

Aufgabe 2:

Aus einem großen Behälter strömt Gas (Dichte ρ_G) stationär durch zwei Kreisrohre mit den jeweils konstanten Durchmessern d_1 und d_2 in den Höhen h_1 und h_2 als Freistrahle in die umgebende Luft aus. In dem Behälter steht die durch den offenen Boden eintretende Luft (Dichte ρ_L , wobei $\rho_L > \rho_G$ gilt) bis zur konstanten Höhe h_0 (s. Abb.).

Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen:

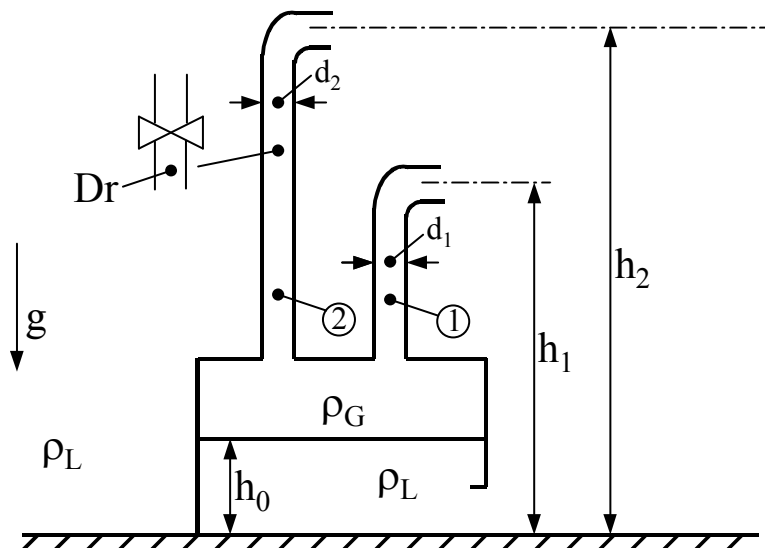
- jenes Verhältnis d_1/d_2 der Rohrdurchmesser, bei dem die Volumenströme in beiden Rohren gleich groß sind;
- unter der Voraussetzung gleich großer Durchmesser ($d_1=d_2$) jenen Druckverlustbeiwert ζ_{Dr} eines im Rohr ③ eingebauten Drosselorganes (s. Abb.), der zu gleich großen Volumenströmen in den Rohren ① und ③ führt.

Voraussetzungen:

Abgesehen von der Durchströmung des Drosselorganes ist die Strömung als reibungsfrei anzusehen. Die Dichten von Luft und Gas sind jeweils konstant.

Gegeben sind:

h_0 , h_1 , h_2 .



$$52) a) \quad \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \text{const}$$

$$p_0 + \rho_0 g h_0 = p_1 + \rho_0 g h_1 + \frac{\rho_0}{2} c_1^2 \quad (1)$$

$$p_0 - p_1 = \rho_L g (h_1 - h_0) \quad (2)$$

$$(2) \text{ in } (1) \Rightarrow \rho_L g (h_1 - h_0) = \rho_0 g (h_1 - h_0) + \frac{\rho_0}{2} c_1^2$$

$$\Leftrightarrow g (h_1 - h_0) (\rho_L - \rho_0) = \frac{\rho_0}{2} c_1^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 g (h_1 - h_0) \frac{(\rho_L - \rho_0)}{\rho_0}} = c_1 \quad (3)$$

$$\text{analog} \quad \sqrt{2 g (h_2 - h_0) \frac{(\rho_L - \rho_0)}{\rho_0}} = c_2 \quad (4)$$

$$\cancel{\rho_0} c_1 \cancel{\frac{\pi}{4}} d_1^2 = \cancel{\rho_0} c_2 \cancel{\frac{\pi}{4}} d_2^2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$$

$$(3) \text{ u. } (4) \text{ in } (5) \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \sqrt[4]{\frac{h_2 - h_0}{h_1 - h_0}} \quad (6)$$

$$b) p_0 + \rho_g h_0 = p_2 + \rho_g h_2 + \frac{\rho_g}{2} c_2^2 (1 + \zeta_{or}) \quad (7)$$

