

Aufgabe 5:

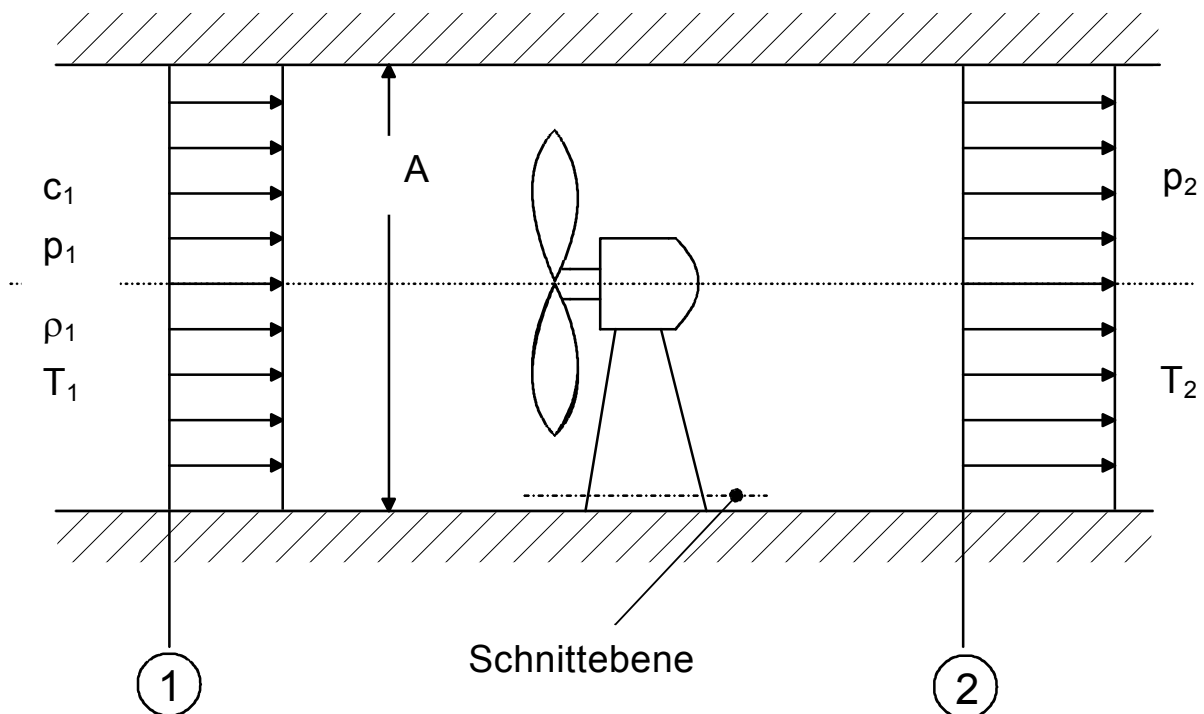
Ein Propeller fördert Luft durch ein Kreisrohr mit konstantem Querschnitt A . Bei \mathfrak{S} vor dem Propeller seien der Druck p_1 , die Dichte ρ_1 , die Temperatur T_1 und die Geschwindigkeit c_1 bekannt. In einiger Entfernung hinter dem Propeller bei \mathfrak{Z} seien der Druck p_2 und die Temperatur T_2 bekannt.

Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen die zur Rohrachse parallele Komponente der Haltekraft, die in der skizzierten Schnittebene am oberen Teil des Sockels angreift (s. Abb.).

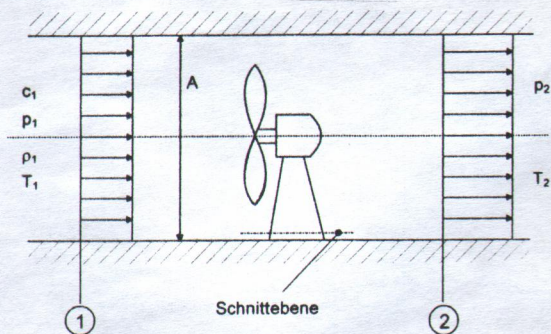
Gegeben sind: $A, p_1, \rho_1, T_1, c_1, p_2, T_2$.

