

Übungen im Pflichtfach "Strömungslehre"

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1

Zwischen einem inneren Zylinder mit dem Radius R und der Länge L und einem coaxialen äußeren Zylinder befindet sich ein schmaler Spalt von der Breite s , der mit einer Newtonschen Flüssigkeit (dyn. Zähigkeit μ) gefüllt ist (s. Abb.).

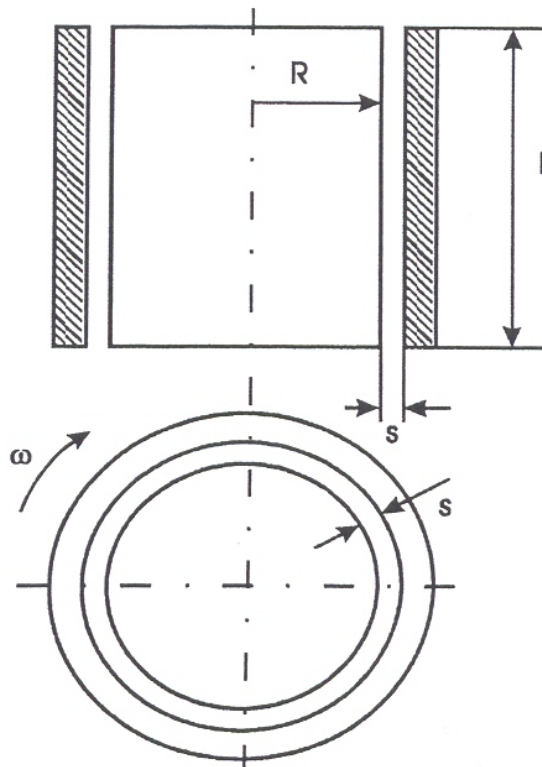
Welches Drehmoment M muss am inneren Zylinder angreifen, wenn dieser in Ruhe bleiben soll, während sich der äußere Zylinder mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht?

Hinweis:

Wegen $s \ll R$ und $s \ll L$ kann angenommen werden, dass die Strömung im gekrümmten Spalt über die ganze Länge L der Couette-Strömung zwischen zwei ebenen Platten gleich ist.

Gegeben:

$R = 5 \text{ cm}$, $s = 0,2 \text{ cm}$, $L = 20 \text{ cm}$, $\omega = \pi/2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\mu = 5 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.



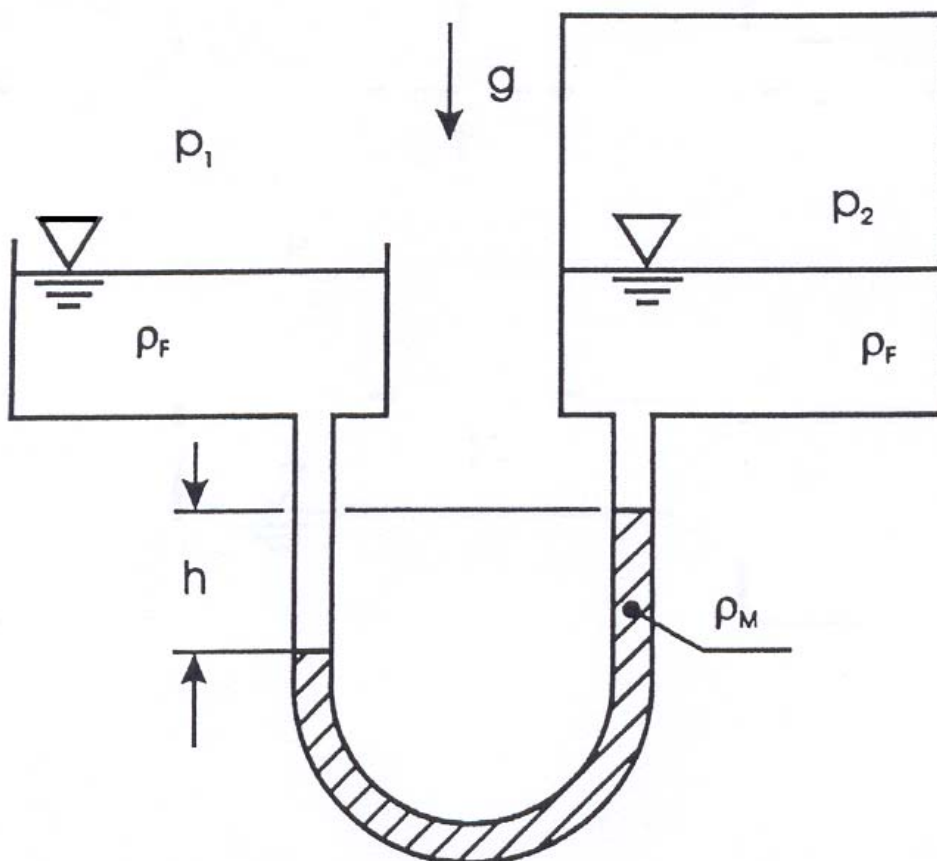
Aufgabe 2

An die Schenkel eines U-Rohr-Manometers, das mit der Messflüssigkeit ρ_M gefüllt ist, werden zwei Behälter angeschlossen. Die in den Behältern befindliche Flüssigkeit der Dichte ρ_F vermische sich nicht mit der Messflüssigkeit. Die äußeren Flüssigkeitsspiegel seien gleich hoch. Es lasten die unterschiedlichen Drücke p_1 und p_2 auf den Behältern, deren Differenz gemessen werden soll.

- Man bestimme die Auslenkung h in Abhängigkeit der übrigen Größen.
- Wie kann die Messgenauigkeit des Manometers geändert werden? Was ist zu beachten, damit das System stabil ist?

Gegeben:

$\rho_F = 1,0 \text{ g/cm}^3$, $\rho_M = 13,6 \text{ g/cm}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $p_1 = 1,05 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $p_2 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.



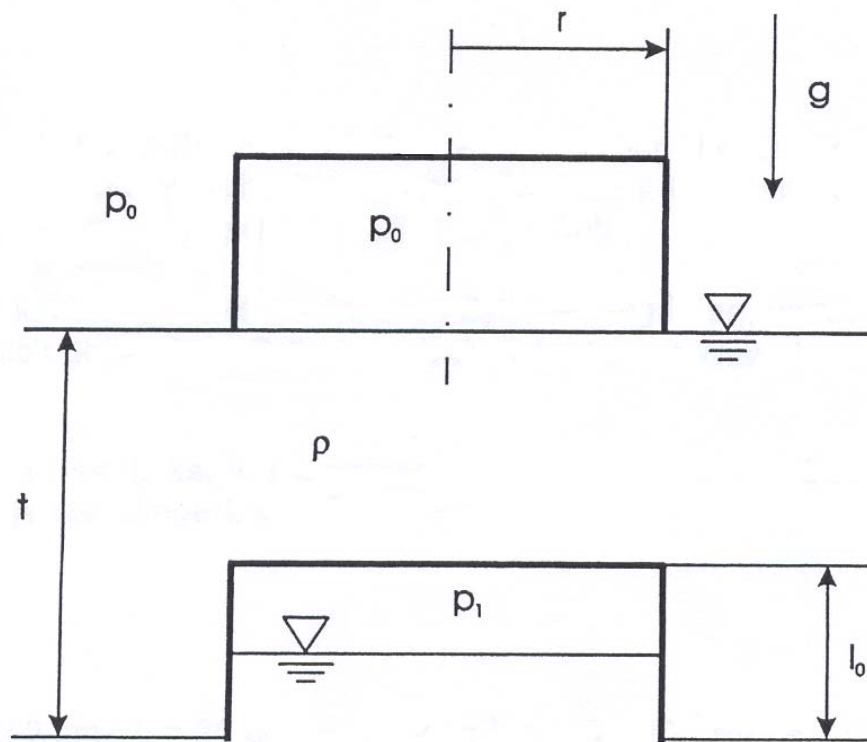
Aufgabe 3

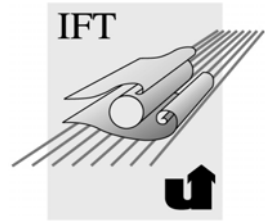
Eine kreiszylindrische Tauchglocke wird zunächst mit ihrer offenen unteren Seite auf eine Wasseroberfläche aufgesetzt (siehe Bild). Dann wird die Tauchglocke in die Wassertiefe t abgesenkt. Die in der Glocke eingeschlossene Luft behält dabei ihre Temperatur bei (isotherme Kompression). Das Wasser habe die Dichte ρ , die Dichte der eingeschlossenen Luft sei vernachlässigbar klein.

Man berechne den Druck p_1 der Luft in der Glocke als Funktion der Eintauchtiefe t .

Gegeben:

p_0 , l_0 , r , ρ , g .





Lösungen zu dem Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

Gegeben:

$R = 5 \text{ cm}$, $s = 0,2 \text{ cm}$, $L = 20 \text{ cm}$, $\omega = \pi/2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\mu = 5 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Voraussetzungen:

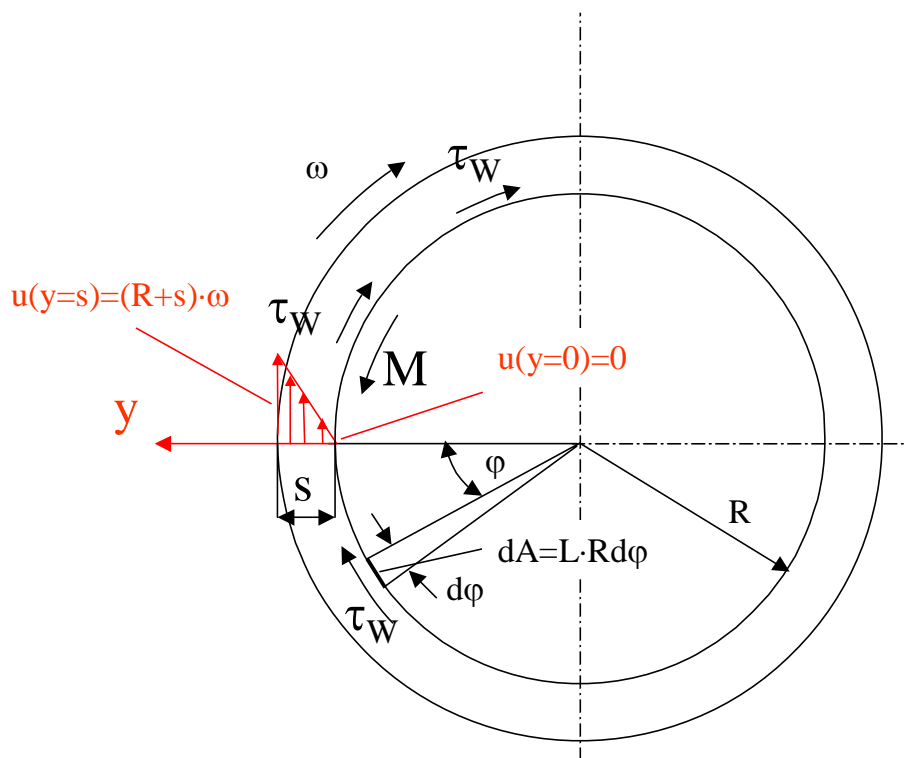
$s \ll R \rightarrow$ Spaltkrümmung ist vernachlässigbar

$s \ll L \rightarrow$ Randeffekte sind vernachlässigbar

Das Problem kann mit einer zweidimensionalen Couette-Strömung (Strömung zwischen zwei ebenen Platten, lineare Geschwindigkeitsverteilung) gelöst werden.

Gesucht:

Drehmoment M am inneren Zylinder



Momentengleichgewicht:

$$M - F_{\tau_w} \cdot R = 0 \quad (1.1)$$

$$M = F_{\tau_w} \cdot R \quad (1.2)$$

differenzielles Moment:

$$dM = dF_{\tau_w} \cdot R \quad (1.3)$$

differenzielle Kraft:

$$dF_{\tau_w} = \tau_w \cdot dA \quad (1.4)$$

differenzielle Fläche:

$$dA = R \cdot L \cdot d\varphi \quad (1.5)$$

Newtonscher Schubspannungsansatz:

$$\tau = \mu \cdot \frac{du(y)}{dy} \quad (1.6)$$

Lineare Geschwindigkeitsverteilung:

$$u(y) = a \cdot y + b \quad (1.7)$$

Randbedingungen (Haftbedingung):

$$u(y=0) = 0 \Rightarrow \underline{b=0} \quad (1.8)$$

$$u(y=s) = (R+s) \cdot \omega \Rightarrow a = \frac{(R+s) \cdot \omega}{s}$$

Damit ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung zu:

$$u(y) = \frac{(R+s) \cdot \omega}{s} \cdot y \quad (1.9)$$

(1.9) in den Newtonschen Schubspannungsansatz in (1.6) eingesetzt, liefert:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\omega \cdot (R+s)}{s} = \tau_w \quad (1.10)$$

Man erkennt, dass $\tau = konst. = \tau(y=0) = \tau_w \neq \tau(y)$.

(1.10) und (1.5) in (1.4) eingesetzt und dF_{τ_w} über die Zylinderfläche integriert, liefern:

$$F_{\tau_w} = \int_A \tau_w \cdot dA = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mu \cdot \frac{\omega \cdot (R+s)}{s} \cdot R \cdot L \cdot d\varphi = \mu \cdot \frac{\omega \cdot (R+s)}{s} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot L \quad (1.11)$$

(1.11) in (1.2) eingesetzt, liefert das Drehmoment M am inneren Zylinder:

$$M = \mu \cdot \frac{\omega \cdot (R+s)}{s} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot L = 64,15 \cdot 10^{-4} \text{ Nm} \quad (1.12)$$

Aufgabe 2

Gegeben:

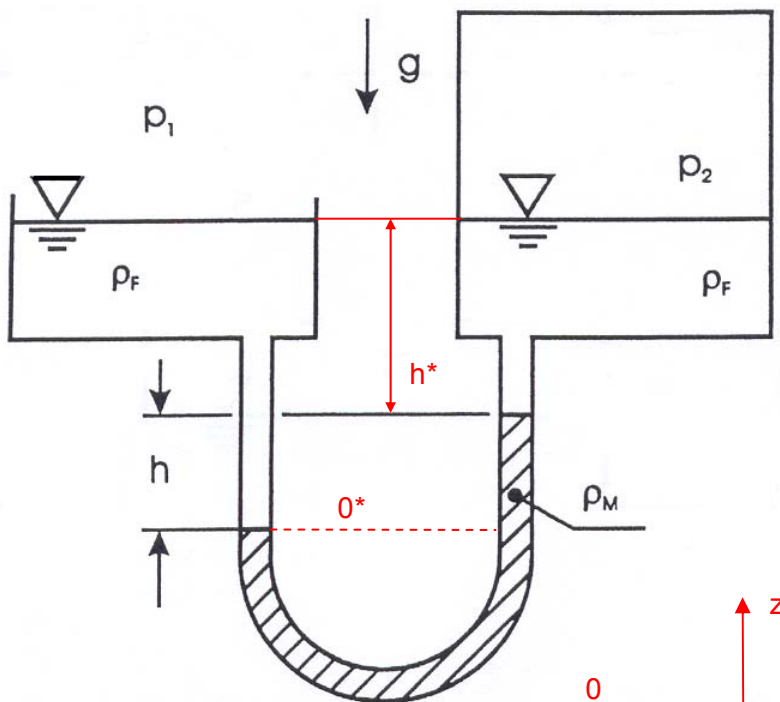
$$\rho_F = 1,0 \text{ g/cm}^3, \rho_M = 13,6 \text{ g/cm}^3, g = 9,81 \text{ m/s}^2, p_1 = 1,05 \cdot 10^5 \text{ Pa}, p_2 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Gesucht:

- Auslenkung h
- Messgenauigkeit und Stabilität des Systems

Voraussetzungen:

- keine Vermischung der Flüssigkeit mit der Messflüssigkeit
- äußere Flüssigkeitsspiegel gleich hoch



Der Druck nimmt im linken wie auch im rechten Schenkel mit $\rho_M \cdot g \cdot z$ von 0 bis zur Stelle 0^* ab. Da $\rho_F < \rho_M$ ist, nimmt er links dann weiter mit $\rho_F \cdot g \cdot z$ ab, rechts aber noch mit $\rho_M \cdot g \cdot z$.

Also: Druckgleichheit in beiden Schenkeln herrscht nur bis zu dem Niveau 0^* .

Regel: Unterhalb des gleichen Druckniveaus muss sich in beiden Schenkeln des U-Rohr-Manometers das gleiche Medium befinden.

a) Gleichgewichtsbetrachtung für das Niveau 0*:

$$p_1 + \rho_F \cdot g \cdot h^* + \rho_F \cdot g \cdot h = p_2 + \rho_F \cdot g \cdot h^* + \rho_M \cdot g \cdot h$$

Der Term mit h^* kürzt sich heraus:

$$p_1 + \rho_F \cdot g \cdot h = p_2 + \rho_M \cdot g \cdot h$$

Nach h aufgelöst:

$$h = \frac{p_1 - p_2}{g \cdot (\rho_M - \rho_F)} \approx 4 \text{ cm}$$

b) Erhöhung der Messgenauigkeit:

Wenn $(p_1 - p_2)$ und g konstant bleiben, dann kann h und damit die Messgenauigkeit durch Verringerung von $(\rho_M - \rho_F)$ vergrößert werden.

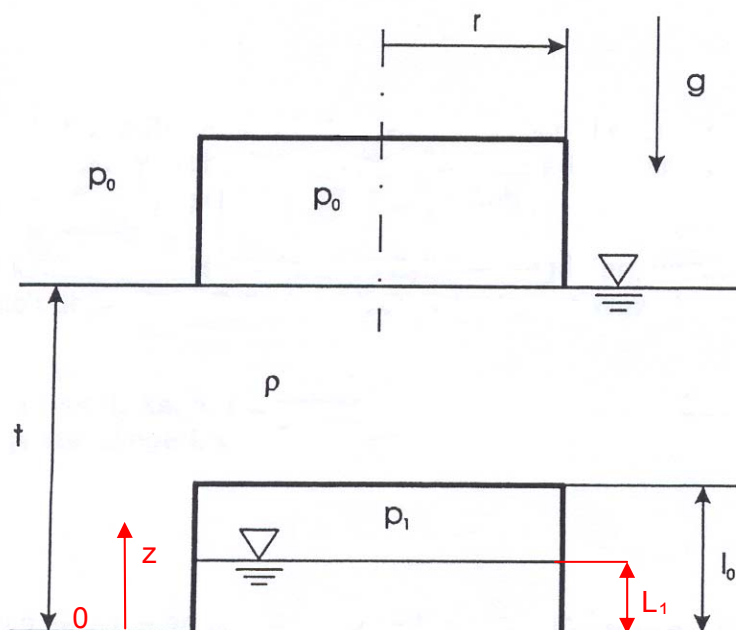
Für $(\rho_M - \rho_F) < 0$ findet ein Umschlag der Flüssigkeitssäulen zur entgegengesetzten Seite hin statt, da dann die Dichte der Messflüssigkeit kleiner als diejenige der Flüssigkeit ist.

Bei $(\rho_M - \rho_F) = 0$ ist die Gleichung (2.1) mathematisch nicht definiert. Zudem träte dann die Vorgabe, dass $p_1 \neq p_2$ ist, nicht mehr zu. Bei konstanten Spiegelhöhen müssten auch die Drücke über den Behältern gleich groß sein.

Aufgabe 3

Gegeben: p_0, l_0, r, ρ, g

Gesucht: $p_1(t)$



Voraussetzungen:

- isotherme Kompression eines idealen Gases (Luft) $\rightarrow p \cdot V = \text{konst.}$ (Boyle-Mariotte)
- bei geringen Höhendifferenzen kann der Einfluss der Schwerkraft auf die Luftmoleküle vernachlässigt werden \rightarrow Gewicht von Luft vernachlässigbar

Druckgleichgewicht:

$$p_0 + \rho \cdot g \cdot t = p_1 + \rho \cdot g \cdot l_1$$

$$p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot \left(t - \underbrace{l_1}_{\text{unbekannt}} \right) \quad (3.1)$$

Boyle-Mariotte-Gesetz für isotherme Prozesse:

$$p \cdot V = \text{konst.}$$

hier:

$$p_0 \cdot V_0 = p_1 \cdot V_1$$

mit

$$V_0 = \pi \cdot r^2 \cdot l_0 \quad ; \quad V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot (l_0 - l_1)$$

folgt

$$p_0 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l_0 = p_1 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (l_0 - l_1)$$

$$l_1 = l_0 \cdot \left(1 - \frac{p_0}{p_1} \right) \quad (3.2)$$

mit (3.2) in (3.1)

$$p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot \left(t - l_0 \cdot \left(1 - \frac{p_0}{p_1} \right) \right)$$

Aufgelöst nach p_1 ergibt sich eine quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen:

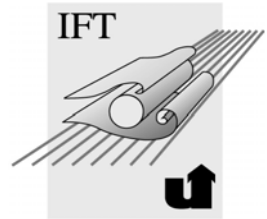
$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot (t - l_0) + \frac{1}{2} \cdot p_0 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4} \cdot (\rho \cdot g \cdot (t - l_0) + p_0)^2 + \rho \cdot g \cdot l_0 \cdot p_0 \right)}$$

Betrachtet man den Term $\sqrt{\left(\frac{1}{4} \cdot (\rho \cdot g \cdot (t - l_0) + p_0)^2 + \rho \cdot g \cdot l_0 \cdot p_0 \right)}$, so stellt man fest, dass dieser größer als $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot (t - l_0) + \frac{1}{2} \cdot p_0$ ist.

Somit ist nur die Lösung

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot (t - l_0) + \frac{1}{2} \cdot p_0 + \sqrt{\left(\frac{1}{4} \cdot (\rho \cdot g \cdot (t - l_0) + p_0)^2 + \rho \cdot g \cdot l_0 \cdot p_0 \right)}$$

sinnvoll, da p_1 nicht negativ werden kann.



Übungen im Pflichtfach "Strömungslehre"
2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1

Für eine großräumige Luftschichtung, die folgende Temperaturverteilung aufweist

$$T(z) = \begin{cases} T_0 - \alpha \cdot z & \text{für } 0 \leq z \leq h \\ T_0 - \alpha \cdot h & \text{für } z \geq h, \end{cases}$$

berechne man den Druck p in Abhängigkeit von der Höhe z .

Wie groß ist der Überdruck in einem Flugzeug, welches in der Höhe H_2 fliegt, dessen Innendruck jedoch auf die Höhe $H_1 < H_2$ eingestellt ist?

Welche Kraft wirkt in diesem Fall auf ein kreisrundes Flugzeugfenster vom Innendurchmesser d ?

Gegeben:

$p_0 = 0,981 \text{ bar}$ (Druck für $z = 0$), $T_0 = 283 \text{ K}$ (Temperatur für $z = 0$), $\alpha = 6 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$,
 $m = 29 \text{ kg/kmol}$ (Molmasse der Luft), $R_m = 8314 \text{ J/(K} \cdot \text{kmol)}$ (universelle Gaskonstante),
 $H_1 = 1 \cdot 10^3 \text{ m}$, $H_2 = 12 \cdot 10^3 \text{ m}$, $h = 10^4 \text{ m}$, $d = 30 \text{ cm}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Aufgabe 2

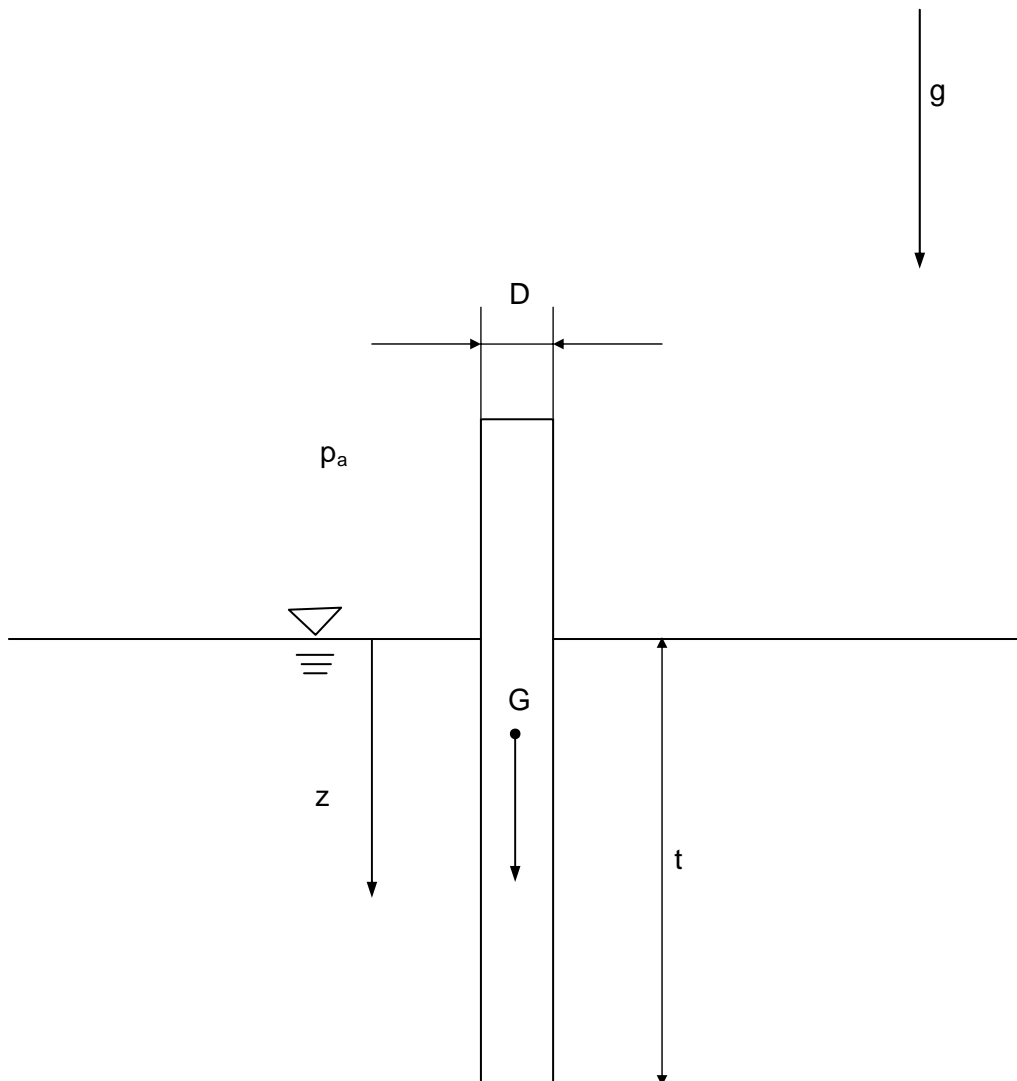
Ein kreiszylindrischer Stab mit dem Durchmesser D und dem Gewicht G schwimmt mit vertikaler Achse in einer Salzlösung, deren Dichte ρ von der Tiefe z linear abhängt. Es sei:

$$\rho(z) = \rho_0 \cdot (1 + \varepsilon \cdot z)$$

Die Eintauchtiefe des Stabes sei t . Auf die Oberfläche der Salzlösung wirke der Umgebungsdruck p_a .

- a) Man leite eine Beziehung für $p(z)$ ab.
- b) Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen die unbekannte Dichte ρ_0 .

Gegeben sind: $D, G, t, \varepsilon, g, p_a$.