Verlust durch Quersetz

$$p_0 - p_2 = \rho_g (h_2 - h_0) \quad (8)$$

$$(8) \text{ in } (7) \Rightarrow \rho_g (h_2 - h_0) = \rho_g (h_2 - h_0) + \frac{\rho_g}{2} c_2^2 (1 + \zeta_{or})$$

$$\Rightarrow \rho_g (h_2 - h_0) (\rho_L - \rho_g) = \frac{\rho_g}{2} c_2^2 (1 + \zeta_{or})$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2 \rho_g (h_2 - h_0) (\rho_L - \rho_g)}{\rho_g (1 + \zeta_{or})}} = c_2 \quad (9)$$

$$d_1 = d_2 = d$$

$$\rho_g c_1 \frac{\pi d^2}{4} = \rho_g c_2 \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 \quad (10)$$

$$(3) u. (9) \text{ in } (10)$$

$$\sqrt{\frac{2 \cancel{\rho_g} (h_2 - h_0) (\cancel{\rho_L} - \cancel{\rho_g})}{\cancel{\rho_g} (1 + \zeta_{or})}} = \sqrt{\frac{2 \cancel{\rho_g} (h_2 - h_0) (\cancel{\rho_L} - \cancel{\rho_g})}{\cancel{\rho_g} (1 + \zeta_{or})}}$$

$$\Rightarrow h_1 - h_0 = \frac{h_2 - h_0}{1 + \zeta_{or}} \quad \Rightarrow \zeta_{or} = \frac{h_2 - h_0}{h_1 - h_0} - 1$$

Aufgabe 4:

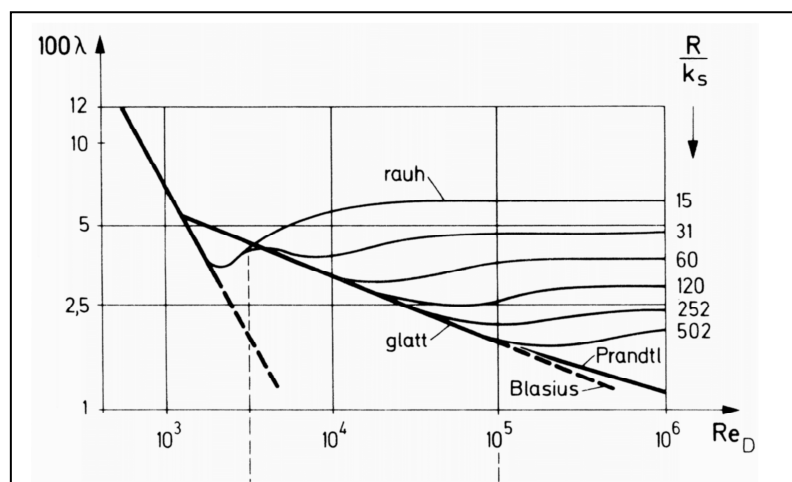
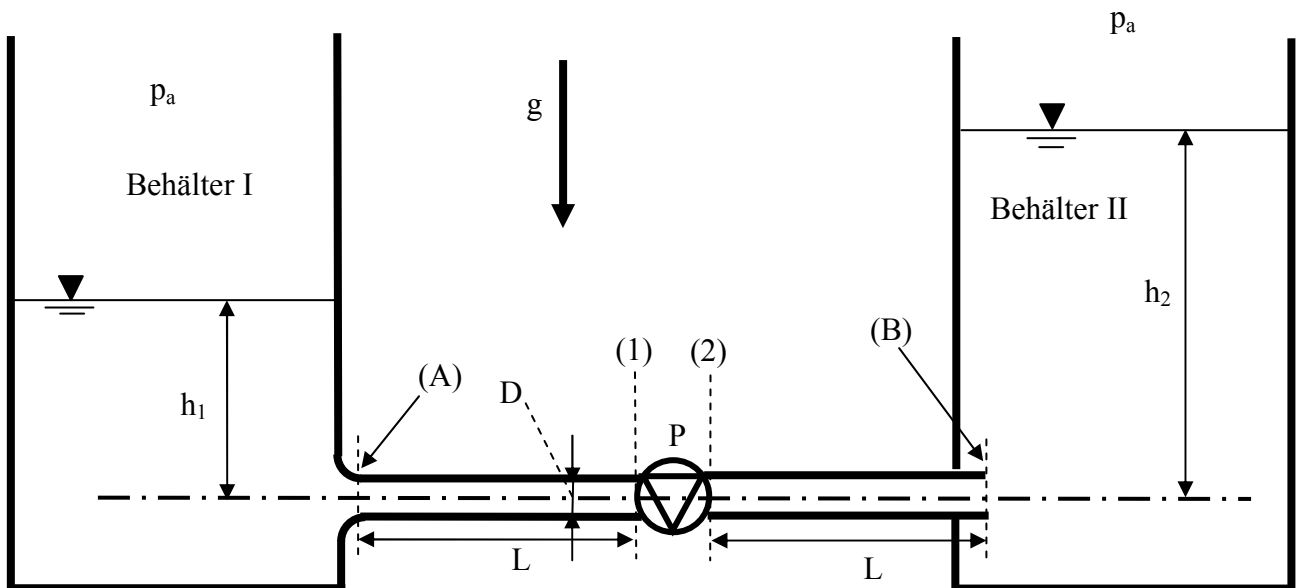
(6 Punkte)

