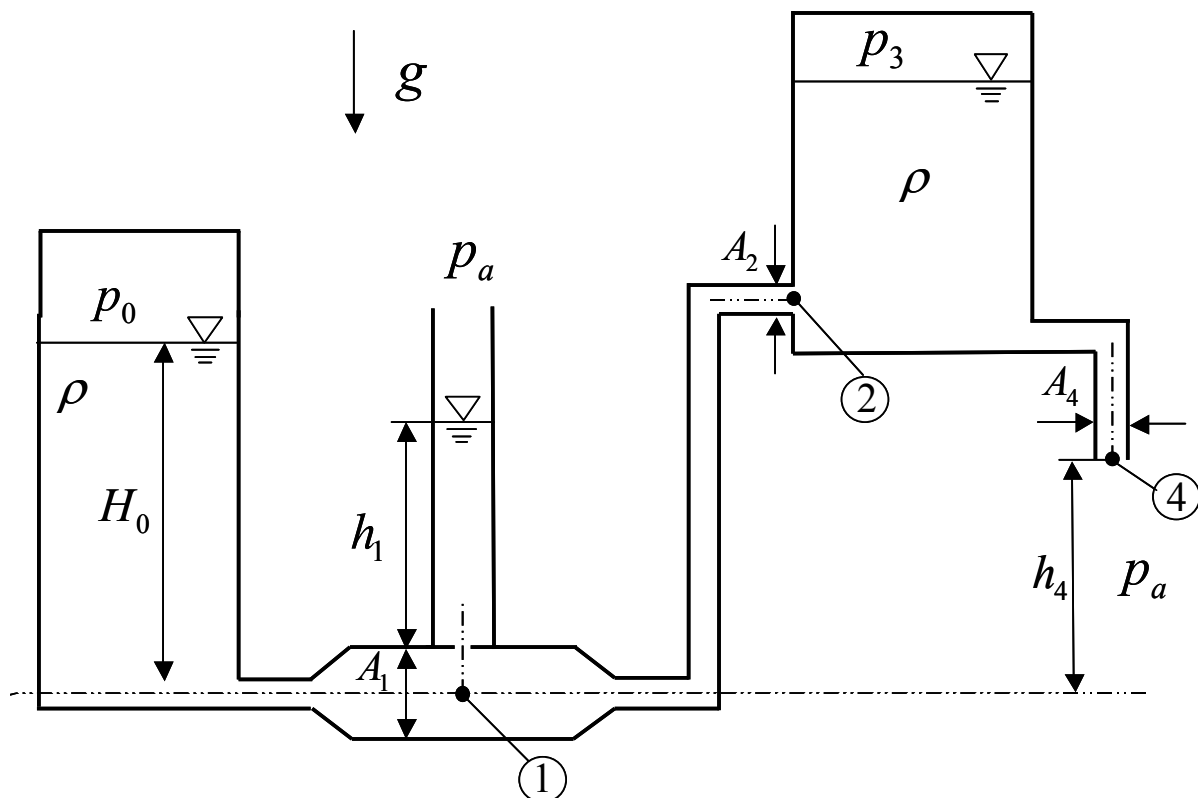


Aufgabe 2:**(5 Punkte)**

Eine Flüssigkeit mit der Dichte ρ strömt stationär aus einem großen Behälter in einen zweiten großen Behälter. Aus dem zweiten Behälter strömt die gleiche Menge Flüssigkeit durch die Leitung mit Querschnittsfläche A_4 bei Stelle 4 in die Umgebung mit konstantem Druck p_a aus. Im ersten Behälter wirkt über der Flüssigkeit der konstante Druck p_0 und im zweiten Behälter der konstante Druck p_3 . In der Strecke mit Querschnittsfläche A_1 ist bei Stelle 1 ein Steigrohr (Manometer) an eine Wandanbohrung angeschlossen. Die Strömung in den Leitungen ist reibungsfrei und Druck sowie Geschwindigkeit können als konstant über den jeweiligen Querschnitt betrachtet werden.

In Abhängigkeit gegebener Größen bestimme man den Druck p_0 .

Gegeben sind: p_a , ρ , g , H_0 , h_1 , h_4 , A_1 , A_2 , A_4 .