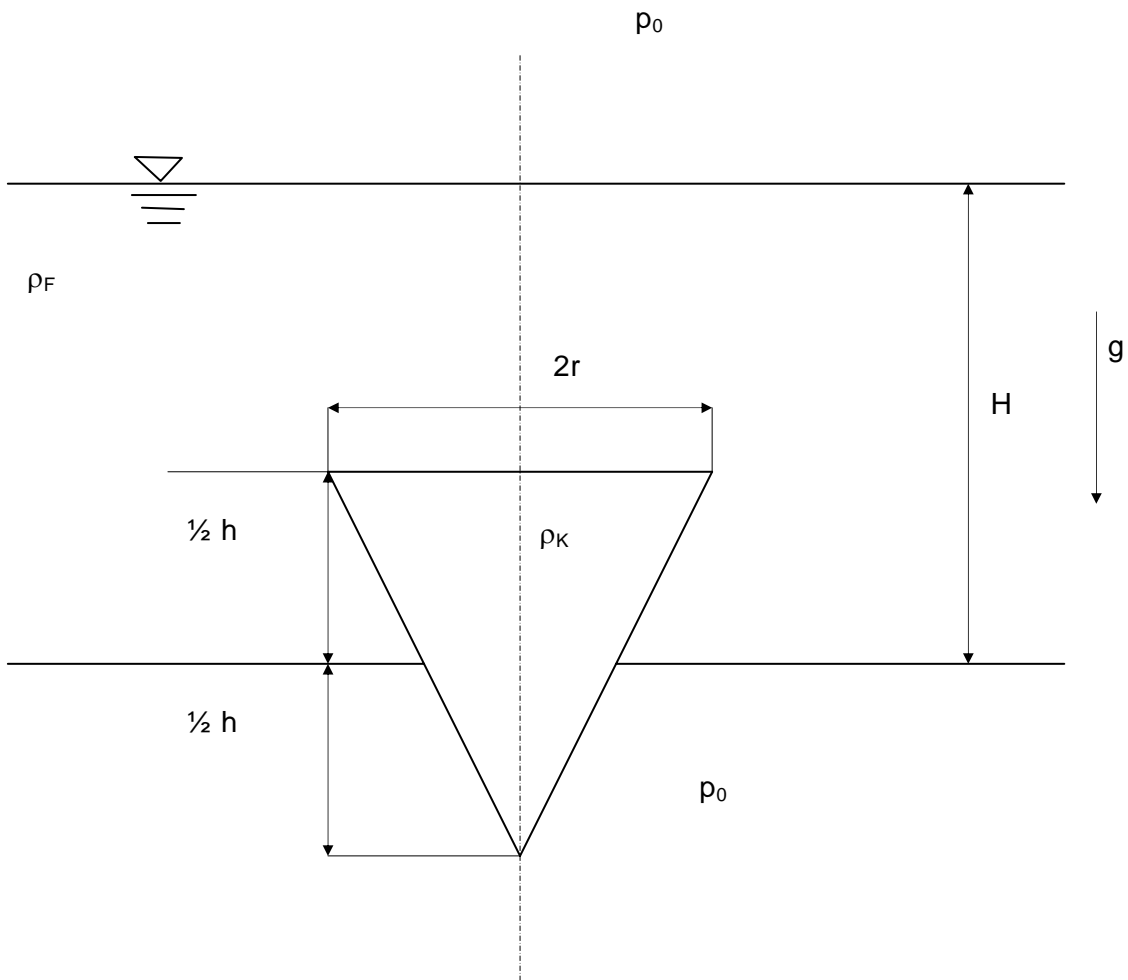


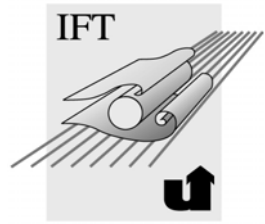
Aufgabe 3

Welche Kraft ist erforderlich, um ein Kreiskegelventil anzuheben, das die Bodenöffnung eines Gefäßes verschließt?

Gegeben:

$H = 80 \text{ cm}$, $r = 4 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$, $\rho_F = 1 \text{ g/cm}^3$, $\rho_K = 6 \text{ g/cm}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.





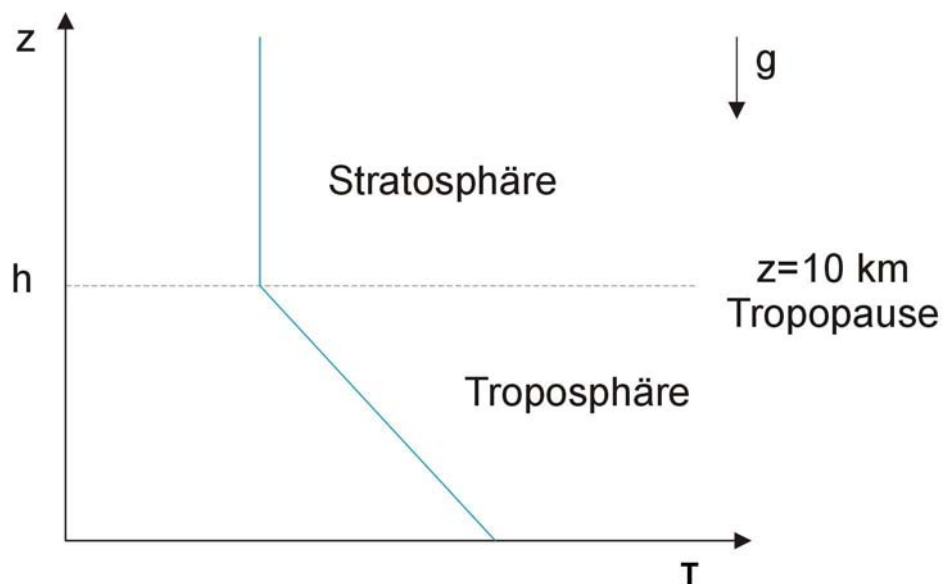
Lösungen zu dem Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Gegeben:

$p_0 = 0,981$ bar (Druck für $z = 0$), $T_0 = 283$ K (Temperatur für $z = 0$), $\alpha = 6 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$,
 $m = 29 \text{ kg/kmol}$ (Molmasse der Luft), $R_m = 8314 \text{ J/(K} \cdot \text{kmol)}$ (universelle
Gaskonstante), $H_1 = 1 \cdot 10^3 \text{ m}$, $H_2 = 12 \cdot 10^3 \text{ m}$, $h = 10^4 \text{ m}$, $d = 30 \text{ cm}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Temperaturverlauf in Abhängigkeit der Höhe z (hier in Diagrammform):



$$T(z) = \begin{aligned} &T_0 - \alpha \cdot z \quad \text{für } 0 \leq z \leq h \text{ (Troposphäre)} \end{aligned} \quad (1a)$$

$$T_0 - \alpha \cdot h \quad \text{für } z \geq h \quad \text{(Stratosphäre)} \quad (1b)$$

Gesucht:

$p(z)$

Lösungsweg:

Hydrostatische Grundgleichung (**z -Richtung entgegengesetzt zur g -Richtung**):

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z) \cdot g \quad (2)$$

Ideale Gasgleichung:

$$\frac{p(z)}{\rho(z)} = \frac{R}{m} \cdot T(z) \quad (3)$$

mit

$$\frac{R}{m} = \frac{\text{allg. Gaskonstante}}{\text{Molmasse}} = R_{\text{spez}} = \text{spezifische oder spezielle Gaskonstante}$$

Wird (3) in (2) eingesetzt, so ergibt sich:

$$\frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{g \cdot m}{R} \cdot \frac{dz}{T(z)} \quad (4)$$

a) In der Troposphäre ($0 \leq z \leq h = 10 \text{ km}$) gilt (1a):

$$T(z) = T_0 - \alpha \cdot z \quad (1a)$$

(1a) eingesetzt in (4) ergibt:

$$\frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{g \cdot m}{R} \cdot \frac{dz}{(T_0 - \alpha \cdot z)} \quad (5)$$

Unbestimmte Integration von (5)

$$\int \frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{g \cdot m}{R} \cdot \int \frac{dz}{(T_0 - \alpha \cdot z)}$$

ergibt:

$$\ln p(z) = \frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha} \cdot \ln(T_0 - \alpha \cdot z) + \underbrace{C_0}_{\ln C_0^*}$$

$$\ln p(z) = \ln \left[(T_0 - \alpha \cdot z)^{\frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha}} \right] + \ln C_0^*$$

$$\ln p(z) = \ln \left[(T_0 - \alpha \cdot z)^{\frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha}} \cdot C_0^* \right]$$

$$p(z) = C_0^* \cdot (T_0 - \alpha \cdot z)^{\frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha}} \quad (6)$$

C_0^* muss aus den Randbedingungen bestimmt werden:

$$z = 0: \quad p(z = 0) = p_0$$

In (6) eingesetzt ergibt sich:

$$C_0^* = \frac{p_0}{T_0^{\frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha}}} \quad (7)$$

Aus (7) in (6) folgt:

$$p(z) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot z}{T_0}\right)^{\frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha}} = p_T(z) \quad \text{für } 0 \leq z \leq h = 10 \text{ km (Troposphäre)} \quad (8)$$

b) In der Stratosphäre für $z \geq h = 10 \text{ km}$ gilt (1b):

$$T(z) = T_0 - \alpha \cdot h = \text{const.} \quad (1b)$$

(1b) eingesetzt in (4) liefert:

$$\frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{g \cdot m}{R} \cdot \frac{dz}{T_0 - \alpha \cdot h} \quad (9)$$

Daraus folgt:

$$\ln p(z) = -\frac{g \cdot m \cdot z}{R \cdot (T_0 - \alpha \cdot h)} + \underbrace{C_1}_{\ln C_1^*}$$

$$p(z) = C_1^* \cdot e^{-\frac{g \cdot m \cdot z}{R \cdot (T_0 - \alpha \cdot h)}} = p_S(z) \quad (10)$$

Man erhält C_1^* aus der Übergangsbedingung von der Troposphäre zur Stratosphäre:

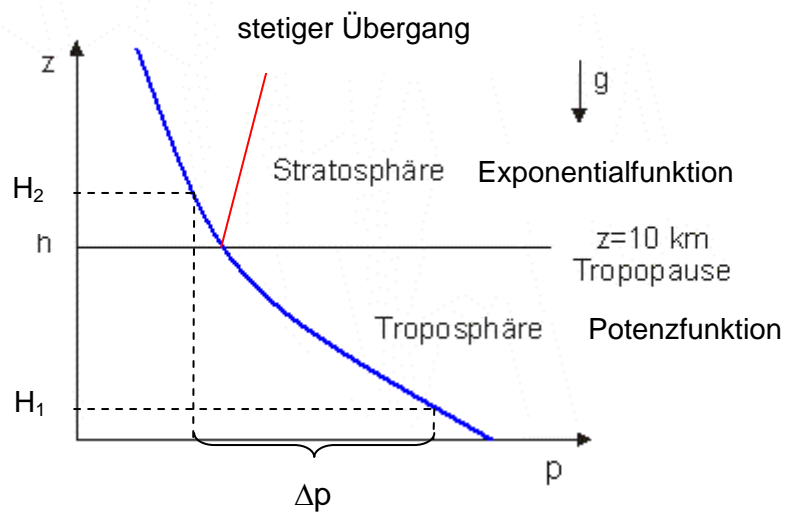
$$z = h: \quad p_T(z = h) = p_S(z = h)$$

$z = h$ in (8) und (10) eingesetzt und aufgelöst nach C_1^* :

$$C_1^* = p_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha}} \cdot e^{\frac{g \cdot m \cdot h}{R \cdot (T_0 - \alpha \cdot h)}} \quad (11)$$

Wird (11) in (10) eingesetzt, folgt:

$$p_S(z) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha}} \cdot e^{\frac{g \cdot m \cdot (h-z)}{R \cdot (T_0 - \alpha \cdot h)}} \quad (12)$$



Gesucht:

Der Überdruck in einem Flugzeug, welches in der Höhe H_2 fliegt, dessen Innendruck jedoch auf die Höhe $H_1 < H_2$ eingestellt ist, berechnet sich aus:

$$\Delta p = p_T(z = H_1) - p_S(z = H_2)$$

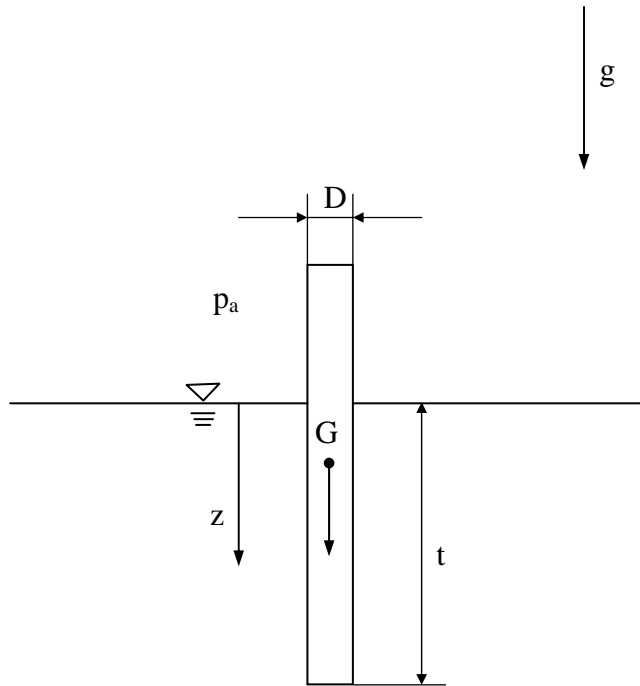
$$\Delta p = 0,682 \text{ bar}$$

Gesucht:

Die Kraft F , die auf die Fensterfläche wirkt, berechnet sich zu:

$$F = \Delta p \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} = 4820 \text{ N}$$

Aufgabe 2



1. Lösungsweg

Gegeben: D , G , t , ε , g , p_a

a) Gesucht: $p(z)$

hydrostat. Grundgleichung

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p(z)}{\partial z} = +g \quad (1)$$

g hat ein positives Vorzeichen, da es gleichgerichtet zur z -Richtung ist!

$$\rho(z) = \rho_0 \cdot (1 + \varepsilon \cdot z) \quad (2)$$

Aus (2) in (1) folgt:

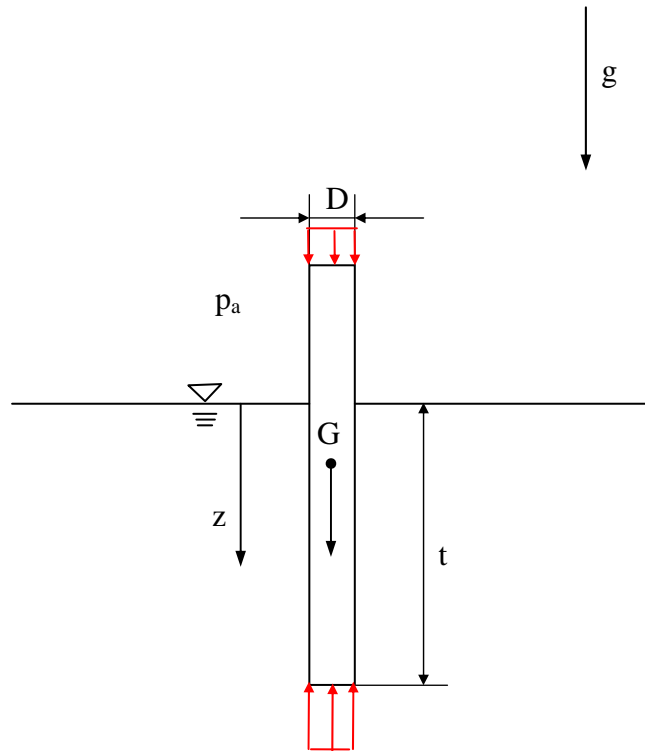
$$\begin{aligned} \frac{\partial p(z)}{\partial z} &= \frac{dp(z)}{dz} = g \cdot \rho_0 \cdot (1 + \varepsilon \cdot z) \\ \Rightarrow p(z) &= g \cdot \rho_0 \cdot \left(z + \varepsilon \cdot \frac{z^2}{2} \right) + C \end{aligned} \quad (3)$$

Bestimmung der Konstanten aus den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} p(z=0) &= p_a \Rightarrow C = p_a \\ p(z) &= g \cdot \rho_0 \cdot \left(z + \varepsilon \cdot \frac{z^2}{2} \right) + p_a \end{aligned}$$

b) Gesucht: ρ_0

Kräftegleichgewicht



$$\sum F = 0$$

$$G + p_a \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - p(z=t) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 0$$

$$G + p_a \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \left(g \cdot \rho_0 \cdot \left(t + \varepsilon \cdot \frac{t^2}{2} \right) + p_a \right) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 0$$

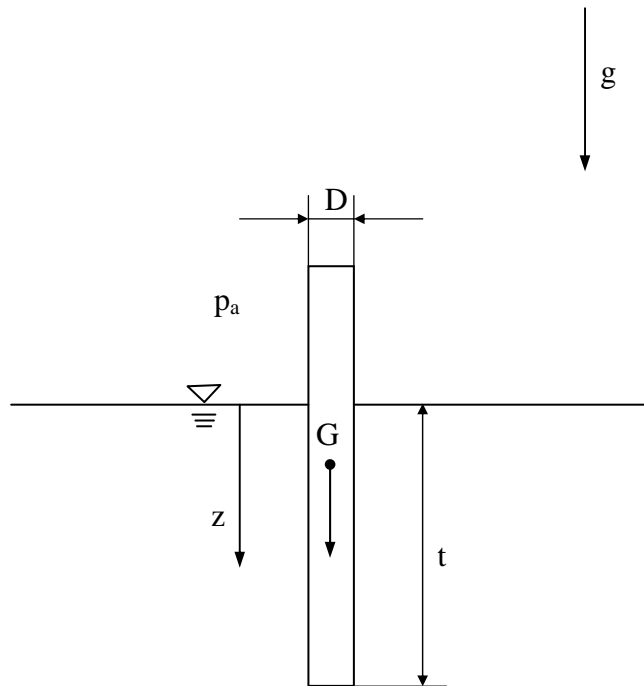
$$\Rightarrow \rho_0 = \frac{4 \cdot G}{\left(t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \right) \cdot g \cdot \pi \cdot D^2}$$

2. Lösungsweg

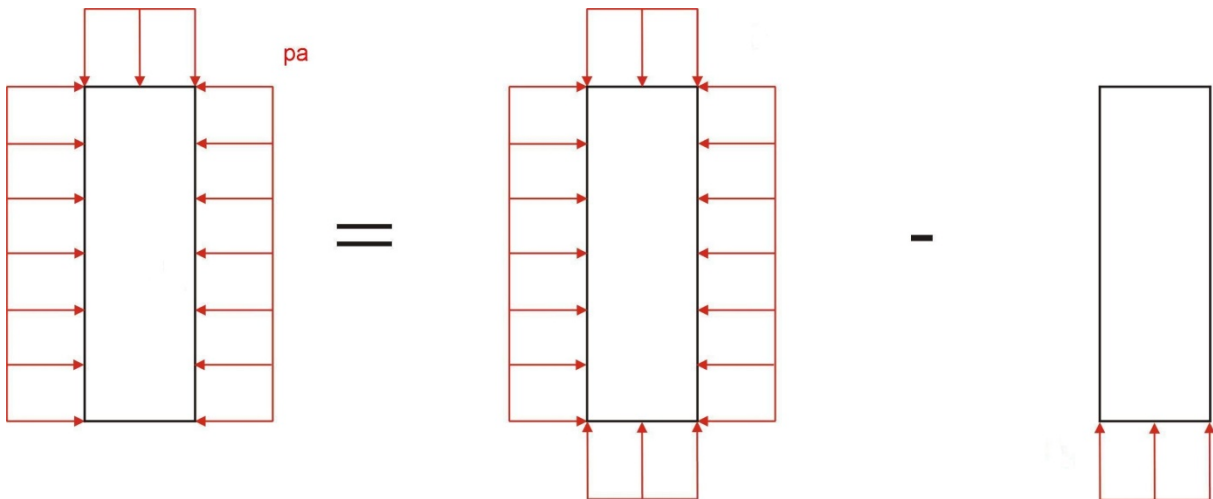
Gegeben: D , G , t , ε , g , p_a

a) Gesucht: $p(z)$ aus 1. Lösungsweg

Die Lösung der Aufgabe erfolgt durch die Anwendung des Archimedischen Prinzips (Auftrieb = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit) für eingetauchte Körper, das auch für teilweise eingetauchte Körper gilt.

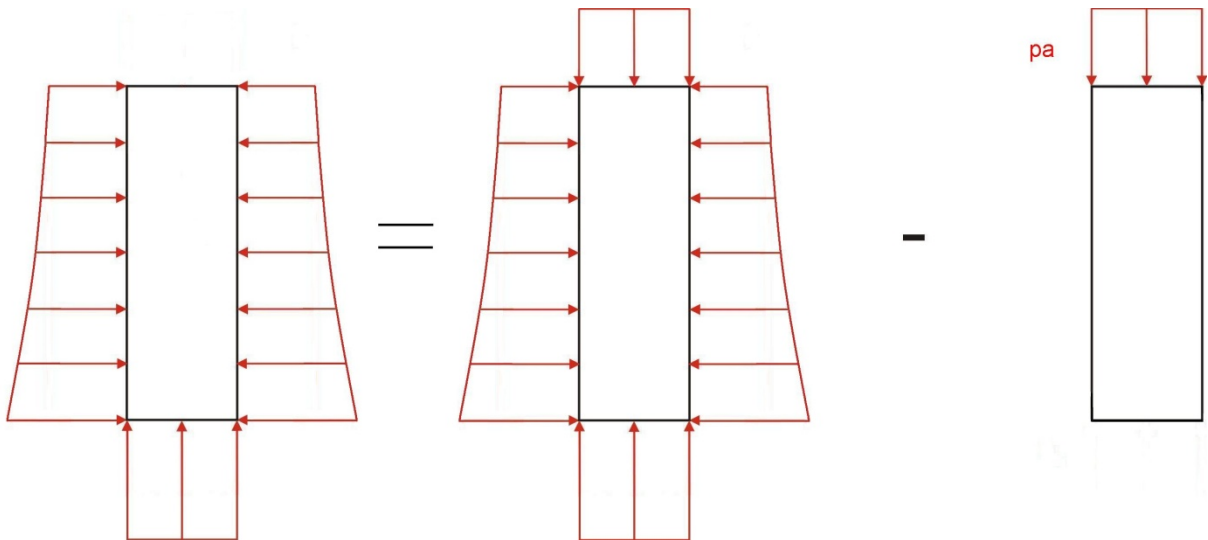


Die Druckkraft F_o auf den oberen, nicht eingetauchten Zylinderteil wird wie folgt ermittelt:



$$F_o = 0 - \left(-p_a \frac{\pi D^2}{4} \right) = p_a \frac{\pi D^2}{4}$$

Die Druckkraft auf den unteren, eingetauchten Zylinderteil F_u wird wie folgt ermittelt:



$$F_u = - \underbrace{\int_0^t \rho(z) \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot dz}_{\text{Auftrieb}} - p_a \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$F_u = - \int_0^t \rho_0 \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (1 + \varepsilon \cdot z) \cdot dz - p_a \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$F_u = - \rho_0 \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \left(z + \varepsilon \cdot \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^t - p_a \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$F_u = - \rho_0 \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \left(t + \varepsilon \cdot \frac{t^2}{2} \right) - p_a \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

b) Gesucht: ρ_0

Kräftegleichgewicht:

$$F_o + F_u + G = 0$$

$$\Leftrightarrow p_a \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \rho_0 \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \left(t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} \right) - p_a \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} + G = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho_0 = \frac{4 \cdot G}{g \cdot \pi \cdot D^2} \cdot \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \right)}$$

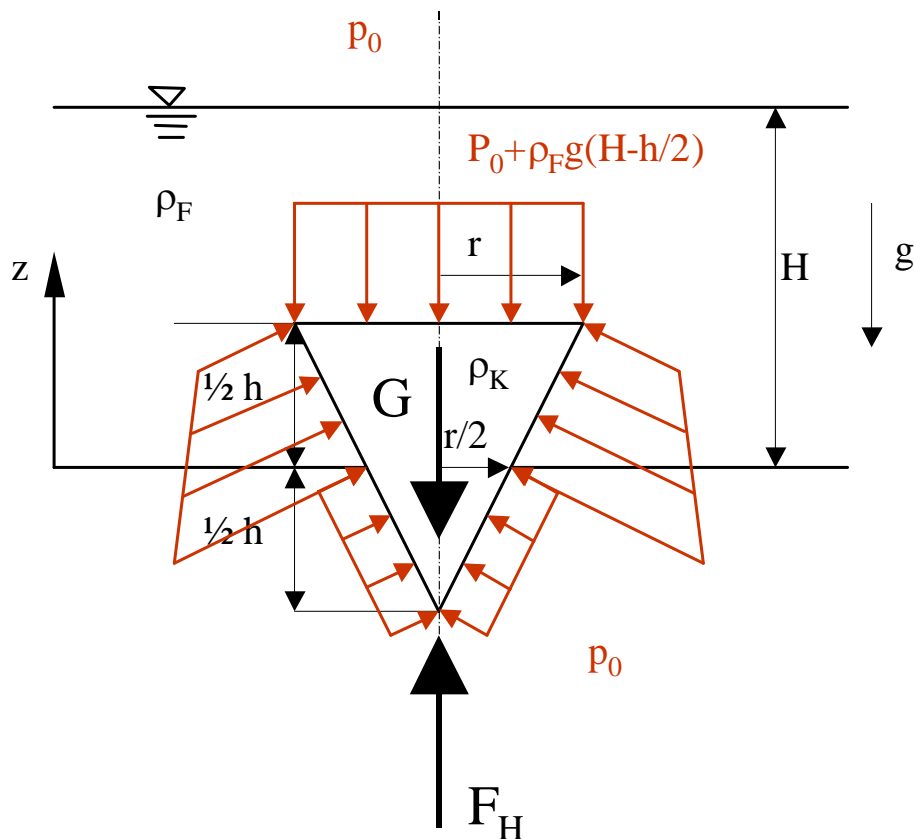
Aufgabe 3

Gegeben:

$H = 80 \text{ cm}$, $r = 4 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$, $\rho_F = 1 \text{ g/cm}^3$, $\rho_K = 6 \text{ g/cm}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

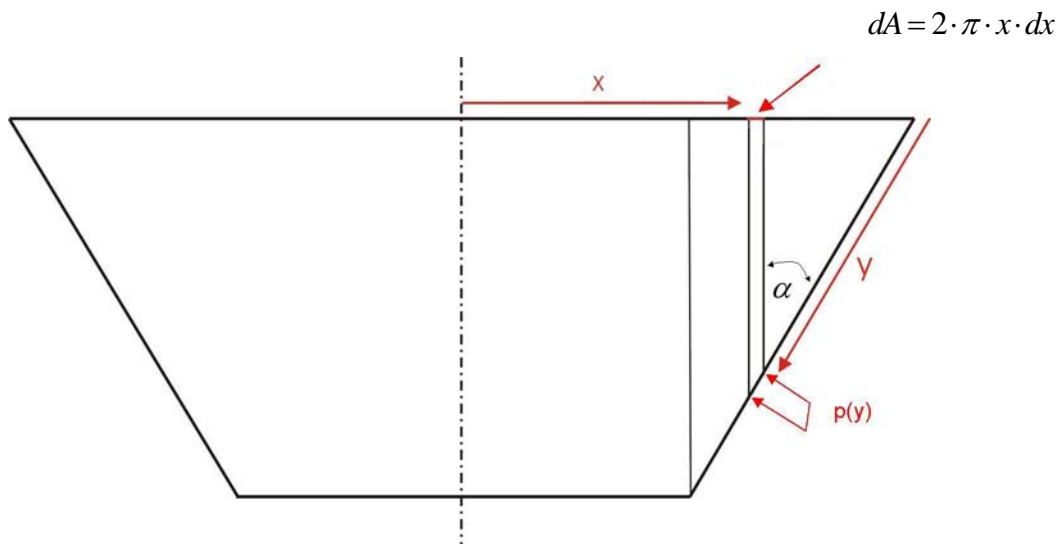
Gesucht:

F_H = Hebekraft



1. Lösungsweg

Die Lösung der Aufgabe erfolgt mittels der Berechnung aller Druckkräfte, die auf die Kreiskegeloberfläche einwirken:



$$p(y) = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) + \rho_{Fl} \cdot g \cdot y \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$\sin \alpha = \frac{r-x}{y} \Rightarrow y = \frac{r-x}{\sin \alpha} \quad (2)$$

(2) in (1) eingesetzt ergibt:

$$p(x) = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \frac{r-x}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha \quad (3)$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha = \frac{h/2}{r/2} = \frac{h}{r} \quad (4)$$

(4) in (3) eingesetzt:

$$p(x) = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) + \rho_{Fl} \cdot g \cdot (r-x) \cdot \frac{h}{r}$$

$$p(x) = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(h - \frac{h}{r} \cdot x \right)$$

$$p(x) = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) - \rho_{Fl} \cdot g \cdot \frac{h}{r} \cdot x$$

Die Druckkraft F_M , die in z-Richtung auf die Mantelfläche des Kegelstumpfes wirkt, berechnet sich wie folgt:

$$F_M = \int_{r/2}^r p(x) \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dx$$

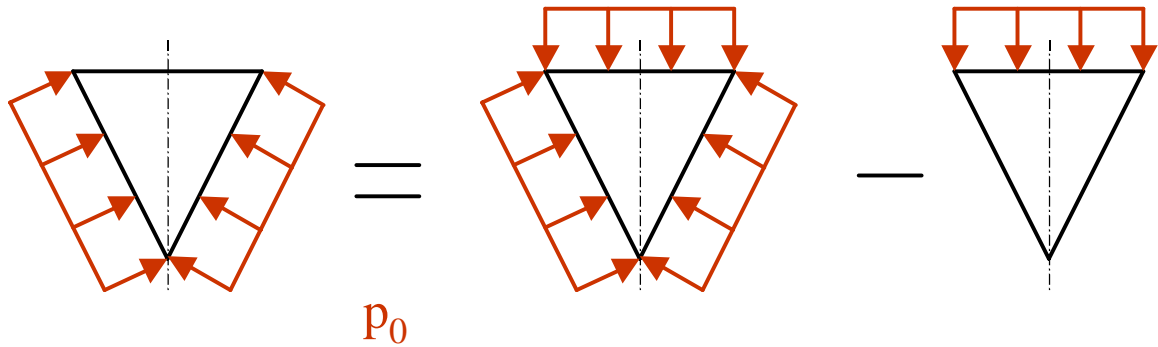
$$F_M = \int_{r/2}^r \left[p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) - \rho_{Fl} \cdot g \cdot \frac{h}{r} \cdot x \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dx$$

$$F_M = p_0 \cdot \pi \cdot x^2 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) \cdot \pi \cdot x^2 - \rho_{Fl} \cdot g \cdot \frac{h}{r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{\frac{r}{2}}^r$$

$$F_M = p_0 \cdot \pi \cdot \left(r^2 - \frac{r^2}{4} \right) + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) \cdot \pi \cdot \left(r^2 - \frac{r^2}{4} \right) - \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{r} \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{8} \right)$$

$$F_M = p_0 \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot r^2 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot r^2 - \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{7}{12} \cdot r^2$$

Druckkraft auf den unteren Kegel F_{Du} :



$$F_{Du} = 0 - \left(-p_0 \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} \right) = p_0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r^2$$

Kräftegleichgewicht:

$$F_H - G - \left(p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) \right) \cdot \pi \cdot r^2 + F_{Du} + F_M = 0$$

$$F_H - G - \left(p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) \right) \cdot \pi \cdot r^2 + p_0 \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} + p_0 \cdot \pi \cdot \frac{3 \cdot r^2}{4} +$$

$$\rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot r^2 - \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{7}{12} \cdot r^2 = 0$$

$$F_H - \frac{1}{3} \cdot \rho_K \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g - \rho_{Fl} \cdot g \cdot H \cdot \pi \cdot r^2 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot H \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot r^2 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{2} +$$

$$\rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{3}{8} \cdot r^2 - \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{7}{12} \cdot r^2 = 0$$

$$F_H - \frac{1}{3} \cdot \rho_K \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g - \rho_{Fl} \cdot g \cdot H \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot r^2 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{7}{12} \cdot r^2 = 0$$

$$F_H = \frac{1}{3} \cdot \rho_K \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 - \rho_{Fl} \cdot g \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \left(\frac{7}{6} h - H \right)$$

$$\underline{\underline{F_H = 18,3 \text{ N}}}$$

Aq. 3

2.Lösungsweg

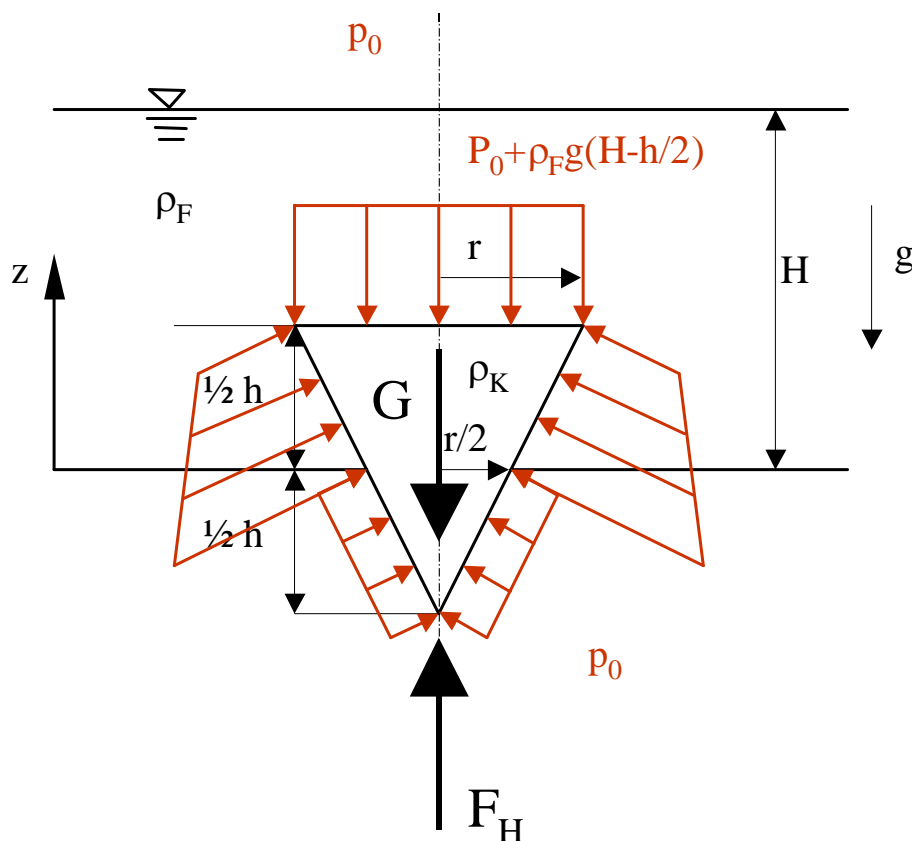
Gegeben:

$H = 80 \text{ cm}$, $r = 4 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$, $\rho_F = 1 \text{ g/cm}^3$, $\rho_K = 6 \text{ g/cm}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Gesucht:

F_H = Hebekraft

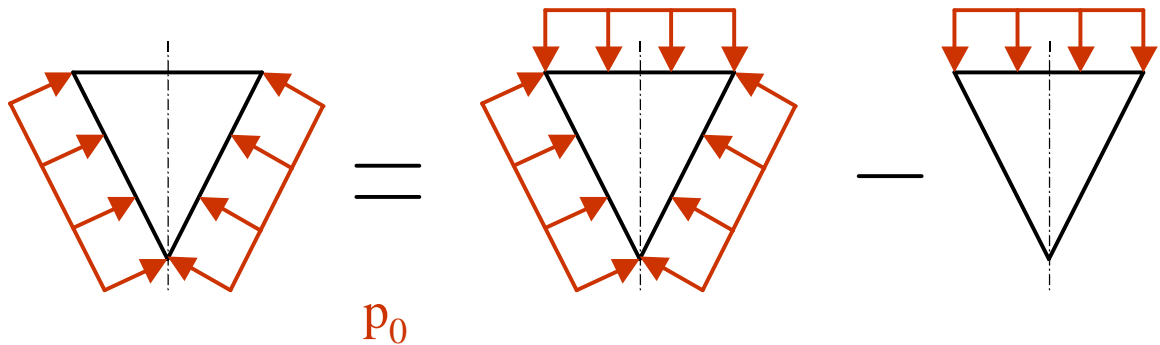
Die Lösung der Aufgabe erfolgt durch die Anwendung des Archimedischen Prinzips (Auftrieb = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit) für eingetauchte Körper, das auch für teilweise eingetauchte Körper gilt.



Wirkende Kräfte:

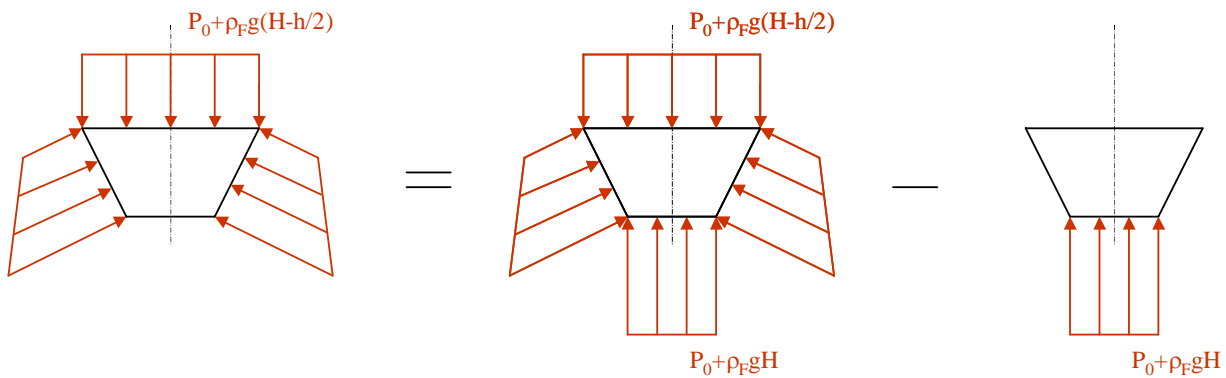
- G = Gewichtskraft
- F_H = Hebekraft (gesucht)
- F_D = resultierende Druckkraft am Kegel, die sich aus der Druckkraft auf den unteren Kegel F_{Du} und auf den oberen eingetauchten Kegelstumpf F_{Do} zusammensetzt

Druckkraft auf den unteren Kegel F_{Du} :



$$F_{Du} = 0 - \left(-p_0 \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} \right) = p_0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r^2$$

Druckkraft auf den Kegelstumpf im Fluid F_{Do} :



$$F_{Do} = \underbrace{\rho_{Fl} \cdot g \cdot V_{St}}_{\text{Auftrieb}} - (p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot H) \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4}$$

mit

$$V_{St} = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi \cdot r^2 \cdot h - \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{7}{24} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

bzw. mit der Formel zur Berechnung des Volumens eines Kegelstumpfes

$$V_{St} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left[r^2 + r \cdot \frac{r}{2} + \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{2} = \frac{7}{24} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

folgt für F_{Do} :

$$F_{Do} = \rho_{Fl} \cdot g \cdot \frac{7}{24} \pi \cdot r^2 \cdot h - (p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot H) \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4}$$

Gewichtskraft:

$$G = \rho_K \cdot V_K \cdot g = \rho_K \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g$$

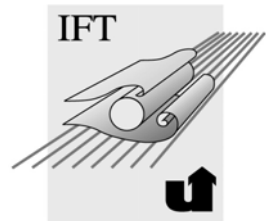
Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_{\uparrow} = 0$$

$$F_H - G + F_{Du} + F_{Do} = 0$$

$$\Rightarrow F_H = \frac{1}{3} \rho_K \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g - \rho_{Fl} \cdot g \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \left(\frac{7}{6} h - H \right)$$

$$\underline{\underline{F_H = 18,3 \text{ N}}}$$



Übungen im Pflichtfach "Strömungslehre"

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1

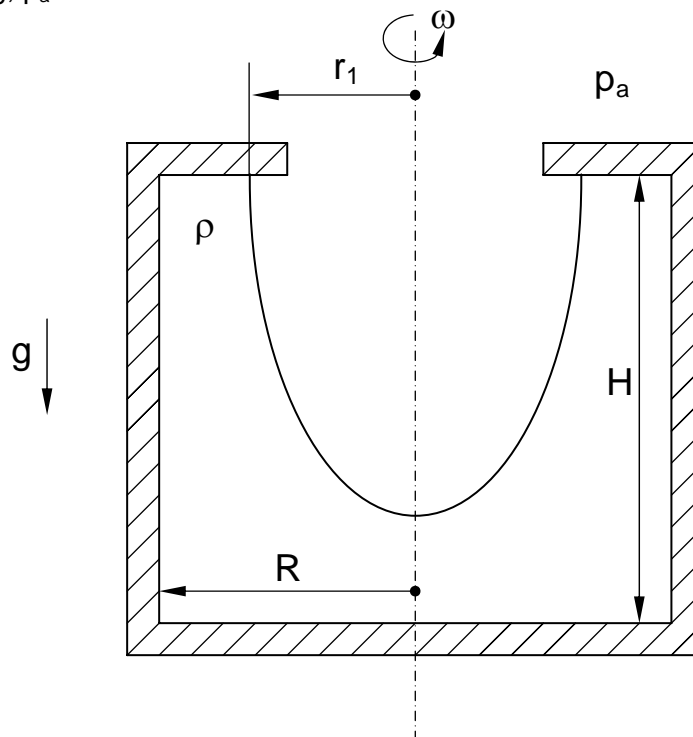
Ein kreiszylindrisches Gefäß (Innenradius R , Innenhöhe H) rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine Hochachse. Die in dem Gefäß befindliche inkompressible Flüssigkeit (Dichte ρ) rotiert dabei wie ein Starrkörper mit. Über ihrer freien Oberfläche, die beim Radius r_1 an den Behälterdeckel grenzt, herrscht der Umgebungsdruck p_a .

Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen

- a) die Kraft F_1 bzw. F_2 , welche die Flüssigkeit auf den Boden bzw. Deckel ausübt, sowie
- b) die Lage des tiefsten Punktes der freien Oberfläche.

Gegeben sind:

$R, H, \rho, \omega, r_1, g, p_a$.



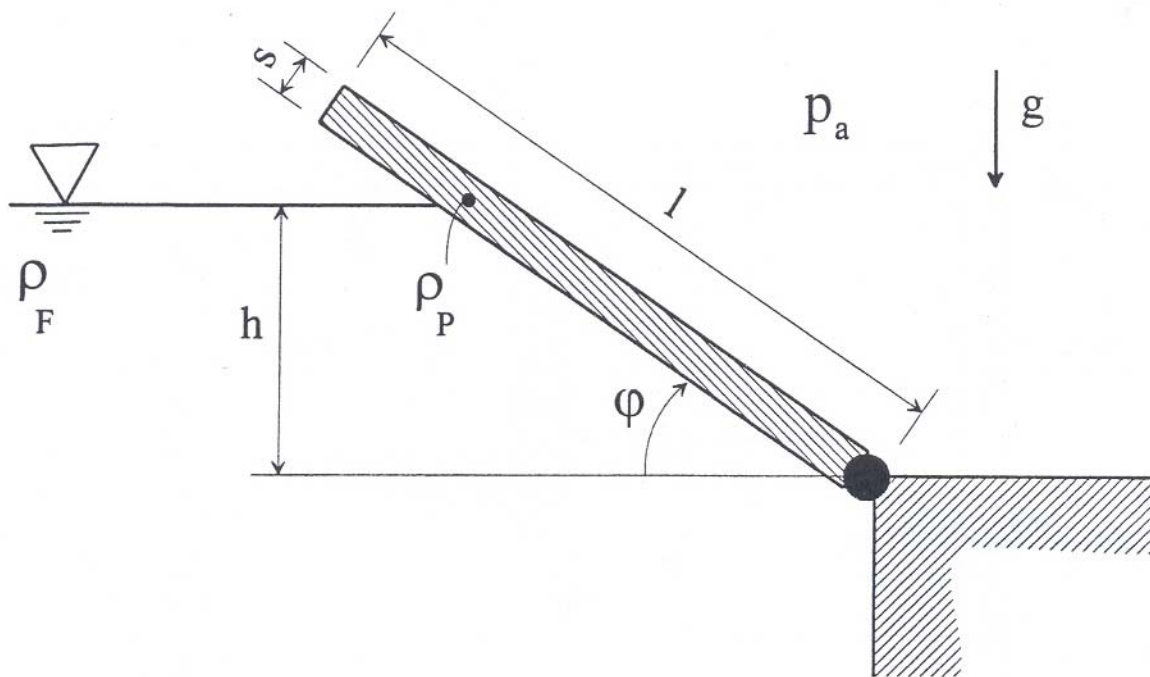
Aufgabe 2

Eine ebene Platte (Länge l , Dicke s , Tiefe t , Dichte ρ_P) ist an ihrem rechten Ende drehbar gelagert. Mit ihrer linken Seite begrenzt sie eine inkompressible Flüssigkeit der Dichte ρ_F , deren Oberfläche in der Höhe h über dem Drehpunkt liegt.

Man ermittle h als Funktion des Winkels φ und der übrigen gegebenen Größen unter der Voraussetzung, dass die Platte im Gleichgewicht ist.

Gegeben sind:

$l, s, \rho_P, \rho_F, \varphi, t, g$.



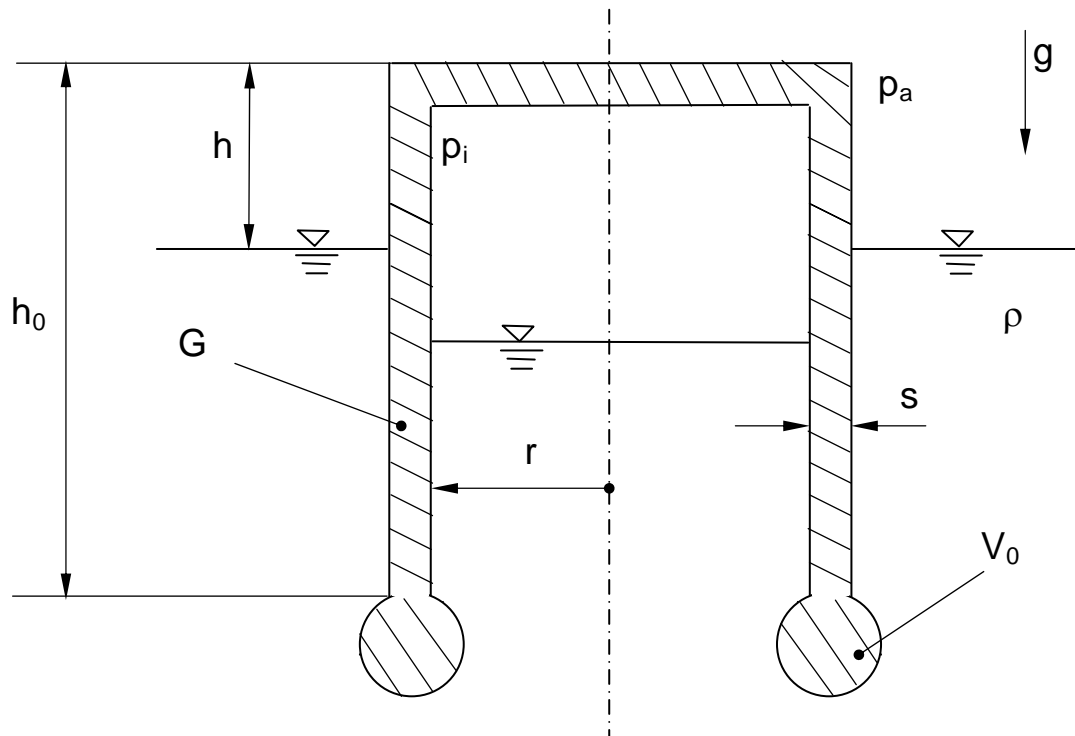
Aufgabe 3

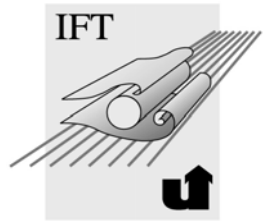
Eine kreiszylindrische Tauchglocke (Innenradius r , Wandstärke s) mit einem ringförmigen Ballast (Volumen V_0) schwimmt in einer inkompressiblen Flüssigkeit mit der Dichte ρ . Das Gesamtgewicht von Glocke und Ballast sei G . In der Glocke ist ein Gas eingeschlossen, das unter dem Druck p_i ($p_i > p_a$) steht.

Man bestimme die Höhe h als Funktion gegebener Größen.

Gegeben sind:

$r, s, h_0, G, V_0, \rho, p_i, p_a, g$.



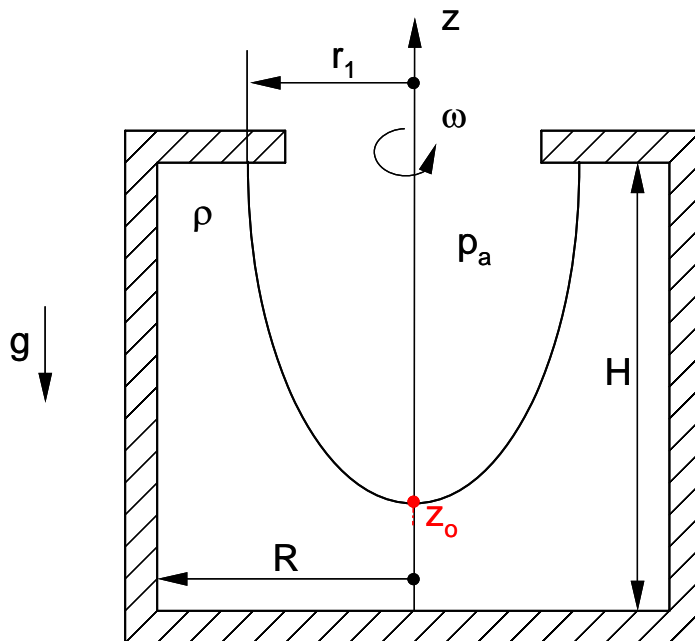


Lösungen zu dem Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

Gegeben: $R, H, \rho, \omega, r_1, g, p_a$

a) Gesucht: die Kraft F_B bzw. F_D , welche die Flüssigkeit auf den Boden bzw. Deckel ausübt



Es gilt das Differentialgleichungssystem (streng genommen keine Hydrostatik):

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = f_r = \omega^2 r \quad ; \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = f_z = -g$$

Integration für $\rho = konst$ führt schrittweise auf:

$$p(r, z) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 - \rho \cdot g \cdot z + konst \quad (1.1)$$

Für $z = H$ und $r = r_1$ ist

$$p(r = r_1, z = H) = p_a$$

=>

$$p_a = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_1^2 - \rho \cdot g \cdot H + konst$$

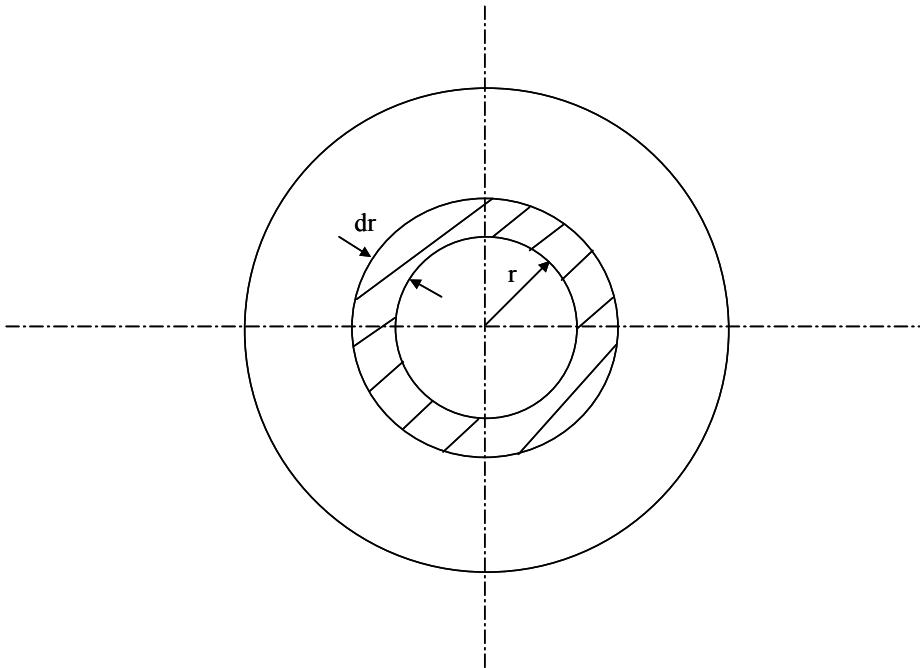
$$\Rightarrow \quad konst = p_a - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_1^2 + \rho \cdot g \cdot H$$

eingesetzt in (1.1) folgt

$$p(r, z) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot (r^2 - r_1^2) + \rho \cdot g \cdot (H - z) + p_a \quad (1.2)$$

Kraft auf den Boden:

$$F_B = \int_0^R p(r, z=0) \cdot dA \quad (1.3)$$



mit

$$dA = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \quad (1.4)$$

(1.2), (1.4) eingesetzt in (1.3)

$$F_B = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R \left[\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot (r^2 - r_1^2) + \rho \cdot g \cdot (H - z) + p_a \right] \cdot r \cdot dr$$

$$F_B = \pi \cdot R^2 \cdot \left[\frac{\rho}{2} \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{R^2}{2} - r_1^2 \right) + \rho \cdot g \cdot H + p_a \right] \quad (1.5)$$

Kraft auf den Deckel:

$$F_D = \int_{r_1}^R p(r, z=H) \cdot dA \quad (1.6)$$

mit (1.2) und (1.4) in (1.6)

$$F_D = 2 \cdot \pi \cdot \int_{r_1}^R \left[\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot (r^2 - r_1^2) + p_a \right] \cdot r \cdot dr$$

$$F_D = \pi \cdot (R^2 - r_1^2) \cdot \left[\frac{\rho}{4} \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2} \right) + p_a \right] \quad (1.7)$$

b) Gesucht: Lage des tiefsten Punktes der freien Oberfläche:

$$p(r=0, z=z_0) = p_a$$

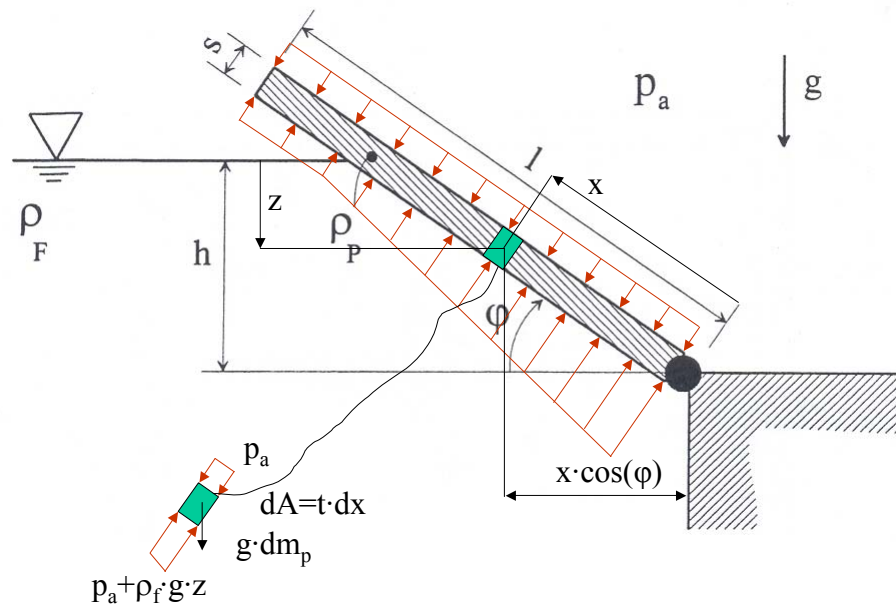
$$\Rightarrow z_0 = H - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cdot r_1^2$$

Aufgabe 2

Gegeben : $l, s, \rho_P, \rho_F, \varphi, t, g$.