Hinweis:

Die Luft ist als ideales Gas anzusehen; die Wandreibung im Rohr kann vernachlässigt werden. Bei \mathfrak{S} und \mathfrak{Z} seien die Geschwindigkeiten jeweils konstant über den Querschnitt und stationär.



Aufgabe 5 :



Gegeben :

$$A, p_1, p_2, T_1, c_1, p_2, T_2$$

Gesucht :

Haltekraft F_H

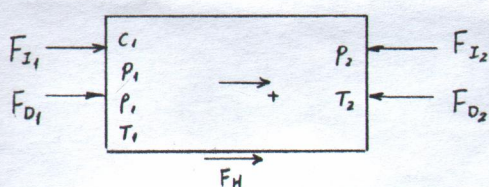
— Luft = ideales Gas : $\frac{p}{\rho} = R \cdot T$ (R = spezifische Gaskonstante)

$$\Rightarrow p_2 = \frac{\rho_2}{R \cdot T_2} \cdot R \cdot T_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot p_1 \quad (1)$$

— Konti. - Gl. : $\rho_1 \cdot c_1 \cdot A = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A$

$$\Rightarrow c_2 = c_1 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = c_1 \cdot \frac{p_1 \cdot R \cdot T_2}{p_2} = \frac{T_2 \cdot p_1}{T_1 \cdot p_2} \cdot c_1 \quad (2)$$

— Impulssatz für stationäre Strömung :



$$\vec{F}_{I1} + \vec{F}_{D1} + \vec{F}_{I2} + \vec{F}_{D2} + \vec{F}_H = 0$$

$$\vec{F}_I = - \int_A \rho \cdot \vec{w} \cdot (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\vec{F}_D = - \int_A p \cdot \vec{n} dA$$

$$\Rightarrow F_{I1} + F_{D1} - F_{I2} - F_{D2} + F_H = 0$$

$$\rho_1 \cdot c_1^2 \cdot A + p_1 \cdot A - \rho_2 \cdot c_2^2 \cdot A - p_2 \cdot A + F_H = 0 \quad (3)$$

(1), (2) in (3) :

$$F_H = \left\{ \frac{p_2 \cdot p_1 \cdot T_1 \cdot p_1^2 \cdot T_2^2}{p_1 \cdot T_2 \cdot p_2^2 \cdot T_1^2} \cdot c_1^2 - p_1 c_1^2 + (p_2 - p_1) \right\} \cdot A$$

$$F_H = \left\{ p_1 \cdot c_1^2 \cdot \left[\frac{p_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} - 1 \right] + (p_2 - p_1) \right\} \cdot A$$

Aufgabe 4:

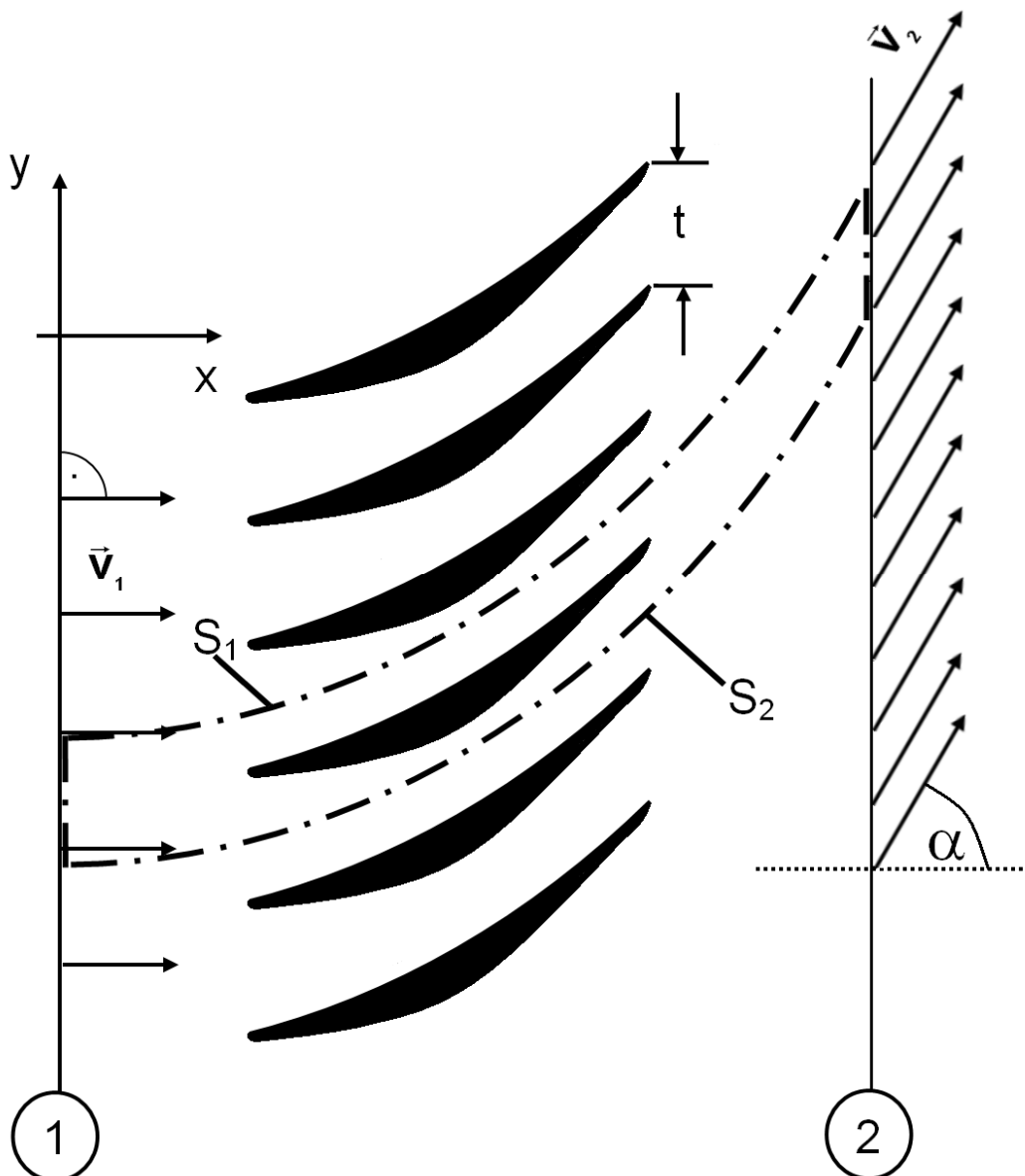
(6,5 Punkte)

Die Umlenkung einer Strömung in einem Kanal erfolge über ein ebenes Schaufelgitter mit der Schaufelteilung t . Die Strömung durch das Gitter sei inkompressibel (Dichte ρ) und stationär. Es kann näherungsweise angenommen werden, dass die Geschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 (Winkel α) in der Ebene (1) bzw. Ebene (2) jeweils konstant seien. Die Drücke p_1 und p_2 in (1) bzw. (2) seien bekannt (s.Abb.).

