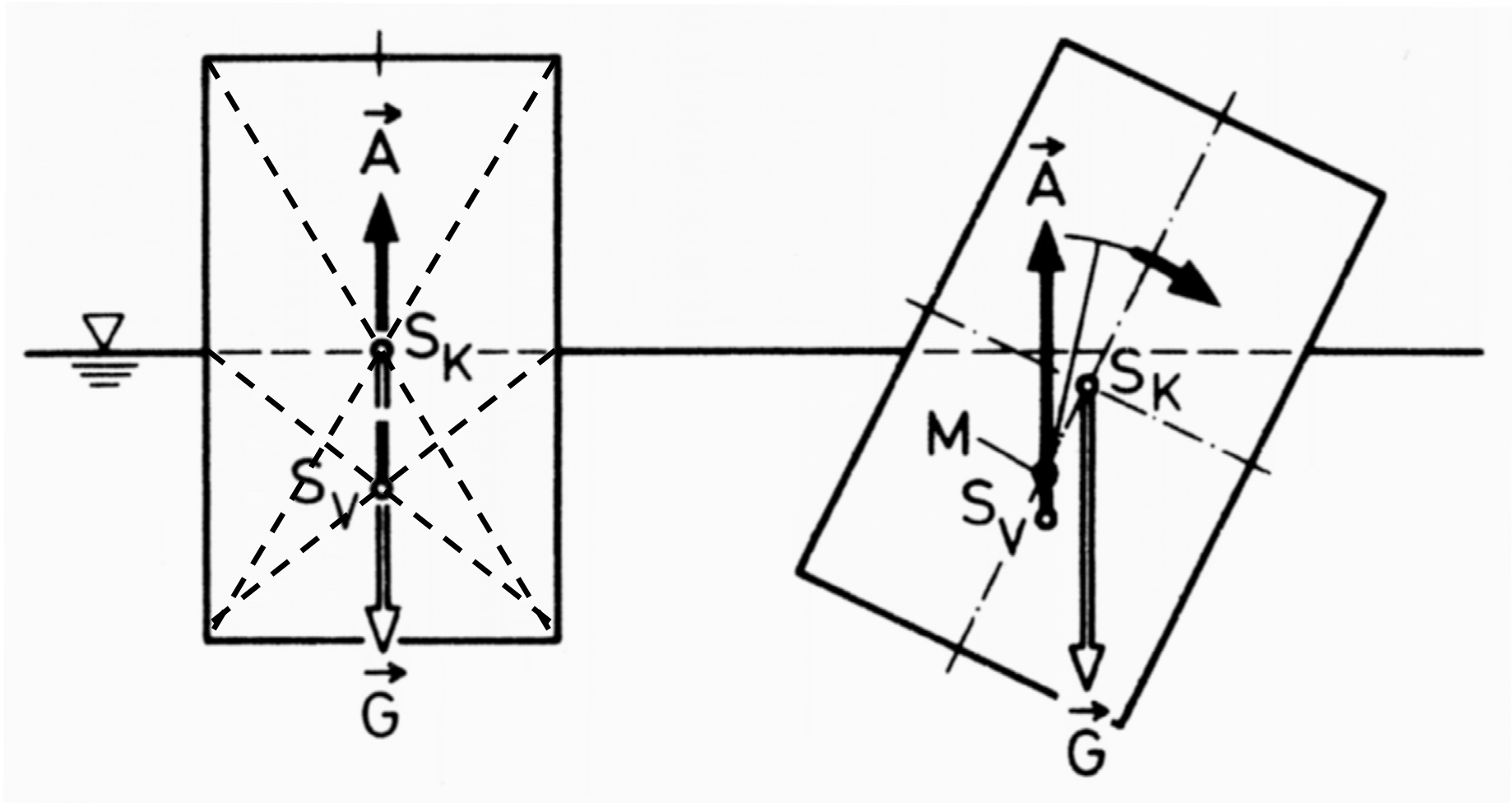
Stabile Schwimmmlage



stabil: Metazentrum M oberhalb von S_K

Metazentrum: Schnittpunkt von Wirkungslinie \vec{A} u. Hochachse

Instabile Schwimmmlage



instabil:

Metazentrum M unterhalb von S_K

Metazentrum: Schnittpunkt von Wirkungslinie \vec{A} u. Hochachse

3. HYDRO- und AERODYNAMIK

3.1 Stromfadentheorie

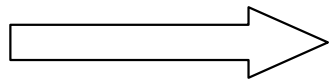
3.1.1 Grundbegriffe

Stromfeld = Raum, den das strömende Medium (incl. dem Medium selbst) einnimmt.

Stromfeld ist eindeutig bestimmt, wenn:

$$\vec{W} = \{u, v, w\}, p, \rho, T$$

als Funktion des Ortes $f(x,y,z)$ bzw. $f(\vec{r})$ und bei instationären Strömungen auch noch als Funktion der Zeit t bekannt sind.

