

# TERMINE

**Nächste Woche keine Übung am Dienstag**

**Montag: Rest Übungsblatt 6 am 13.12.**

**Mittwoch: Rest Übungsblatt 6 am 15.12.**



# Wiederholung

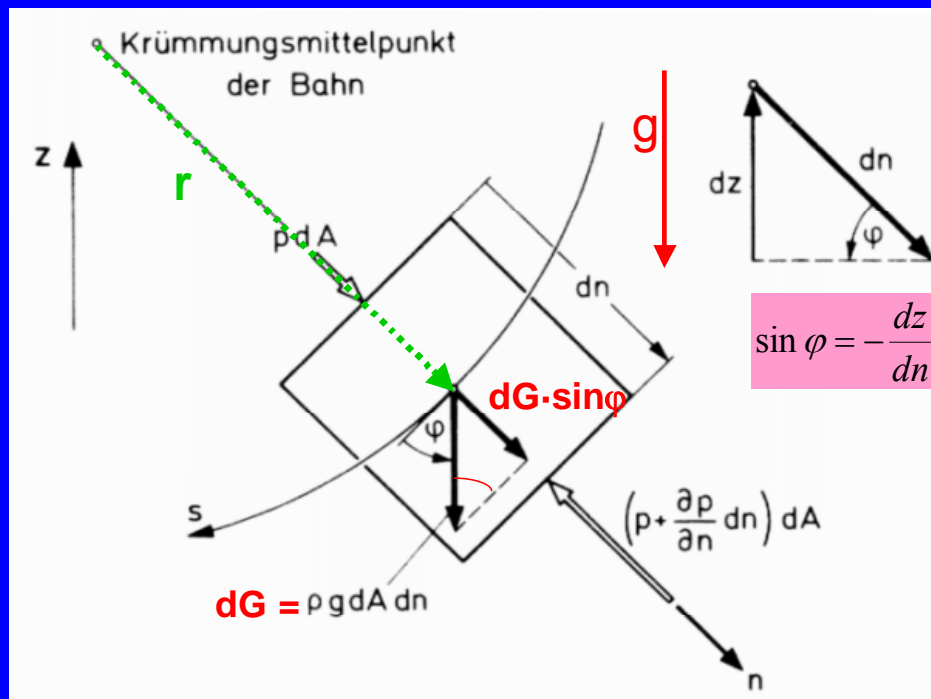
## 3. Hydro- und Aerodynamik

### 3.2 Grundgleichungen der Stromfadentheorie

#### 3.2.2 Kräftegleichgewicht längs und quer zum Stromfaden

#### Reibungsfreie Strömung

Senkrecht zum Stromfadens



$$\frac{c^2}{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} + g \cdot \frac{dz}{dn}$$

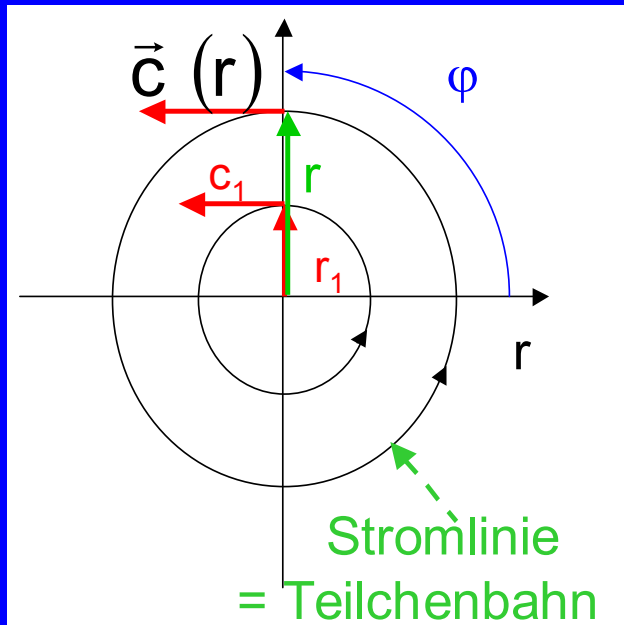
Ohne Schwerkrafteinfluss  
(horizontal oder Gas bei  
kleiner Höhendifferenz):

$$\frac{c^2}{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n}$$



# Wiederholung

## 3.3.1 Bewegung auf konzentrischen Kreisbahnen



Reibungsfreie, stationäre Strömung  
Kreissymmetrisch und isoenergetisch

$$c(r) = \frac{\text{konst.}}{r} \sim \frac{1}{r}$$

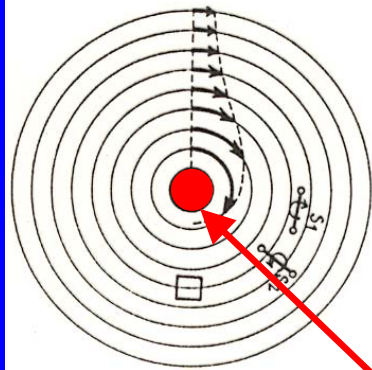
- hyperbolische Verteilung ( $\sim 1/r$ )  
**=> Potentialwirbel**
- im Kern ( $r < r_1$ ) dominiert Reibung  
**=> Starrkörperwirbel ( $\sim r$ )**

$$c(r) = \omega \cdot r = \frac{c_1}{r_1} \cdot r$$



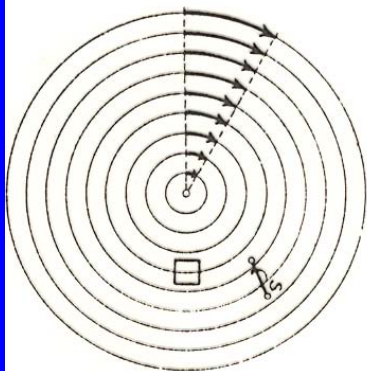
# Wiederholung

## 3.3.1 Bewegung auf konzentrischen Kreisbahnen



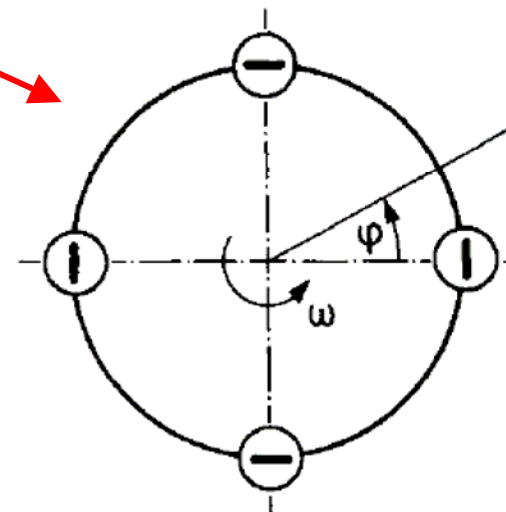
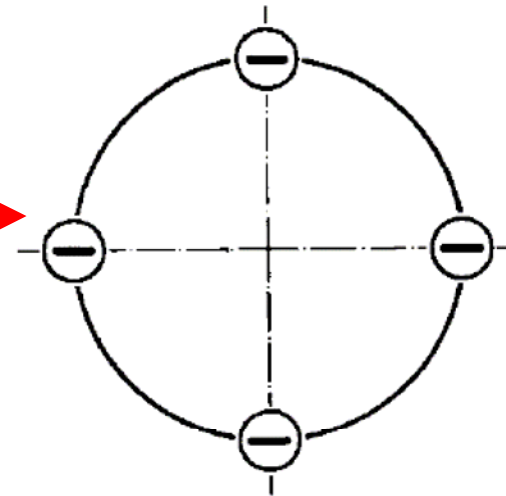
Potentialwirbel:

$$C_u(r) = \frac{C_{u1} \cdot r_1}{r} \quad \text{für } r > r_1$$

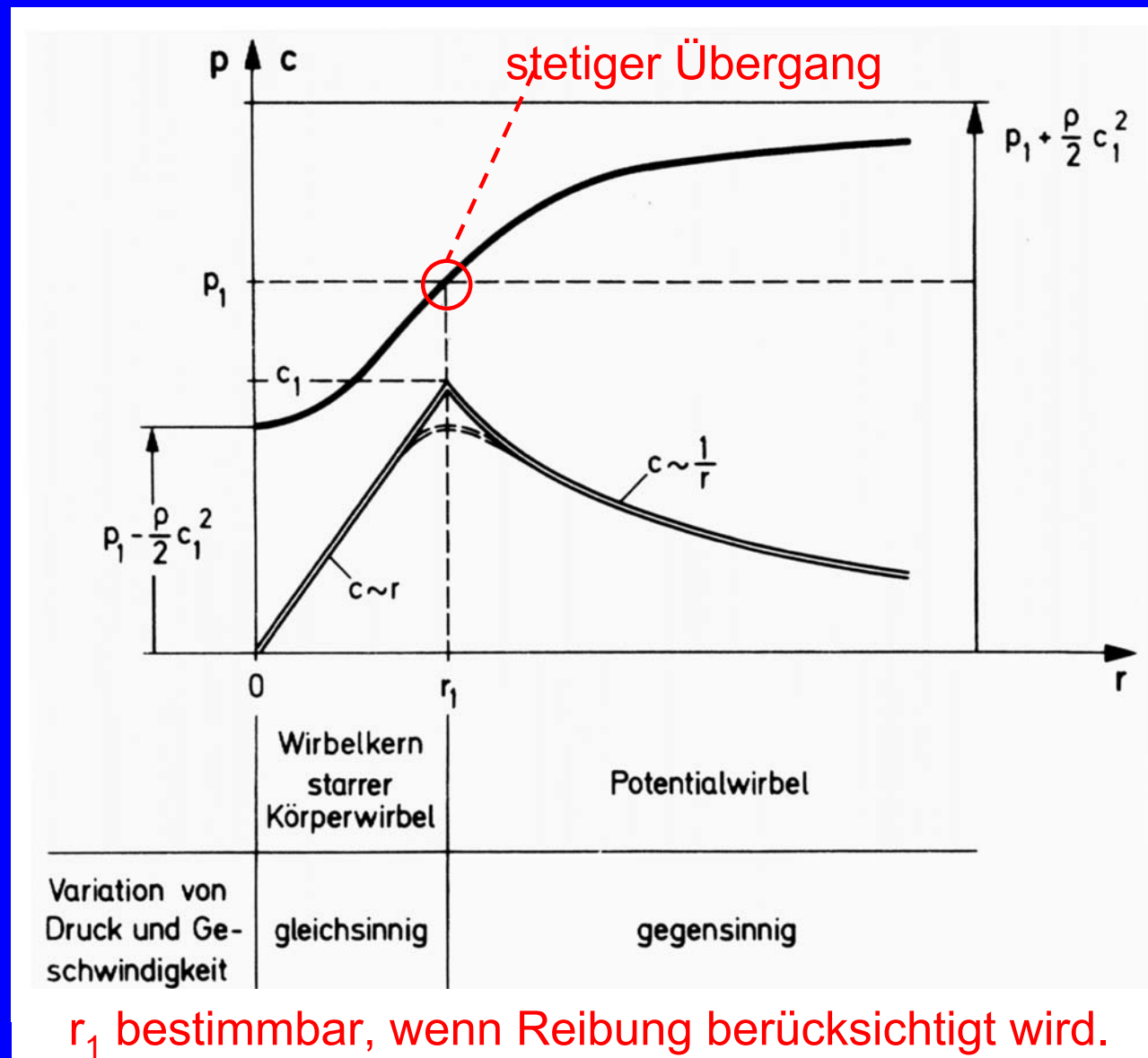


Starrkörper-Wirbel:

$$C_u(r) = \omega \cdot r \quad \text{für } r < r_1$$



# Druck- und Geschwindigkeitsverteilung beim Potential- und Starr-Körper-Wirbel



# Spiralgalaxie



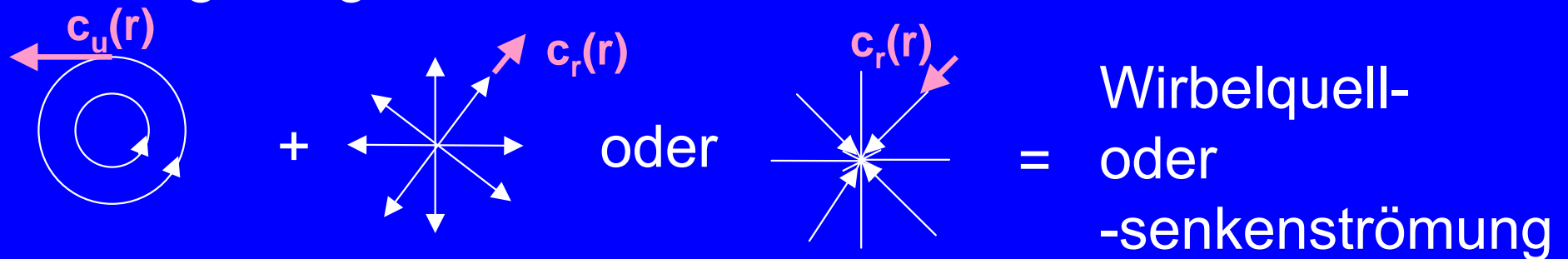


# Stromfadentheorie – Wirbelströmungen



### 3.3.2 Wirbelquell- oder Wirbelsenkenströmung

Überlagerung von Potentialwirbel mit Quelle oder Senke:



Wirbel + Quelle oder Senke

$$c_u(r)$$

$$c_r > 0$$

$$c_r < 0$$

Potentialwirbel:

$$c_u(r) = \frac{c_{u1} \cdot r_1}{r}$$

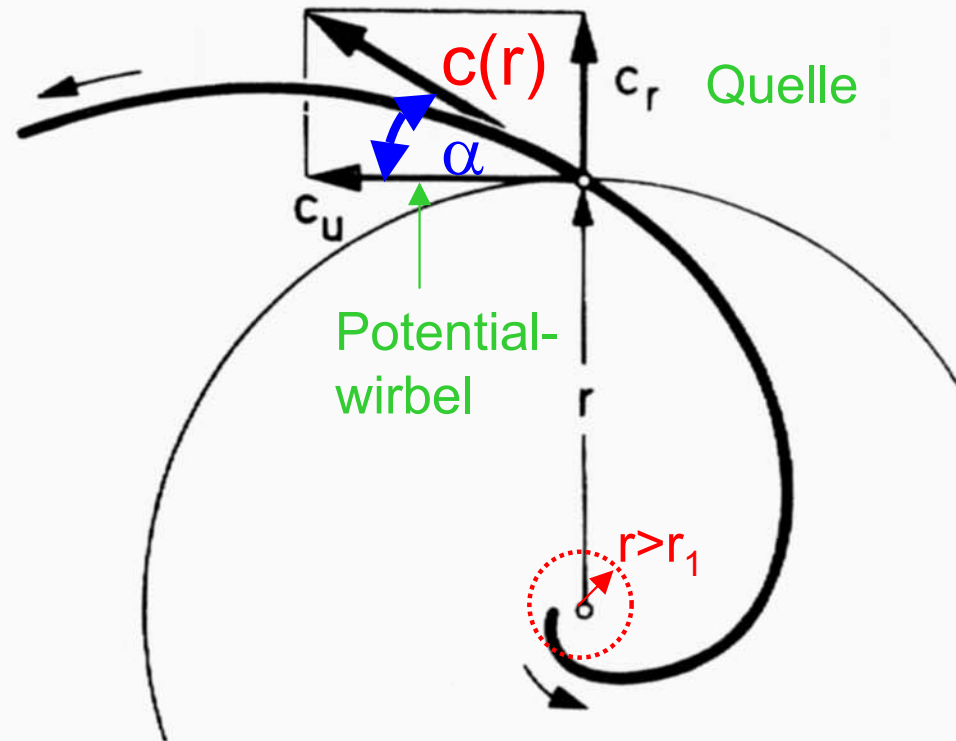
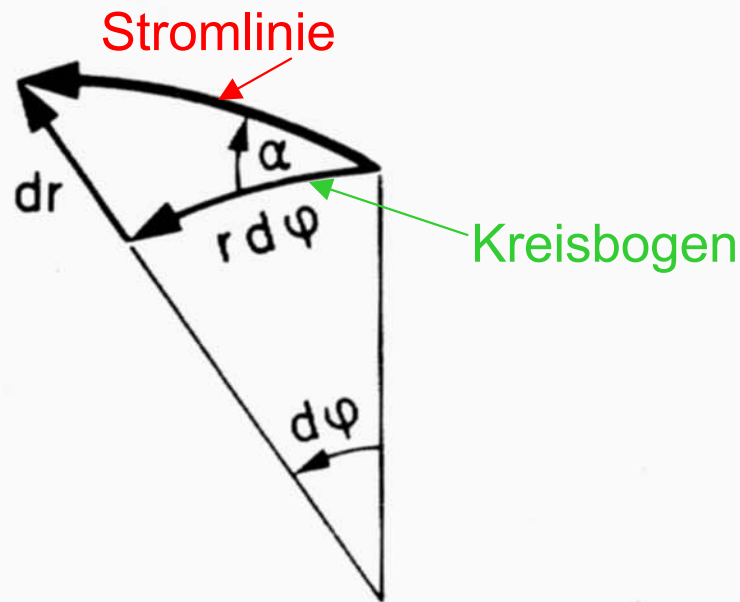
Quelle/Senke:

$$c_r(r) = \frac{c_{r1} \cdot r_1}{r}$$





# Wirbelquell- oder Wirbelsenkenströmung



Geschwindigkeitsverteilung:

$$c(r) = \sqrt{c_u^2 + c_r^2} = \sqrt{c_{u1}^2 + c_{r1}^2} \cdot \frac{r_1}{r} = \frac{\text{Konst.}}{r}$$

Stromlinie (aus  $\tan \alpha = \text{konst.}$ ):

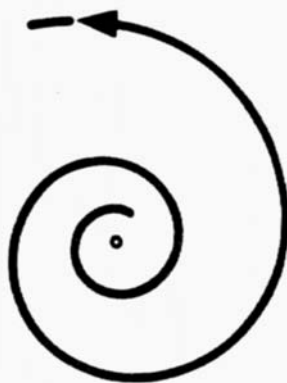
$$r(\varphi) = r_1 \cdot \exp\left[\frac{c_{r1}}{c_{u1}}(\varphi - \varphi_1)\right]$$

Mit:  
 $\varphi = \varphi_1$  bei  
 $r = r_1$



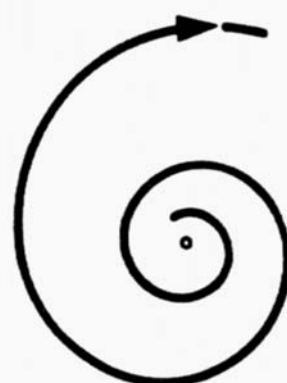
# Stromlinien der Wirbelquell- oder Wirbelsenkenströmung

$$c_{u_1} > 0, c_{r_1} > 0$$



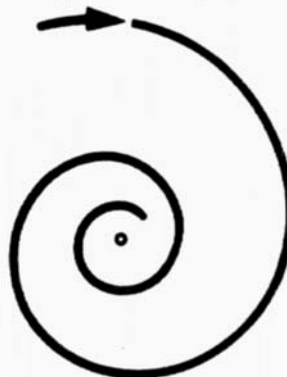
Wirbelquelle  
(linksdrehend)

$$c_{u_1} < 0, c_{r_1} > 0$$



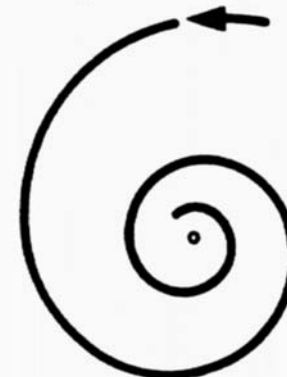
Wirbelquelle  
(rechtsdrehend)

$$c_{u_1} < 0, c_{r_1} < 0$$



Wirbelsenke  
(rechtsdrehend)