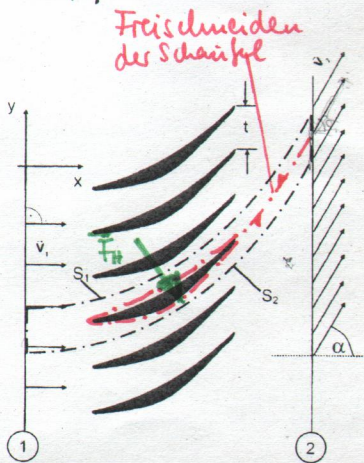
Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen die Komponenten F_x und F_y der Kraft pro Tiefeneinheit, die die Strömung auf eine Schaufel ausübt. Man verwende hierzu den eingezeichneten Kontrollraum, dessen Ränder S_1 und S_2 mit Stromlinien zusammenfallen. Weiterhin beachte man, dass wegen der Periodizität*) des Stromfeldes die Summen der Oberflächenkräfte längs S_1 bzw. S_2 dem Betrage nach gleich sind. Der Einfluß der Schwerkraft kann im vorliegenden Fall vernachlässigt werden.

Gegeben sind: $t, \rho, v_1, \alpha, p_1, p_2$.

*) Das Strömungsfeld um jede Schaufel wiederholt sich in gleicher Weise in y -Richtung.



Aufgabe 4:



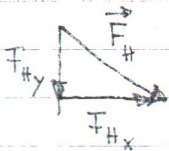
Kontrollraumveränderung S_1, S_2
= Stromlinien

→ kein Massendurchtritt
durch diese beiden Flächen.

Da die Summen der
Oberflächenkräfte längs
 S_1 und S_2 (= Druck- und
Reibungskräfte längs S_1, S_2)
dem Betrag nach gleich

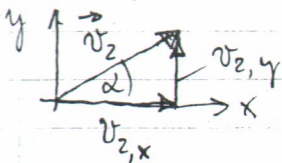
sind → keine resultierenden äußeren Kräfte
längs S_1 und S_2 .

Kontrollraum: Schaufel muß „freigeschnitten“
werden → Kraft der Schaufel auf das Fluid = äußere
Kraft am Kontrollraum:



Impulssatz: $\vec{F}_1 + \vec{F}_D + \vec{F}_2 + \vec{F}_D + \vec{F}_H = 0$
= Kraft der Schaufel auf Fluid

Kräftegleichgewicht in x-Richtung:



$$v_{2,x} = v_2 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{2,y} = v_2 \cdot \sin \alpha$$

Kontin-gl.: $\rho \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho \cdot v_{2,x} \cdot A_2$

auf Grund der Periodizität gilt: $A_1 = b \cdot t = A_2 \Rightarrow v_1 = v_{2,x}$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{v_{2,x}}{\cos \alpha} = \frac{v_1}{\cos \alpha}$$

→ Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

$$\rho \cdot v_1^2 \cdot A_1 + p_1 \cdot A_1 - \underbrace{\rho \cdot v_{2,x}^2 \cdot A_2}_{= v_1^2 \cdot A_1 = b \cdot t} - \underbrace{p_2 \cdot A_2}_{= A_1 = b \cdot t} + F_{H,x} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{F_{H,x}}{b} = -(p_1 - p_2) \cdot t}$$

Kräftegleichgewicht in y-Richtung: → keine Drückkräfte, da diese nur normal auf A_1 bzw. A_2 .
außerdem: $F_{H,y} = 0$

$$\rightarrow -\rho \cdot v_{2,y} \cdot \underbrace{v_{2,x}}_{= v_2 \cdot \sin \alpha} \cdot A_2 + F_{H,y} = 0$$

= v_1 ; sowie: $v_2 = \frac{v_1}{\cos \alpha}$ (s. vorher)

$$\rightarrow \boxed{\frac{F_{H,y}}{b} = \rho \cdot v_1^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot t}$$

\vec{F}_H ist die Kraft der Schaufel auf die Strömung.

