

Klausurtermine

Einführung in die Fluid- und Thermodynamik

1. Termin: Samstag, 29. Januar 2011
2. Termin: Samstag, 26. März 2011

Strömungslehre

1. Termin: Donnerstag, 3. Februar 2011
2. Termin: Mittwoch, 30. März 2011



TESTAT

Eine Flüssigkeit strömt reibungsfrei und stationär unter dem Einfluss der Schwerkraft durch eine Rohrleitung. Zwischen den Stellen 1 und 2 erweitert sich der Querschnitt der Leitung von der Fläche A_1 auf die Fläche A_2 . Unter der Voraussetzung, dass bei 1 und 2 die Geschwindigkeit und der Druck jeweils konstant über die Querschnittsfläche sind, berechne man in Abhängigkeit gegebener Größen

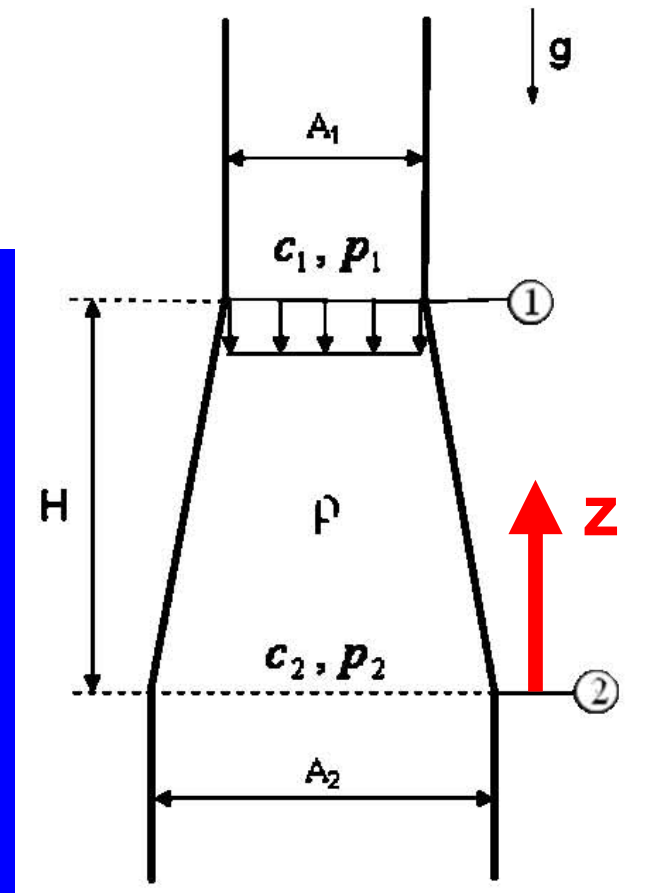
- a) die Geschwindigkeit c_2 bei 2, und
- b) den Druck p_2 bei 2.

Geg: $A_1, A_2, H, \rho, c_1, p_1, g$

a) $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho c_1 A_1 = \rho c_2 A_2 \Rightarrow c_2 = c_1 \frac{A_1}{A_2}$

b) $p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho g z_2$

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] + \rho g H$$



Wiederholung

a) inkompressibel: $\rho = \text{konst.}$ (Flüssigkeit)

- großes Reservoir, großer Behälter: $c_1 \approx 0$
- aus Bernoulli-Gleichung:

$$c_2 = \sqrt{2 \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) \right)} = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho} + 2gh}$$

Spezialfälle:

2. Ausströmen infolge Überdruck (horizontal, $z_1 = z_2$)

Wegen $\rho = \text{konst.}$ nur für Gas bei kleiner Geschwindigkeit ($c_2 < 70 \text{ m/s}$)

$$c_2 = \sqrt{2\Delta p / \rho}$$

Druckenergie Δp vollständig in kinetische Energie $\rho c^2/2$ umgewandelt.



Wiederholung

b) kompressibel: $\rho = (p, T)$ (Gase => **Gasdynamik**)

- thermisch und kalorisch ideales Gas

$$p = \rho \frac{R}{m} T$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\frac{R}{m} = c_p - c_v$$

R: universelle Gaskonstante; **m**: Molmasse

c_p, c_v: spez. Wärmekapazitäten; **κ**: Isentropenexponent

- großes Reservoir, großer Behälter: $c_1 \approx 0$
- aus Bernoulli-Gleichung ohne Massenkräfte (Gas bei kleinen Höhendifferenzen ODER horizontal):

$$\frac{c_2^2}{2} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = \cancel{\frac{c_1^2}{2}}$$

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}}$$



Wiederholung

- Isentrope Zustandsänderung von 1 bis 2:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^\kappa$$

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}$$

mit Zustandsgleichungen:

$$c_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{R}{m} T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]} = \sqrt{2 c_p T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}$$

p_1 : Ruhedruck; p_2 : Gegendruck
 ρ_1 : Ruhedichte; T_1 : Ruhetemperatur

Namensgebung auch für inkompressible Strömungen!