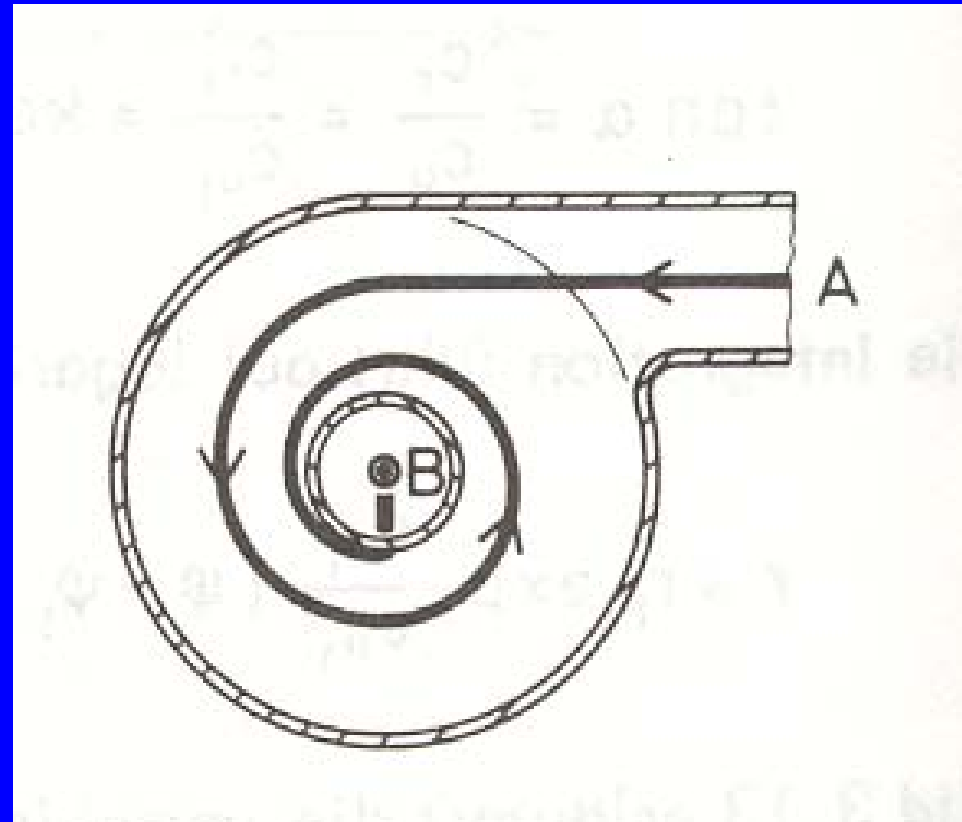
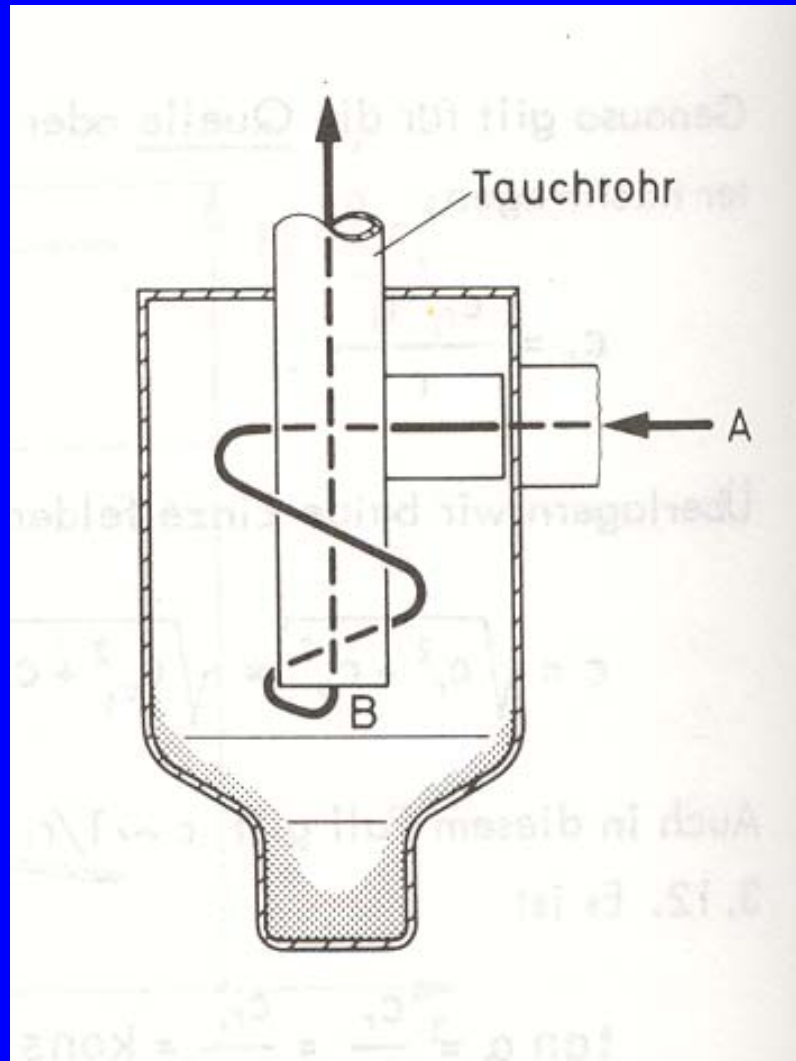
$$c_{u_1} > 0, c_{r_1} < 0$$



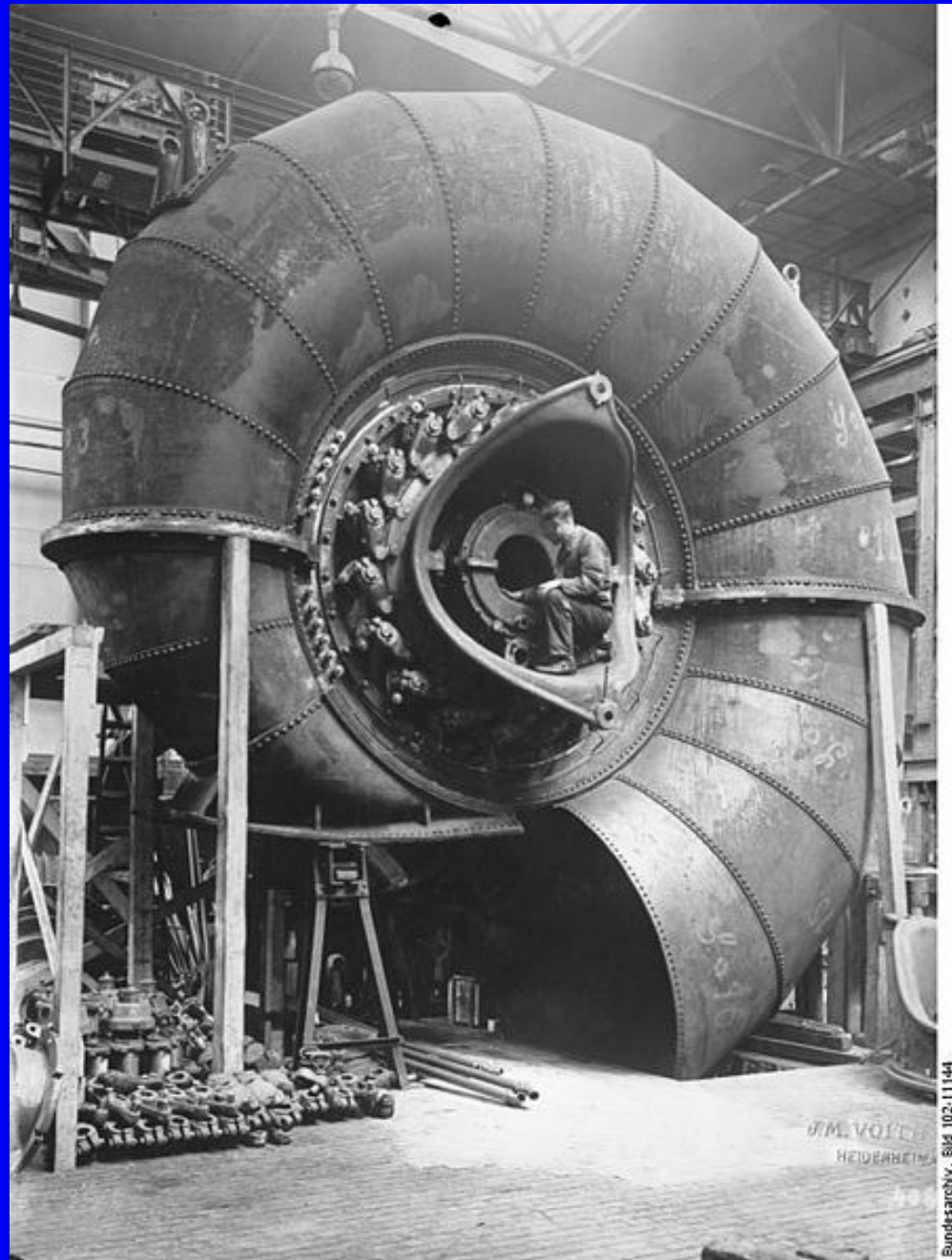
Wirbelsenke  
(linksdrehend)