Gesucht: Kraft \vec{F} der Strömung auf die Schaufel:

$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{\vec{F}}{b} = \left(\frac{F_x}{b}, \frac{F_y}{b} \right) = \left(-\frac{F_{H,x}}{b}, -\frac{F_{H,y}}{b} \right)}}$$

Aufgabe 3:

(5,0 Punkte)

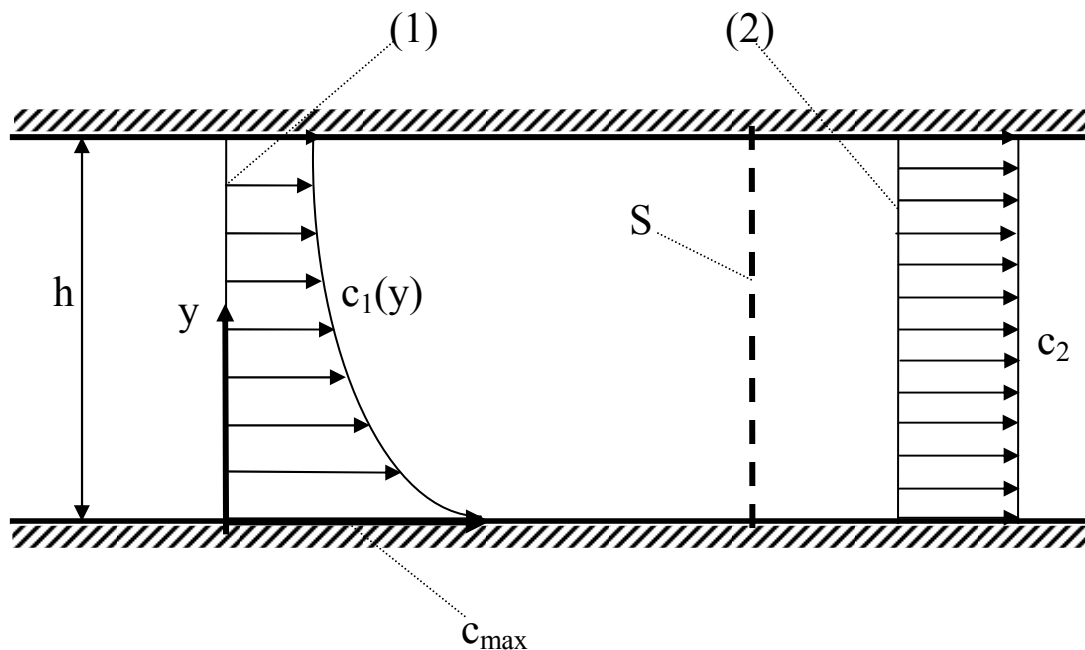
Ein inkompressibles Medium (Dichte ρ) strömt stationär durch einen Kanal mit rechteckigem Querschnitt (Höhe h , Tiefe t senkrecht zur Zeichenebene), in den ein Sieb S zur Vergleichmäßigung des Geschwindigkeitsprofils eingebaut ist (s.Abb.). Im Querschnitt (1) ist das Geschwindigkeitsprofil gegeben durch die Formel $c_1(y) = \frac{c_{\max}}{(1 + \frac{y}{h})}$. Im Querschnitt

(2) sei die Geschwindigkeit (durch die Wirkung des Siebes) konstant über den Querschnitt und gleich $c_2 = \text{konst.}$. Die Drücke in den Querschnitten (1) und (2) seien p_1 und p_2 ; sie werden über Wandanbohrungen an diesen Stellen gemessen. Die Reibungskräfte zwischen dem strömendem Medium und den Kanalwänden seien vernachlässigbar klein.

Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen

- die Geschwindigkeit c_2 im Querschnitt (2);
- den Betrag der Kraft \vec{F}_{SW} , mit der das Sieb an der Kanalwand gehalten werden muß.

Gegeben sind: $h, t, \rho, c_{\max}, p_1, p_2$.