Wiederholung

- Isentrope Zustandsänderung von 1 bis 2:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^\kappa$$

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}$$

=> Maximalgeschwindigkeit für $p_2 = 0$ (Vakuum):

$$c_{2,max} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1}} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{R}{m} T_1} = \sqrt{2 c_p T_1} = \begin{cases} \sim \sqrt{T_1} \\ \sim \sqrt{1/m} \end{cases}$$

z.B. Luft unter Atmosphärenbedingungen:

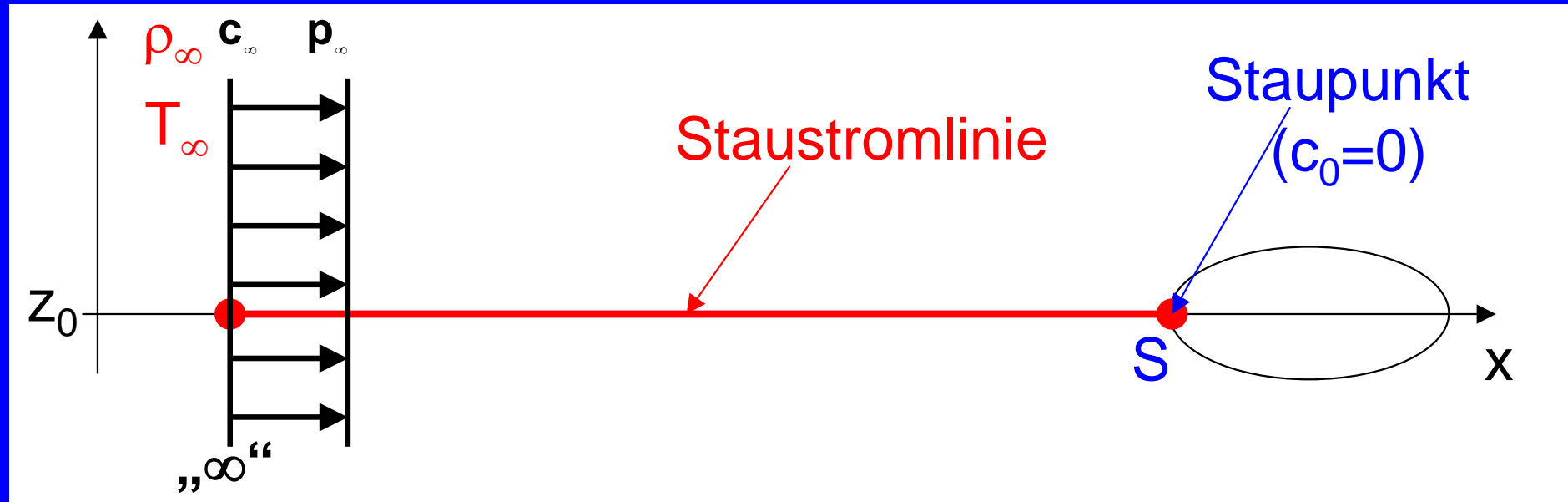
$$\kappa = 1,4, p_1 = 10^5 \text{ Pa}, \rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$$