# Staubabscheider (Zyklon)



# Spiralgehäuse (Turbine)

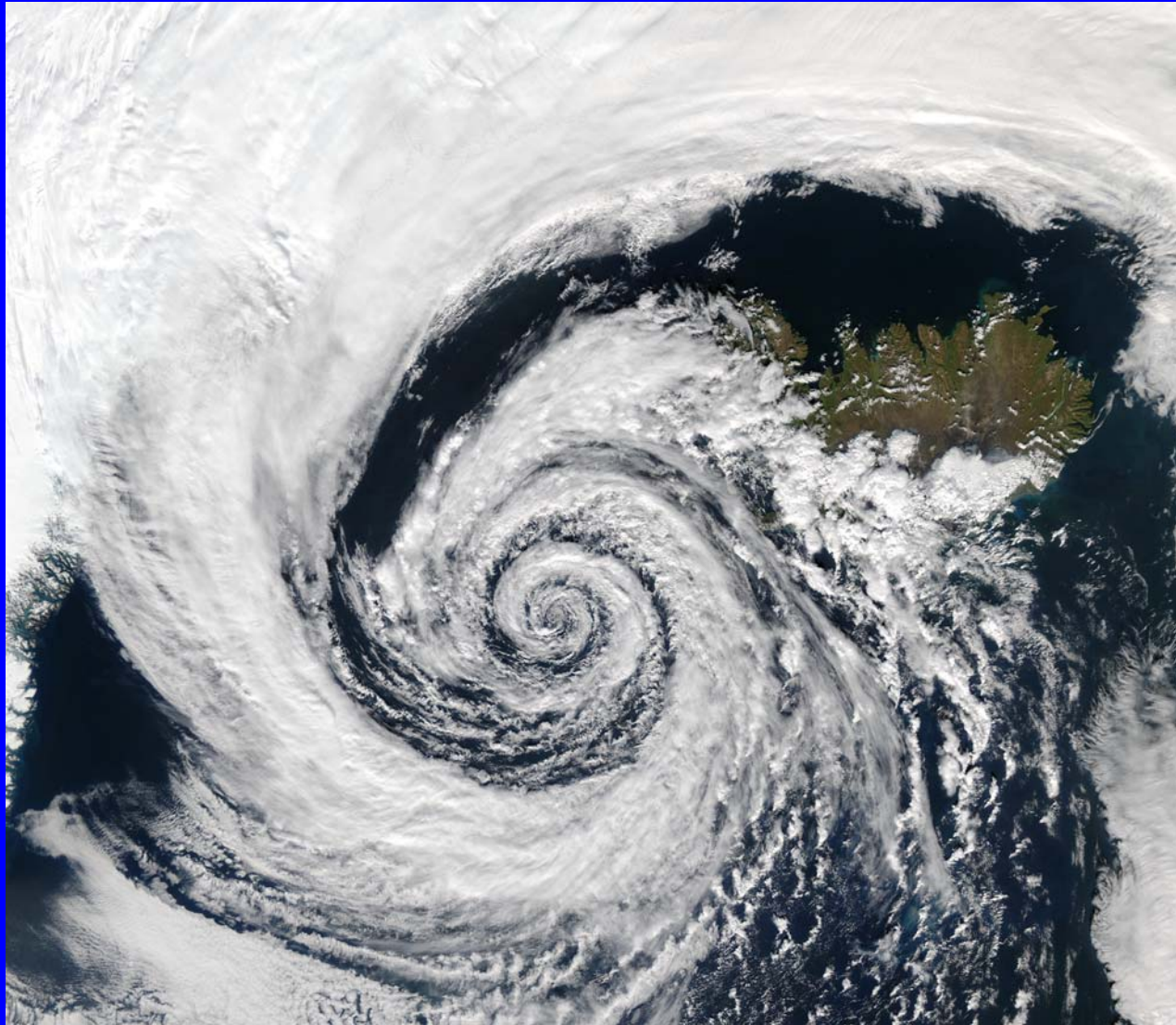


Bundesarchiv, Bild 102.11144  
Foto: o. Ang. 1. Januar 1931



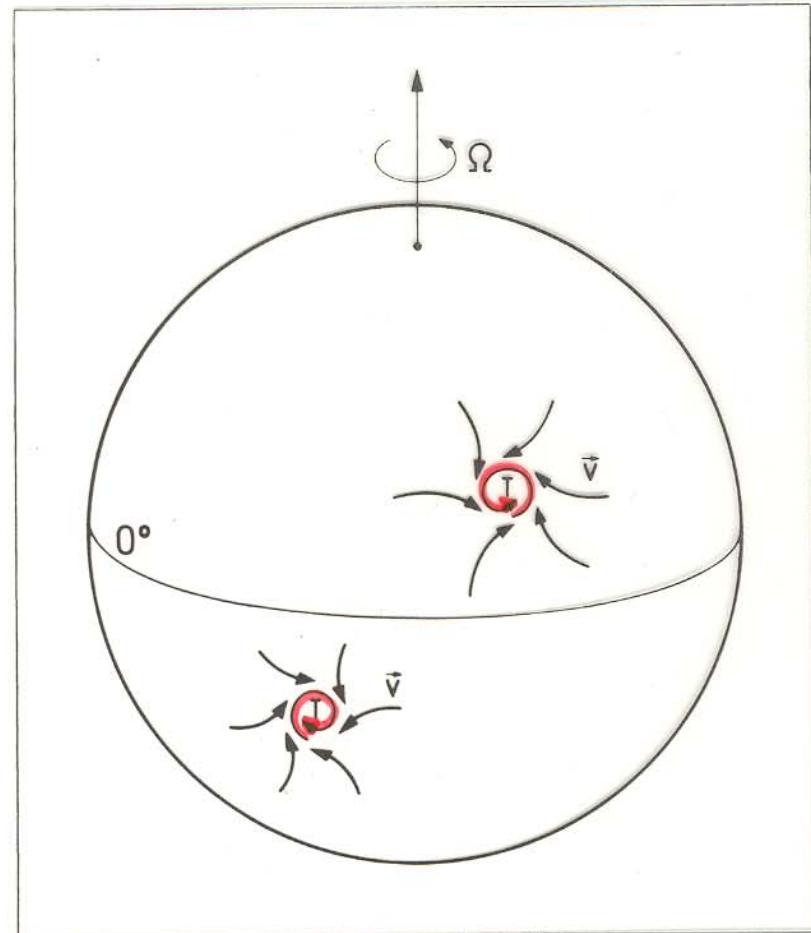
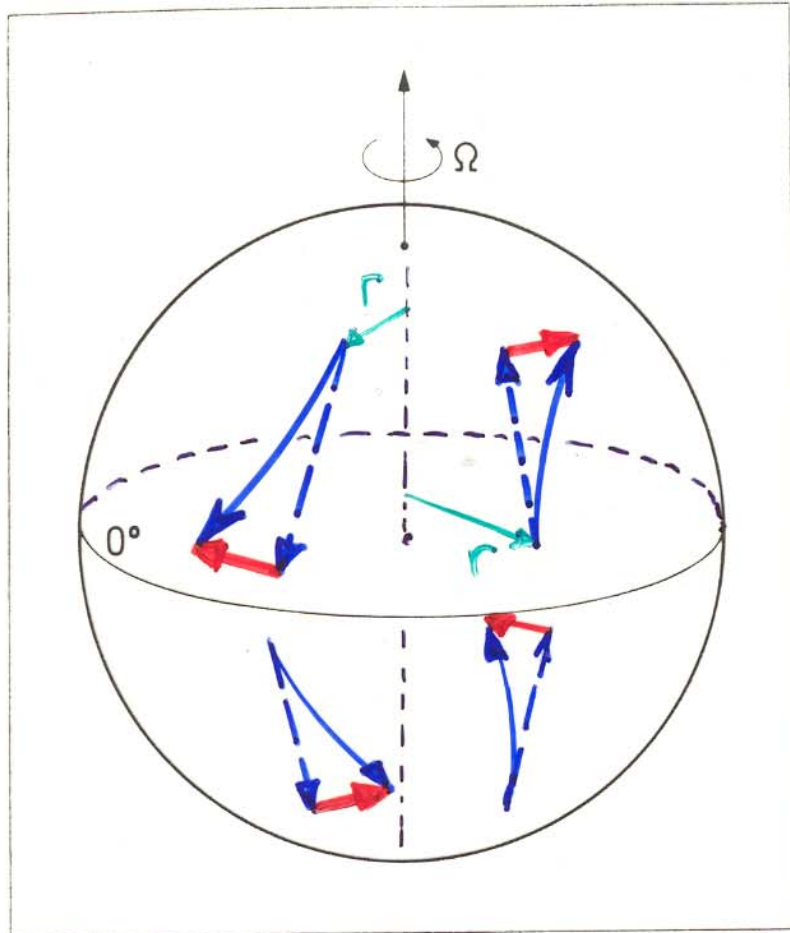


# Tiefdruckwirbel über Island



# Wolkenwirbel (Tiefdruckwirbel)

$$c(r) = \Omega \cdot r$$

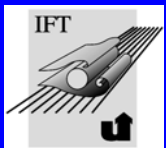
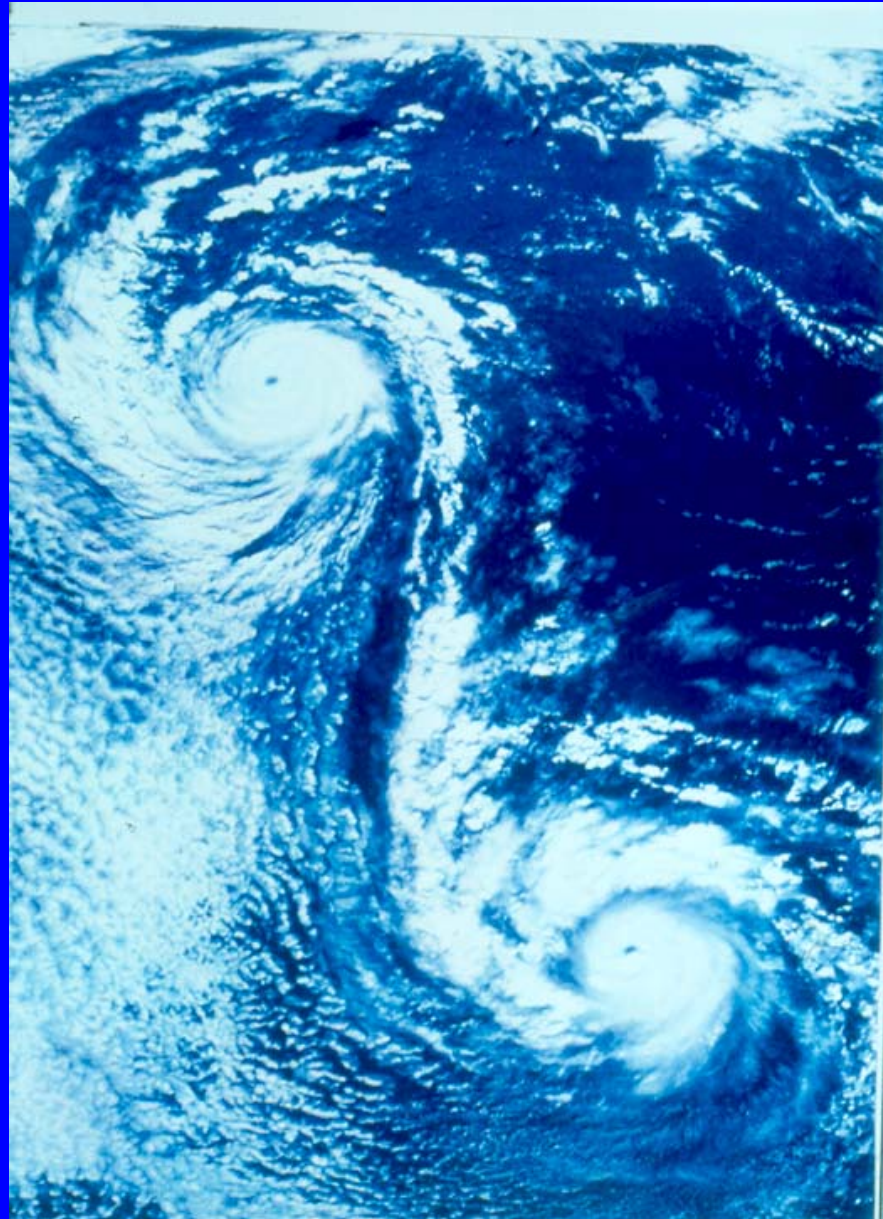