Hinweis:

Nach Bronstein-Semendjajew: „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Harry Deutsch, gilt:

Tabelle unbestimmter Integrale:

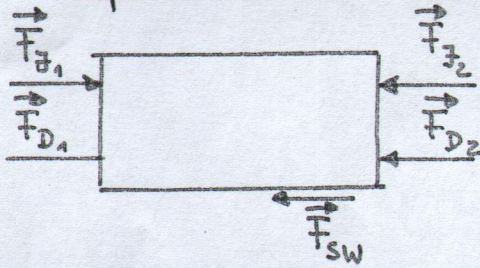
Integrale, die $ax + b$ enthalten:

Bezeichnung: $X = ax + b$

1. $\int X^n \cdot dx = \frac{1}{a(n+1)} \cdot X^{n+1}$ für $n \neq -1$; für $n = -1$ siehe Nr.2

2. $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln X$

b) Impulsatz:



Impulsatz: $\vec{F}_{F,1} + \vec{F}_{D,1} + \vec{F}_{F,2} + \vec{F}_{D,2} + \vec{F}_{sw} \stackrel{!}{=} 0$

$$\vec{F}_{D,1} = + p_1 \cdot \underset{h}{h} \cdot t; \quad \vec{F}_{D,2} = - p_2 \cdot h \cdot t; \quad \vec{F}_{F,2} = - \rho \cdot c_2^2 \cdot h \cdot t$$

$$\vec{F}_{F,1} = + \rho \cdot \int_{y=0}^h c_1^2(y) \cdot dy \cdot t = + \rho \cdot t \cdot \int_{y=0}^h \left(\frac{c_{max}}{1 + \frac{y}{h}} \right)^2 \cdot dy$$

→ siehe Angabe für Integralbestimmung:

$$\vec{F}_{F,1} = \rho \cdot t \cdot c_{max}^2 \cdot \int_{y=0}^h \frac{dy}{\left(1 + \frac{y}{h}\right)^2} = \rho \cdot t \cdot c_{max}^2 \cdot \left[\frac{1}{\frac{1}{h} \cdot (-1)} \cdot \left(1 + \frac{y}{h}\right)^{-1} \right]_{y=0}^{y=h}$$

$$\vec{F}_{F,1} = + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_{max}^2 \cdot h \cdot t$$

(4)

→ für Impulsatz:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_{max}^2 \cdot h \cdot t + p_1 \cdot h \cdot t - \rho \cdot c_2^2 \cdot h \cdot t - p_2 \cdot h \cdot t - F_{sw} = 0$$

mit Gl. (3):

$$\vec{F}_{sw} = \rho \cdot h \cdot t \cdot c_{max}^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - [\ln 2]^2 \right) + (p_1 - p_2) \cdot h \cdot t$$

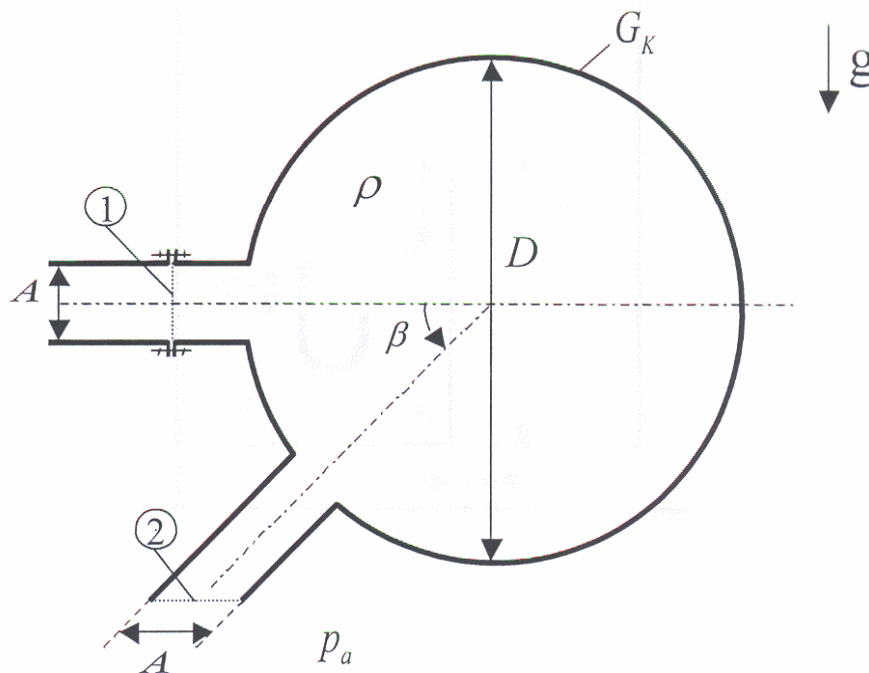
(5)