Eine Pumpe P (Nennvolumenstrom \dot{V}) fördert Wasser (Dichte ρ ; kinematische Zähigkeit ν) durch ein innen rauhes Rohr (Rohrdurchmesser $D = 1 \text{ m}$; Sandkornrauigkeit $k_s = 2 \text{ mm}$) aus einem großen Behälter I mit der konstanten Spiegelhöhe h_1 in einen großen Behälter II mit der konstanten Spiegelhöhe h_2 , wobei $h_2 > h_1$ sein soll (s.Abb.). Die Strömung in den beiden Rohrteilen mit der Länge L sei jeweils über die Rohrlänge L voll ausgebildet. Die Strömung im Behälter I kann bis zur Rohreintrittsöffnung (A) als reibungsfrei angesehen werden. Am Rohrende bei (B) ströme das Wasser als Freistrahlin in den Behälter II ein. Oberhalb der Spiegelhöhen im Behälter I und II herrsche jeweils der konstante Umgebungsdruck p_a .

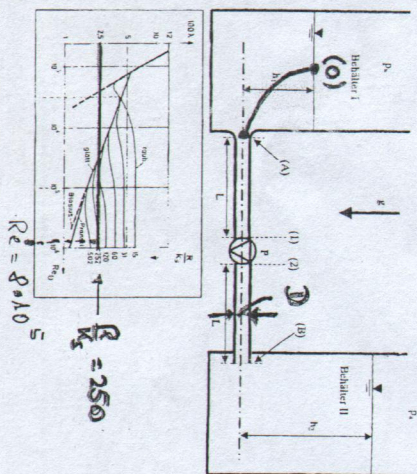
Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen

- den Druck p_1 am Pumpeneintritt (1)
- den Druck p_2 am Pumpenaustritt (2)
- Man skizziere qualitativ den Druckverlauf entlang der eingezeichneten Rohrmittelachse vom Behälter I über die Rohrleitung und Pumpe bis in den Behälter II.

Gegeben sind: $\dot{V} = 0,63 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$; $\nu = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$; $D = 1 \text{ m}$; h_1 ; h_2 ; L ; g ; ρ ; p_a ; $k_s = 2 \text{ mm}$.