$$\Rightarrow c_{2,max} = 750 \text{ m/s}$$



Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

Beispiel: Strömung entlang Staustromlinie



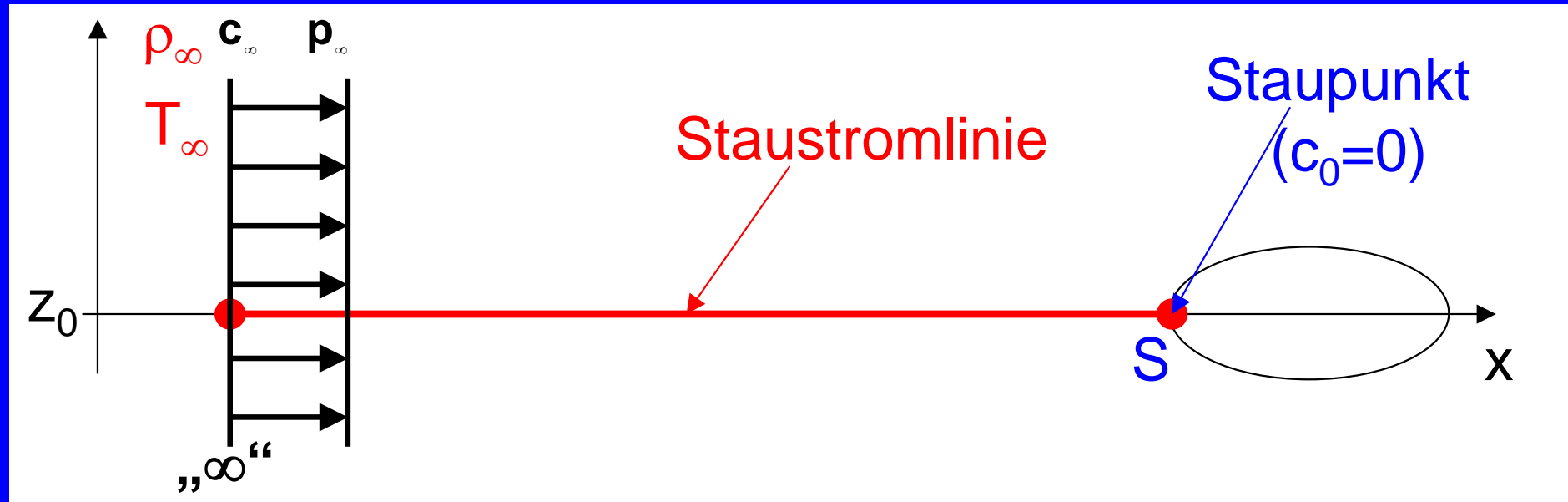
$$\frac{c_\infty^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} = \frac{c_\infty^2}{2} + c_p T_\infty = \cancel{\frac{c_0^2}{2}} + c_p T_0 = \cancel{\frac{c_0^2}{2}} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

Bernoulli Gleichung für kompressible, isentrope Strömung



Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

Beispiel: Strömung entlang Staustromlinie



$$T_0 = \frac{c_\infty^2}{2c_p} + T_\infty$$

Ruhetemperatur

Temperaturerhöhung im Staupunkt!



Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

Beispiel: Strömung entlang Staustromlinie

$$T_0 = \frac{c_\infty^2}{2c_p} + T_\infty$$

Ruhetemperatur

Luft bei Normalbedingungen:

$T_\infty = 293 \text{ K}$ und $c_p = 1006 \text{ J/(kg K)}$

- $c_\infty = 70 \text{ m/s}$: $T_0 = 295 \text{ K}$

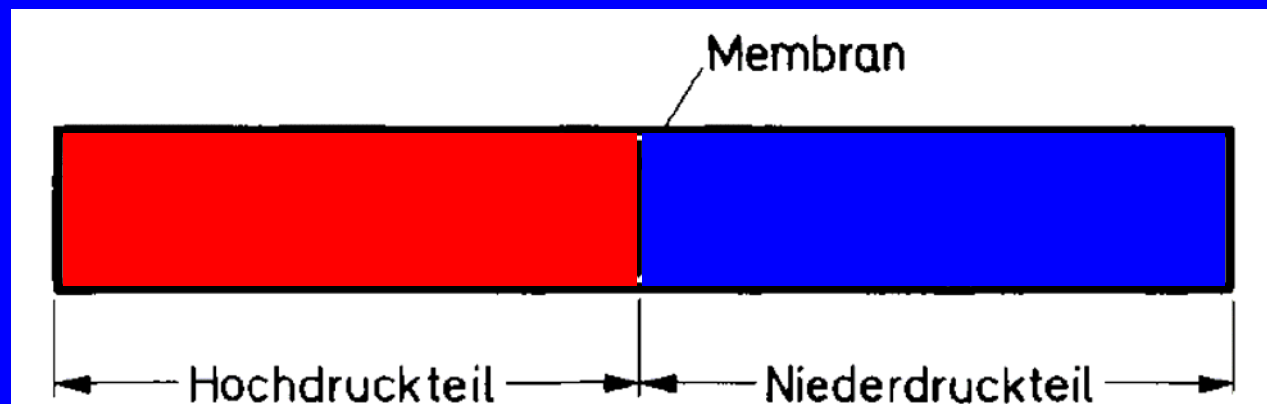
- $c_\infty = 140 \text{ m/s}$: $T_0 = 303 \text{ K}$