# Wirbelsturm (Tornado)





# Sturmtiefgebiete nördlich von Hawaii





# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Bewegung von Fluiden (= Flüssigkeiten und Gase)

- **Hydro- und Aerostatik**
  - => Druckverteilung in ruhenden Fluiden
  - => Druckverteilung in als Starrkörper rotierenden Fluiden
  - => Druckkräfte auf Wände und Körper (Auftrieb)
- **Reibungsfreie Strömungen**
  - => Massenerhaltung (Kontinuität)
  - => Euler- und Bernoulli Gleichung
  - => Kräftegleichgewicht senkrecht zum Stromfaden

**Im Skript bis Kapitel 3.2**

**=> Beispiele / Anwendungen der Stromfadentheorie**

**Übungsblätter bis (inklusive) 7!**



# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## (Stoff-) Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen

Flüssigkeiten als inkompressibel ( $\rho = \text{konst.}$ )

Gase bei kleinen Geschwindigkeiten ebenfalls  $\rho = \text{konst.}$

Gase bei hohen Geschwindigkeiten isentrop

Gase thermisch und kalorisch ideal = perfekt

Bei Gasen und nicht zu großen Höhenunterschieden:

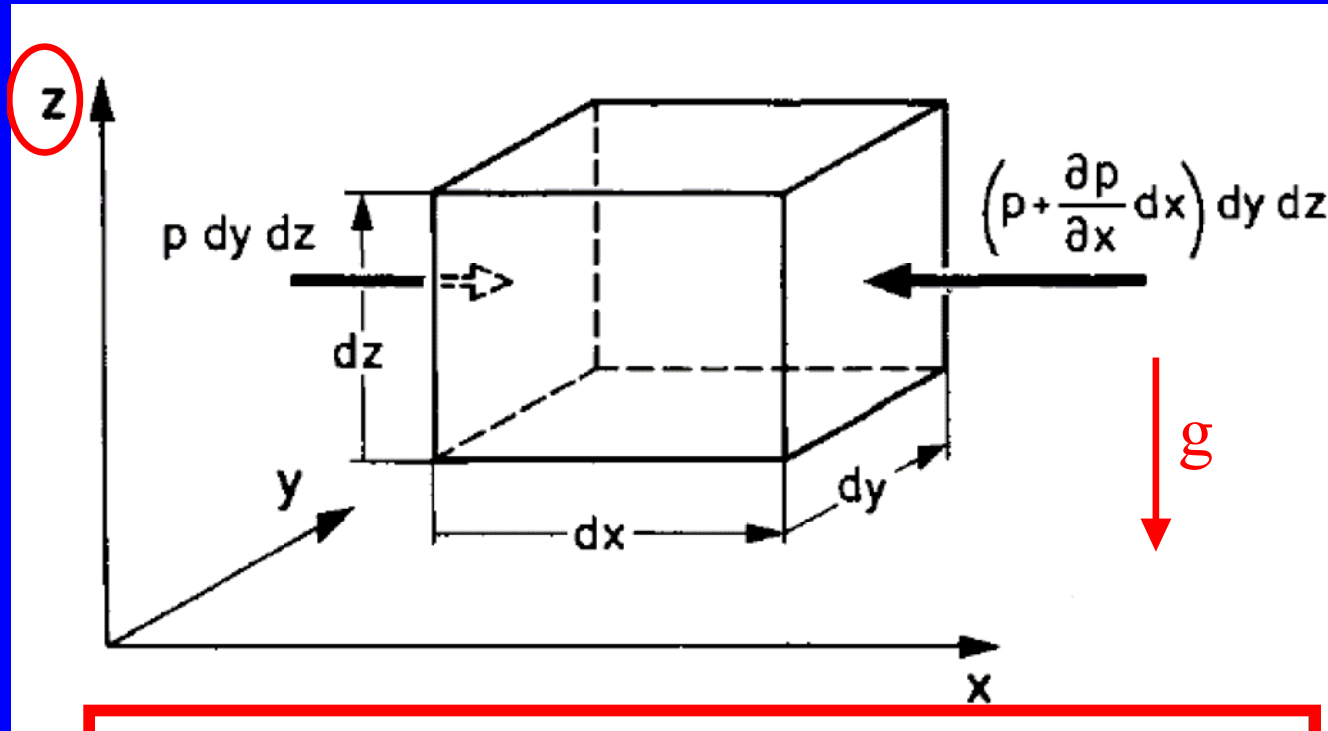
=> Einfluss der Schwerkraft vernachlässigbar

z.B. konstanter Atm.-druck, Bernoulli-Glg.



# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Hydro- und Aerostatische Grundgleichung



$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = f_z$$

Massenkraft:

$$\vec{f} = \{f_x, f_y, f_z\}$$

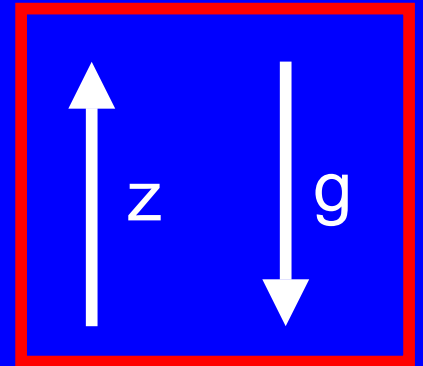


# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Hydro- und Aerostatische Grundgleichung

1. Nur Schwerkrafteinfluss:  $\vec{f}_1 = (0, 0, -g)$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g$$



- inkompressibles Fluid ( $\rho = \text{konst.}$ ):  $p(z) = -\rho g z + \text{konst.}$

-  $\rho = \rho(p, T)$ , ideales Gas:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{m} \cdot T = R \cdot T$$

2. Schwerkrafteinfluss und Starrkörperrotation ( $\rho = \text{konst.}$ ):

$$\vec{f}_3 = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = (f_x, f_y, f_z) = (\omega^2 \cdot x, \omega^2 \cdot y, -g)$$

$$p(x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot (x^2 + y^2) - \rho \cdot g \cdot z + C$$





# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Druckkraft auf ebene Behälterwände

inkompressibles Fluid ( $\rho = \text{konst.}$ )

=> **Druckkraft auf Wand =  
Druck im Flächenschwerpunkt x benetzte Fläche**

$$|\vec{F}_D| = p_S \cdot A$$

$$p_S = p_1 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot z_S$$

**WENN über Oberfläche  $p_1$  und  $z$  in Richtung von  $g$ !**

**WENN über Oberfläche und außen überall  $p_1$ , DANN**

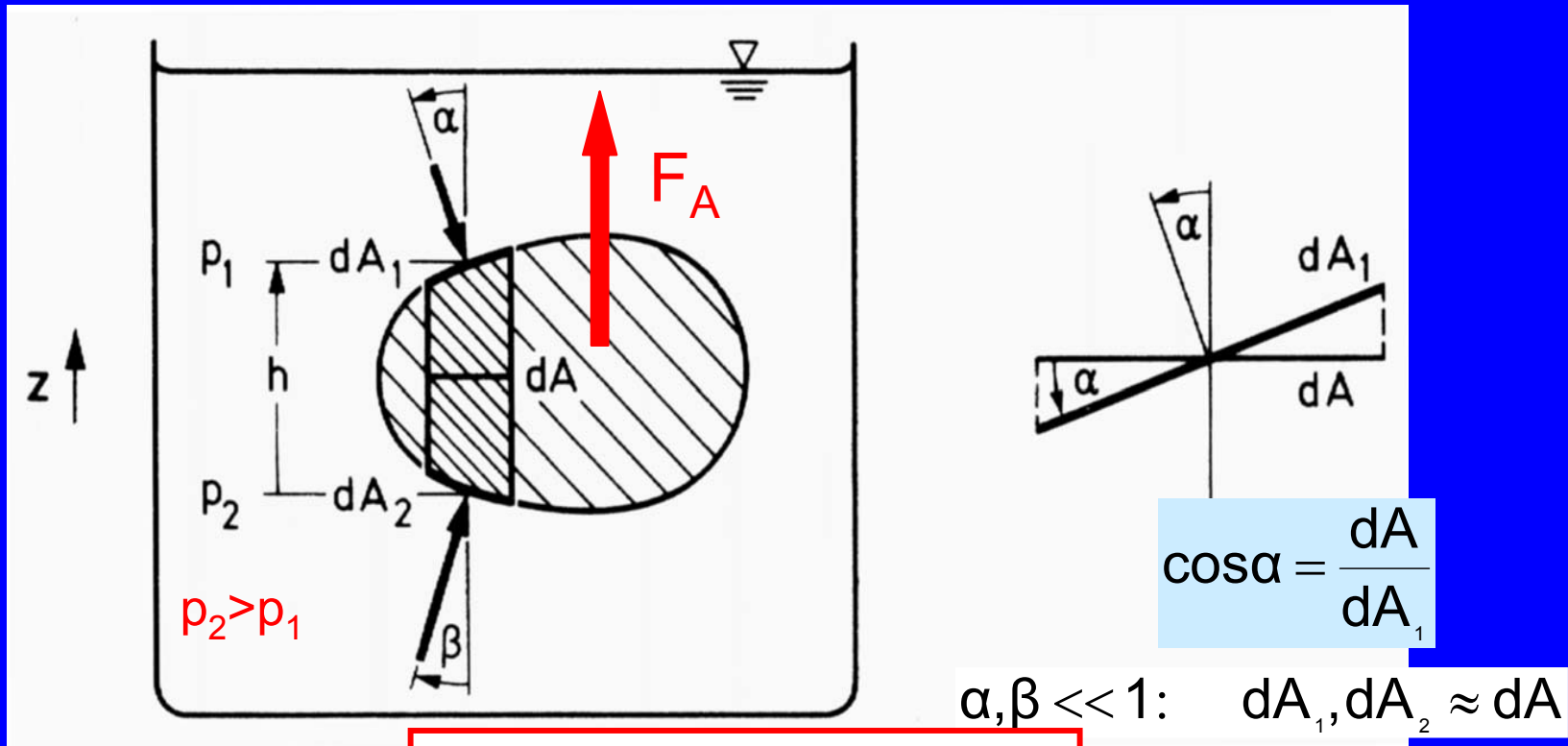
$$F_{res} = |\vec{F}_{res}| = \rho_{Fl} \cdot g \cdot z_S \cdot A$$