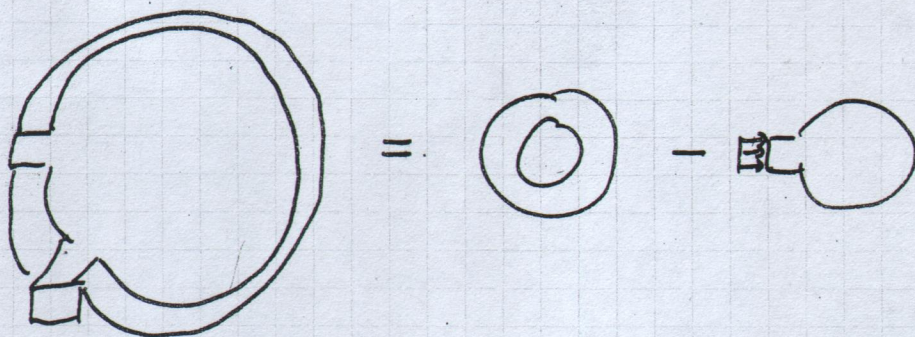
Aufgabe 3:**(7.5 Punkte)**

Ein kugelförmiger Behälter mit dem Gewicht G_K und dem Innendurchmesser D wird von einer Flüssigkeit mit der Dichte ρ stationär durchströmt. Die Flüssigkeit tritt nach der Position 1 über einen kurzen Stutzen mit der Querschnittsfläche A in den Behälter ein und strömt durch einen zweiten Stutzen mit derselben Querschnittsfläche bei Position 2 in die ruhende Atmosphäre mit konstanten Luftdruck p_a aus. Der zweite Stutzen ist um den Winkel β gegen die Horizontale geneigt, siehe Abbildung. Druck und Geschwindigkeit sind bei 1 und 2 jeweils konstant über den Querschnitt. Unter der Annahme, dass das Flüssigkeitsgewicht in den beiden Stutzen vernachlässigt werden kann, bestimme man in Abhängigkeit gegebener Größen

- die Geschwindigkeit c_1 , und
- die Kraft \vec{F} , die in der Flanschverbindung bei Position 1 wirkt. Dabei kann c_1 als gegeben angesehen werden.

Gegeben sind: c_2 , p_a , p_1 , A , β , G_K , D , ρ .



\vec{F}_{DM} :

$$\vec{F}_{DM} = \vec{0} - \left(\int_{A_1} p_a \vec{n} dA \right)$$

$$= p_a A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark \checkmark$$

✓✓

$$\sum F_x = 0: \quad \rho g z_1^2 A + p_1 A + \rho g z_2 \cos \beta A - p_a A + F_{Hx} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Hx} = A \left(p_a - p_1 - \rho g z_1^2 - \rho g z_2 \cos \beta \right) < 0 \Rightarrow \leftarrow F_{Hx} \checkmark \checkmark$$

$$\sum F_y = 0: \quad \rho g z_2 A \sin \beta + p_a A - \rho g \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 - G_k + 0 + F_{Hy} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Hy} = G_k + \rho g \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 - A (p_a + \rho g z_2 \sin \beta) \checkmark \checkmark$$

✓✓