- $c_\infty = 210 \text{ m/s}$: $T_0 = 315 \text{ K}$



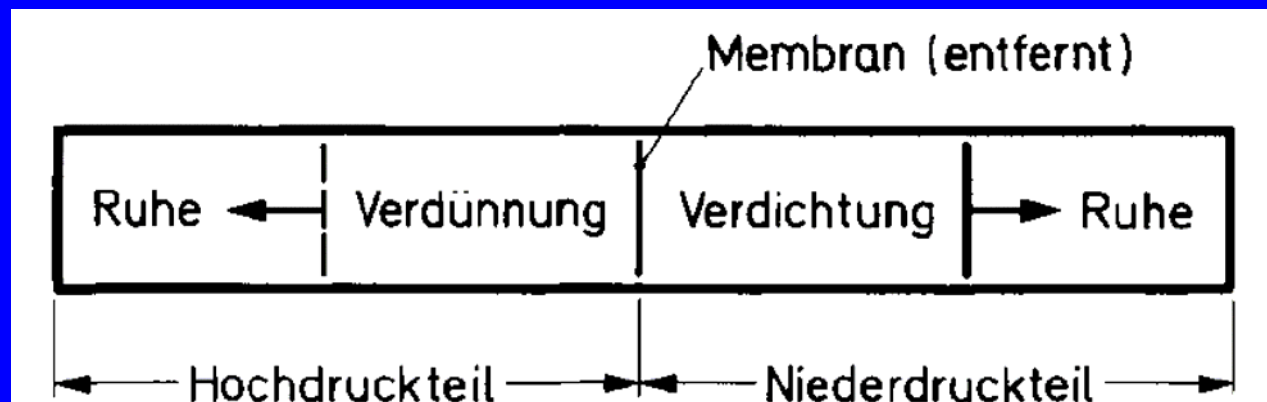
Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

Stoßrohr zur Erzeugung hoher Geschwindigkeiten



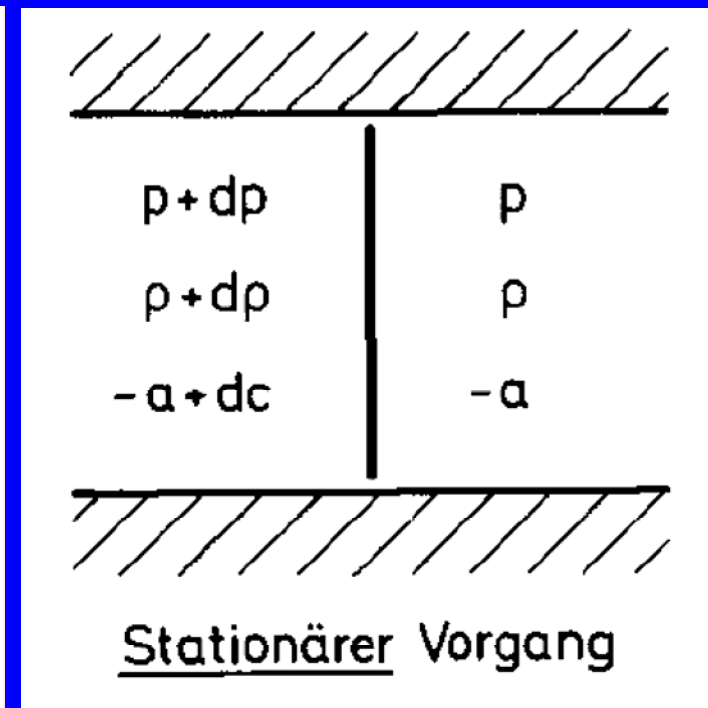
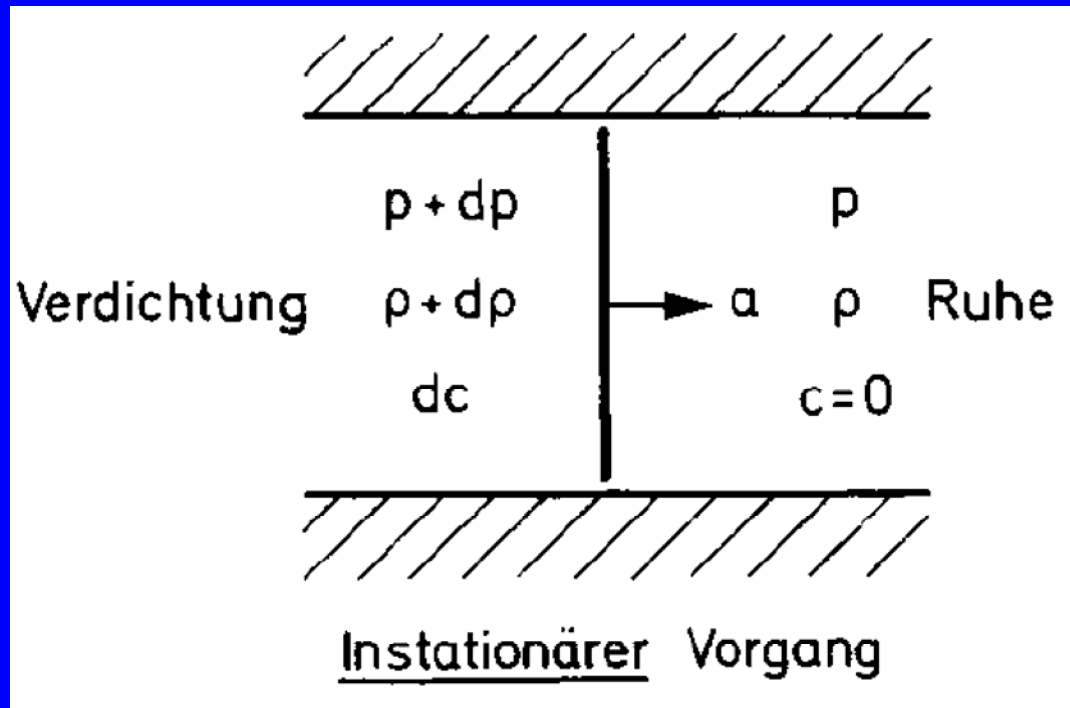
Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