=> **Für diesen Fall: Angriffspunkt von  $F_{res}$  unterhalb des  
Flächenschwerpunkts (Moment)**



# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

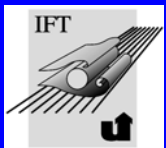
## Hydrostatik: Auftrieb für $\rho = \text{konst.}$



$$F_A = \rho_{Fl} \cdot g \cdot V_{\text{Körper}}$$

**Auftrieb = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit**

**Auftrieb = resultierende Druckkraft auf Körper**



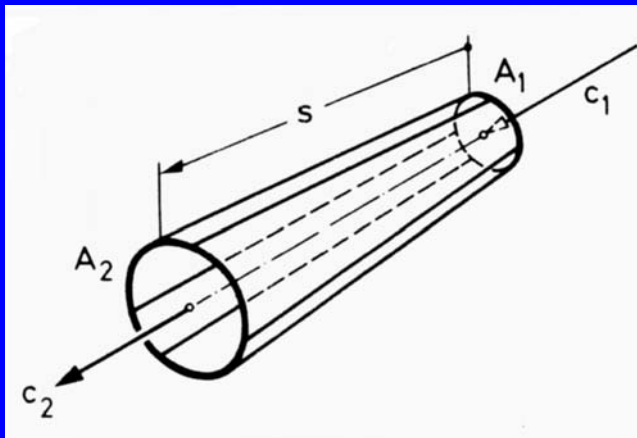
# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Massenerhaltung / Kontinuität

$$\text{Massenstrom } \dot{m}: \quad \dot{m} = \rho \cdot c \cdot A \stackrel{!}{=} \text{konst.} ; \quad \dot{m} = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

In der Hydrodynamik (inkompressibles Fluid:  $\rho = \text{konst.}$ ):

$$\text{Volumenstrom } \dot{V}: \quad \dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} = c \cdot A ; \quad \dot{V} = \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] = \left[ \frac{\text{Liter}}{\text{s}} \right]$$

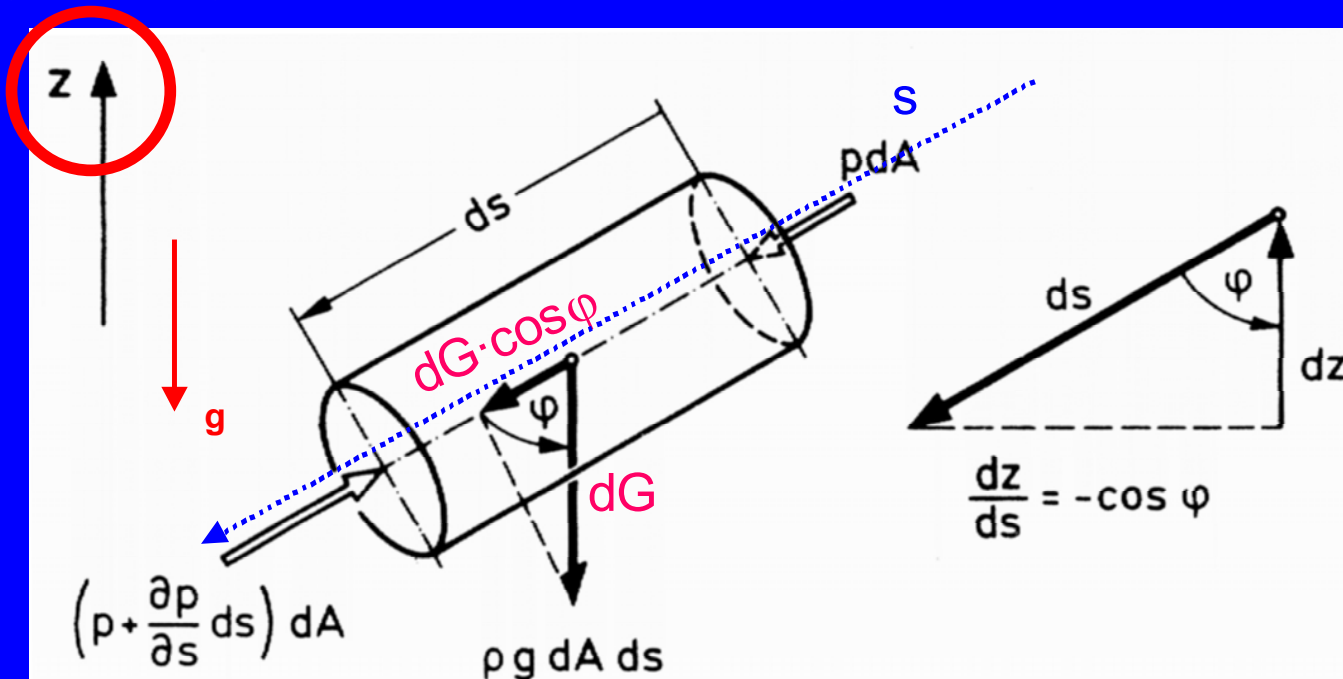


$$\dot{m}_1 = \rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A_2 = \dot{m}_2$$



# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Kräftegleichgewicht in Richtung des Stromfadens



EULER-Gleichung:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \cdot \frac{dz}{ds}$$

**BERNOULLI-Gleichung durch Integration:**

$$\int \frac{\partial c}{\partial t} ds + \frac{c^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + g \cdot z = \text{konst.}$$





# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Druckintegral in stationärer BERNOULLI-Gleichung

a) Isobar:  $\int_p \frac{dp}{\rho} = 0$

b) Isochor:  $\rho = \text{konst.}$  (inkompressibel)

$$\int_p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho}$$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = \text{konst.}$$

c) Isotherm:  $T = \text{konst.}$

$$\int_p \frac{dp}{\rho} = \frac{R}{m} \cdot T \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$$

d) Isentrop:

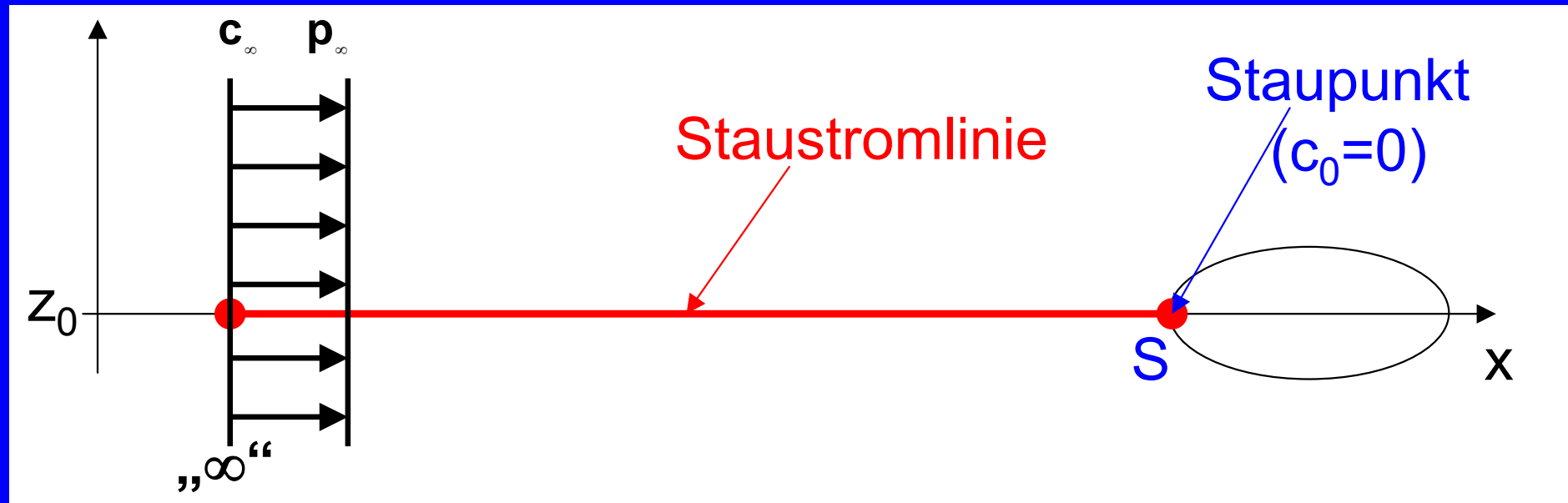


$$\int_p \frac{dp}{\rho} = -\frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]$$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \cancel{g \cdot z} = \text{konst.}$$

# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Die verschiedenen Druckbegriffe und ihre Messung



$\rho = \text{konst.:}$

$$\frac{\rho}{2} \cdot c_\infty^2 + p_\infty = p_0$$

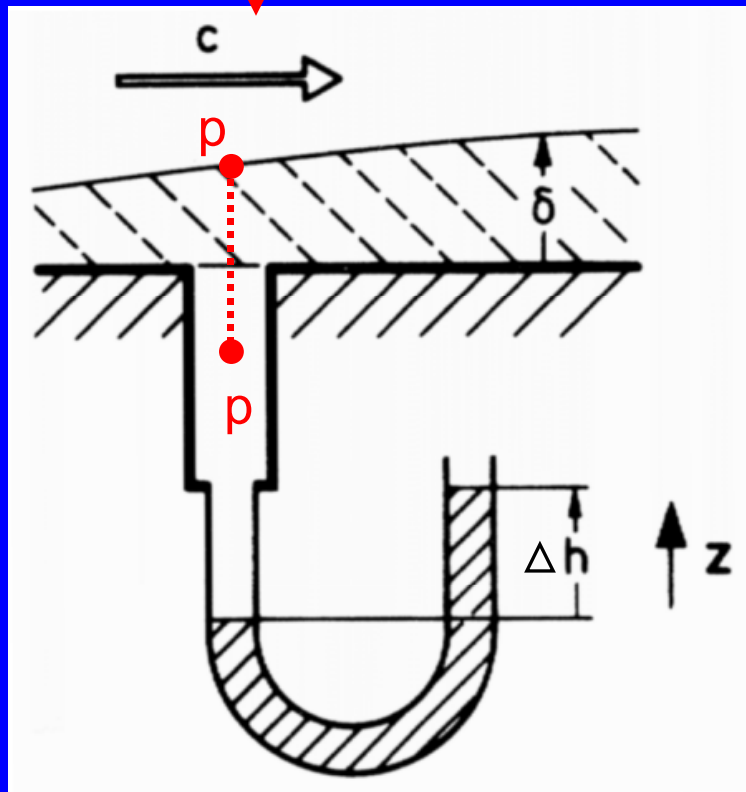
Dynamischer Druck + statischer Druck = Ruhe-/Gesamtdruck