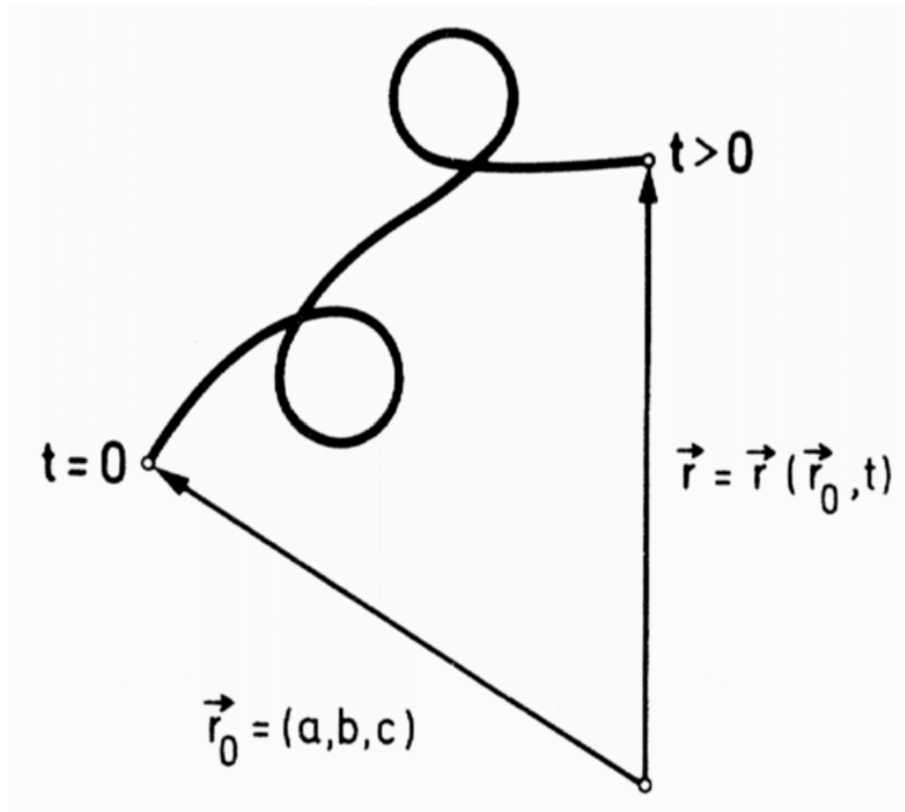


Grundgleichungen der Strömungslehre (6 Gleichungen)



Es gibt zwei verschiedene Beschreibungsmöglichkeiten für Stromfelder:

1. Lagrangesche Beschreibungsweise
(massen- oder teilchenfeste Betrachtung = mitbewegter Beobachter)



Position des jeweiligen Teilchens ist eine Funktion seiner Anfangslage:

$$\vec{r}_0 = (a, b, c)$$

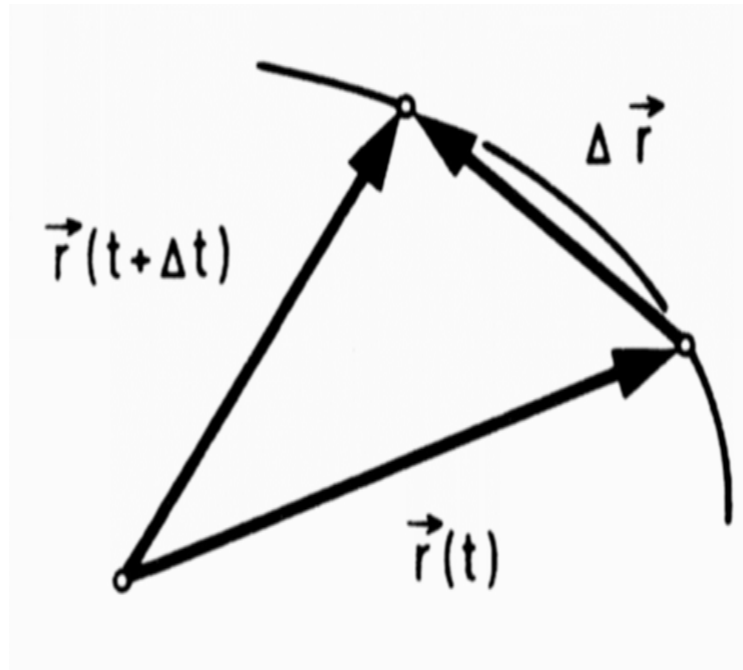
und der Zeit t .

Teilchenbahn (Trajektorie)



1. Lagrangesche Beschreibungsweise

Die Teilchenbahn lässt sich auf folgende Weise beschreiben:



Aus Geschwindigkeit

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)_{a,b,c} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

folgt Teilchenbahn (Integration):

$$\Rightarrow d\vec{r} = \vec{w} dt$$

Beschleunigung:

$$\vec{b} = \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \right)_{a,b,c} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Dazu muss Geschwindigkeit
an jedem Ort bekannt sein!

2. Eulersche Beschreibungsweise (ortsfester Beobachter)

Wir betrachten dazu Änderung der Strömungsgrößen an fester Stelle im Raum.

Es gilt dabei folgender Zusammenhang (Kettenregel):

$$\frac{df(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \mathbf{w}$$

In der Strömungsmechanik:

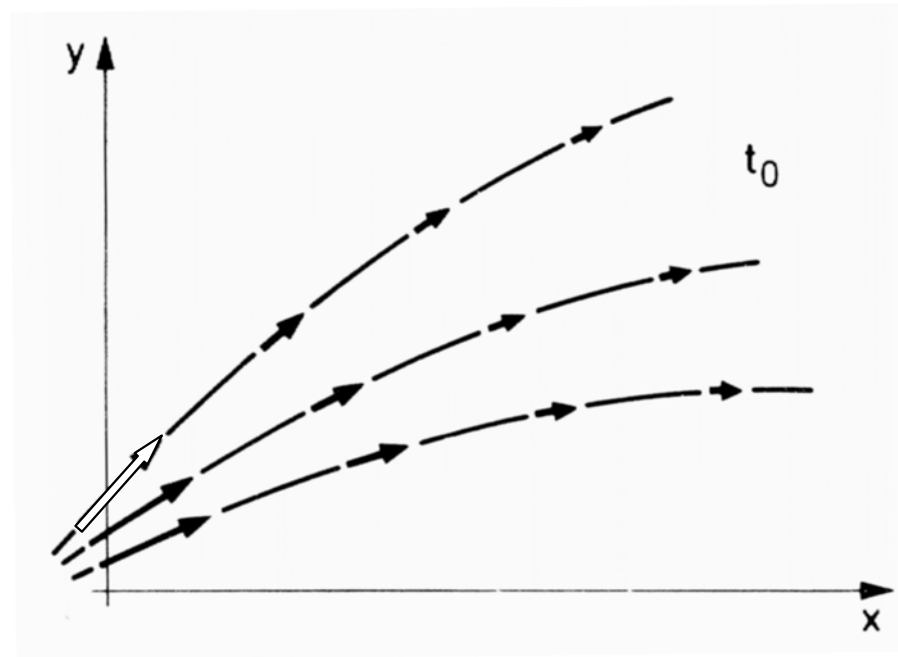
Substantielle Ableitung	$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}$
Lokale zeitl. Änderung	Konvektive Ableitung