Aufgabe 1:



$\dot{V} = 0,63 \frac{m^3}{s} = C_w \cdot \frac{\pi}{4} D^2$ $\text{folgt: } C_w = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^2} = 0,8 \frac{m}{s}$

$\rightarrow Re_D = \frac{C_w \cdot D}{\nu} = 8 \cdot 10^5$ $D = 1m \rightarrow R = 0,5m = 500mm$

$\rightarrow \frac{R}{k_s} = \frac{500mm}{2mm} = 250$

$\rightarrow \lambda = 0,025 \quad (2)$

a) Bernoulli, inkompressibel, von (1) \rightarrow (3):

$\frac{\rho}{2} C_w^2 + p_A + \rho \cdot g \cdot h_1 = \frac{\rho}{2} C_w^2 + p_A$

$\rightarrow p_A - p_A = \frac{\rho}{2} C_w^2 - \rho \cdot g \cdot h_1 \quad (1)$

von (A) nach (1): ausgetretete Rotationsbewegung:

$\rightarrow \Delta p = p_A - p_1 = \frac{\rho}{2} C_w^2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \lambda = \text{mit } (2) = \frac{\rho}{2} C_w^2 \cdot \frac{1}{D} \cdot 0,025$

$\rightarrow p_1 = p_A + \rho \cdot g \cdot h_1 - \frac{\rho}{2} C_w^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{D} \cdot \lambda\right) = p_A + \rho \cdot g \cdot h_1 - \frac{\rho}{2} \cdot 0,64 \cdot \left(1 + 0,025 \cdot \frac{1}{D}\right)$

$p_1 = p_A + \rho \cdot g \cdot h_1 - 0,32 \cdot \rho \cdot \left(1 + 0,025 \cdot \frac{1}{D}\right)$

b) von (2) nach (3): ausgetretete Rotationsbewegung

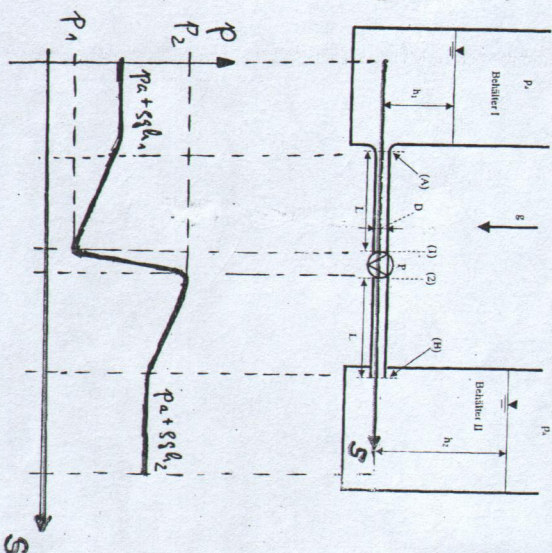
$\rightarrow \Delta p = p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} C_w^2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \lambda$

$\rightarrow p_2 = \frac{\rho}{2} C_w^2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \lambda + p_3$

da bei (3): Freistrahle $\rightarrow p_3 = p_A + \rho \cdot g \cdot h_2$

$\rightarrow p_2 = p_A + \rho \cdot g \cdot h_2 + 0,32 \cdot \rho \cdot \frac{1}{D} \cdot 0,025$

c)