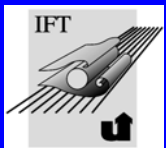
# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Druckmessung: Wandanbohrung und Drucksonden

Dynamischer Druck + **statischer Druck** = Ruhe-/Gesamtdruck



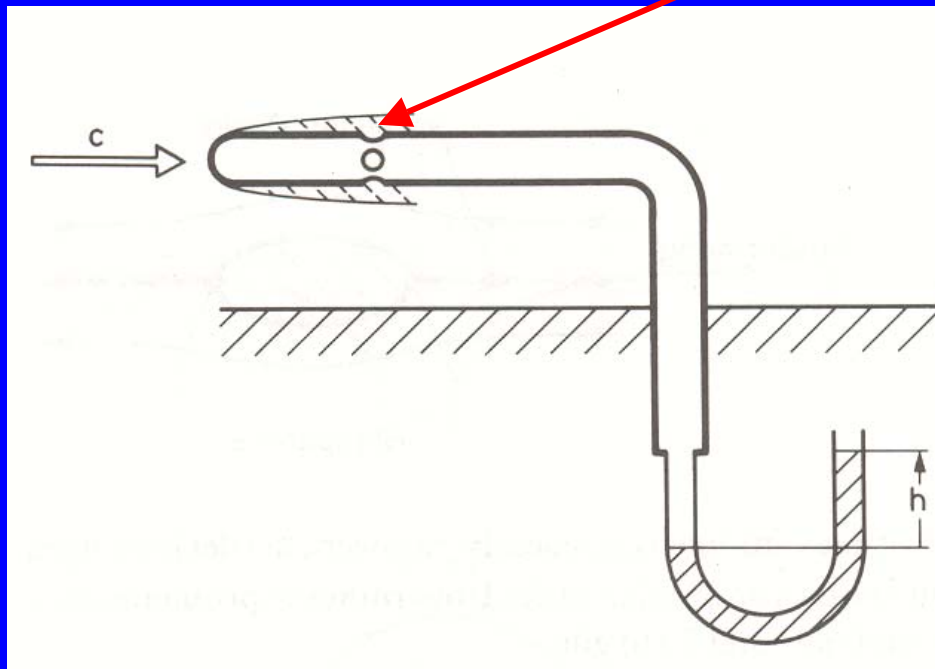
Wandanbohrung



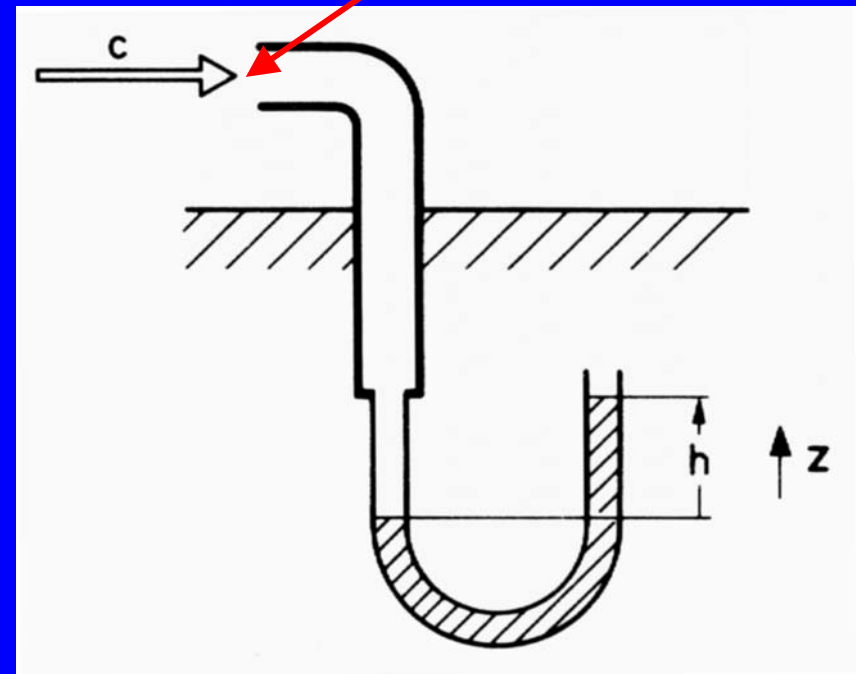
# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Druckmessung: Wandanbohrung und Drucksonden

Dynamischer Druck + statischer Druck = Ruhe-/Gesamtdruck



Statische  
Drucksonde



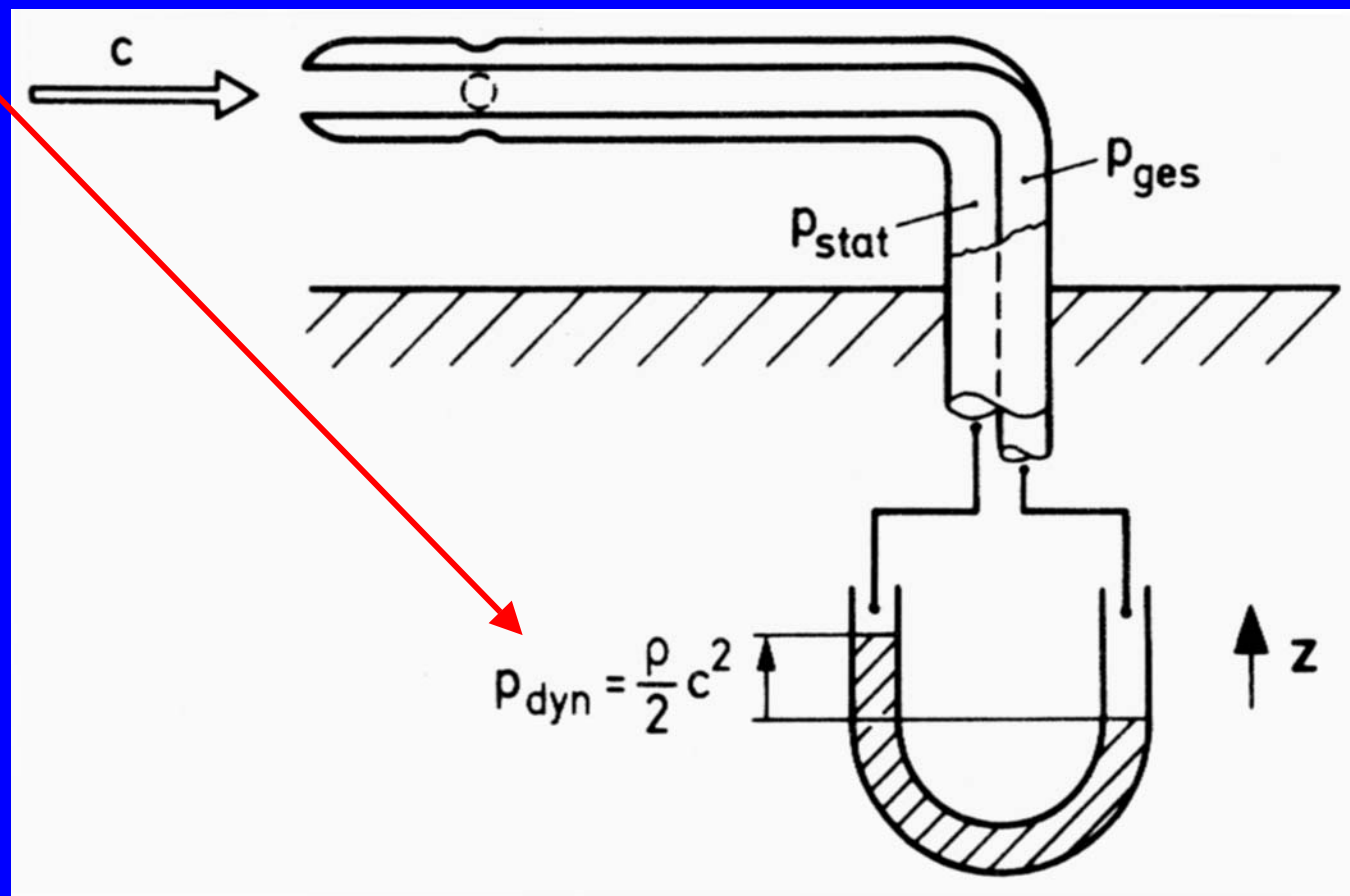
PITOT-Rohr  
(Hakensonde)



# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Druckmessung: Wandanbohrung und Drucksonden