Aufgabe 2:

$$\text{Bernoulli } \textcircled{0} \rightarrow \textcircled{1}: p_0 + \frac{\rho}{2} c_0^2 + \rho g z_0 = p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 + \rho g z_1 \quad \frac{1}{2}$$

$l \approx 0 \qquad l = H_0 \qquad l = 0$

$$\text{mit: } p_1 = p_a + \rho g h_1 \text{ (aus Hydrostatik im Steigrohr)} \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p_0 = p_a + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 - \rho g H_0 \quad (1)$$

$$c_1 \text{ aus konti.-Gleichung: } \rho c_1 A_1 = \rho c_2 A_2 \Rightarrow c_1 = c_2 \frac{A_2}{A_1} \quad \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow (1): p_0 = p_a + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} c_2^2 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - \rho g H_0 \quad (3)$$

$$\text{Bernoulli von } \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}: p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho g z_2 \quad \frac{1}{2}$$

$l = 0 \qquad l = 0$

$$\text{mit: } p_2 = p_3 + \rho g (z_3 - z_2) \text{ (Früstrahl bei } \textcircled{2}) \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p_a + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} c_2^2 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 = p_3 + \rho g (z_3 - z_2) + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho g z_2$$

$$\Rightarrow p_3 + \rho g h_3 = p_a + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} c_2^2 \left[\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 \right] \quad (4)$$

$$\text{Bernoulli von } \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4}: p_3 + \frac{\rho}{2} c_3^2 + \rho g z_3 = p_4 + \frac{\rho}{2} c_4^2 + \rho g z_4 \quad \frac{1}{2}$$

$l \approx 0 \qquad l = h_4$

mit: $p_4 = p_a$ (Freistrahle bei (4))

$\frac{1}{2}$ (3)

$$\rho c_2 A_2 = \rho c_4 A_4 \Rightarrow c_4 = c_2 \left(\frac{A_2}{A_4} \right) \quad (\text{Kontin.-Glg.})$$

$\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow p_3 + \rho g z_3 = p_a + \frac{\rho}{2} c_2^2 \left(\frac{A_2}{A_4} \right)^2 + \rho g h_4 \quad (5)$$

(5) = (4) :

$$\cancel{p_a} + \frac{\rho}{2} c_2^2 \left(\frac{A_2}{A_4} \right)^2 + \rho g h_4 = \cancel{p_a} + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} c_2^2 \left[\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2} c_2^2 \left[1 + \left(\frac{A_2}{A_4} \right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = \rho g (h_1 - h_4)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2} c_2^2 = \frac{\rho g (h_1 - h_4)}{\left[1 + \left(\frac{A_2}{A_4} \right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]} \quad (6)$$

(6) \leadsto (3) :

$$p_0 = p_a + \rho g h_1 + \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \frac{\rho g (h_1 - h_4)}{\left[1 + \left(\frac{A_2}{A_4} \right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]} - \rho g H_0$$