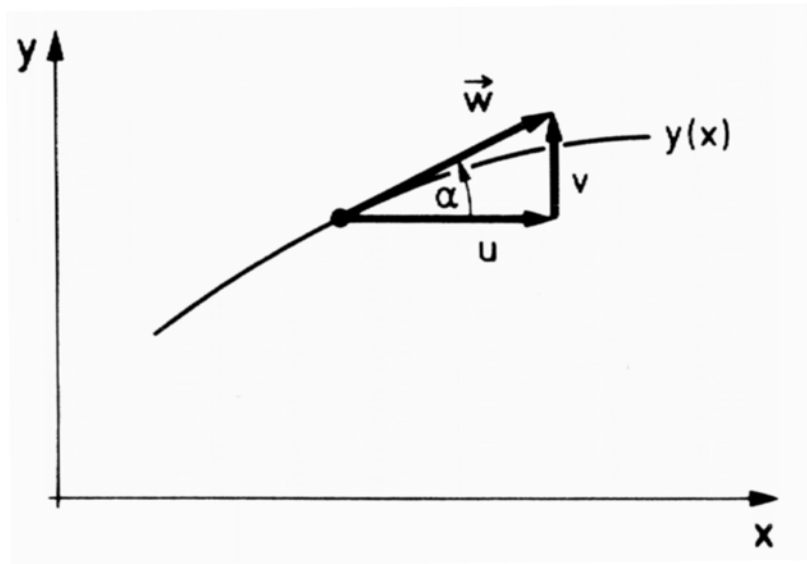
3.1.1 Grundbegriffe

Stromlinien = Linien, die auf das momentane Geschwindigkeitsfeld (d.h. zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0) passen.

Der Geschwindigkeitsvektor ist somit Tangente zur Stromlinie. Keine Strömung senkrecht zur Stromlinie.



Zur Berechnung von Stromlinien



Gleichung für Stromlinien:

$$y=y(x)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v(x, y, z)}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{dx}$$

analog gilt im 3-D-Fall:

$$\frac{w(x, y, z)}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{dy}$$

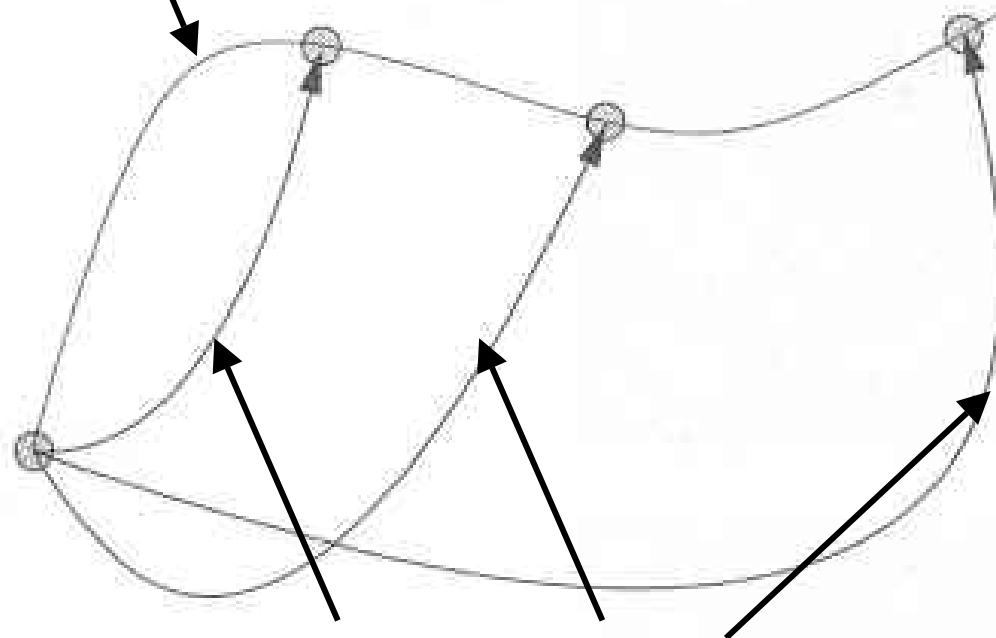
$$\frac{w(x, y, z)}{u(x, y, z)} = \frac{dz}{dx}$$

Streichlinien

= verbinden zu einem festen Zeitpunkt t_1 alle Teilchen miteinander, die alle **denselben ortsfesten** Punkt des Stromfeldes durchlaufen haben (oder werden). **Beispiel: Schornstein.**

Streichlinie

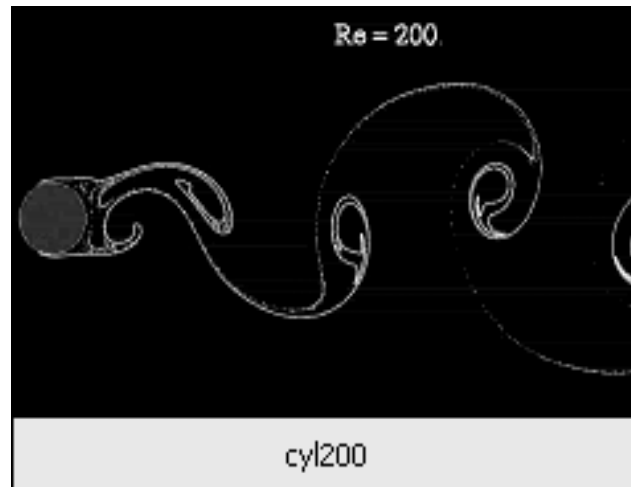
t_1



Teilchenbahnen (Trajektorien)