Gesucht: h als Funktion des Winkels φ und der übrigen gegebenen Größen in der Gleichgewichtslage

Gleichgewicht herrscht dann, wenn im Drehpunkt ein Momentengleichgewicht vorliegt!



1. Moment durch das Gewicht der Platte:

$$dM_G = dm_p \cdot g \cdot x \cdot \cos \varphi = \rho_p \cdot s \cdot t \cdot dx \cdot g \cdot x \cdot \cos \varphi$$

$$M_G = \int_{x=0}^{x=L} dM_G = \rho_p \cdot s \cdot t \cdot g \cdot \cos \varphi \cdot \int_0^l x \cdot dx$$

$$= \underbrace{\rho_p \cdot L \cdot t \cdot s \cdot g}_{V_P} \cdot \underbrace{\cos \varphi \cdot \frac{L}{2}}_{\text{Hebelarm im Flächenschwerpunkt}}$$

2. Moment aus der Druckverteilung:

$$dM_F = \left(p_a - \underbrace{(p_a + \rho_F \cdot g \cdot z)}_{\text{Druck, der das resultierende Moment verursacht}} \right) \cdot dA \cdot x$$

$$M_F = \int_{x=0}^{x=\frac{h}{\sin \varphi}} [-(\rho_F \cdot g \cdot z) \cdot x] \cdot t \cdot dx$$

mit

$$\sin \varphi = \frac{h-z}{x}$$

folgt

$$z = h - x \cdot \sin \varphi$$

also ist

$$M_F = t \cdot \int_{x=0}^{x=\frac{h}{\sin \varphi}} [-\rho_F \cdot g \cdot (h - x \cdot \sin \varphi)] \cdot x \cdot dx$$

$$M_F = -\rho_F \cdot g \cdot t \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{h^3}{\sin^2 \varphi} = \underbrace{-\rho_F \cdot g \cdot \frac{h}{2}}_{\text{Druck bei } \frac{h}{2}} \cdot \underbrace{t \cdot \frac{h}{\sin \varphi}}_{\text{Fläche A}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{\sin \varphi}}_{\text{Hebelarm}}$$

Kraft durch Fluiddruck

⇒ der Angriffspunkt der Kraft liegt stets unter dem Schwerpunkt (Skript S.37-38)

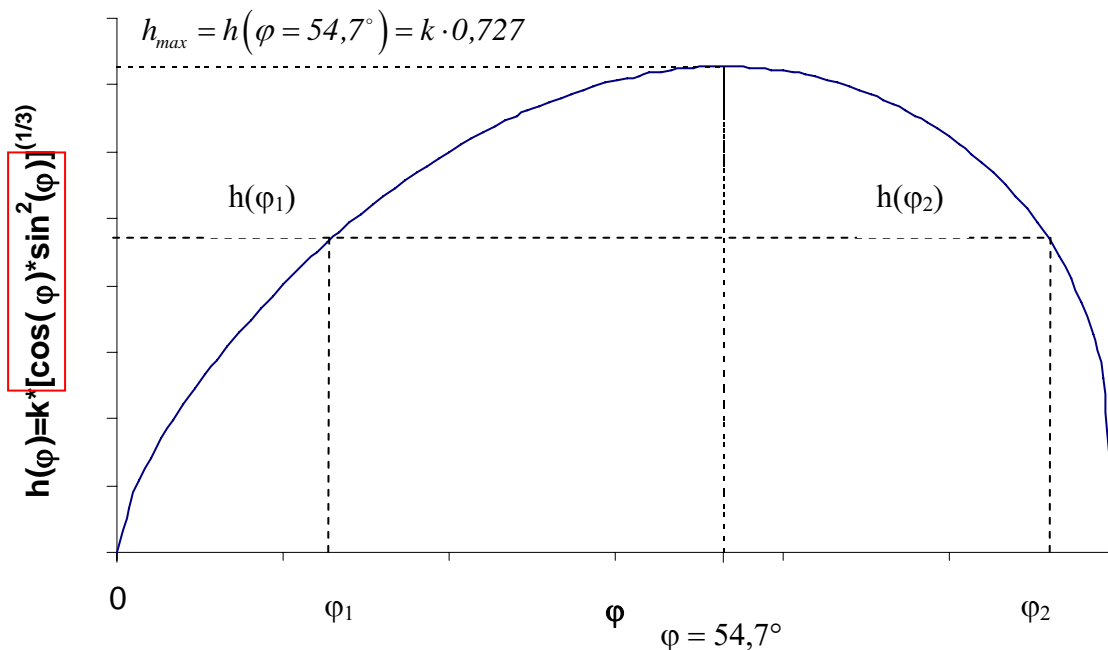
⇒ Die von der Flüssigkeit ausgeübte Kraft ist damit gleich dem Druck im Flächenschwerpunkt multipliziert mit der Fläche

Momentengleichgewicht:

$$M_G + M_F = 0$$

$$\Rightarrow h = h(\varphi) = \sqrt[3]{\frac{\rho_P}{\rho_F} \cdot 3 \cdot l^2 \cdot s \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi} = k \cdot \sqrt[3]{\cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi}$$

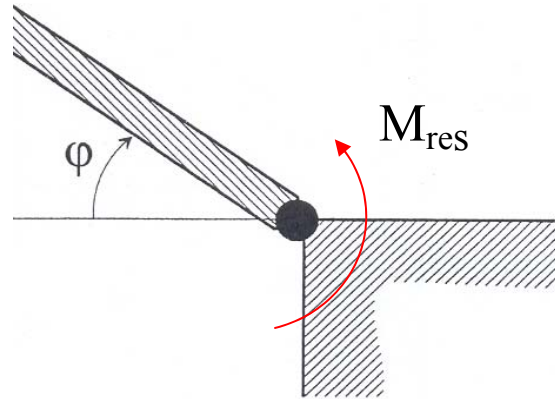
Somit ergeben sich für ein vorgegebenes h immer 2 Lösungen für φ :



Stabilität der Lösungen für φ_1 und φ_2 :

Definition eines resultierenden Momentes M_{res} :

$$M_{res} = M_G + M_F$$



$$M_{res} = \rho_P \cdot g \cdot L^2 \cdot t \cdot s \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi) - \rho_F \cdot g \cdot t \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{h^3}{\sin^2(\varphi)}$$

$$M_{res} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t \cdot \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \cdot \left[\rho_P \cdot L^2 \cdot s \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi) - \frac{1}{3} \cdot \rho_F \cdot h^3 \right] \quad (1.8)$$

Wenn φ_1 aus der Gleichgewichtslage heraus kleiner wird, dann wird $\cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$ kleiner (siehe Abbildung) und $M_{res} < 0$ (1.8). Die Platte dreht in die Gleichgewichtslage für $h(\varphi_1)$ zurück.

Wenn φ_1 aus der Gleichgewichtslage heraus größer wird, dann wird $\cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$ größer (siehe Abbildung) und $M_{res} > 0$ (1.8). Die Platte dreht ebenfalls in die Gleichgewichtslage für $h(\varphi_1)$ zurück.

Das heißt, dass die Gleichgewichtslage für φ_1 stabil ist.

Wenn φ_2 aus der Gleichgewichtslage heraus kleiner wird, dann wird $\cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$ größer (siehe Abbildung) und $M_{res} > 0$ (1.8). Auch hier dreht die Platte in die Gleichgewichtslage für $h(\varphi_1)$ zurück.

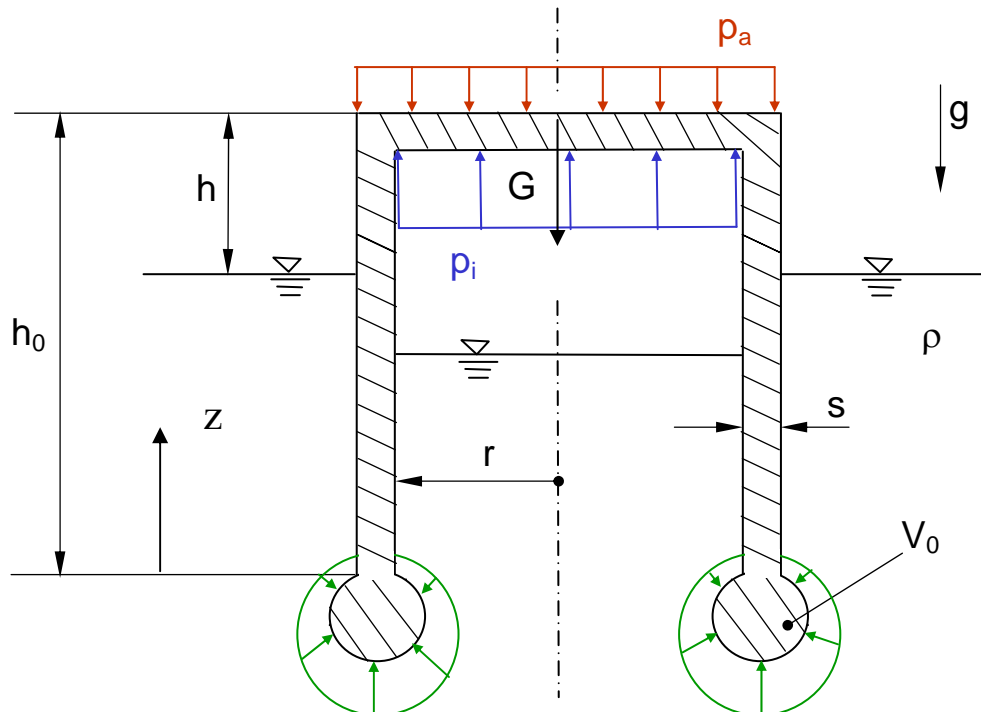
Wenn φ_2 aus der Gleichgewichtslage heraus größer wird, dann wird $\cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$ kleiner (siehe Abbildung) und $M_{res} < 0$. Folglich kippt die Platte um und die Flüssigkeit tritt aus dem Becken aus.

Dies bedeutet, dass die Gleichgewichtslage für φ_2 instabil ist.

Aufgabe 3

Gegeben: $r, s, h_0, G, V_0, \rho, p_i, p_a, g$.

Gesucht: Höhe h als Funktion gegebener Größen



Berechnung der Auftriebskraft des Ringballastes mit Hilfe des Archimedischen Prinzips:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Diagram of a sphere with forces} & = & \text{Diagram of a sphere with forces} & - & \text{Diagram of a sphere with forces} \\
 F_B & = & \text{Auftrieb} & - & \text{Druckkraft}
 \end{array}$$

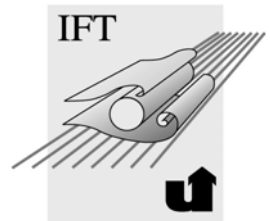
$$F_B = \rho \cdot g \cdot V_0 - \left\{ - \left[p_a + \rho \cdot g \cdot (h_0 - h) \right] \cdot \pi \cdot \left[(r+s)^2 - r^2 \right] \right\}$$

Kräftebilanz:

$$\sum \uparrow = 0 \Leftrightarrow p_i \cdot \pi \cdot r^2 - p_a \cdot \pi \cdot (r+s)^2 + F_B - G = 0$$

$$p_i \cdot \pi \cdot r^2 - p_a \cdot \pi \cdot (r+s)^2 + \rho \cdot g \cdot V_0 + \left[p_a + \rho \cdot g \cdot (h_0 - h) \right] \cdot \pi \cdot \left[(r+s)^2 - r^2 \right] - G = 0$$

$$h = \frac{G - p_i \cdot \pi \cdot r^2 - \rho \cdot g \cdot V_0 + p_a \cdot \pi \cdot r^2 - \rho \cdot g \cdot h_0 \cdot \pi \cdot \left[(r+s)^2 - r^2 \right]}{\rho \cdot g \cdot \pi \cdot \left[(r+s)^2 - r^2 \right]}$$



Übungen im Pflichtfach "Strömungslehre"

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1

An einen großen Wasserbehälter mit freier Oberfläche und konstanter Spiegelhöhe ist eine Rohrleitung vom Durchmesser d angeschlossen, durch die Wasser der Dichte ρ ausströmen kann. Wird ein Diffusor an das Rohrende angeschlossen, so ändern sich die Durchströmverhältnisse.

Außerhalb des Behälters und des Rohrleitungssystems herrscht überall der konstante Außendruck p_a .

Man bestimme unter Voraussetzung stationärer, reibungsfreier Strömung nach der Stromfadentheorie

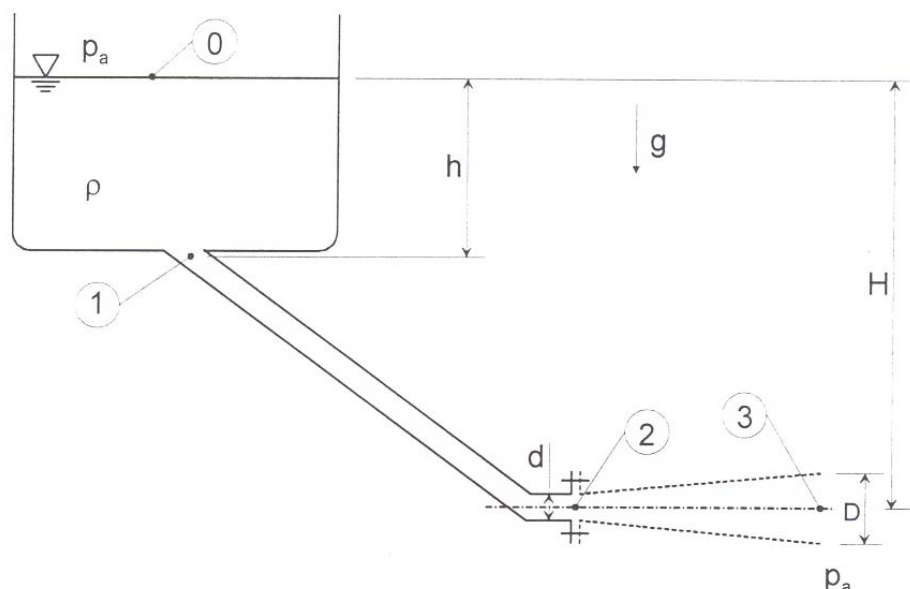
a) ohne Diffusor: die Geschwindigkeit c und den statischen Druck p bei 1 und 2 sowie den Volumenstrom \dot{V} ,

b) mit Diffusor: die Geschwindigkeit c' und den statischen Druck p' in 1, 2 und 3 sowie den Volumenstrom \dot{V} .

c) Man skizziere qualitativ den Verlauf des statischen Druckes und der Geschwindigkeit längs einer Stromlinie von 0 bis 2 bzw. von 0 bis 3.

Gegeben:

h, H, d, g, p_a, ρ, D .



Aufgabe 2

Durch eine Einlaufdüse strömt Luft aus der ruhenden Atmosphäre in ein Kreisrohr vom Durchmesser D . Über eine Wandanbohrung wird der statische Druck im Querschnitt 1 mit Hilfe eines wassergefüllten U-Rohr-Manometers gemessen. Außerdem sind die Temperatur t , der Druck p_a und die Normdichte ρ_N der Atmosphäre bekannt.

Man berechne unter Voraussetzung stationärer, reibungsfreier Strömung die mittlere Geschwindigkeit c_1 in der Düse und den Massenstrom \dot{m} , wobei die Luft als inkompressibel betrachtet wird.

Gegeben:

Meniskendifferenz $\Delta h = 36 \text{ mm}$

Dichte des Wassers $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

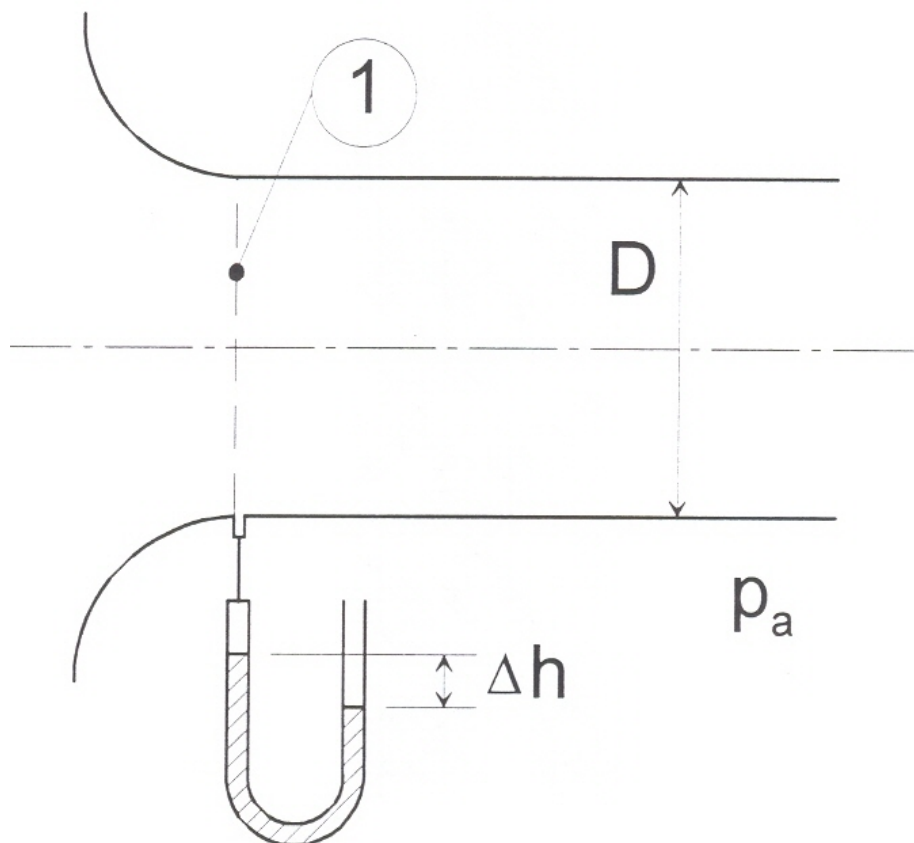
Rohrdurchmesser $D = 100 \text{ mm}$

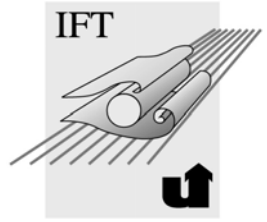
Lufttemperatur $t = 26^\circ\text{C}$

Umgebungsdruck $p_a = 1029 \text{ hPa}$

Normdichte der Luft $\rho_N = 1,293 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
(bei 0°C und 1013 hPa)

Erdschwere $g = 9,807 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

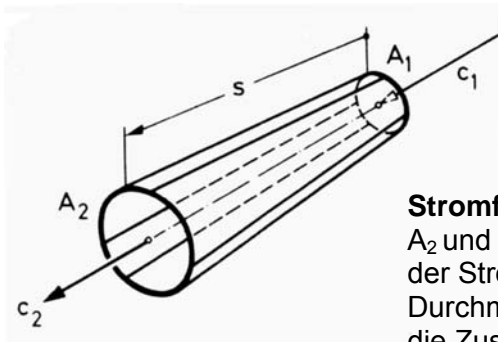




3. Hydro- und Aerodynamik

3.1 Stromfadentheorie

Stromfadentheorie = näherungsweise eindimensionale Untersuchung von zwei- oder dreidimensionalen Strömungen



Stromfaden: Stromlinien beranden die Querschnitte A_1 und A_2 und bilden die sogenannte Stromröhre. Durch den Mantel der Stromröhre erfolgt kein Massendurchtritt. Wird der Durchmesser der Stromröhre solange zusammengezogen, bis die Zustandsgrößen im Querschnitt A_1 oder A_2 durch einen einzigen Wert darstellbar sind (Grenzübergang: $A_1, A_2 \rightarrow 0$), spricht man von einem **Stromfaden**. In einem **Stromfaden** treten in einem Querschnitt (A_1, A_2) jeweils nur ein Wert für p , c , ρ und T unter der Voraussetzung auf, dass die Änderungen dieser Zustandsgrößen in der Querrichtung sehr viel kleiner als in der Längsrichtung ausfallen. Diese Größen hängen dann nur von der Bogenlänge s und gegebenenfalls von der Zeit t ab.

3.1.2 Grundgleichungen der Stromfadentheorie

1. Kontinuitätsgleichung:

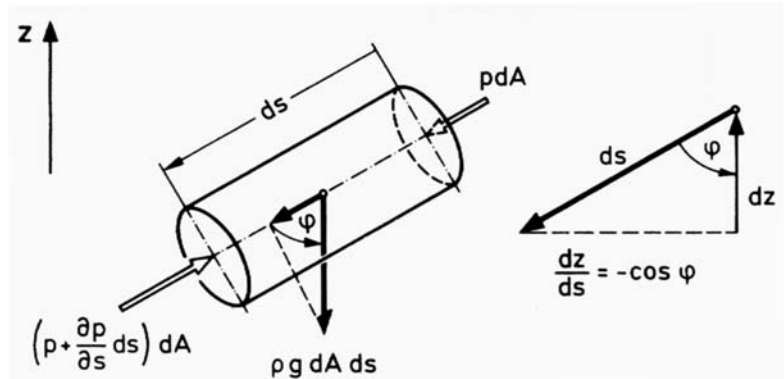
Da die Mantelfläche der Stromröhre aus Stromlinien besteht, kann keine Masse durch diese Mantelfläche austreten. Der Massenstrom durch die Flächen A_1 und A_2 muss gleich sein.

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A_2 = \text{konst.}$$

2a. Kräftegleichgewicht in Richtung des Stromfadens:

Aus dem Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Stromfadenelement in Richtung des Stromfadens folgt die Eulersche Gleichung längs des Stromfadens s

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \cdot \frac{dz}{ds}$$



wobei gilt: $c = c(s, t)$; $p = p(s, t)$; $\rho = \rho(s, t)$

In der Eulerschen Gleichung wird ein ideales Fluid, d.h. ohne Zähigkeit, betrachtet. Somit ist die Reibungsfreiheit der Strömung vorausgesetzt!

Unter der Voraussetzung stationärer Strömung, d.h. $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ und somit $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{d}{ds}$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$c \cdot \frac{dc}{ds} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{ds} + g \cdot \frac{dz}{ds} = 0$$

Integration längs des Stromfadens von 1 \rightarrow 2 unter der Voraussetzung inkompressibler Strömung, d.h. $\rho = \text{konstant}$, ergibt

$$\frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 = \text{konst.}$$

Lösungen zu dem Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

Gegeben:

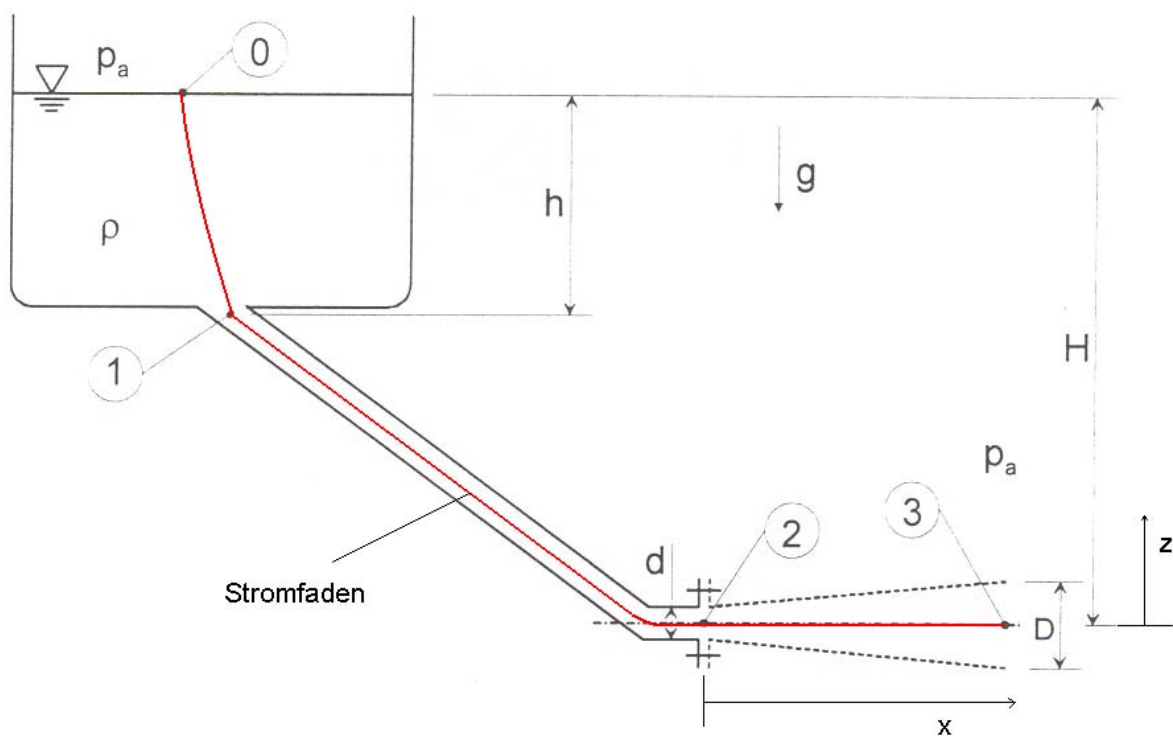
h, H, d, g, p_a, ρ, D

Gesucht:

a) $c_1, c_2, p_1, p_2, \dot{V}$

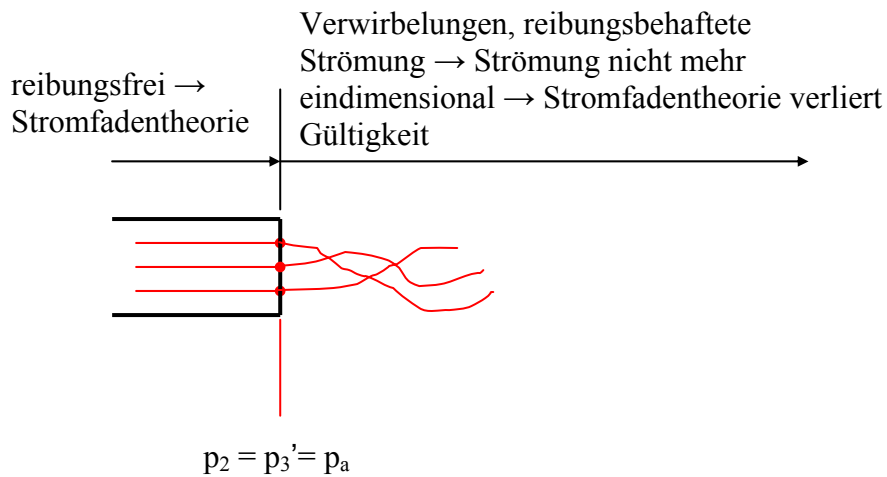
b) $c_1', c_2', c_3', p_1', p_2', p_3', \dot{V}'$

c) Verlauf von c und p bzw. c' und p' durch das System



Begriffe:

- großer Behälter, konstante Spiegelhöhe $\rightarrow c_0 \approx 0$
- freie Oberfläche, konstanter Außendruck $\rightarrow p_0 = p_a$
- Wasser $\rho = \text{konst.}$
- stationär $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$
- reibungsfrei \rightarrow Stromfadentheorie anwenden \rightarrow Bernoulli-Gleichung
- Freistrah, d.h. konstanter Druck der Umgebung p_a wird dem Fluid (hier: Wasser) aufgeprägt $\rightarrow p_2 = p_a$ bzw. $p_3' = p_a$



a) $c_1, c_2, p_1, p_2, \dot{V}$

Bernoulli 0 → 2:

$$\underbrace{p_0}_{p_a} + \rho \cdot g \cdot H + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_0^2}_{=0} = \underbrace{p_2}_{p_a} + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2$$

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (\text{vergleiche Toricellische Formel})$$

Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung):

$$\dot{m} = \text{konst.} \Rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \cancel{\rho}_1 \cdot \underbrace{c_1 \cdot A_1}_{\dot{V}_1} = \cancel{\rho}_2 \cdot \underbrace{c_2 \cdot A_2}_{\dot{V}_2}; \quad \rho = \text{konst.}; \quad A_1 = A_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V} = c_2 \cdot A_2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

Bernoulli 0 → 1:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + \rho \cdot g \cdot (H - h)$$

$$p_1 = p_a + \rho \cdot g \cdot h - \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2$$

$$p_1 = p_a - \underbrace{\rho \cdot g \cdot (H - h)}_{>0} \Rightarrow \underline{\underline{p_1 < p_a}}$$

b) $c_1', c_2', c_3', p_1', p_2', p_3', \dot{V}'$

Bernoulli $0' \rightarrow 3'$:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p_a + \frac{\rho}{2} \cdot c_3'^2$$

$$c_3' = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (\text{Toricelli})$$

$$\dot{V}' = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} > \dot{V} \rightarrow \text{durch Anbringen des Diffusors wird der Volumenstrom erhöht}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{m}_1' = \dot{m}_2' = \dot{m}_3' = \rho_1' \cdot c_1' \cdot A_1 = \rho_2' \cdot c_2' \cdot A_2 = \rho_3' \cdot c_3' \cdot A_3 \quad \rho = \text{konst.}; \quad A_1 = A_2$$

$$\Rightarrow c_1' = c_2' = c_3' \cdot \frac{A_3}{A_1} = \left(\frac{D}{d} \right)^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} > c_1 = c_2 \rightarrow \text{durch Anbringen des Diffusors an gleicher}$$

Position höhere Geschwindigkeit

Bernoulli $0' \rightarrow 1'$:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p_1' + \rho \cdot g \cdot (H - h) + \frac{\rho}{2} \cdot c_1'^2$$

$$\Rightarrow p_1' = p_a + \rho \cdot g \cdot h - \underbrace{\rho \cdot g \cdot H \cdot \left(\frac{D}{d} \right)^4}_{> H}$$

$$\Rightarrow p_1' < p_a \quad ; \quad p_1' < p_1 \rightarrow \text{durch Anbringen des Diffusors an gleicher Position niedrigerer Druck}$$

Bernoulli $0' \rightarrow 2'$:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p_2' + \frac{\rho}{2} \cdot c_2'^2$$

$$p_2' = p_a + \rho \cdot g \cdot H \cdot \left[\underbrace{1 - \left(\frac{D}{d} \right)^4}_{< 0} \right]$$

$$p_2' < p_a \rightarrow \text{durch Anbringen des Diffusors an gleicher Position niedrigerer Druck}$$

c) Verlauf von c und p bzw. c' und p' durch das System

Berechnung des statischen Druckverlaufs und der Geschwindigkeit längs einer Stromlinie von **0** → **1** mittels Bernoulli- und Konti-Gleichung:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p(z) + \underbrace{\frac{\rho}{2} \cdot c(z)^2}_{=0 \text{ (großer Behälter)}} + \rho \cdot g \cdot z$$

$$p(z) = p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z)$$

Berechnung des statischen Druckverlaufs und der Geschwindigkeit längs einer Stromlinie von **1** → **2** mittels Bernoulli- und Konti-Gleichung:

$$p_1 + \rho g (H - h) + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_1^2}_{\rho g H} = p(z) + \underbrace{\frac{\rho}{2} c(z)^2}_{\frac{\rho}{2} c_1^2 = \rho g H} + \rho g z$$

$$p_a - \rho g (H - h) + \rho g (H - h) = p(z) + \rho g z$$

$$p(z) = p_a - \rho g z$$

Berechnung des statischen Druckverlaufs und der Geschwindigkeit längs einer Stromlinie von **0'** → **1'** mittels Bernoulli- und Konti-Gleichung:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p(z) + \underbrace{\frac{\rho}{2} \cdot c(z)^2}_{=0 \text{ (großer Behälter)}} + \rho \cdot g \cdot z$$

$$p(z) = p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z)$$

Berechnung des statischen Druckverlaufs und der Geschwindigkeit längs einer Stromlinie von **1'** → **2'** mittels Bernoulli- und Konti-Gleichung:

$$\underbrace{p_1'}_{p_a + \rho \cdot g \cdot h - \rho \cdot g \cdot H \left(\frac{D^4}{d^4} \right)} + \rho g (H - h) + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_1'^2}_{\rho g H \left(\frac{D^4}{d^4} \right)} = p(z) + \underbrace{\frac{\rho}{2} c(z)^2}_{\frac{\rho}{2} c_1'^2 = \rho g H \left(\frac{D^4}{d^4} \right)} + \rho g z$$

$$p_a + \rho g H \left(1 - \frac{D^4}{d^4} \right) = p(z) + \rho g z$$

$$p(z) = p_a + \rho g H \left(1 - \frac{D^4}{d^4} \right) - \rho g z$$

Berechnung des statischen Druckverlaufs und der Geschwindigkeit längs einer Stromlinie von $2' \rightarrow 3'$:

1. Bernoulli-Gleichung:

$$\underbrace{p_2'}_{p_a + \rho \cdot g \cdot H \cdot \left[1 - \frac{D^4}{d^4}\right]} + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_2'^2}_{\rho g H \left(\frac{D^4}{d^4}\right)} = p(x) + \frac{\rho}{2} c(x)^2$$

$$p_a + \rho g H \left(1 - \frac{D^4}{d^4}\right) + \rho g H \left(\frac{D^4}{d^4}\right) = p(x) + \frac{\rho}{2} c(x)^2$$

$$p(x) = p_a + \rho g H - \frac{\rho}{2} c(x)^2$$

2. Konti-Gleichung:

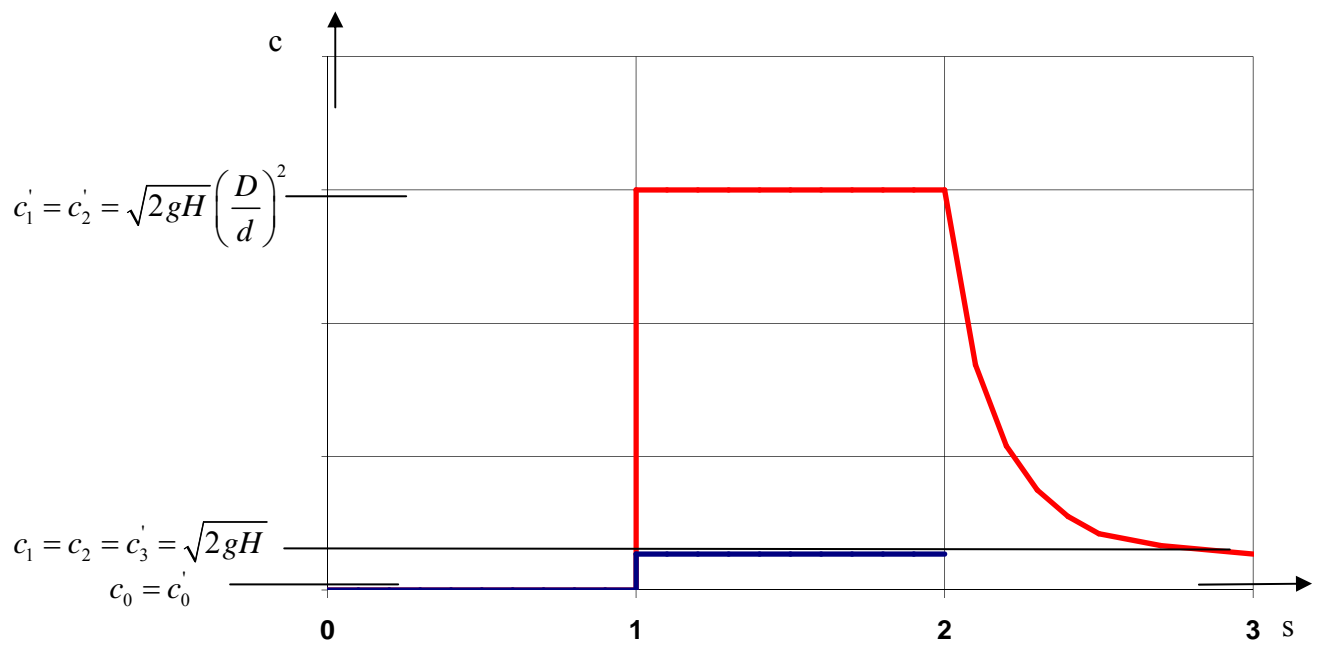
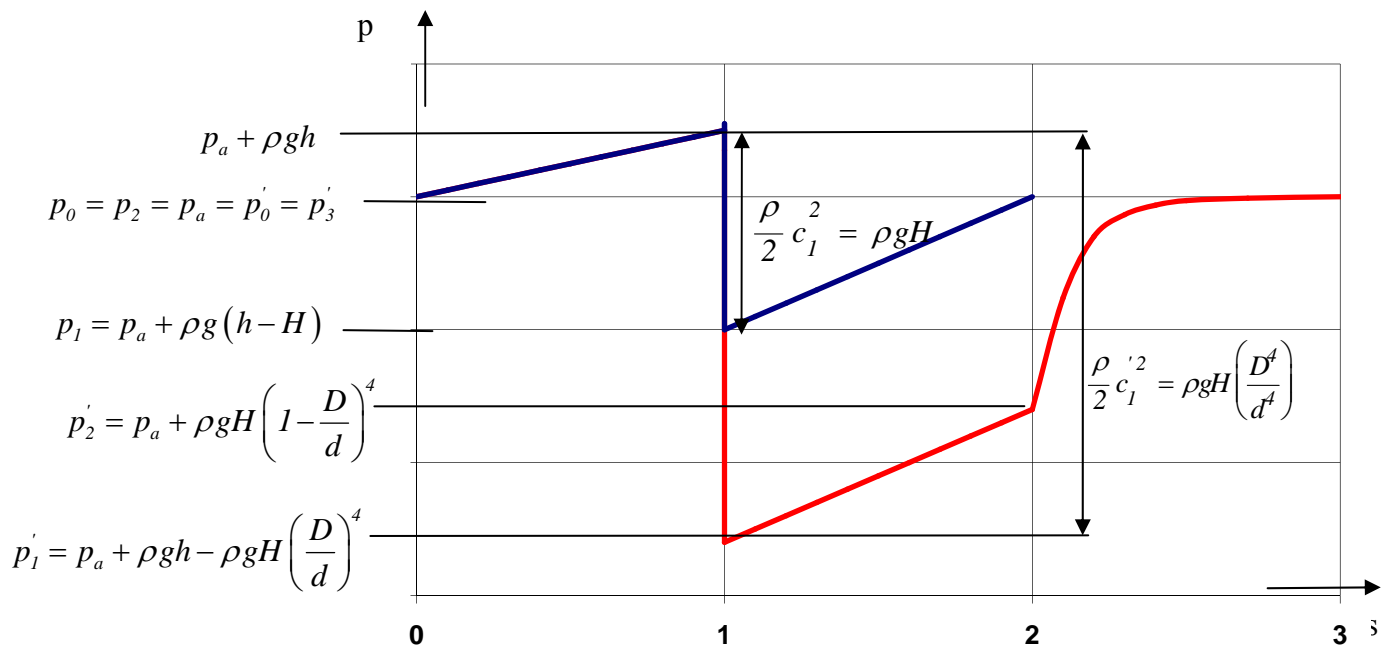
$$\rho \cdot c(x) \cdot \frac{\pi \cdot D(x)^2}{4} = \rho \cdot \underbrace{c_2'}_{\sqrt{2gH} \left(\frac{D^2}{d^2}\right)} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$c(x) \cdot \frac{\pi \cdot D(x)^2}{4} = \sqrt{2gH} \cdot \left(\frac{D^2}{d^2}\right) \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$c(x) = \sqrt{2gH} \cdot \frac{D^2}{D(x)^2}$$

c(x) in p(x) eingesetzt:

$$\Rightarrow p(x) = p_a + \rho g H \cdot \left(1 - \frac{D^4}{D(x)^4}\right)$$



Aufgabe 2

Gegeben:

Meniskendifferenz $\Delta h = 36 \text{ mm}$

Dichte des Wassers $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Rohrdurchmesser $D = 100 \text{ mm}$

Lufttemperatur $t = 26^\circ\text{C}$

Umgebungsdruck $p_a = 1029 \text{ hPa}$

Normdichte der Luft $\rho_N = 1,293 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
(bei 0°C und 1013 hPa)

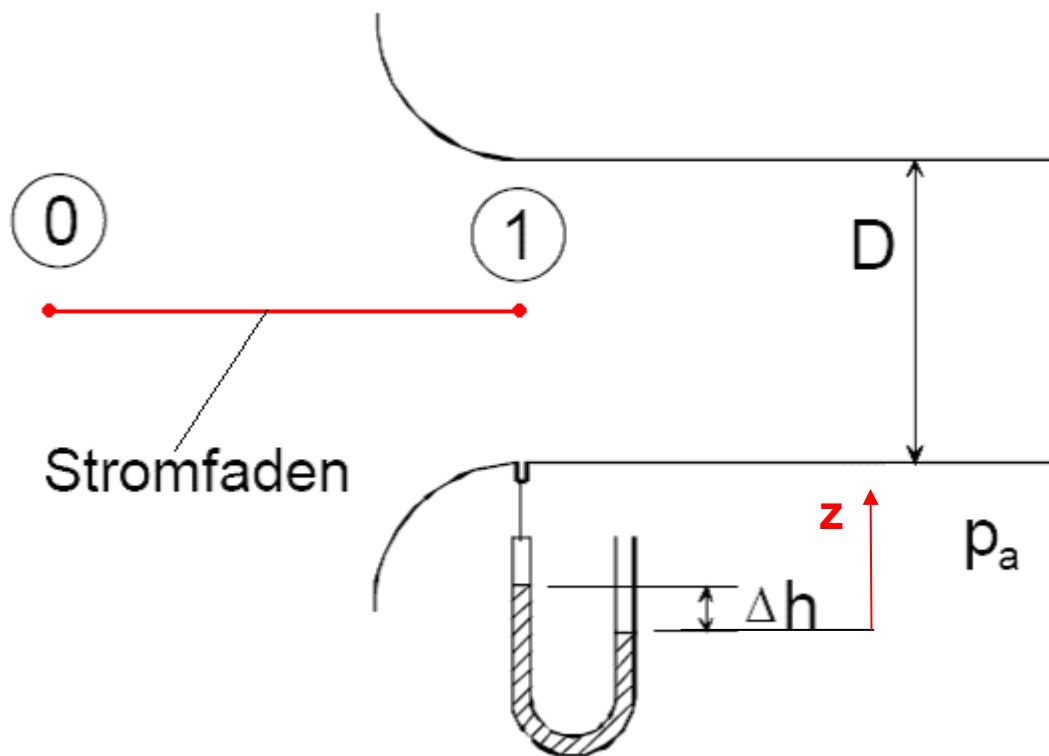
Erdschwere $g = 9,807 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Gesucht:

c_1 und \dot{m}

Vorraussetzungen:

- reibungsfreie Strömung (keine Druckverluste) \rightarrow Stromfadentheorie anwenden \rightarrow Bernoulli-Gleichung
- stationäre Strömung $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Luft darf in der Düse als inkompressibel betrachtet werden, d.h. $\rho_0 = \rho_1$



Bernoulli 0 → 1

mit $c_0 = 0$; $z_0 = z_1$; $\rho_0 = \rho_1$; $p_0 = p_a$

$$p_a = p_1 + \frac{\rho_0}{2} \cdot c_1^2 \quad (1.1)$$

Hydrostatik am U-Rohr-Manometer:

$$p_1 + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot \Delta h = p_a \quad (1.2)$$

mit (1.2) in (1.1)

$$\rho_{H_2O} \cdot g \cdot \Delta h = \frac{\rho_0}{2} \cdot c_1^2 \quad (1.3)$$

ideale Gasgleichung:

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \square \cdot T_0 \Leftrightarrow \frac{p_0}{\rho_0 \cdot T_0} = \square = \frac{p_N}{\rho_N \cdot T_N} \Leftrightarrow \rho_0 = \frac{p_0}{T_0} \cdot \frac{\rho_N \cdot T_N}{p_N} \quad (1.4)$$

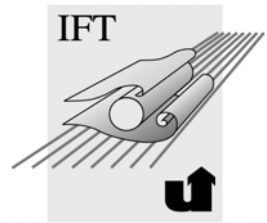
mit (1.4) in (1.3)

$$\begin{aligned} \rho_{H_2O} \cdot g \cdot \Delta h &= \frac{1}{2} \cdot \frac{p_0}{T_0} \cdot \frac{\rho_N \cdot T_N}{p_N} \cdot c_1^2 \\ \Leftrightarrow c_1 &= \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_{H_2O} \cdot g \cdot \Delta h \cdot \underbrace{T_0}_{1013hPa} \cdot \underbrace{p_N}_{1013hPa}}{\underbrace{p_0}_{p_a} \cdot \rho_N \cdot \underbrace{T_N}_{273,15K \square 0^\circ C}}} \\ \Leftrightarrow c_1 &= \underline{\underline{24,26 \frac{m}{s}}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\dot{m} = \rho_0 \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho_0 \cdot c_1 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \quad (1.6)$$

mit (1.4) und (1.5) in (1.6)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{m} = 0,228 \frac{kg}{s}}}$$



Übungen im Pflichtfach "Strömungslehre"

5. Aufgabenblatt

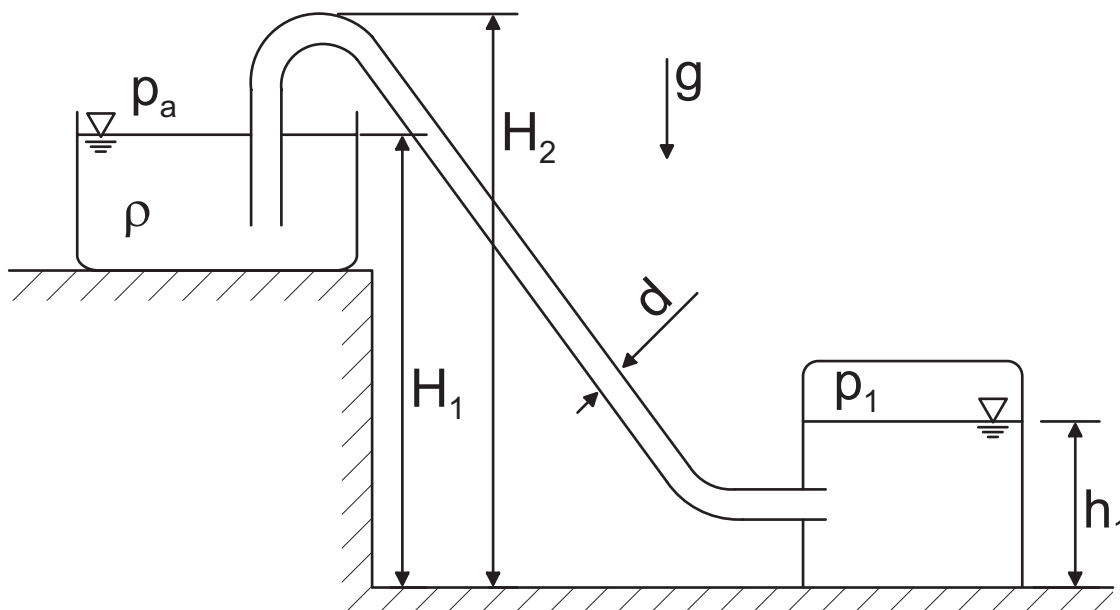
Aufgabe 1

Aus einem großen offenen Behälter mit der Spiegelhöhe H_1 strömt Flüssigkeit durch ein Kreisrohr mit dem konstanten Durchmesser d in einen großen geschlossenen Behälter mit der Spiegelhöhe h_1 und dem Druck p_1 über der Flüssigkeitsoberfläche. Die Niveauhöhen seien in beiden Behältern zeitlich konstant, alle in der Abbildung angegebenen Größen seien bekannt und der Einfluss der Reibung im Rohr sei vernachlässigbar.

- Wie groß ist der Volumenstrom in dem Rohr?
- Wie groß muss p_1 mindestens sein, damit keine Kavitation in der Rohrleitung auftritt (Dampfdruck der Flüssigkeit: $p_D = 5 \cdot 10^{-3}$ bar)?

Gegeben:

$\rho = 960 \text{ kg/m}^3$, $h_1 = 2 \text{ m}$, $H_1 = 10 \text{ m}$, $H_2 = 12 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $p_a = 1,0 \text{ bar}$,
 $p_1 = 1,1 \text{ bar}$, $d = 0,1 \text{ m}$.



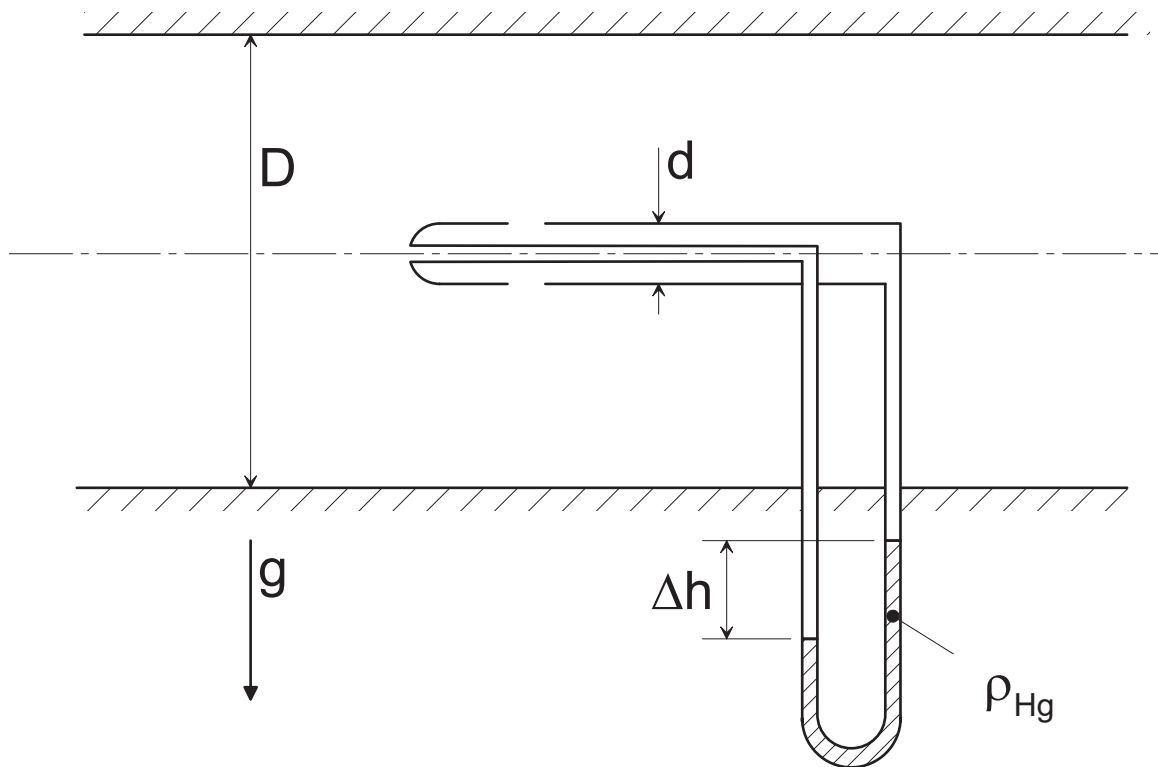
Aufgabe 2

Luft mit der konstanten Dichte ρ strömt durch ein Kreisrohr mit dem konstanten Innendurchmesser D . Mit einem Prandtlrohr (Aussendurchmesser d), das coaxial in das Rohr eingebaut und an ein mit Quecksilber gefülltes U-Rohr angeschlossen ist, wird eine Höhendifferenz Δh gemessen. Der Einfluss der Schwerkraft auf die strömende Luft sei vernachlässigbar, die Strömung sei stationär, reibungsfrei und eindimensional.

Man beachte die Verdrängungswirkung des Prandtlrohres und bestimme mit den gegebenen Größen den Massenstrom \dot{m} durch das Rohr.

Gegeben:

D , d , ρ , Δh , g , ρ_{Hg} .



Aufgabe 3

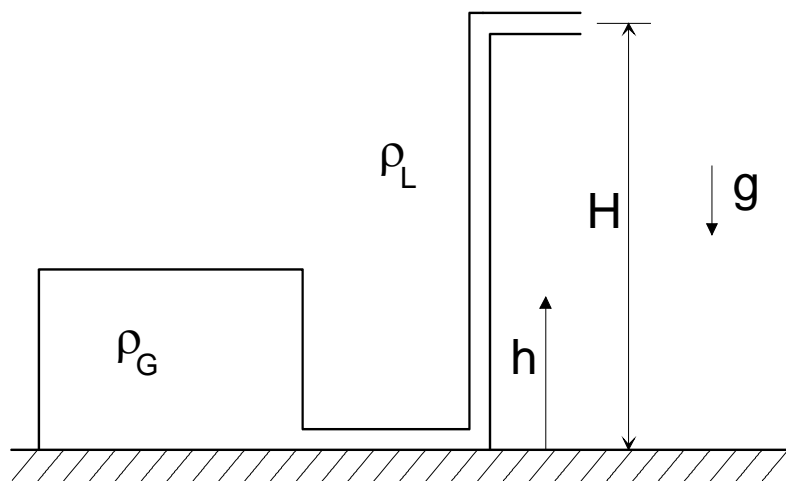
Aus einem großen Kessel strömt Gas mit der Dichte ρ_G durch eine in die Höhe führende Leitung und tritt an deren Ende als Freistrahл in die ruhende atmosphärische Luft mit der Dichte ρ_L aus.