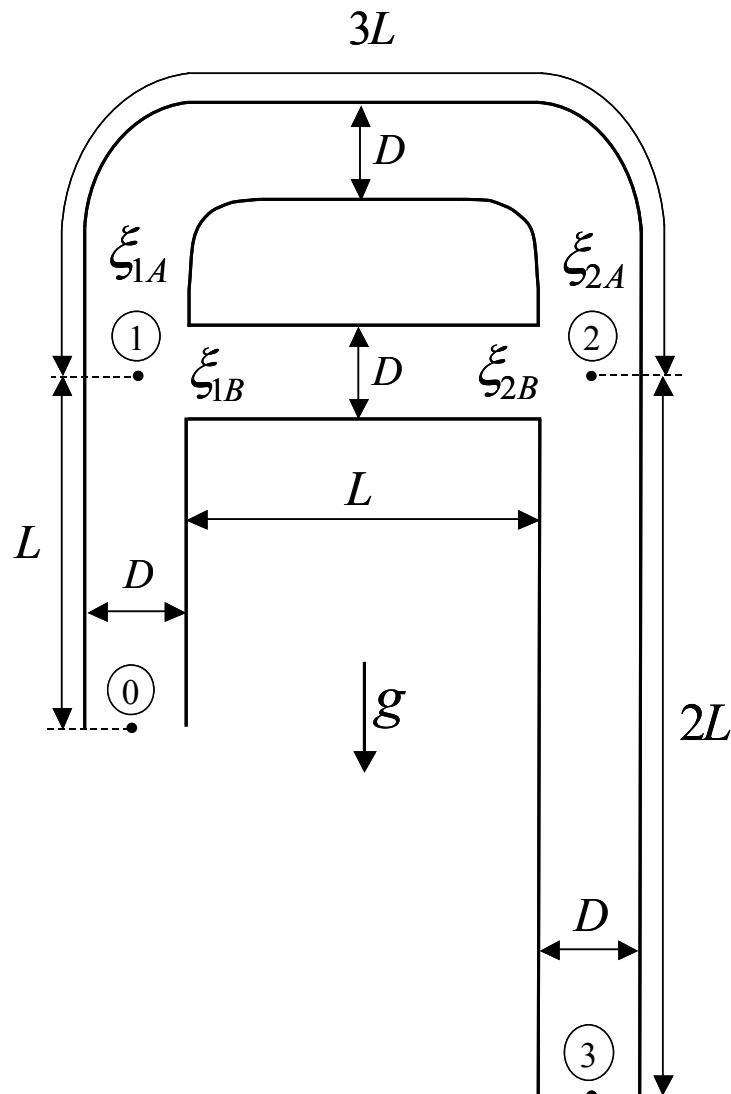
Aufgabe 4:

Ein inkompressibles, Newtonsches Medium (Dichte ρ , dynamische Viskosität μ) strömt stationär und laminar durch das abgebildete Rohrleitungssystem. Bei Stelle 1 teilt sich die Strömung in Rohrleitung A mit dem Durchmesser D und Rohrleitung B mit demselben Durchmesser D , wobei der Volumenstrom durch Leitung A gleich demjenigen durch Leitung B ist. Die Rohrverzweigung bei 1 verursacht einen Druckverlust, der für die Strömung durch Leitung A durch den Verlustkoeffizienten ξ_{1A} und für die Strömung durch Leitung B durch den Verlustkoeffizienten ξ_{1B} beschrieben wird. Leitung A enthält zwei 90° Rohrkrümmer (Verlustkoeffizient jeweils ξ_{Kr}), so dass sich die Leitungen bei Stelle 2 wieder vereinigen. Die dort auftretenden Druckverluste für die Strömung durch Leitung A und die Strömung durch Leitung B werden durch die Verlustkoeffizienten ξ_{2A} und ξ_{2B} beschrieben. In allen Leitungsteilen kann die Strömung als ausgebildet betrachtet werden.

In Abhängigkeit gegebener Größen berechne man:

- den volumetrischen Mittelwert der Geschwindigkeit, c_m , bei Stelle 0.
- den Druckverlust $p_0 - p_3$. Hierbei können c_m und $p_1 - p_2$ als gegeben vorausgesetzt werden.

Gegeben sind: $L, D, \mu, \rho, \xi_{1A}, \xi_{1B}, \xi_{2A}, \xi_{2B}, \xi_{Kr}, g$.