Streichlinien

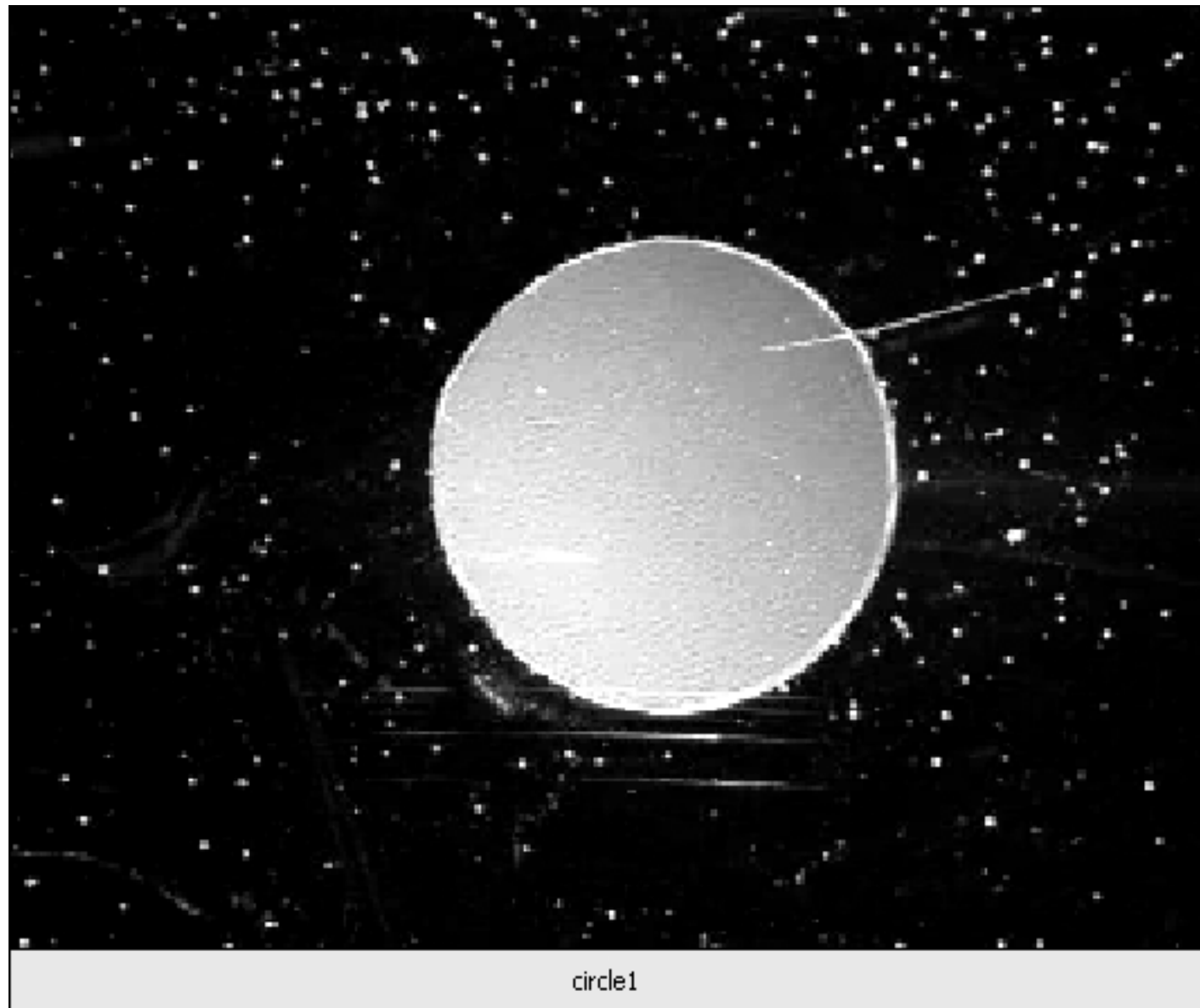
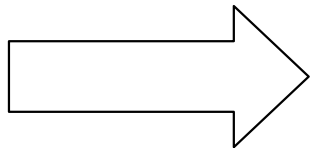
= verbinden zu einem festen Zeitpunkt t_1 alle Teilchen miteinander, die alle **denselben ortsfesten** Punkt des Stromfeldes durchlaufen haben (oder werden).



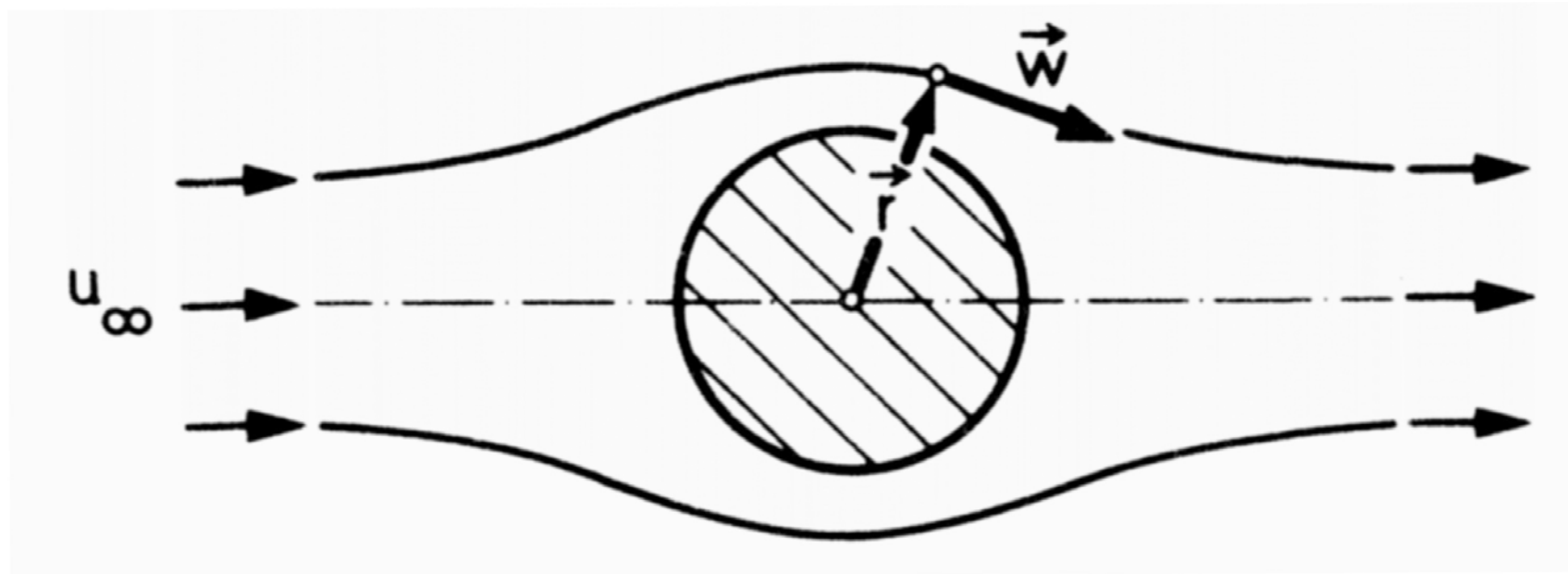
Nur bei stationären Strömungen
(Feldgrößen KEINE Funktion der Zeit)
gilt:

Teilchenbahn = Stromlinie = Streichlinie

Stationäre Zylinderumströmung



Stationäre Zylinderumströmung

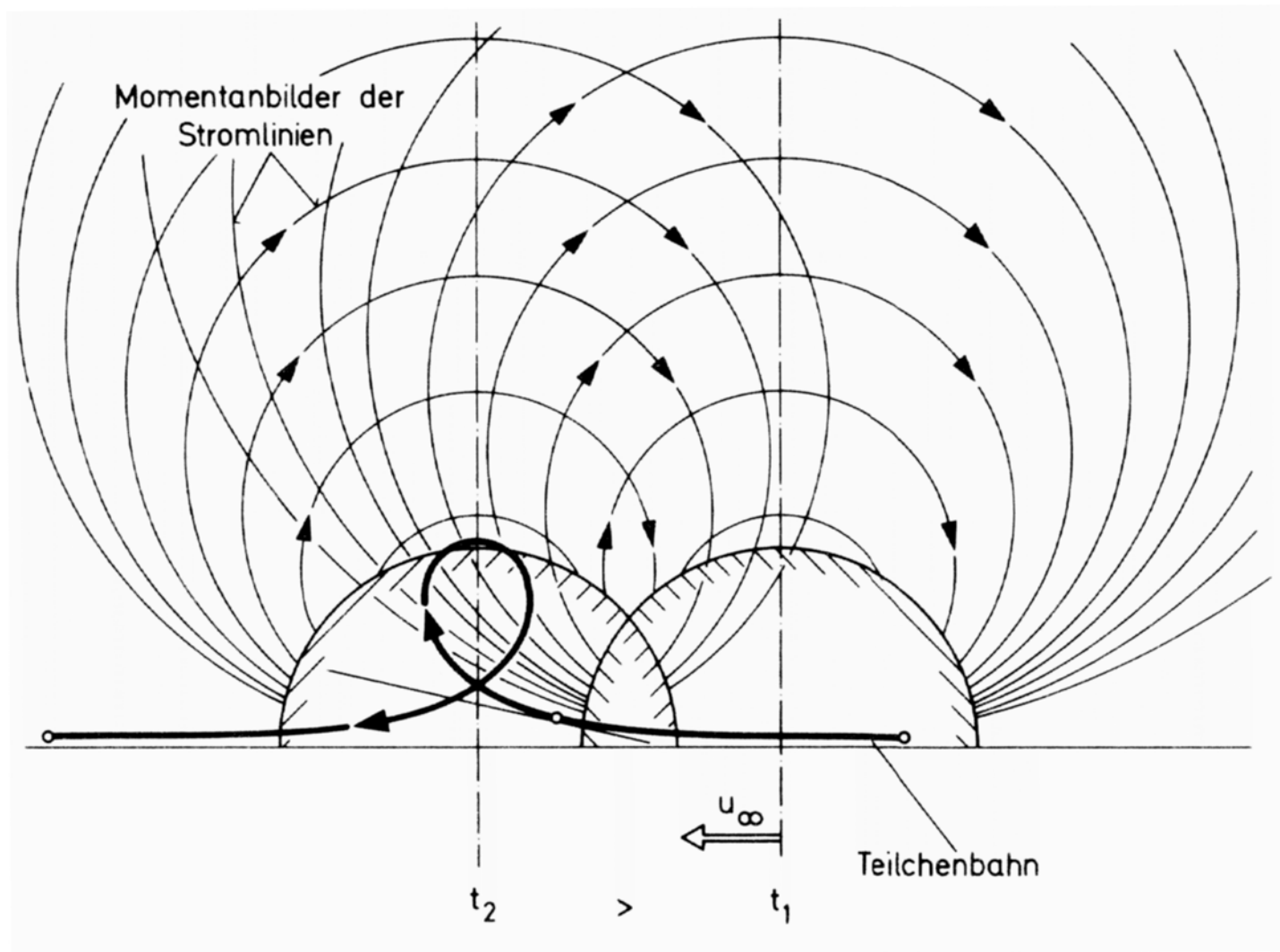


Stromlinie = Teilchenbahn = Streichlinie

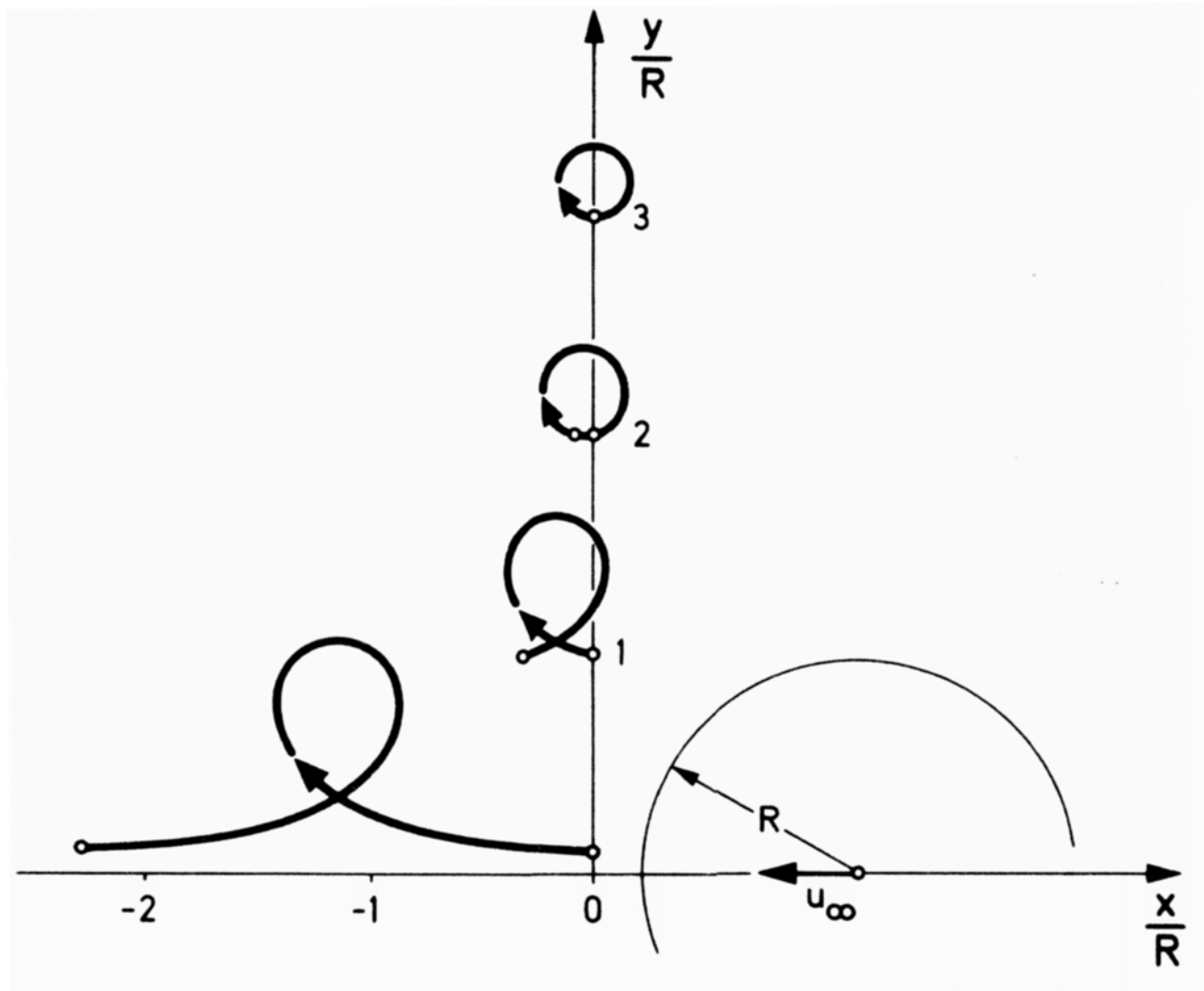