Dynamischer Druck + statischer Druck = Ruhe-/Gesamtdruck

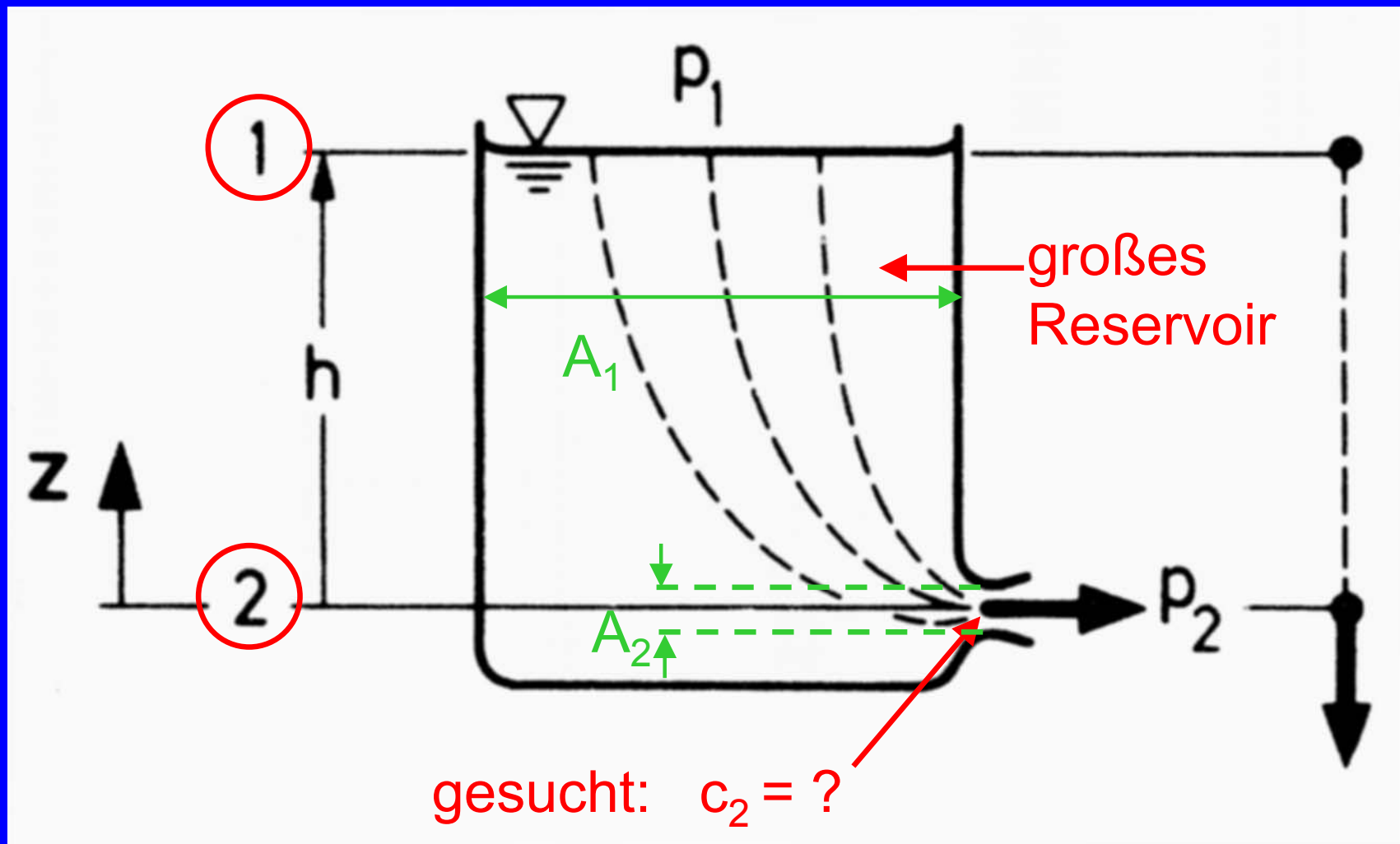


PRANDTL-Sonde

# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Ausströmen aus Gefäßen und Reservoirs (groß)

a) inkompressibel:  $\rho = \text{konst.}$  (Flüssigkeit)





# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Ausströmen aus Gefäßen und Reservoirs (groß)

a) inkompressibel:  $\rho = \text{konst.}$  (Flüssigkeit)

- großes Reservoir, großer Behälter:  $c_1 \approx 0$
- aus Bernoulli-Gleichung:

$$c_2 = \sqrt{2 \left( \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) \right)} = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho} + 2gh}$$

Spezialfälle:

1.  $p_1 = p_2$ :

$$c_2 = \sqrt{2gh}$$

Ausflussformel nach Toricelli

2. Ausströmen infolge Überdruck (horizontal,  $z_1 = z_2$ )

$$c_2 = \sqrt{2\Delta p / \rho}$$

Wegen  $\rho = \text{konst.}$  nur für Gas bei kleiner Geschwindigkeit ( $c_2 < 70 \text{ m/s}$ )



# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

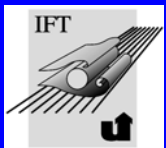
## Ausströmen aus Gefäßen und Reservoirs (groß)

b) kompressibel:  $\rho = \rho(p,T)$  (Gas bei hohen Geschwindigkeiten)

- großes Reservoir, großer Behälter:  $c_1 \approx 0$
- ideales Gas, **isentrope Zustandsänderung**
- aus Bernoulli-Gleichung:

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left( 1 - \left[ \frac{p_2}{p_1} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)}$$

Ausflussformel von Saint-Venant und Wantzell



# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Stromfadentheorie kompressibler Strömungen

Bernoulli Gleichung

$$\frac{c^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{2} + c_p T = \text{konstant}$$

Mit:  $a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa \frac{R}{m} T$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1} = \text{konstant}$$

=> Festlegung der Konstante durch **Ruhegrößen (Index 0)**

$$\frac{T}{T_0} = \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

$$\frac{a}{a_0} = \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right)^{-1/2}$$

Mit Mach Zahl:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{\kappa-1}}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$M = \frac{c}{a}$$



# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Stromfadentheorie kompressibler Strömungen

Kritische Größen (Index \*,  $M = 1$ ):

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\kappa + 1} \quad \kappa=1,4 = 0,833$$

$$\frac{a^*}{a_0} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{1/2} \quad \kappa=1,4 = 0,913$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad \kappa=1,4 = 0,634$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad \kappa=1,4 = 0,528$$

Variabler Querschnitt:

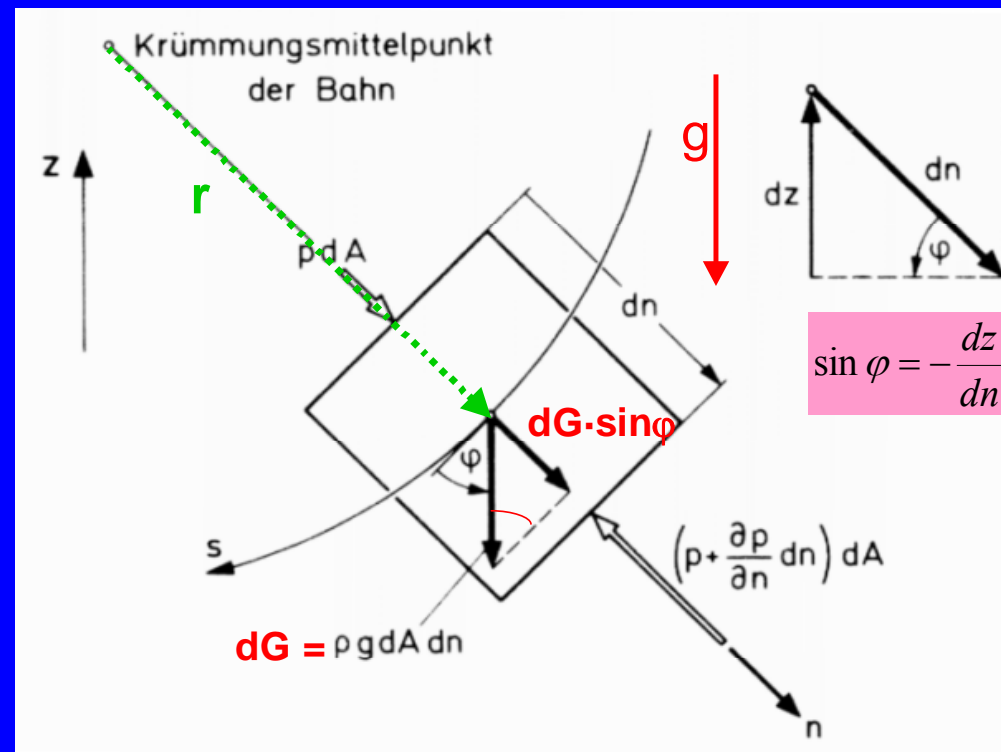
$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (M^2 - 1) \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}$$



# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Kräftegleichgewicht senkrecht zum Stromfaden

Gekrümmte Stromfäden üben Kräfte aufeinander aus



$$\frac{c^2}{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} + g \cdot \frac{dz}{dn}$$

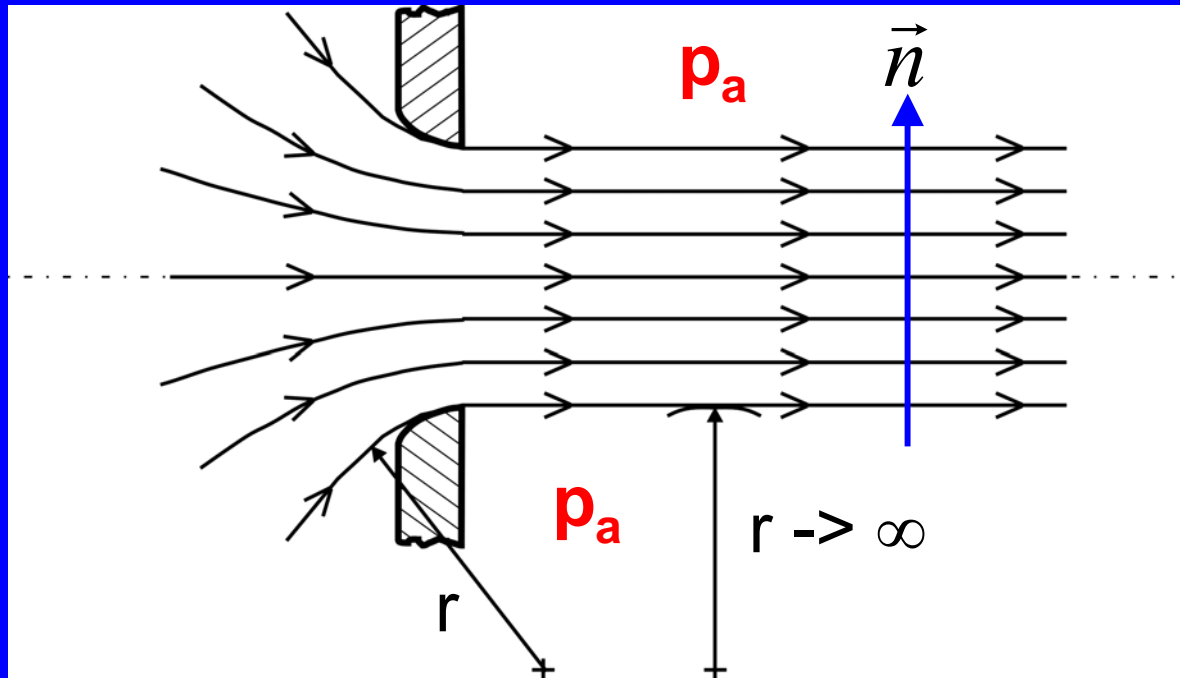




# Wiederholung „Einf. i. d. Fluid- und Thermodyn.“

## Kräftegleichgewicht senkrecht zum Stromfaden

Gekrümmte Stromfäden üben Kräfte aufeinander aus



**Freistrahلبedingung:** der Druck im Freistrahл wird von der ruhenden Umgebung aufgeprägt. Hier: es herrscht überall  $p_a$ .

**Im Strahl Reibung / Verwirbelung: Stromfaden nur bis Freistrahл!**



# Klausurtermine

## Einführung in die Fluid- und Thermodynamik

1. Termin: Samstag, 29. Januar 2011
2. Termin: Samstag, 26. März 2011



**Viel Erfolg und DANKE für die – meist – ungeteilte  
Aufmerksamkeit.**