Stoßrohr zur Erzeugung hoher Geschwindigkeiten



Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

Ausbreitung kleiner Störungen der Zustandsgrößen in ruhendem, kompressiblen Medium



Stationär im mit der Störung bewegten Koordinatensystem

=> Massenerhaltung, Bernoulli Glg. und Linearisierung



Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

Ausbreitung kleiner Störungen der Zustandsgrößen in ruhendem, kompressiblen Medium

- Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner Druckstörungen (Schall)
Isentrope Zustandsänderung und ideale Gasgleichung

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa \frac{R}{m} T$$

Gas (T=300K)	O ₂	N ₂	H ₂	Luft
m in g/mol	32	28,016	2,016	~ 29
a in m/s	330	353	1316	347



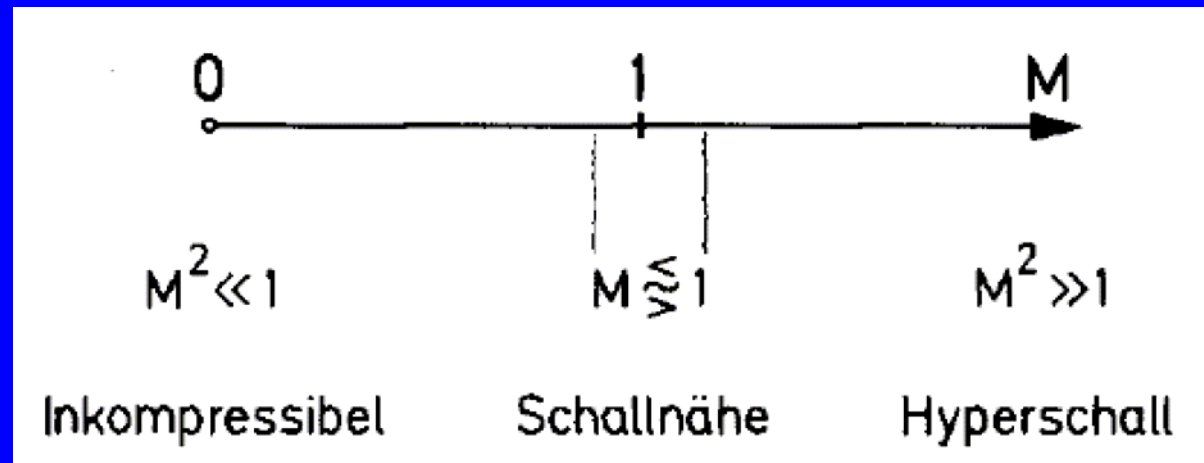
Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