Instationäre Zylinderumströmung



Instationäre Zylinderumströmung

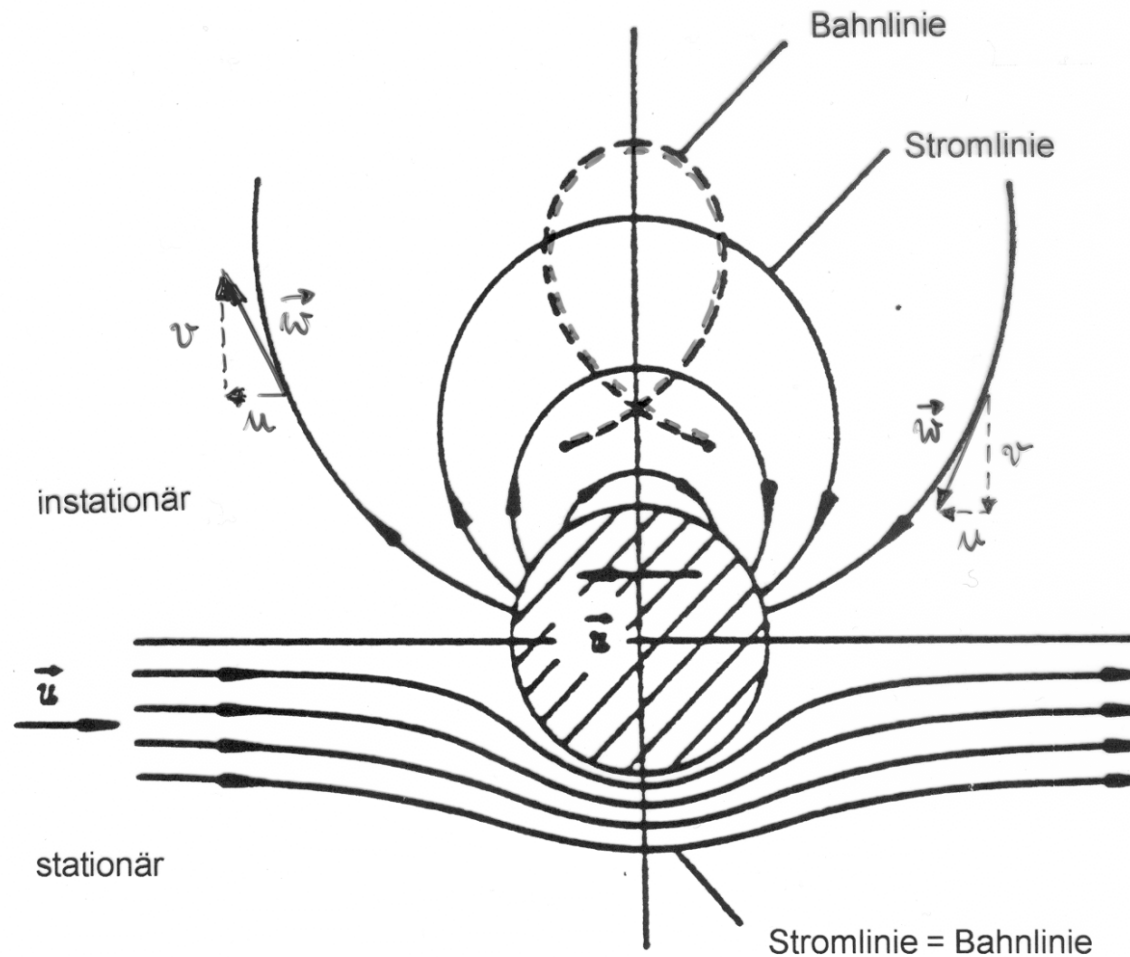


Instationäre Zylinderumströmung

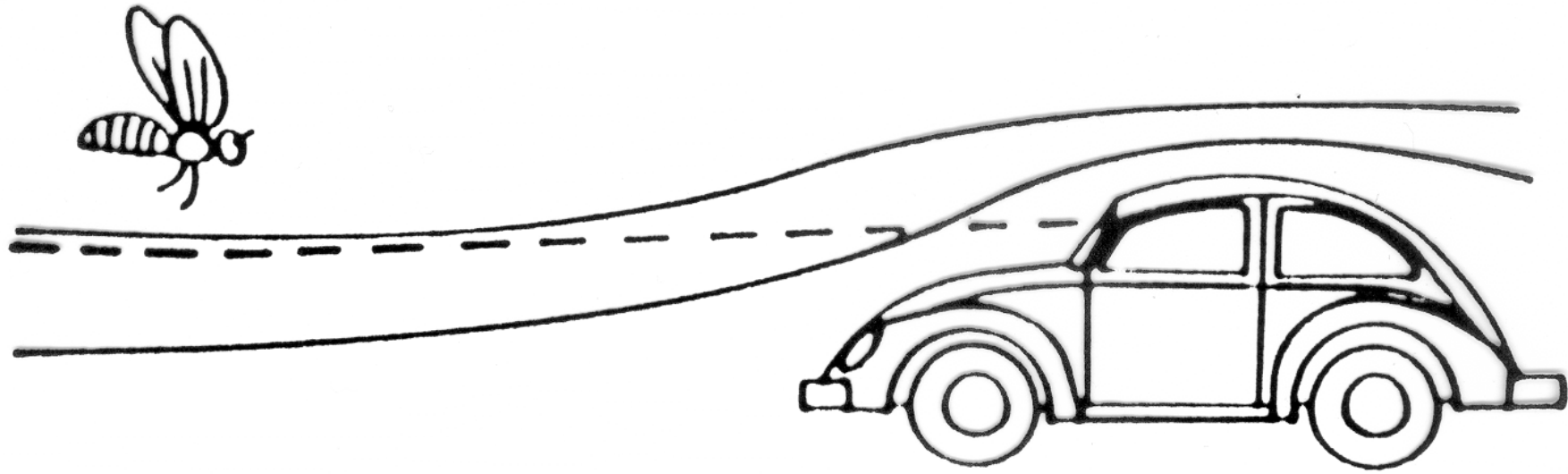


Teilchenbahnen

Stromlinien und Bahnlinien bei stationärer und instationärer Zylinderumströmung