Aufgabe 4

a) Massenerhaltung: $\dot{m}_0 = \rho \dot{V}_0 = \rho c_m \frac{\pi}{4} D^2 \Rightarrow c_m = \frac{4 \dot{V}_0}{\pi D^2}$

$\frac{1}{2}$ und: $\dot{V}_A = \dot{V}_B \Rightarrow c_A \frac{\pi}{4} D^2 = c_B \frac{\pi}{4} D^2 \Rightarrow c_A = c_B$

$\frac{1}{2}$ $\dot{V}_0 = \dot{V}_A + \dot{V}_B = 2 \dot{V}_A \Rightarrow c_m = 2 c_A$ (bzw. $c_A = \frac{1}{2} c_m$)

Es muss gelten: Druckverlust durch Leitung A =

Druckverlust durch Leitung B:

A) $\Delta p_A = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} c_A^2 \left[\frac{3L}{D} \lambda + \zeta_{1A} + 2 \zeta_{kr} + \zeta_{2A} \right]$

B) $\Delta p_B = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} c_B^2 \left[\frac{L}{D} \lambda + \zeta_{1B} + \zeta_{2B} \right]$

(3) $\stackrel{1/2}{=} (4)$: $\frac{\rho}{2} c_A^2 \left[\frac{3L}{D} \lambda + \zeta_{1A} + 2 \zeta_{kr} + \zeta_{2A} \right] = \frac{\rho}{2} c_B^2 \left[\frac{L}{D} \lambda + \zeta_{1B} + \zeta_{2B} \right]$

(1) $\Rightarrow \frac{3L}{D} \lambda + \zeta_{1A} + 2 \zeta_{kr} + \zeta_{2A} = \frac{L}{D} \lambda + \zeta_{1B} + \zeta_{2B}$

$\Rightarrow \frac{2L}{D} \lambda = \zeta_{1B} + \zeta_{2B} - (\zeta_{1A} + 2 \zeta_{kr} + \zeta_{2A})$

Laminare Strömung: $\lambda = \frac{64}{Re_D}$ mit $Re_D = \frac{\rho c_A D}{\mu}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{64 \mu}{\rho c_A D}$

$$(6) \sim (5): \frac{2L}{D} \cdot \frac{64\mu}{8c_A D} = \xi_{1B} + \xi_{2B} - (\xi_{1A} + 2\xi_{kr} + \xi_{1B}) \quad (4)$$

$$\Rightarrow c_A = \frac{128\mu L}{8D^2 [\xi_{1B} + \xi_{2B} - (\xi_{1A} + 2\xi_{kr} + \xi_{1B})]}$$

$$\text{mit (2): } c_m = \frac{256\mu L}{8D^2 [\xi_{1B} + \xi_{2B} - (\xi_{1A} + 2\xi_{kr} + \xi_{1B})]} \quad 1/2$$

$$b) \text{ Druckkette: } p_0 - p_3 = (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) - \overset{1/2 \quad 1/2}{sgL} \quad (7)$$

$$\bullet p_0 - p_1 = \frac{8}{2} c_m^2 \frac{L}{D} \lambda'^{1/2} \quad (8)$$

$$\lambda' = \frac{64}{Re_D'} \quad \text{mit } Re_D' = \frac{8c_m D}{\mu} \Rightarrow \lambda' = \frac{64\mu}{8c_m D} \quad (9)$$

$$(9) \sim (8) \quad p_0 - p_1 = \frac{32\mu L c_m}{D} \quad (10)$$

$$\bullet p_2 - p_3 = \frac{8}{2} c_m^2 \frac{2L}{D} \lambda'^{1/2} = \frac{64\mu L c_m}{D} \quad (11)$$

$$(10), (11) \sim (7): p_0 - p_3 = (p_1 - p_2) - sgL + \frac{32\mu L c_m}{D} + \frac{64\mu L c_m}{D}$$

$$\Rightarrow p_0 - p_3 = (p_1 - p_2) - sgL + \frac{96\mu L c_m}{D} \quad 1/2$$