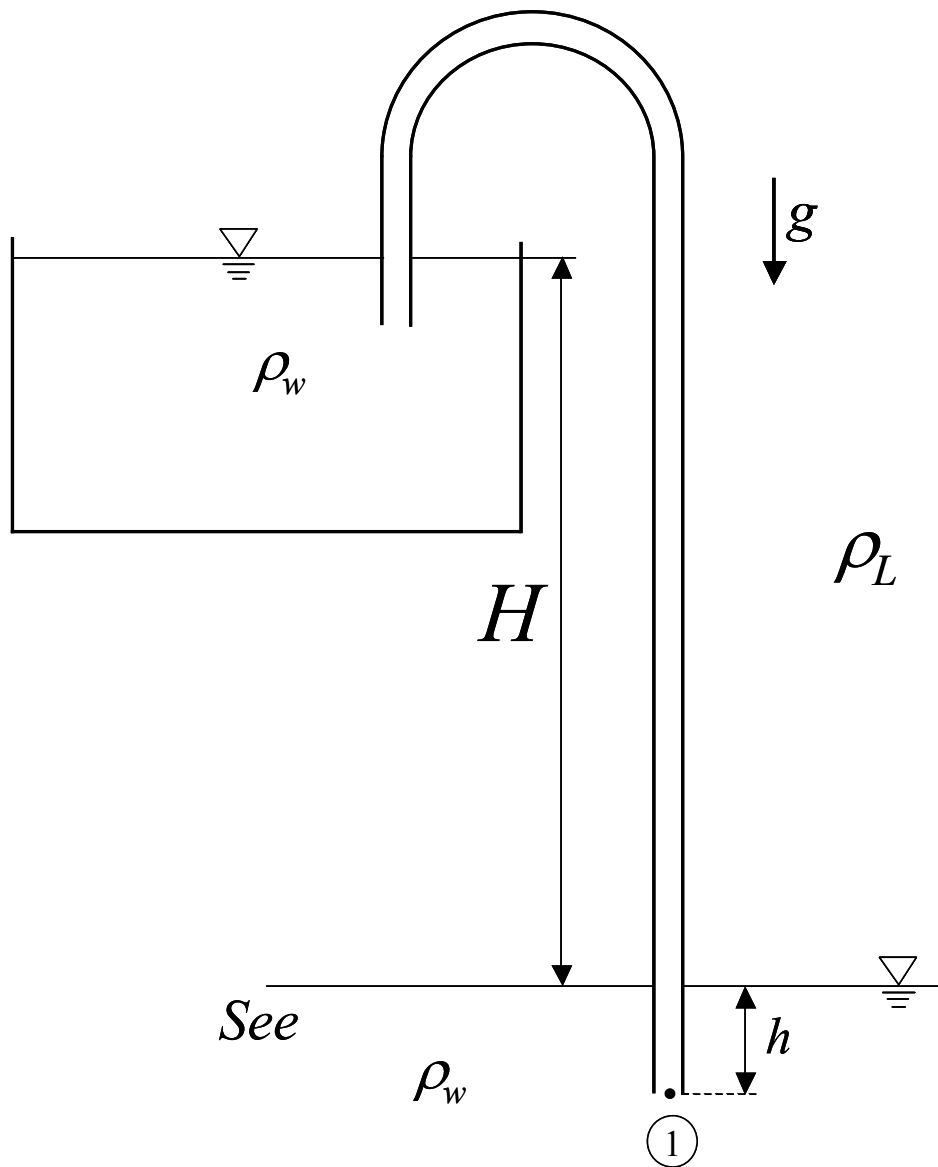
$\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$

Aufgabe 2:**(2,0 Punkte)**

Wasser (Dichte ρ_w) wird aus einem großen Behälter reibungsfrei durch eine Rohrleitung über eine sehr große Höhe H in einen darunter liegenden See gefördert. Das Wasser tritt im Abstand h unterhalb der freien Oberfläche des Sees aus (Stelle 1). Die umgebende Luft kann als inkompressibel mit der konstanten Dichte ρ_L betrachtet werden.

In Abhängigkeit gegebener Größen bestimme man die Geschwindigkeit c_1 bei Stelle 1.

Gegeben sind: H , g , ρ_L , ρ_w .



Aufgabe 2

Bernoulli von ② → ①:

$$\underset{l=p_{L0}}{p_0} + \underset{l=0}{\frac{s_w}{2} c_0^2} + s_w g \underset{l=(H+h)}{z_0} = p_1 + \frac{s_w}{2} c_1^2 + s_w g \underset{l=0}{z_1} \quad (1)$$

Freistrahл bei ①: $p_1 = p_{L1} + s_w g h$ (2)

Luftdruck p_{L1} aus Hydrostatik: $p_{L1} = p_{L0} + s_L g H$ (3)

$$(2), (3) \rightarrow (1): p_{L0} + s_w g (H+h) = p_{L0} + s_L g H + s_w g h + \frac{s_w}{2} c_1^2$$

$$\Rightarrow c_1 = \sqrt{2 g H \left(1 - \frac{s_L}{s_w} \right)}$$

Aufgabe 2:**(20 Punkte)**

Durch die in der Abbildung dargestellte Rohrleitung strömt Luft stationär und reibungsfrei. In der Leitung wird an drei Positionen der Druck gemessen:

- Bei Position 1 im Rohr mit dem Durchmesser D_1 durch Wandanbohrung.
- Bei Position 2 (und 2*) im Rohr mit dem Durchmesser D_2 mit einer PRANDTL-Sonde.
- Bei Position 3 im Rohr mit dem Durchmesser D_3 mit einer PITOT-Sonde.