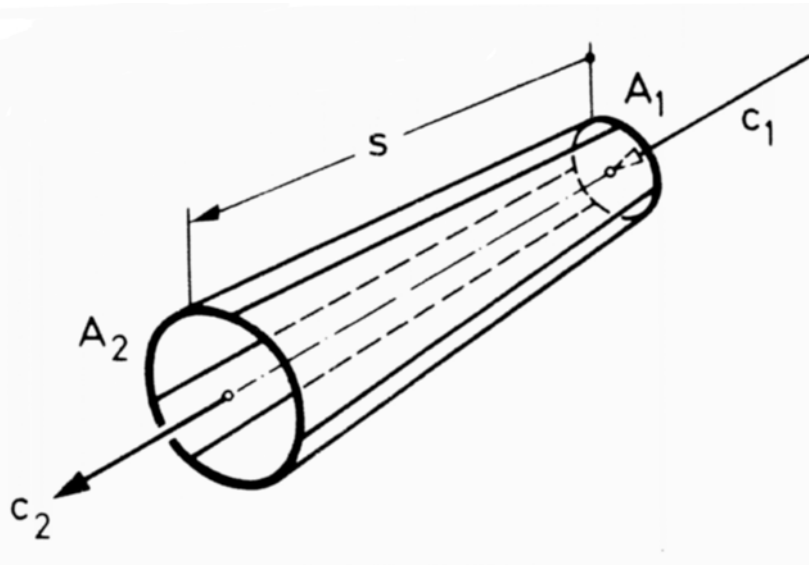
Stromlinie = Bahnlinie ?



3.2 Grundgleichungen der Stromfadentheorie

Stromfadentheorie: nur bei **reibungsfreier Strömung** anwendbar!
(i.a. auch stationär, muß aber nicht sein!)