Definition der Mach Zahl

Charakteristische Strömungsgeschw. / Schallgeschwindigkeit

$$M = \frac{c}{a}$$

- $M < 1$: Unterschallströmung
- $M > 1$: Überschallströmung



Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

Bernoulli Gleichung für kompressible Strömungen

Für beliebige Stelle auf dem Stromfaden:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{2} + c_p T = \text{konstant}$$

Mit: $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa \frac{R}{m} T$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1} = \text{konstant}$$

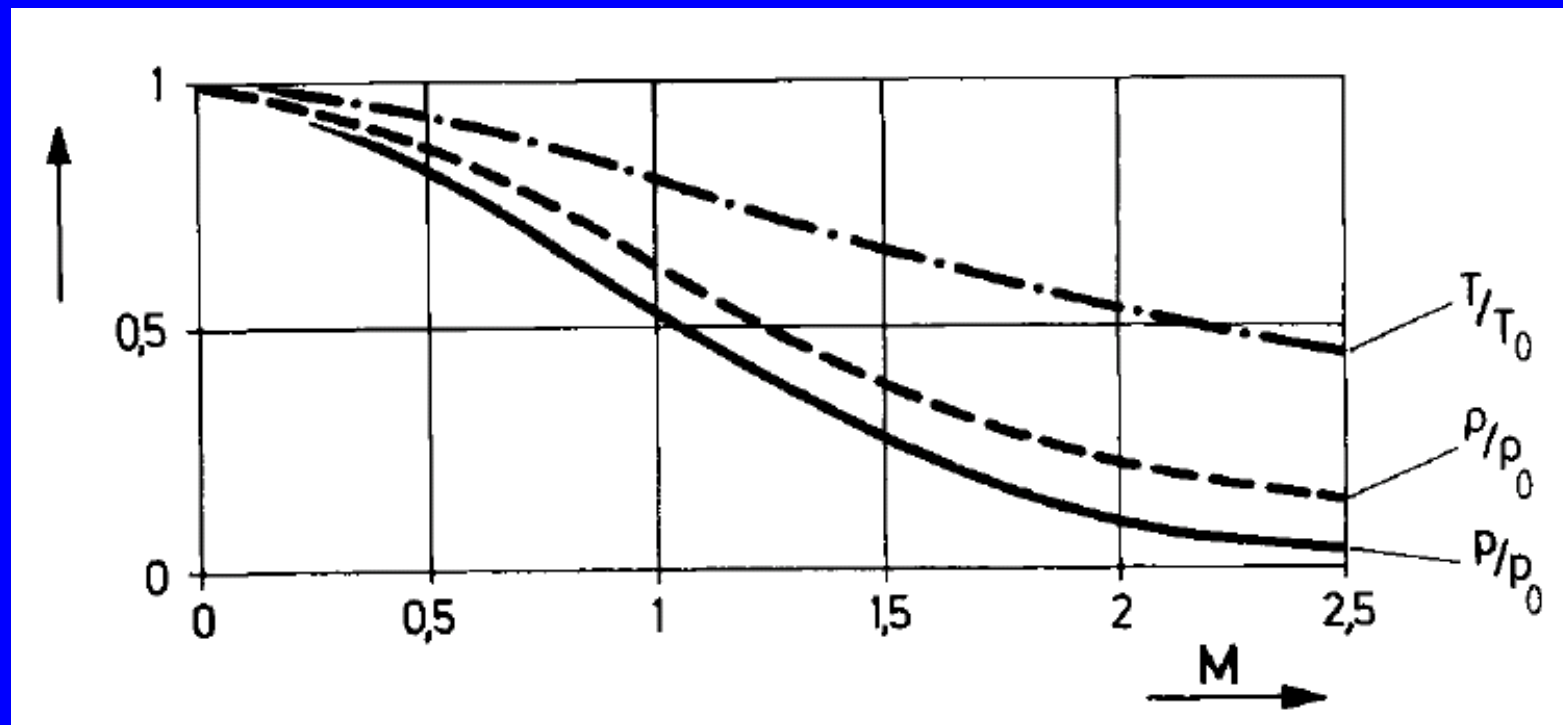
=> Festlegung der Konstante durch **Ruhegrößen (Index 0)**



Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

Bernoulli Gleichung für kompressible Strömungen

Temperatur-, Druck- und Dichteverhältnis als Funktion der Mach Zahl M



T , ρ , p berechenbar, wenn Ruhewerte und lokale Mach Zahl bekannt