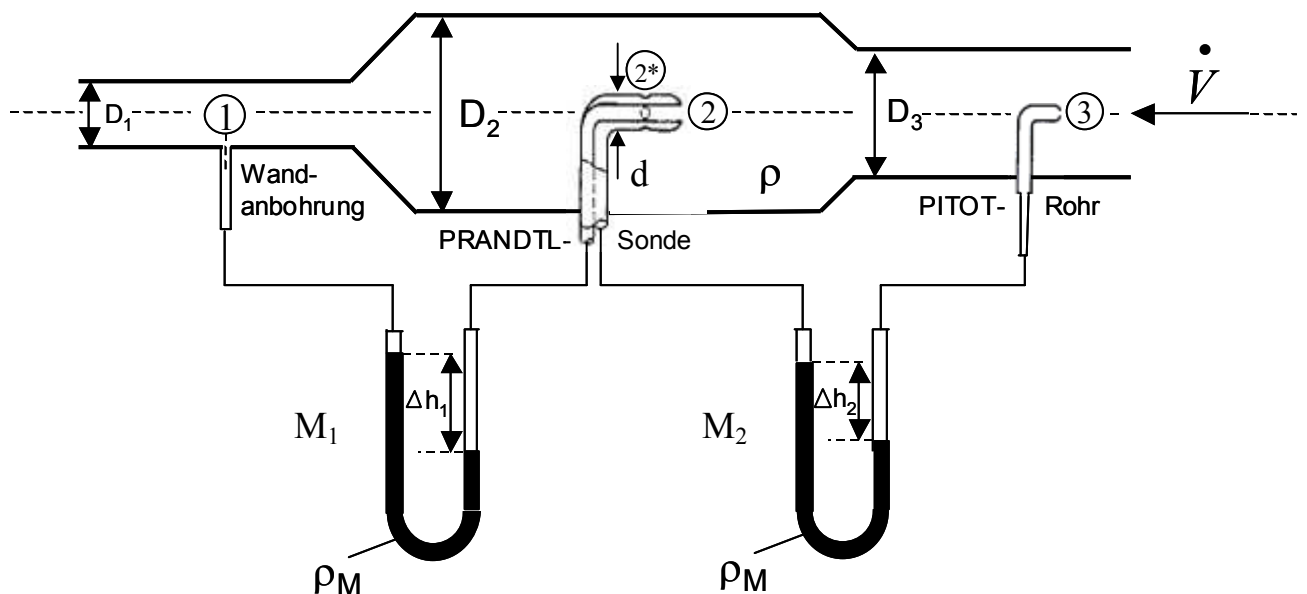
Die Druckunterschiede werden mit den U-Rohr Manometern M_1 und M_2 gemessen. Bei M_1 liegen der Druck der Wandanbohrung und der Druck am PRANDTL-Rohr bei Position 2 an. Die Höhendifferenz der Messflüssigkeit mit Dichte ρ_M ist Δh_1 . Bei M_2 liegen der Druck am PRANDTL-Rohr bei Position 2* und der Druck am PITOT-Rohr an. Die Höhendifferenz der Messflüssigkeit mit Dichte ρ_M ist Δh_2 .

Wegen der kleinen Geschwindigkeiten kann die Luft als inkompressibel betrachtet werden.

In Abhängigkeit gegebener Größen bestimme man das Verhältnis der Höhendifferenzen $\Delta h_1 / \Delta h_2$.

Hinweis: Wegen der kleinen Abmessungen der PRANDTL-Sonde ($d/D_2 \ll 1$) kann ihr Einfluss auf die Strömung im Rohr mit Durchmesser D_2 vernachlässigt werden.

Gegeben sind: D_1, D_2 .



Aufgabe 2) Geg: D_1, D_2

Berechnung von $\Delta h_1 / \Delta h_2$:

• Druckgleichgewicht bei M_1 : $p_{20} = p_1 + \rho_M g \Delta h_1$ (1)

• Bernoulli von ① \rightarrow ②: $p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 \equiv p_{20}$ (2)

(2) \sim (1): $\rho_M g \Delta h_1 = p_{20} - p_1 = \frac{\rho}{2} c_1^2$ (3)

• Druckgleichgewicht bei M_2 : $p_{30} = p_2^* + \rho_M g \Delta h_2$ (4)

• Bernoulli von ②* \rightarrow ③: $p_2^* + \frac{\rho}{2} c_2^{*2} = p_3 + \frac{\rho}{2} c_3^2 = p_{30}$ (5)

(5) \sim (4): $\rho_M g \Delta h_2 = p_{30} - p_2^* = \frac{\rho}{2} c_2^{*2}$ (6)

\Rightarrow aus (6) und (3): $\frac{\rho_M g \Delta h_1}{\rho_M g \Delta h_2} = \left(\frac{c_1}{c_2^*} \right)^2$ (7)

• Massenerhaltung: $w_1 = w_2 \Rightarrow c_1 = c_2^* \frac{D_2^2}{D_1^2}$ (8)

\Rightarrow (8) \sim (7): $\boxed{\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4}$