Stromfaden:
Abstraktion:



Mantelfläche besteht aus **Stromlinien**.
Es entsteht eine **Stromröhre**.
Durchmesser der Stromröhre solange zusammenziehen, bis Zustandsgröße im Querschnitt A_1 oder A_2 durch einen einzigen Wert darstellbar ist
= Stromfaden

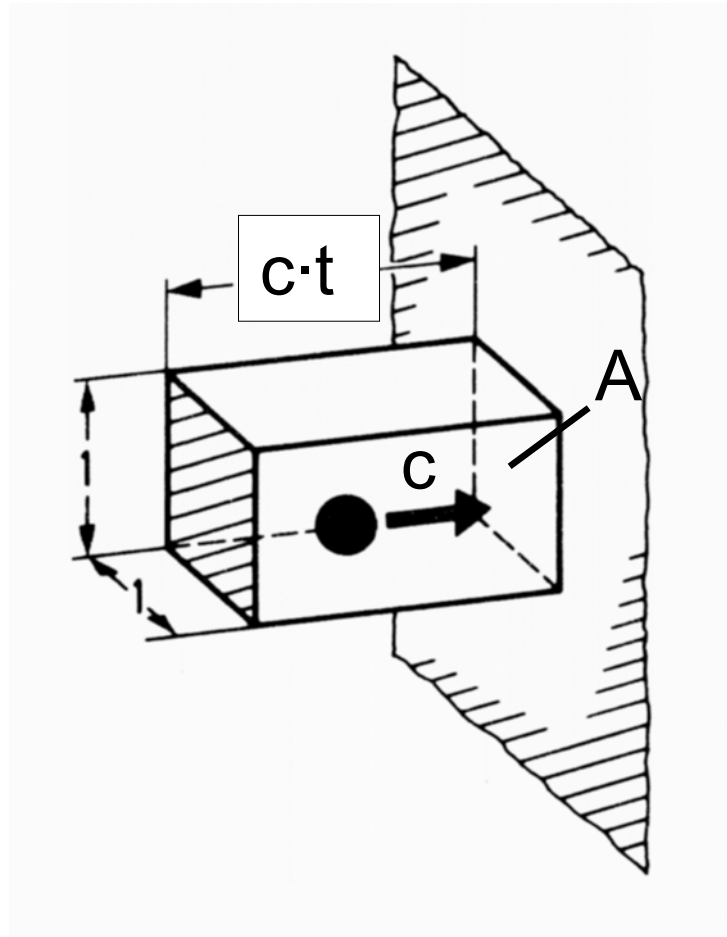
Grenzübergang: $A_1, A_2 \Rightarrow 0$

=> Stromfaden = Stromlinie



Massenstrom \dot{m}

Masse m trete in der Zeit t mit der Geschwindigkeit c durch eine Fläche A :



Masse: $m = \rho \cdot V = \rho \cdot c \cdot t \cdot A$

Massenstrom:

$$\frac{m}{t} = \dot{m} = \rho \cdot c \cdot A \quad \dot{m} = \left[\frac{\text{Kg}}{\text{s}} \right]$$

In der Hydrodynamik:

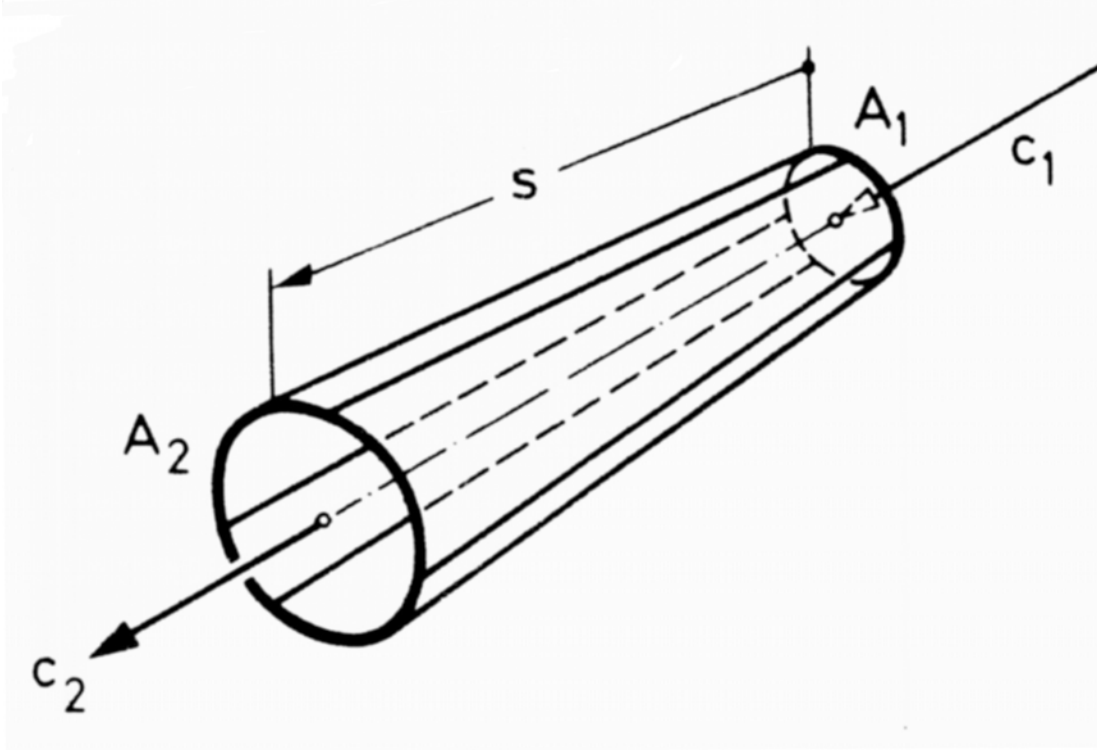
inkompressibles Medium = $\rho = \text{konst.}$

$$\frac{\dot{m}}{\rho} = \dot{V} = c \cdot A = \text{konst.} \quad \dot{V} = \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] = \left[\frac{\text{Liter}}{\text{s}} \right]$$

Volumenstrom



3.2.1 Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung):



Da Mantelfläche aus Stromlinien besteht, kann keine Masse durch diese Mantelfläche treten.

Massenstrom durch die Flächen A_1 bzw. A_2 muß gleich sein!

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A_2 = \text{konst}$$

$$\dot{m} = \rho \cdot c \cdot A = \text{konst}$$

Kontinuitätsgleichung