- a) Wie groß muss der Überdruck Δp_0 des ruhenden Gases im Kessel gegen die Atmosphäre in der Höhe $h = 0$ sein, damit die Austrittsgeschwindigkeit w in der Höhe H einen vorgeschriebenen Wert erreicht?
- b) Unter Voraussetzung des zuvor errechneten Überdrucks Δp_0 gebe man an, bei welcher Höhe h gerade kein Gas mehr ausströmt.

Die Strömung ist als reibungsfrei anzusehen. Wegen konstanter Temperatur und der relativ geringen Höhe H können Luft und Gas als inkompressible Medien betrachtet werden.

Gegeben:

$w = 40 \text{ m/s}$, $H = 35 \text{ m}$, $\rho_G = 0,49 \text{ kg/m}^3$, $\rho_L = 1,29 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

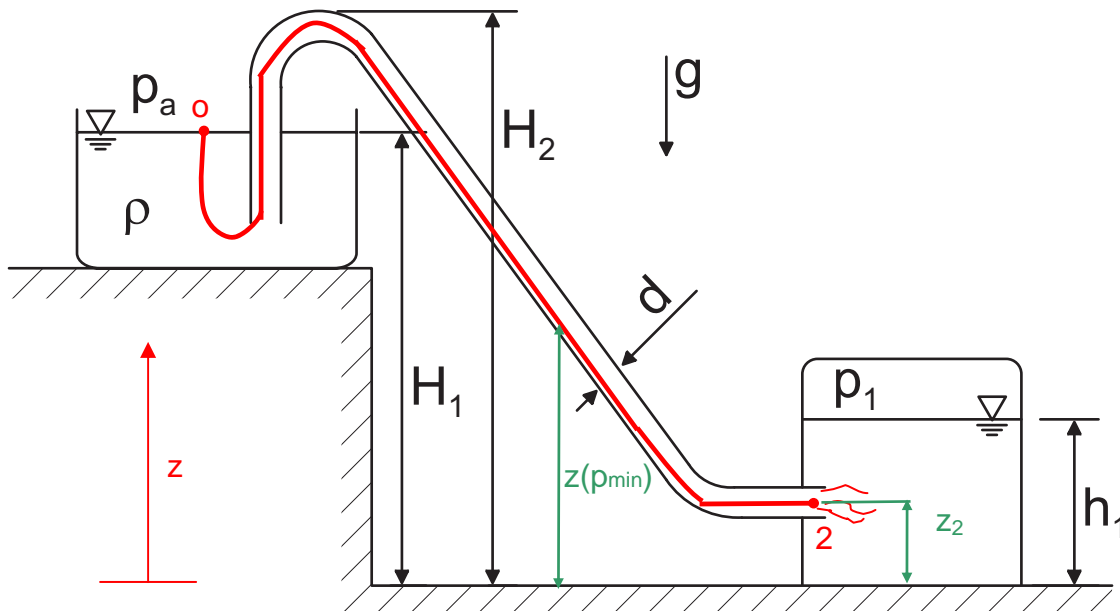


Lösungen zu dem Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

Gegeben: $\rho = 960 \text{ kg/m}^3$, $h_1 = 2 \text{ m}$, $H_1 = 10 \text{ m}$, $H_2 = 12 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $p_a = 1,0 \text{ bar}$, $p_1 = 1,1 \text{ bar}$, $d = 0,1 \text{ m}$.

Gesucht: a) Volumenstrom \dot{V}
b) minimaler Druck p_1 zur Vermeidung von Kavitation in der Rohrleitung



Begriffe:

- große Behälter, konstante Spiegelhöhen $\rightarrow c_0 \approx 0$
- zeitlich konstante Niveauhöhen $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$
- reibungsfreie Strömung im Rohr
- $\rho = \text{konst.}$
- Kavitation („Hohlraumbildung“) ist das Unterschreiten des Dampfdruckes einer Flüssigkeit ($p \leq p_D$) und die damit verbundene Entstehung von Dampfblasen ($V_{\text{Blase}} \approx 10^3 \cdot V_{\text{Flüssigkeit}}$) in einer Flüssigkeit mit anschließender schlagartiger Kondensation ($p \geq p_D$) und Druckspitzen von bis zu 1000 bar, wobei die Rohrwand zerstört wird \Rightarrow Vermeiden von Kavitation, wenn $p_{\min} > p_D$ (kleinster statischer Druck im Rohr muss größer als der Dampfdruck sein)

a) Der Einstörmvorgang in das Rohr kann näherungsweise als reibungsfrei angesehen werden. Der Ausströmvorgang in den Behälter ist stark reibungsbehaftet (Freistrah).

Bernoulli 0 → 2:

$$p_0 + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_0^2}_{=0} + \rho \cdot g \cdot z_0 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 \quad (1.1)$$

p_2 wird aus der Freistrahbedingung bestimmt:

$$p_2 = p_1 + \rho \cdot g \cdot (h_1 - z_2) \quad (1.2)$$

mit (1.2) in (1.1)

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H_1 = p_1 + \rho \cdot g \cdot (h_1 - z_2) + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{(p_a - p_1) \cdot \frac{2}{\rho} + 2 \cdot g \cdot (H_1 - h_1)} \quad (1.3)$$

$$\dot{V} = c_2 \cdot A_2 = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \sqrt{(p_a - p_1) \cdot \frac{2}{\rho} + 2 \cdot g \cdot (H_1 - h_1)}$$

$$\underline{\underline{\dot{V} = 0,0916 \frac{m^3}{s}}}$$

b) Zunächst muss die Stelle in der Rohrleitung $z(p_{\min})$ gefunden werden, an welcher der niedrigste Druck p_{\min} wirkt

Bernoulli 0 → $z(p_{\min})$:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H_1 = p_{\min} + \frac{\rho}{2} c(z(p_{\min}))^2 + \rho \cdot g \cdot z(p_{\min}) \quad (1.4)$$

Kontinuitätsgleichung von $z(p_{\min}) \rightarrow 2$:

$$\rho \cdot c(z(p_{\min})) \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = \rho \cdot c_2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$$

$$c(z(p_{\min})) = c_2 \quad (1.5)$$

mit (1.3) und (1.5) in (1.4) ⇒

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H_1 = p_{\min} + \rho \cdot g \cdot z(p_{\min}) + \rho \cdot g \cdot (H_1 - h_1) + (p_a - p_1)$$

$$p_{\min} = p_1 + \rho \cdot g \cdot (h_1 - z(p_{\min})) \quad (1.6)$$

p_{\min} wird am geringsten, wenn $z(p_{\min})$ am größten wird

$$z(p_{\min}) = H_2 \quad (1.7)$$

mit (1.7) in (1.6)

$$p_{\min} = p_1 + \rho \cdot g \cdot (h_1 - H_2) \quad (1.8)$$

Damit keine Kavitation auftritt, muss aber gelten:

$$p_{\min} > p_D \quad (1.9)$$

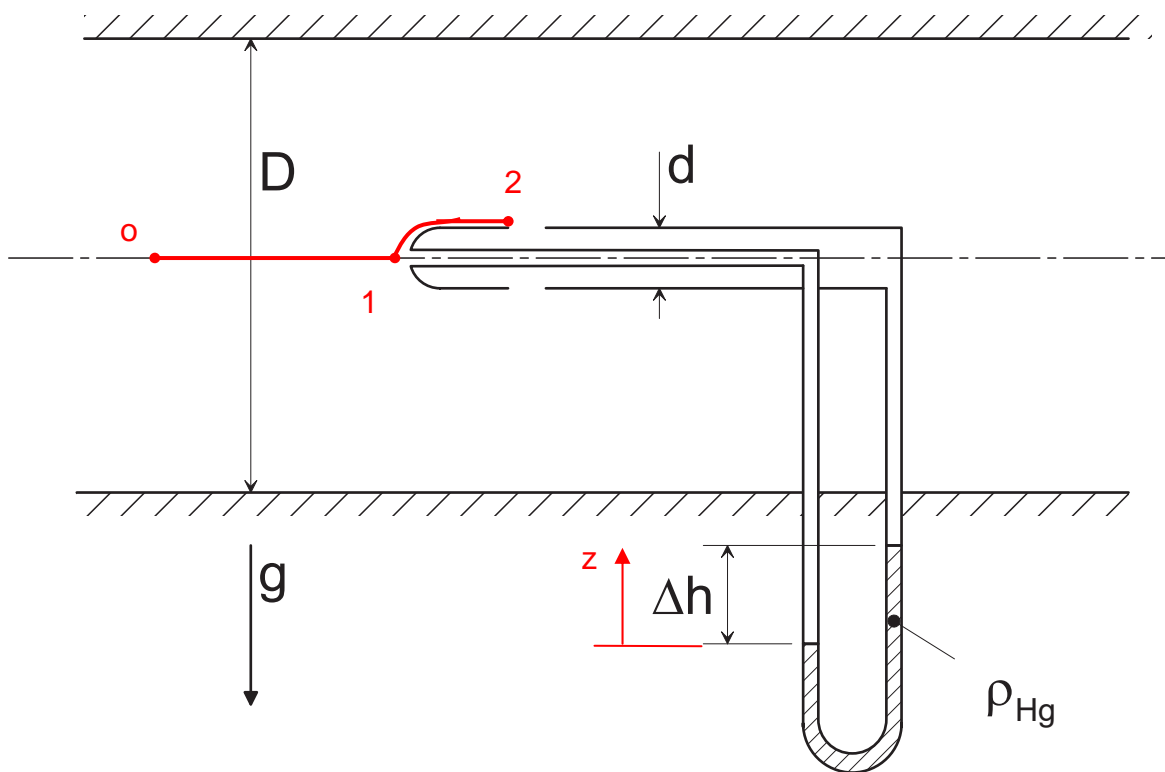
mit (1.8) in (1.9)

$$\begin{aligned} p_1 + \rho \cdot g \cdot (h_1 - H_2) &> p_D \\ \Leftrightarrow p_1 &> p_D + \rho \cdot g \cdot (H_2 - h_1) \\ \underline{\underline{p_1 > 0,94676 \text{ bar}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben: $D, d, \rho, \Delta h, g, \rho_{\text{Hg}}$.

Gesucht: Massenstrom \dot{m} durch das Rohr



Begriffe:

- Strömungsmedium Luft mit $\rho = \text{konst.}$
- Schwerkrafteinfluss auf strömende Luft vernachlässigbar
- stationäre Strömung $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$
- reibungsfreie, eindimensionale Strömung \rightarrow Stromfadentheorie anwenden
 \rightarrow Bernoulli-Gleichung

Bernoulli 1 → 2:

$$p_1 + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_1^2}_{=0, \text{ Staupunkt}} + \underbrace{\cancel{\rho \cdot g \cdot z_1}}_{\text{Gewicht der Luft vernachlässigbar}} = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \underbrace{\cancel{\rho \cdot g \cdot z_2}}_{\text{Gewicht der Luft vernachlässigbar}}$$

$$\Leftrightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} c_2^2 \quad (1.10)$$

Aus der Hydrostatik folgt:

$$p_1 + \underbrace{\cancel{\rho \cdot g \cdot \Delta h}}_{\text{Gewicht der Luft vernachlässigbar}} = p_2 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\Leftrightarrow p_1 - p_2 = \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h \quad (1.11)$$

mit (1.10) = (1.11)

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\rho_{Hg}}{\rho} \cdot g \cdot \Delta h} \quad (1.12)$$

mit

$$\dot{m} = \rho \cdot c_2 \cdot A_2 \quad (1.13)$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \quad (1.14)$$

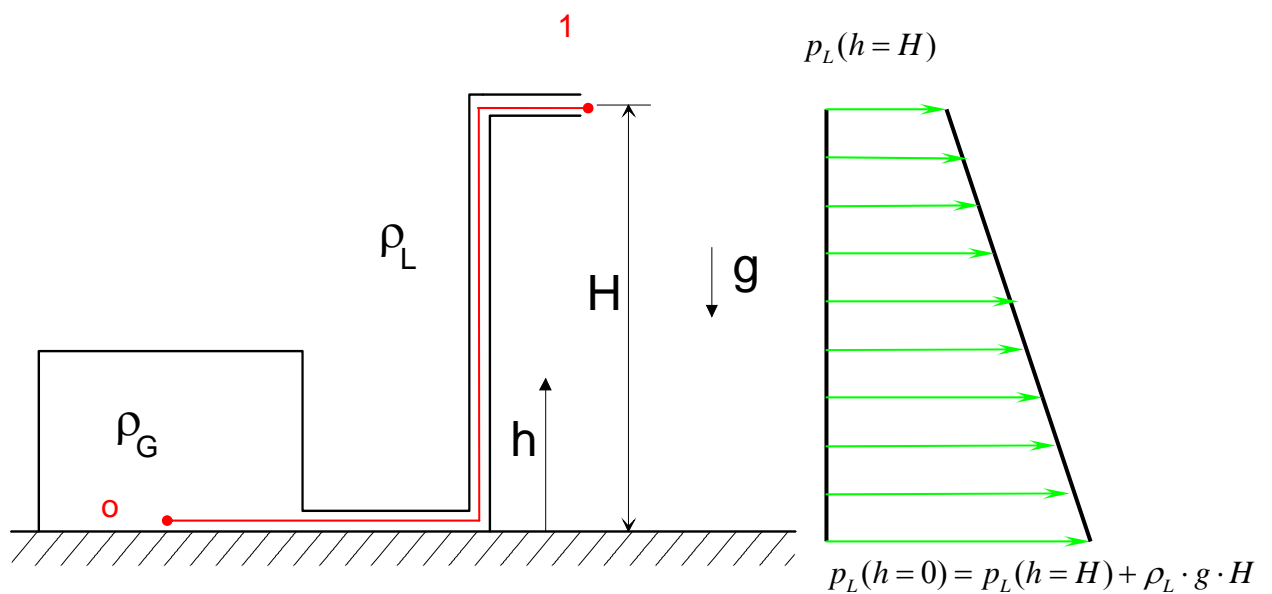
mit (1.12) und (1.14) in (1.13)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{m} = \rho \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\rho_{Hg}}{\rho} \cdot g \cdot \Delta h} \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)}}$$

Aufgabe 3

Gegeben: $w = w(h = H) = 40 \text{ m/s}$, $H = 35 \text{ m}$, $\rho_G = 0,49 \text{ kg/m}^3$, $\rho_L = 1,29 \text{ kg/m}^3$,
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Gesucht: a) $\Delta p_0 = p_G(h = 0) - p_L(h = 0)$ für vorgegebene Austrittsgeschwindigkeit
 $w(h = H) = 40 \text{ m/s}$
 b) $h = H^*$ für $w(h = H^*) = 0$ als Funktion des zuvor errechneten
 Überdrucks Δp_0



Begriffe:

- „großer Kessel“
- Freistrahle am Austritt der Leitung
- vorgegebene Austrittsgeschwindigkeit $w = w(h = H) = 40 \text{ m/s} \Rightarrow$ stationäre Strömung
- $T = \text{konst.}$, geringe Höhendifferenzen \Rightarrow Luft und Gas sind inkompressible Medien $\Rightarrow \rho_L = \text{konst.}$ und $\rho_G = \text{konst.}$
- reibungsfreie Strömung \rightarrow Bernoulli-Gleichung

a) Bernoulli 0 → 1:

$$\begin{aligned}
 p_0 + \frac{\rho_G}{2} c_0^2 + \rho_G \cdot g \cdot h_0 &= p_1 + \frac{\rho_G}{2} c_1^2 + \rho_G \cdot g \cdot h_1 \\
 p_G(h=0) + \underbrace{\frac{\rho_G}{2} \cdot w(h=0)^2 + \rho_G \cdot g \cdot (h=0)}_{=0, \text{ großer Kessel}} &= p_G(h=H) + \frac{\rho_G}{2} w(h=H)^2 + \rho_G \cdot g \cdot (h=H) \\
 p_G(h=0) - p_G(h=H) &= \frac{\rho_G}{2} w(h=H)^2 + \rho_G \cdot g \cdot (h=H)
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Wegen der Freistrahlsbedingung muss folgen:

$$p_G(h=H) = p_L(h=H) \tag{1.16}$$

Aus der Hydrostatik ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 p_L(h=0) &= p_L(h=H) + \rho_L \cdot g \cdot (h=H) \\
 \Leftrightarrow p_L(h=H) &= p_L(h=0) - \rho_L \cdot g \cdot (h=H)
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

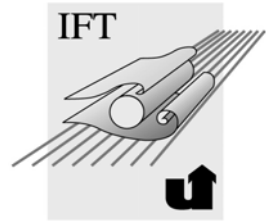
mit (1.17) in (1.16) und (1.16) in (1.15)

$$\begin{aligned}
 p_G(h=0) - (p_L(h=0) - \rho_L \cdot g \cdot (h=H)) &= \frac{\rho_G}{2} w(h=H)^2 + \rho_G \cdot g \cdot (h=H) \\
 \Leftrightarrow \Delta p_0 = p_G(h=0) - p_L(h=0) &= \frac{\rho_G}{2} w(h=H)^2 + (\rho_G - \rho_L) \cdot g \cdot (h=H)
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\underline{\underline{\Delta p_0 = 117,32 \text{ Pa}}}$$

b) Aus (1.18) folgt somit:

$$\begin{aligned}
 \Delta p_0 = 117,32 \text{ Pa} &= \underbrace{\frac{\rho_G}{2} \cdot w(h=H^*)^2}_{=0, \text{ da } w(h=H^*)=0} + (\rho_G - \rho_L) \cdot g \cdot (h=H^*) \\
 \Leftrightarrow H^* &= \frac{\Delta p_0}{g \cdot (\rho_G - \rho_L)} = -14,95 \text{ m}
 \end{aligned}$$



Übungen im Pflichtfach "Strömungslehre"

6. Aufgabenblatt

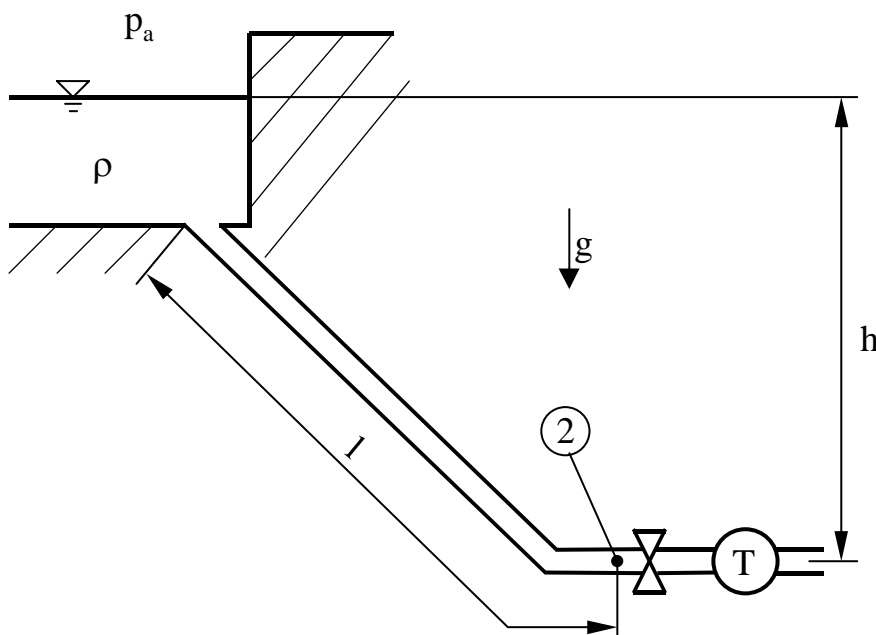
Aufgabe 1

In der Druckleitung eines Wasserkraftwerkes ist unmittelbar vor der Turbine ein Absperrschieber angebracht. Die Leitung hat konstanten Querschnitt und wird reibungsfrei durchströmt. An der Stelle 2 (s. Abb.) sei bei geöffnetem Schieber die Geschwindigkeit c_{20} bekannt. Beim Schließen des Schiebers ändert sich die Geschwindigkeit c_2 gemäß der

Beziehung: $c_2(t) = c_{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(\pi \cdot t / \Delta t))$. Hierbei ist Δt die Schließzeit des Schiebers.

- Man berechne die Druckdifferenz $p_2 - p_a$ bei völlig geöffnetem und völlig geschlossenem Schieber.
- Man berechne den Verlauf der Druckdifferenz $p_2 - p_a$ während des Schließvorganges als Funktion der Zeit.

Gegeben sind: ρ , g , h , l , c_{20} , Δt



Zahlenbeispiel:

$h=1770\text{m}$, $c_{20}=2,0\text{m/s}$, $l=3540\text{m}$, $g=9,81\text{m/s}^2$, $\rho=10^3\text{kg/m}^3$,

$\Delta t=3\text{s}$, 5s , 10s

Aufgabe 2

Aus einem großen Becken strömt Wasser (Dichte ρ) stationär durch einen Verbindungskanal mit dem Endquerschnitt A_2 und tritt bei 2 als Freistrahlin in ein zweites Becken ein. Über den beiden Wasserspiegeln herrsche der Druck p_a , die Spiegelhöhe H und h seien konstant. Die Strömung durch den Kanal bis 2 ist als eindimensional und reibungsfrei anzusehen.

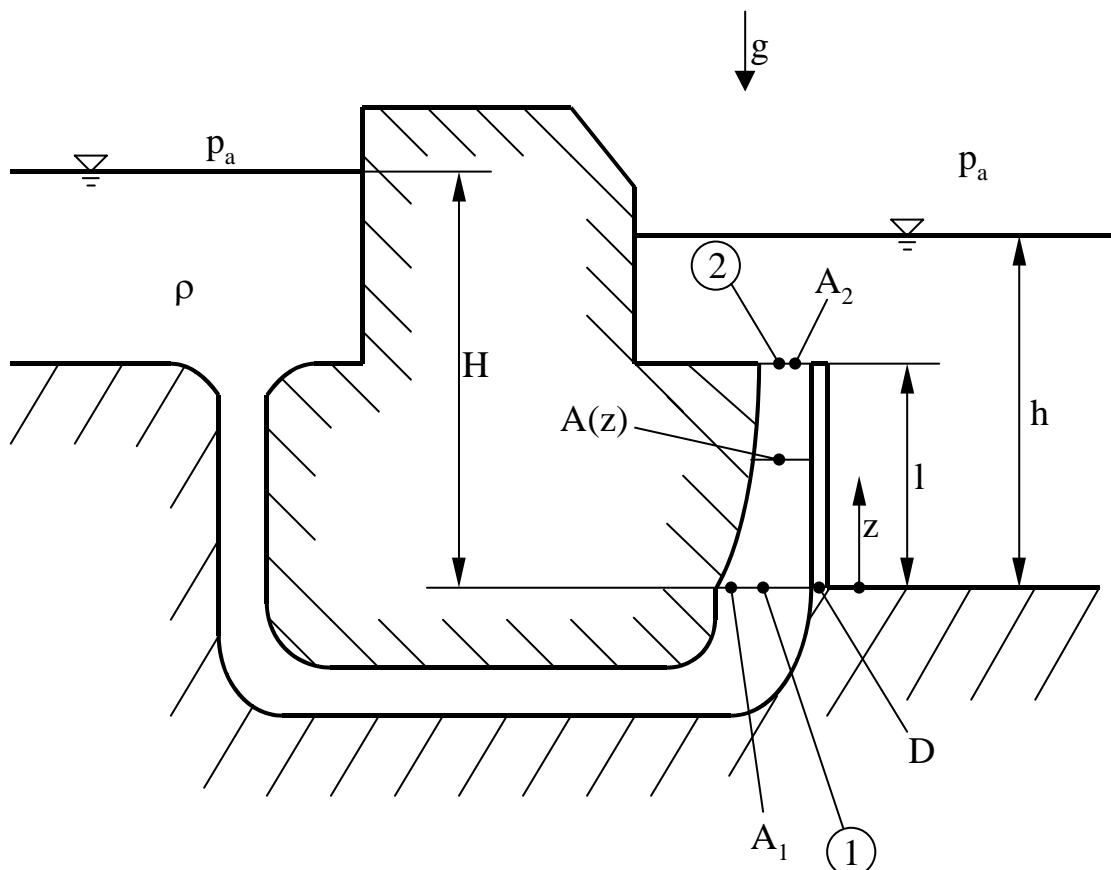
- a) Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen die Geschwindigkeit c_1 im Querschnitt A_1 .
- b) Im Bereich zwischen 1 und 2 ist der Verlauf des rechteckförmigen Kanalquerschnittes gegeben durch:

$$\frac{A(z)}{A_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \cdot \frac{z}{l}}}$$

Man bestimme den Verlauf des statischen Druckes $p(z)$ zwischen 1 und 2. Hierbei ist die Geschwindigkeit c_1 als gegeben anzusehen.

- c) Im Bereich 1 bis 2 wird die rechte Wand des Kanals durch eine vertikal stehende ebene Platte der Länge l und der Breite b senkrecht zur Zeichenebene gebildet, die im Punkt D fest eingespannt ist. Man bestimme das Gesamtmoment M_{ges} bezüglich D, das die Platte durch Flüssigkeitsdruck auf ihre linke und rechte Seite erfährt. Hierbei ist vorausgesetzt, daß das Wasser rechts der Platte in Ruhe ist.

Gegeben sind: ρ , H , h , p_a , A_1 , A_2 , α , l , b , g .



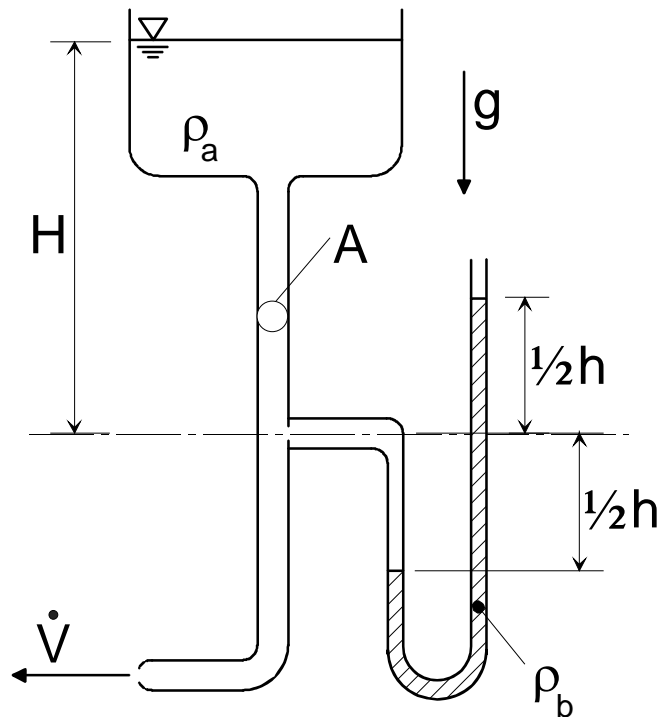
Aufgabe 3

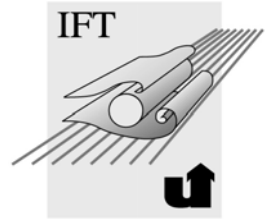
Aus einem großen Behälter mit konstanter Spiegelhöhe strömt eine Flüssigkeit der Dichte ρ_a reibungsfrei über ein Fallrohr aus. Der Volumenstrom \dot{V} ist durch eine Austrittsdüse mit verstellbarem Querschnitt zu regeln. An das Fallrohr mit der Querschnittsfläche A ist ein U-Rohr angeschlossen, das mit Flüssigkeit der Dichte ρ_b gefüllt ist ($\rho_b > \rho_a$).

- a) Wie groß ist der Höhenunterschied h_0 der Menisken im U-Rohr bei geschlossener Austrittsdüse ($\dot{V} = 0$)?
- b) Man gebe den Volumenstrom \dot{V} als Funktion der Meniskenverschiebung $\Delta h = h_0 - h$ an.

Gegeben:

H, A, ρ_a, ρ_b, g .

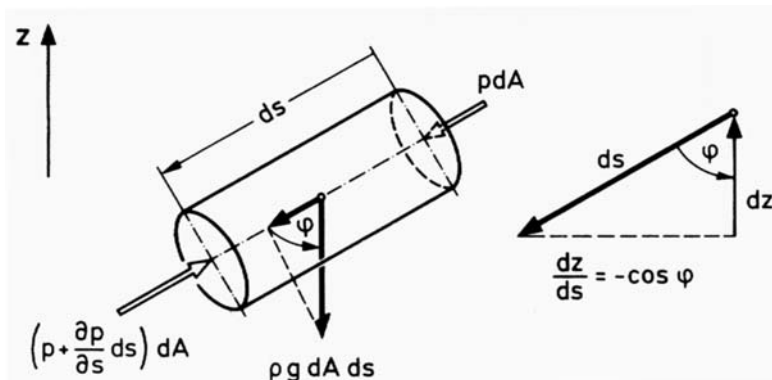




Lösungen zu dem Aufgabenblatt 6

3.1.2 Grundgleichungen der Stromfadentheorie

2a. Kräftegleichgewicht in Richtung des Stromfadens:



Aus dem Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Stromfadenelement in Richtung des Stromfadens folgt die Eulersche Gleichung längs des Stromfadens s :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + g \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

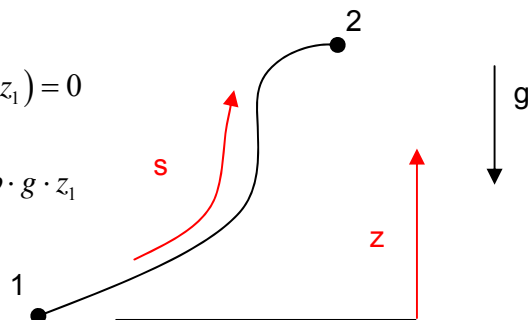
wobei gilt: $c = c(s, t)$; $p = p(s, t)$; $\rho = \rho(s, t)$

In der Eulerschen Gleichung wird ein ideales Fluid, d.h. ohne Zähigkeit, betrachtet. **Somit ist die Reibungsfreiheit der Strömung vorausgesetzt!**

Unter der Voraussetzung inkompressibler Strömung, d.h. $\rho = \text{konstant}$, liefert Integration dieser Gleichung entlang des Stromfadens bei festem t von einem beliebigem Punkt 1 \rightarrow 2 die instationäre Bernoulli-Gleichung:

$$\rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds + \frac{\rho}{2} \cdot (c_2^2 - c_1^2) + (p_2 - p_1) + \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) = 0$$

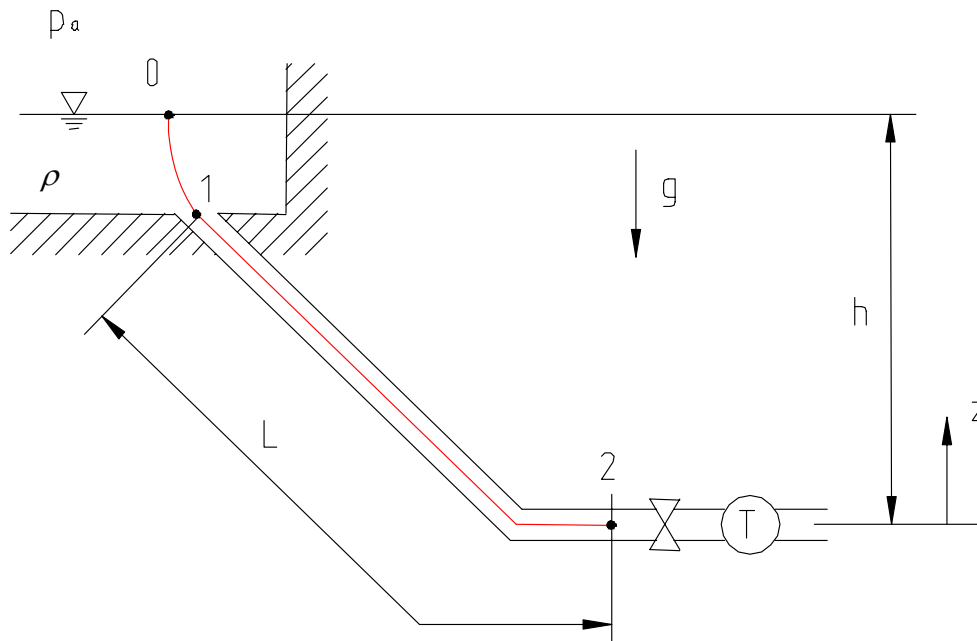
$$\rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 = \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1$$



Aufgabe 1

Gegeben: $\rho, g, h, l, c_{20}, \Delta t$

Gesucht: a) Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_a$ bei völlig geöffnetem bzw. geschlossenem Schieber
b) Verlauf der Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_a$ während des Schließvorganges als Funktion der Zeit



Begriffe:

- reibungsfreie Durchströmung der Leitung \Rightarrow Stromfadentheorie (Bernoulli-Gl.)
- $\rho = \text{konst.}$ (inkompressible Strömung)
- großer Behälter (aus Zeichnung) $\Rightarrow c_0 = 0$

a) Die Strömung ist jeweils stationär: $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$

Bernoulli von 0 \rightarrow 2:

$$\underbrace{p_0}_{p_a} + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_0^2}_{=0} + \rho \cdot g \cdot \underbrace{z_0}_{=h} = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \underbrace{\rho \cdot g \cdot z_2}_{=0}$$

$$\Delta p = p_2 - p_a = \rho \cdot g \cdot h - \frac{\rho}{2} \cdot c_{20}^2 \quad (\text{völlig geöffneter Schieber})$$

$$\Delta p = p_2 - p_a = \rho \cdot g \cdot h \quad (\text{völlig geschlossener Schieber, Hydrostatik})$$

b) Die Strömung ist jeweils instationär: $\frac{\partial c}{\partial t} \neq 0$, $c_2(t) = c_{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(\pi \cdot t / \Delta t))$

Bernoulli von 0 \rightarrow 2:

$$\rho \int_0^2 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2(t) + p_2(t) + \underbrace{\rho \cdot g \cdot z_2}_{=0} = p_a + \rho \cdot g \cdot h$$

$$\text{mit } \rho \int_0^2 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds = \underbrace{\rho \int_0^1 \frac{\partial c}{\partial t} ds}_{\substack{\text{da im "großen Behälter"} \\ c \approx c_0 \approx 0 \text{ gilt, ist } \frac{\partial c}{\partial t} = 0}} + \underbrace{\rho \int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t} ds}_{\substack{\text{da in der Leitung der} \\ \text{Querschnitt konst. ist,} \\ \text{ergibt die Konti-Gl.} \\ c=c(t) \neq c(s)}}$$

$$\text{mit } \rho \int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds = \rho \int_1^2 \frac{dc}{dt} \cdot ds = \rho \cdot \frac{dc}{dt} \cdot \int_1^2 ds = \rho \cdot \frac{dc}{dt} \cdot l = \rho \cdot \underbrace{\frac{d c_2(t)}{dt}}_{\substack{\text{wegen Konti-Gl.}}} \cdot l = -\rho \cdot \frac{c_{20}}{2} \cdot \frac{\pi}{\Delta t} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{\Delta t}\right) \cdot l$$

Für die instationäre Bernoulli-Gleichung von 0 \rightarrow 2 folgt damit:

$$-\rho \frac{c_{20}}{2} \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Delta t} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{\Delta t}\right) + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{c_{20}^2}{4} \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{\Delta t}\right)\right)^2 + p_2(t) = p_a + \rho \cdot g \cdot h$$

$$\Delta p = p_2(t) - p_a = \rho \cdot \frac{c_{20} \cdot l \cdot \pi}{2 \cdot \Delta t} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{\Delta t}\right) - \frac{\rho}{8} \cdot c_{20}^2 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{\Delta t}\right)\right)^2 + \rho \cdot g \cdot h$$

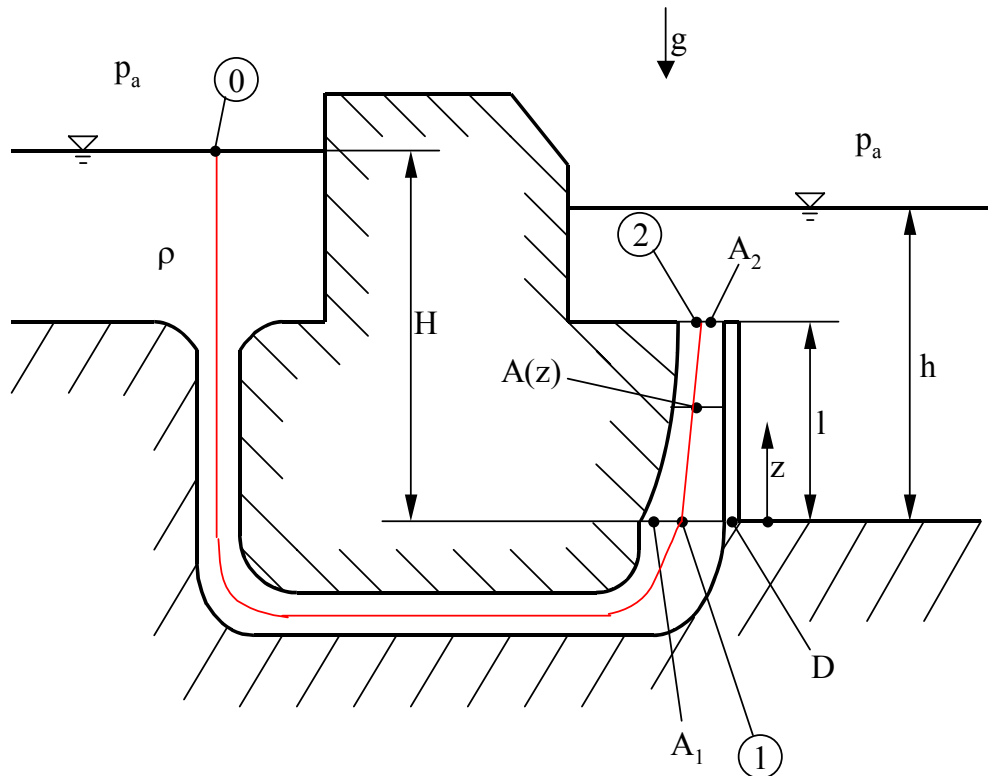
Aufgabe 2

Gegeben: $\rho, H, h, p_a, A_1, A_2, \alpha, l, b, g$

Gesucht: a) Geschwindigkeit c_1 im Querschnitt A_1

b) Verlauf des statischen Druckes $p(z)$ zwischen 1 und 2 für gegebenes c_1

c) Gesamtmoment M_{ges} bezüglich D, das die Platte durch Flüssigkeitsdruck auf ihre linke und rechte Seite erfährt.



Begriffe:

- eindimensionale und reibungsfreie Strömung durch den Kanal bis ②
 \Rightarrow Stromfadentheorie (Bernoulli-Gl.)
- stationäre Strömung
- großes Becken, Spiegelhöhen konstant $\Rightarrow c_0 = 0$
- Wasser, $\rho = \text{konst.}$
- Freistrahл bei ②

a) Bernoulli von 0 \rightarrow 2:

$$p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot c_0^2 + \rho \cdot g \cdot z_0 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

$$\Leftrightarrow p_a + \rho \cdot g \cdot H = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \rho \cdot g \cdot l$$

Freistrahle bei 2:

$$p_2 = p_a + \rho \cdot g \cdot (h - l)$$

eingesetzt in die Bernoulli-Gl.:

$$\begin{aligned} p_a + \rho \cdot g \cdot H &= p_a + \rho \cdot g \cdot (h - l) + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \rho \cdot g \cdot l \\ \Leftrightarrow c_2 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)} \end{aligned}$$

Konti.-Gleichung:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_1 \cdot A_1 &= \rho \cdot c_2 \cdot A_2 \Leftrightarrow c_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot c_2 \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{A_2}{A_1} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)} \end{aligned}$$

b) Bernoulli von $0 \rightarrow z$ (beliebige Stelle zwischen 1 und 2):

$$\begin{aligned} p_a + \rho \cdot g \cdot H &= p(z) + \frac{\rho}{2} \cdot c^2(z) + \rho \cdot g \cdot z \\ \Leftrightarrow p(z) &= p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z) - \frac{\rho}{2} \cdot c^2(z) \end{aligned}$$

Konti-Gleichung:

$$\rho \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho \cdot c(z) \cdot A(z) \Leftrightarrow c(z) = c_1 \cdot \frac{A_1}{A(z)}$$

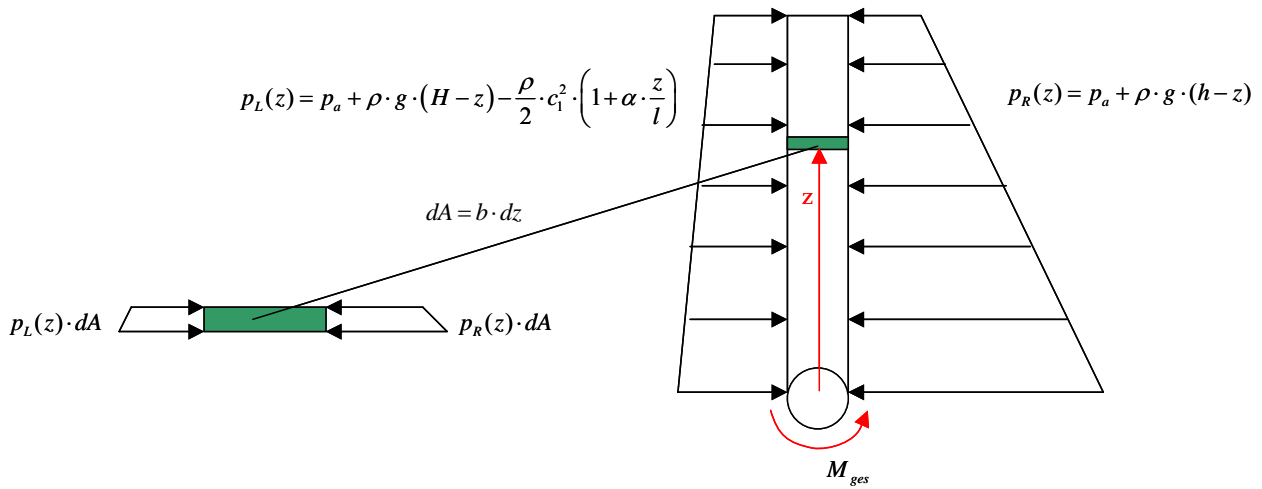
eingesetzt in die Bernoulli-Gl.:

$$p(z) = p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z) - \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \left(\frac{A_1}{A(z)} \right)^2$$

$$\text{mit } \frac{A(z)}{A_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \cdot \frac{z}{l}}}$$

$$\Rightarrow p(z) = p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z) - \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{z}{l} \right) = p_L(z)$$

c) Berechnung des Gesamtmoments M_{ges} bezüglich D



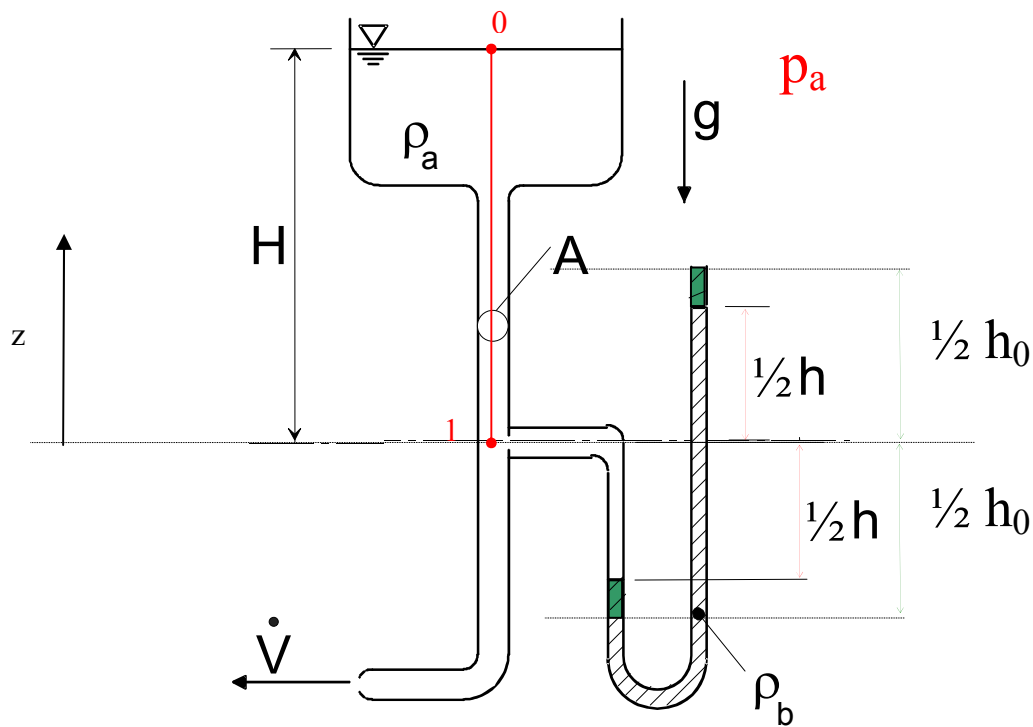
$$\begin{aligned}
 dM_{\text{ges}} &= p_R(z) \cdot dA \cdot z - p_L(z) \cdot dA \cdot z \\
 &= \left[p_a + \rho \cdot g \cdot (h - z) \right] \cdot b \cdot dz \cdot z - \left[p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z) - \frac{\rho}{2} c_1^2 \cdot \left(1 + \alpha \frac{z}{l}\right) \right] \cdot b \cdot dz \cdot z \\
 &= b \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot z \cdot dz - b \cdot \rho \cdot g \cdot H \cdot z \cdot dz + \frac{\rho}{2} c_1^2 \cdot b \cdot z \cdot dz + \frac{\rho}{2} c_1^2 \cdot \frac{\alpha \cdot b}{l} \cdot z^2 \cdot dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\text{ges}} &= \int_0^l dM_{\text{ges}} \\
 &= \left[b \cdot \rho \cdot g \cdot (h - H) \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot b \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \frac{\alpha \cdot b}{l} \cdot \frac{z^3}{3} \right]_0^l \\
 &= b \cdot \rho \cdot g \cdot (h - H) \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot b \cdot \left(\frac{l^2}{2} + \alpha \cdot \frac{l^2}{3} \right)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben: H, A, ρ_a, ρ_b, g

Gesucht: a) Höhenunterschied h_0 der Menisken im U-Rohr bei geschlossener Austrittsdüse ($\dot{V} = 0$)
b) Volumenstrom \dot{V} als Funktion der Meniskenverschiebung $\Delta h = h_0 - h$



Begriffe:

- großer Behälter mit konstanter Spiegelhöhe $\Rightarrow c_0 = 0$
- inkompressible Flüssigkeiten der Dichten ρ_a und ρ_b
- reibungsfreie Strömung \Rightarrow Stromfadentheorie (Bernoulli-Gl.)
- zeitlich konstanter Volumenstrom $\dot{V} \Rightarrow$ stationäre Strömung

a) Druckgleichgewicht am U-Rohr bei geschlossener Austrittsdüse, Hydrostatik:

$$p_a + \rho_a \cdot g \cdot \left(H + \frac{h_0}{2} \right) = p_a + \rho_b \cdot g \cdot h_0$$

$$\Rightarrow h_0 = \frac{H}{\frac{\rho_b}{\rho_a} - \frac{1}{2}}$$

b) Druckgleichgewicht am U-Rohr bei offener Austrittsdüse, Hydrodynamik:

$$p_1 + \rho_a \cdot g \cdot \frac{h}{2} = p_a + \rho_b \cdot g \cdot h \quad (1.1)$$

$$\Leftrightarrow p_1 = p_a + \rho_b \cdot g \cdot h - \rho_a \cdot g \cdot \frac{h}{2} \quad (1.2)$$

Bestimmung von p_1 aus Bernoulli-Gleichung von $0 \rightarrow 1$:

$$p_a + \rho_a \cdot g \cdot H = p_1 + \frac{\rho_a}{2} c_1^2 \quad (1.3)$$

mit (1.2) in (1.3)

$$\begin{aligned} p_a + \rho_a \cdot g \cdot H &= p_a + \rho_b \cdot g \cdot h - \rho_a \cdot g \cdot \frac{h}{2} + \frac{\rho_a}{2} c_1^2 \\ \Rightarrow c_1 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot \left[H - h \cdot \left(\frac{\rho_b}{\rho_a} - \frac{1}{2} \right) \right]} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Bestimmung des Volumenstroms \dot{V} :

$$\dot{V} = c_1 \cdot A = \sqrt{2 \cdot g \cdot \left[H - h \cdot \left(\frac{\rho_b}{\rho_a} - \frac{1}{2} \right) \right]} \cdot A \quad (1.5)$$

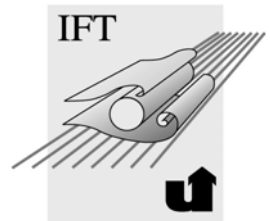
Volumenstrom \dot{V} als Funktion der Meniskenverschiebung $\Delta h = h_0 - h$:

aus Aufgabenteil a)

$$H = h_0 \cdot \left(\frac{\rho_b}{\rho_a} - \frac{1}{2} \right) \quad (1.6)$$

mit (1.6) in (1.5)

$$\dot{V} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_b}{\rho_a} - \frac{1}{2} \right) \cdot \underbrace{(h_0 - h)}_{\Delta h}} \cdot A$$



Übungen im Pflichtfach "Strömungslehre"

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1

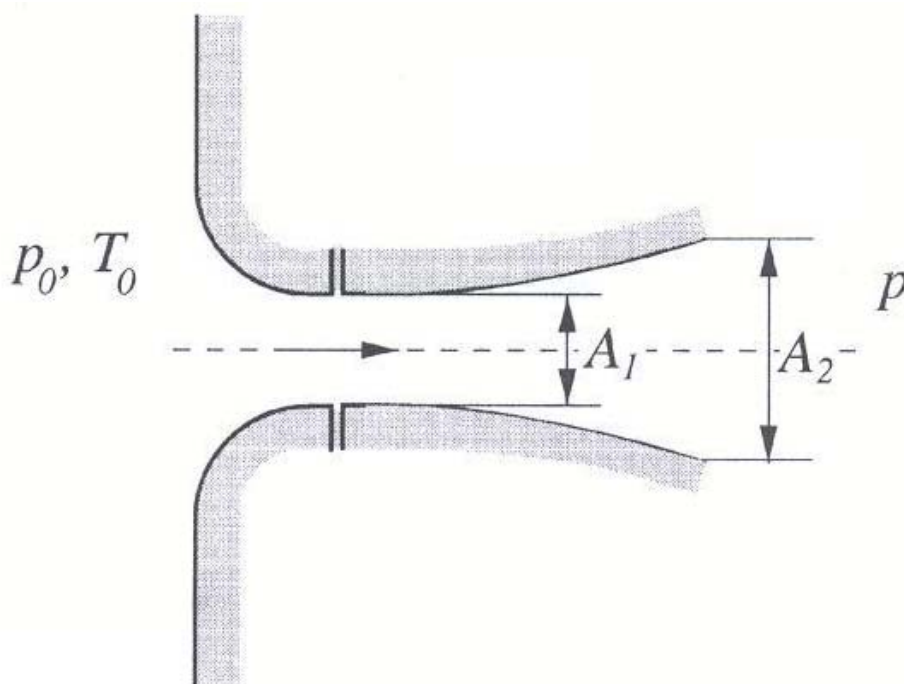
Ein großer Druckluftkessel (Kesseldruck p_0 , Kesseltemperatur T_0) besitzt eine Ablassöffnung mit dem Querschnitt A_1 und einem Erweiterungsstück mit dem Austrittsquerschnitt A_2 . Wie groß ist bei einem Außendruck p die sekundlich ausströmende Masse.

a) für inkompressible Strömung (mit der Luftdichte des Kesselzustand),

b) für kompressible Strömung?

Gegeben sind:

$$T_0, p_0, p, A_1, A_2, \text{IR}, \kappa, \frac{c^*}{c_{\max}}.$$



Aufgabe 2

In einem kreiszylindrischen Behälter (Durchmesser D) befindet sich ein ideales Gas (spezifische Gaskonstante IR ; κ =Verhältnis der konstanten spezifischen Wärmen), das durch das Gewicht G eines völlig abdichtenden Kolbens auf den Druck p_{i1} komprimiert ist. Die zugehörige Gastemperatur T_{i1} sei gegeben. Durch eine kleine Düse mit dem Austrittsquerschnitt A_2 im Boden des Behälters strömt das Gas stationär in die Umgebung mit dem Druck $p_a=0$ aus (s. Abb.).

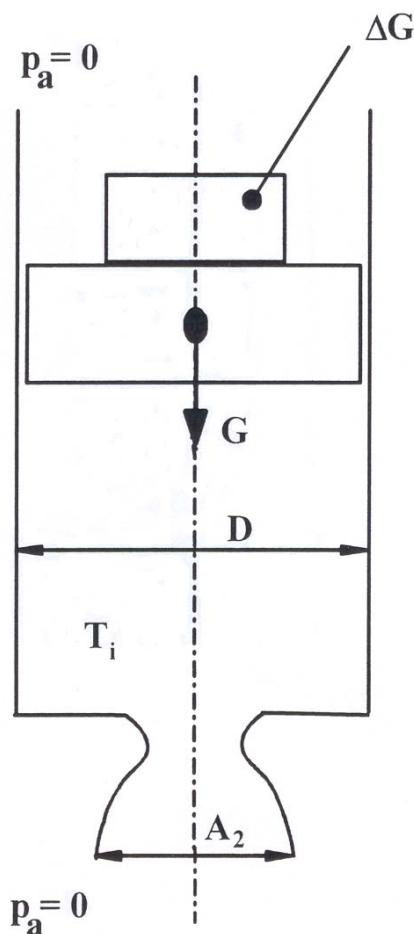
- Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen die Ausströmgeschwindigkeit c_2 bei A_2 sowie den Innendruck p_{i1} .
- Durch Auflegen eines Zusatzgewichtes ΔG auf den Kolben wird das Gas isentrop auf den neuen Innendruck p_{i2} komprimiert. Wie groß muss das Zusatzgewicht ΔG sein, damit für die neue Austrittsgeschwindigkeit c_2^* bei A_2 gilt $c_2^*=1,25 \cdot c_2$?

Voraussetzungen:

Alle Zustandsänderungen des Gases seien isentrop. Die Strömungsgeschwindigkeit im Inneren des Kreiszylinders sei vernachlässigbar klein. Auf den Kolben sollen keinerlei Reibungskräfte wirken.

Gegeben sind:

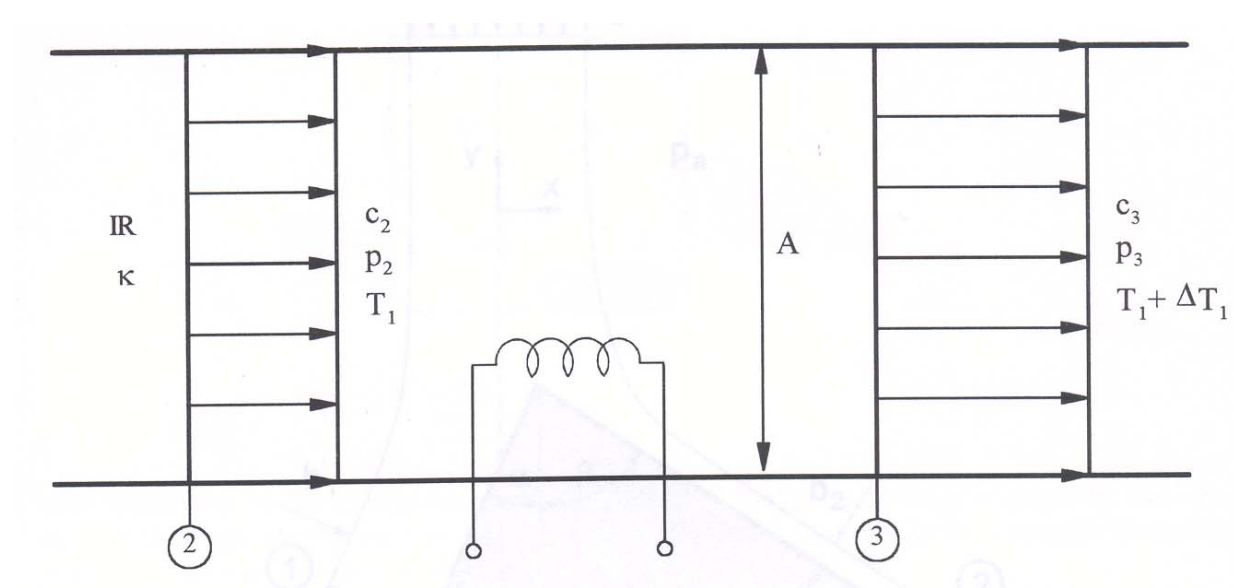
$G, D, IR, \kappa, T_{i1}, p_a=0$.



Aufgabe 3

Ein ideales Gas (spezifische Gaskonstante \mathcal{R} , Verhältnis der spezifischen Wärmen κ) strömt reibungsfrei, stationär und eindimensional durch ein Rohr mit dem konstanten Querschnitt A . Durch Messungen sind in den Querschnitten 2 bzw. 3 folgende Daten bekannt (s. Abb.):

- bei 2: die Strömungsgeschwindigkeit c_2 , der statische Druck p_2 und die Ruhetemperatur T_1
- bei 3: die Strömungsgeschwindigkeit c_3 , der statische Druck p_3 sowie der Massenstrom \dot{m}_3 durch das Rohr.



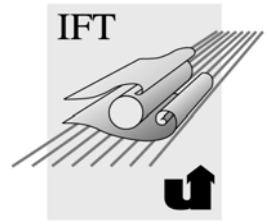
- a) Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen die Machzahl M_2 bei 2.

Zwischen den Stellen 2 und 3 wird dem Gas Energie zugeführt. Dadurch ändert sich bei 3 die Ruhetemperatur von T_1 auf $T_1 + \Delta T_1$.

- b) Man bestimme die Dichte ρ_3 , die Machzahl M_3 sowie die Änderung der Ruhetemperatur ΔT_1 bei 3. Dabei sind die jeweils zuvor berechneten Größen als bekannt anzusehen.

Gegeben sind:

\mathcal{R} , κ , A , c_2 , p_2 , T_1 , c_3 , p_3 , \dot{m}_3 .



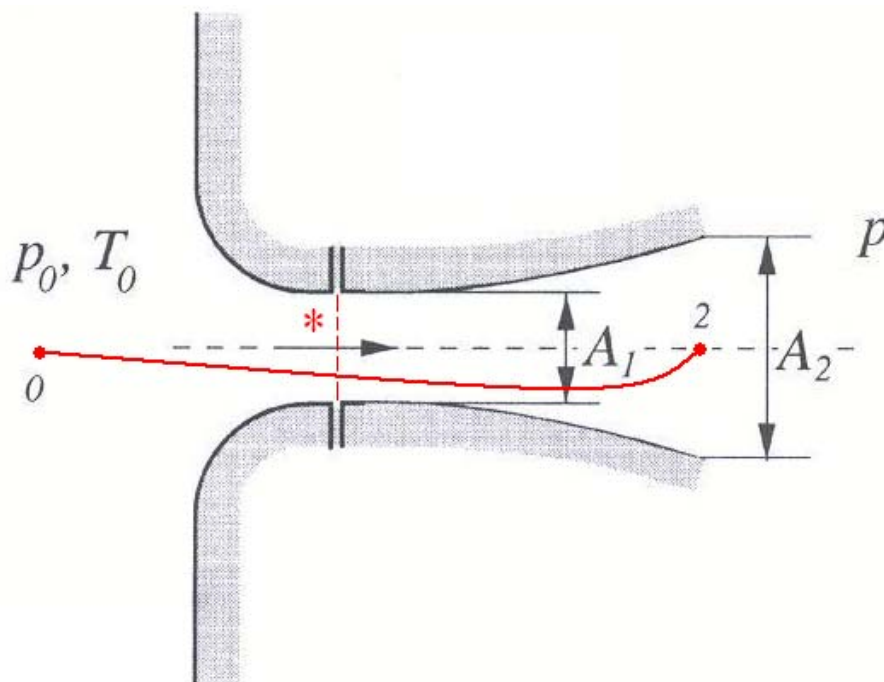
Lösungen zu dem Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

Gegeben: $T_0, p_0, p, A_1, A_2, IR, \kappa, \frac{c^*}{c_{\max}}$.

Gesucht: a) Ausströmende Masse \dot{m} bei inkompressibler Strömung

b) Ausströmende Masse \dot{m} bei kompressibler Strömung



Begriffe:

- für Teil a) INKOMPRESSIBEL Medium $\rho = \text{konst.}$
- für Teil b) ideales Gas \rightarrow KOMPRESSIBEL = Änderung der Dichte bei Druckunterschieden \rightarrow Gasdynamik $\rho = \rho(p, T)$
- „großer Kessel“ Strömungsgeschwindigkeit im Inneren des Kessels $c_0 \approx 0$

- Ausströmen im Umgebungsdruck p
- isentrope Zustandsänderungen
- reibungsfreie Strömung → Bernoulli-Gleichung

a) Ausströmende Masse bei **inkompressibler** Strömung ($\rho = \rho_0$):

Die inkompressible Bernoulligleichung für einen Stromfaden vom Kessel bis zum Austritt lautet:

$$p_0 = p + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \quad (1)$$

daraus folgt

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot (p_0 - p)} \quad (2)$$

Die sekundlich ausströmende Masse ergibt sich aus:

$$\dot{m} = \rho c_2 A_2 = \rho A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot (p_0 - p)} = A_2 \sqrt{2\rho \cdot (p_0 - p)} \quad (3)$$

Mit $\rho = \rho_0$ folgt daraus:

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{2\rho_0 \cdot (p_0 - p)} \quad (4)$$

Aus der Zustandsgleichung im Kessel $p_0 = \rho_0 R T_0$ folgt:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R T} \quad (5)$$

Die Gleichung (5) in (4) einsetzen:

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{2 \frac{p_0}{R T_0} \cdot (p_0 - p)}$$

b) Ausströmende Masse bei **kompressibler** Strömung:

Für den Massenstrom \dot{m} gilt:

$$\dot{m} = \rho_1 c_1 A_1 = \rho^* c^* A^* = \rho_2 c_2 A_2$$

Im engste Querschnitt: $A_1 = A^*$ und $c_1 = c^*$

Für den Strömungsverlauf ist es entscheidend, ob der Außendruck p über oder unter dem kritischen Druck p^* liegt.

Für das kritische Druckverhältnis gilt:

Fall 1:

$$\frac{p}{p_0} > \frac{p^*}{p_0}$$

In diesem Fall wird im engsten Querschnitt keine Schallgeschwindigkeit erreicht. Es liegt eine reine Unterschallströmung vor und die Strömung ist dort wie bei einem inkompressiblen Medium verzögert. Der Außendruck wird wie bisher dem Freistrah aufgeprägt.

also wie im Teil a) erfolgt:

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{2 \frac{p_0}{\text{IR} T_0} (p_0 - p)}$$

Fall 2:

$$\frac{p}{p_0} < \frac{p^*}{p_0}$$

Im engsten Querschnitt wird Schallgeschwindigkeit erreicht. Hinter dem engsten Querschnitt erfolgt eine Expansion im Überschall durch die Lavaldüse „kontrolliert“.

Es gilt:

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

Für die maximale Geschwindigkeit gilt:

$$c_{\max} = \sqrt{2 \cdot c_p \cdot T_0}$$

mit den bekannten Beziehungen:

$$\text{IR} = c_p - c_v, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad \text{und} \quad c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR}$$

Daraus folgt:

$$c_{\max} = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_0}$$

Und die Dichte ρ_0 erhält man aus der Zustandsänderung idealer Gase:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{\text{IR} T_0}$$

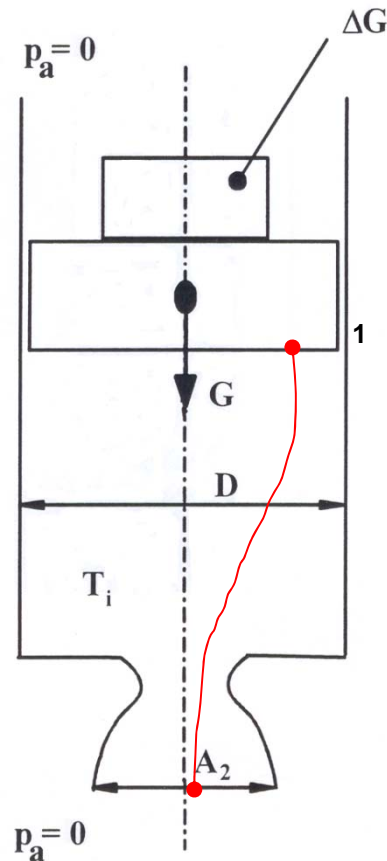
Eingesetzt erhält man für den Massenstrom:

$$\dot{m} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \rho_0 A^* \frac{c^*}{c_{\max}} c_{\max} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \frac{p_0}{\text{IR} T_0} A_1 \frac{c^*}{c_{\max}} \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_0}$$

Aufgabe 2

Gegeben: $G, D, IR, \kappa, T_{i1}, p_a = 0$

Gesucht: a) Ausströmgeschwindigkeit c_2 bei A_2 sowie Innendruck p_{i1}
b) Zusatzgewicht ΔG für isentrope Kompression auf den neuen Innendruck p_{i2} und die neue Austrittsgeschwindigkeit $c_2^* = 1,25 \cdot c_2$ bei A_2



Begriffe:

- ideales Gas \rightarrow KOMPRESSIBEL = Änderung der Dichte bei Druckunterschieden \rightarrow Gasdynamik $\rho = \rho(p, T)$
- stationäre Strömung
- Ausströmen ins Vakuum ($p_a = 0$)
- isentrope Zustandsänderungen
- es wirken keinerlei Reibungskräfte auf den Kolben
- Strömungsgeschwindigkeit im Inneren des Kreiszylinders $c_i \approx 0$
- der Schwerkrafteinfluss darf vernachlässigt werden, wenn nicht zu große Höhendifferenzen betrachtet werden

- a) Für den Ausfluss eines kompressiblen Mediums aus einem Reservoir ohne Schwerkräfteinfluss bei isentropen Zustandsänderungen gilt die **Ausflussformel nach Saint-Venant und Wantzell** (Skript zur Vorlesung „Strömungslehre“, Kapitel 3.1.3 „Stromfadentheorie in Einzelausführungen“, Gleichung 3.45):

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i1} \left[1 - \frac{p_2}{p_{i1}} \right]^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}}$$

da $p_2 = p_a = 0$

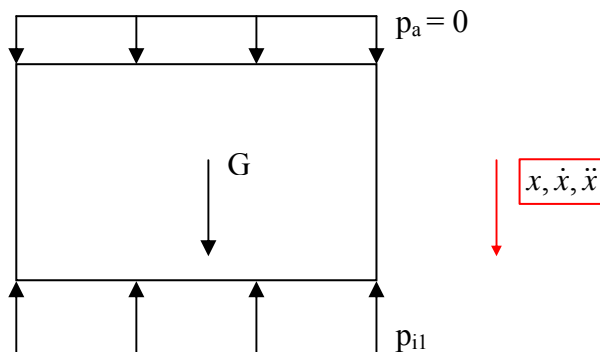
$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i1}} \quad (1.1)$$

Wegen stationärer Strömung folgt aus dem Newtonschen Grundgesetz:

$$\dot{x} = \text{konst.} \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} = 0 = G - p_{i1} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 + \underbrace{p_a \cdot \frac{\pi}{4} D^2}_{=0, \text{ da } p_a=0}$$

$$p_{i1} = \frac{G}{D^2} \cdot \frac{4}{\pi} \quad (1.2)$$

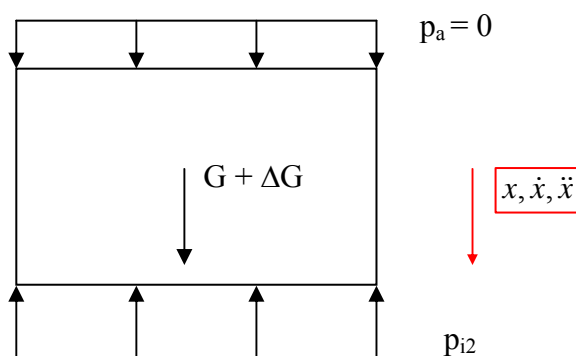


b) Wegen stationärer Strömung folgt aus dem Newtonschen Grundgesetz:

$$\dot{x} = \text{konst.} \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} = 0 = G + \Delta G - p_{i2} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 + \underbrace{p_a \cdot \frac{\pi}{4} D^2}_{=0, \text{ da } p_a=0}$$

$$\Delta G = p_{i2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - G \quad (1.3)$$



Bestimmung von c_2^* :

$$c_2^* = 1,25 \cdot c_2 = 1,25 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i1}} \quad (1.4)$$

$$c_2^* = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i2}} \quad (1.5)$$

Gleichsetzen von (1.4) und (1.5):

$$1,25 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i1}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \text{IR} \cdot T_{i2}}$$

$$\Rightarrow T_{i2} = (1,25)^2 \cdot T_{i1} \quad (1.6)$$

isentrope Zustandsänderung:

$$\frac{p_{i1}}{p_{i2}} = \left(\frac{\rho_{i1}}{\rho_{i2}} \right)^\kappa \quad (1.7)$$

Zustandsgleichung für ideales Gas:

$$\frac{p_{i1,2}}{\rho_{i1,2}} = \text{IR} \cdot T_{i1,2} \Leftrightarrow \rho_{i1,2} = \frac{p_{i1,2}}{\text{IR} \cdot T_{i1,2}} \quad (1.8)$$

mit (1.8) in (1.7)

$$\frac{p_{i1}}{p_{i2}} = \left[\frac{\frac{p_{i1}}{\text{IR} \cdot T_{i1}}}{\frac{p_{i2}}{\text{IR} \cdot T_{i2}}} \right]^\kappa \Leftrightarrow \frac{p_{i1} \cdot p_{i2}^\kappa}{p_{i2} \cdot p_{i1}^\kappa} = \left(\frac{T_{i2}}{T_{i1}} \right)^\kappa \quad (1.9)$$

mit (1.6) in (1.9)

$$p_{i1}^{(1-\kappa)} \cdot p_{i2}^{(\kappa-1)} = 1,25^{(2\kappa)}$$

$$p_{i2}^{(\kappa-1)} = \frac{1,25^{(2\kappa)}}{p_{i1}^{(1-\kappa)}} \Leftrightarrow p_{i2} = 1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} \cdot p_{i1} \quad (1.10)$$

mit (1.10) in (1.3)

$$\Delta G = 1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} \cdot p_{i1} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 - G \quad (1.11)$$

mit (1.2) in (1.11)

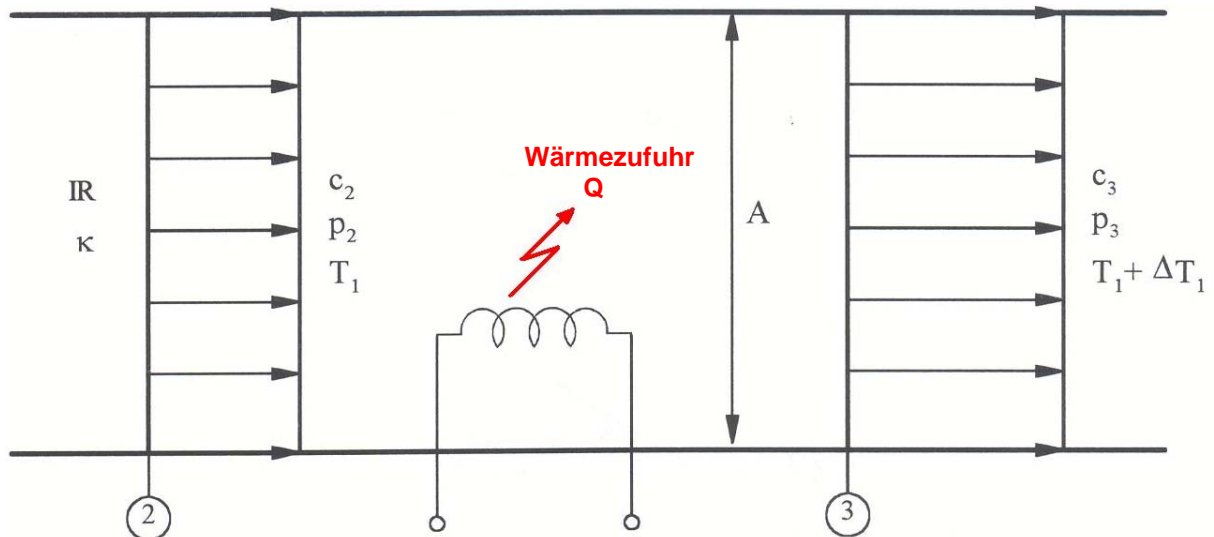
$$\Delta G = 1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} \cdot G \cdot \frac{\frac{\pi}{4} D^2}{\frac{\pi}{4} D^2} - G = G \cdot \left(1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} - 1 \right) \quad (1.12)$$

Aufgabe 3

Gegeben: $T_1, p_2, c_2, p_3, c_3, \dot{m}_3, A, IR, \kappa$.

Gesucht: a) die Machzahl M_2 bei 2

b) die Dichte ρ_3 , die Machzahl M_3 sowie ΔT_1 bei 3



Begriffe:

- ideales Gas \rightarrow KOMPRESSIBEL = Änderung der Dichte bei Druck- und Temperatur-unterschieden \rightarrow Gasdynamik $\rho = \rho(p, T)$
- stationäre Strömung
- isentrope Zustandsänderungen
- Reibungsfreie Strömung

a) $M_2 = ?$

$$M_2 = \frac{c_2}{a_2} \quad (1)$$

$$a_2 = \sqrt{\kappa \cdot IR \cdot T_2} \quad (2)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2} \quad (3)$$

(3) in (2) einsetzen:

$$\Rightarrow a_2 = \sqrt{\kappa \cdot IR \cdot \frac{T_1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}} \quad (4)$$

(4) in (1) einsetzen:

$$M_2 = \frac{c_2}{\sqrt{\kappa \cdot IR \cdot \frac{T_1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}}}$$

$$\Rightarrow M_2^2 \cdot (\kappa \cdot IR \cdot T_1) = c_2^2 \cdot \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2\right)$$

$$\Rightarrow M_2 = \frac{c_2}{\sqrt{\kappa \cdot IR \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{c_2^2}{\kappa \cdot IR \cdot T_1} \frac{\kappa-1}{2}\right)}}$$

b) $\rho_3, M_3, \Delta T_1 = ?$

aus Konti.-gl.:

$$\rho_2 \cdot c_2 \cdot A = \rho_3 \cdot c_3 \cdot A \quad \text{mit} \quad \dot{m}_3 = \rho_3 c_3 A$$

$$\Rightarrow \rho_3 = \frac{\dot{m}_3}{c_3 \cdot A}$$

also:

$$M_3 = \frac{c_3}{a_3} = \frac{c_3}{\sqrt{\kappa \cdot IR \cdot T_3}} = \frac{\sqrt{\rho_3 \cdot c_3}}{\sqrt{\kappa \cdot p_3}}$$

für $\Delta T_1 = ?$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_3}{T_1 + \Delta T_1} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_3^2}$$

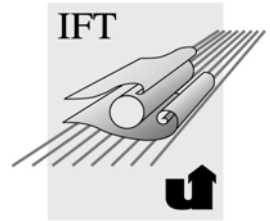
T_3 aus Gasgleichung:

$$\Rightarrow T_3 = \frac{p_3}{\rho_3 \cdot IR}$$

also:

$$T_1 + \Delta T_1 = T_3 \cdot \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_3^2\right)$$

$$\Rightarrow \Delta T_1 = T_3 \cdot \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_3^2\right) - T_1$$



Übungen im Pflichtfach "Strömungslehre"

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1

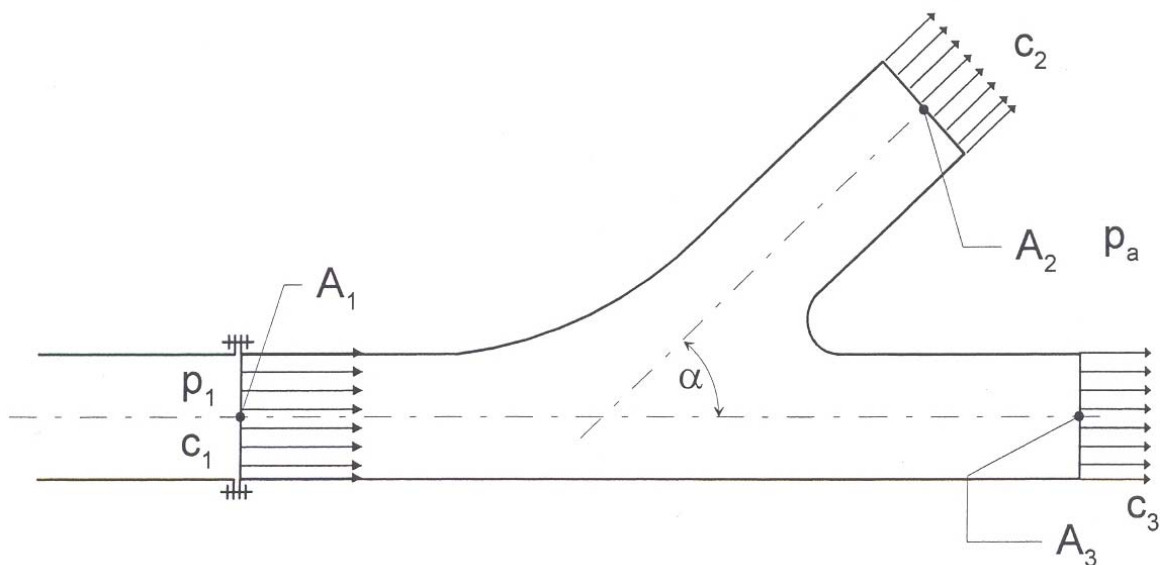
Eine Rohrverzweigung wird von einem inkompressiblen Medium (Dichte ρ) stationär durchströmt (s. Abb.). Im Eintrittsquerschnitt A_1 sind die Geschwindigkeit c_1 und der Druck p_1 bekannt. In den Austrittsquerschnitten A_2 und A_3 ist der Druck des austretenden Mediums gleich dem Umgebungsdruck p_a ; für die Geschwindigkeit c_3 in A_3 gilt: $c_3 = \frac{1}{2} \cdot c_1$. Der Eintrittsquerschnitt und die Austrittsquerschnitte sind gleich groß: $A_1 = A_2 = A_3 = A$. Es werde angenommen, dass Druck und Geschwindigkeit konstant über den jeweiligen Querschnitt sind. Der Einfluss der Schwerkraft sei vernachlässigbar.

a) Wie groß ist c_2 ?

b) Mit Hilfe des Impulssatzes bestimme man die Größe der äußeren Kraft F_H , die an der Verzweigung angreifen muss, damit diese im Gleichgewicht ist.

Gegeben:

$A_1, A_2, A_3, c_1, c_3, \rho, p_1, p_a, \alpha$.



Aufgabe 2

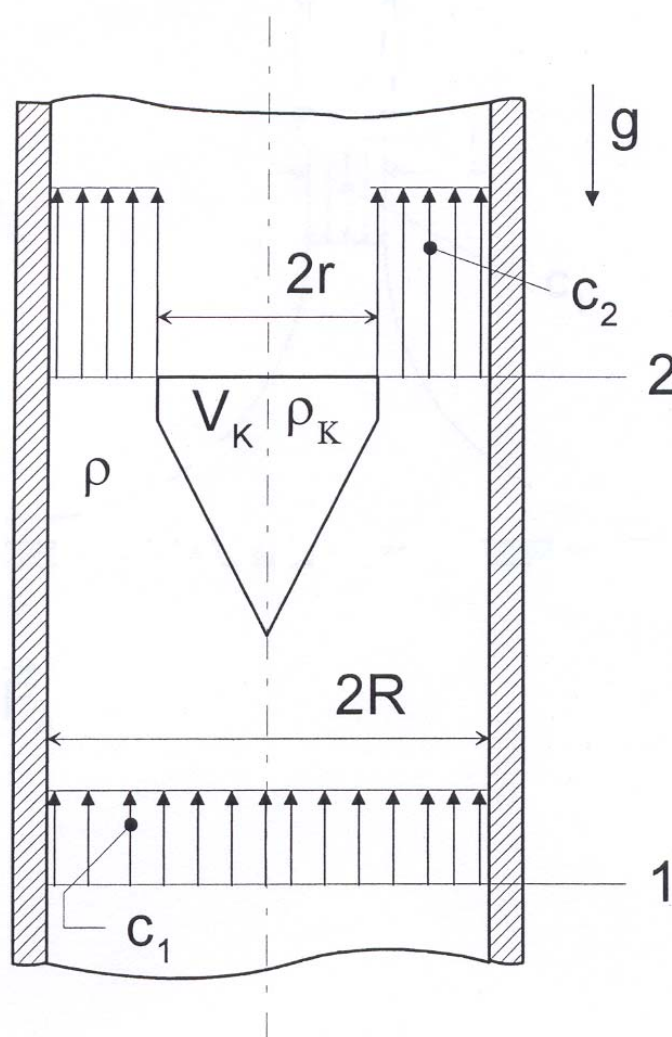
Ein zylindrisches Rohr vom Radius R mit vertikaler Achse wird stationär von einem inkompressiblen Fluid (Dichte ρ) durchströmt (s. Abb.). In der Strömung schwebt ein koaxialer Kreiskegel (Volumen V_K , Dichte ρ_K , $\rho_K > \rho$) mit dem Basisradius r . Durch Anwendung des Impulssatzes gebe man an, bei welcher Geschwindigkeit c_1 des Fluides der Kegel weder steigt noch fällt.

Voraussetzungen:

Im betrachteten Bereich sei die Strömung reibungsfrei, die Geschwindigkeiten bei 1 und 2 seien jeweils konstant über den Querschnitt. Der Druck auf die Grundfläche des Kegels sei gleich dem statischen Druck in der Strömung bei 2.

Gegeben:

$r, R, V_K, \rho_K, \rho, g$.



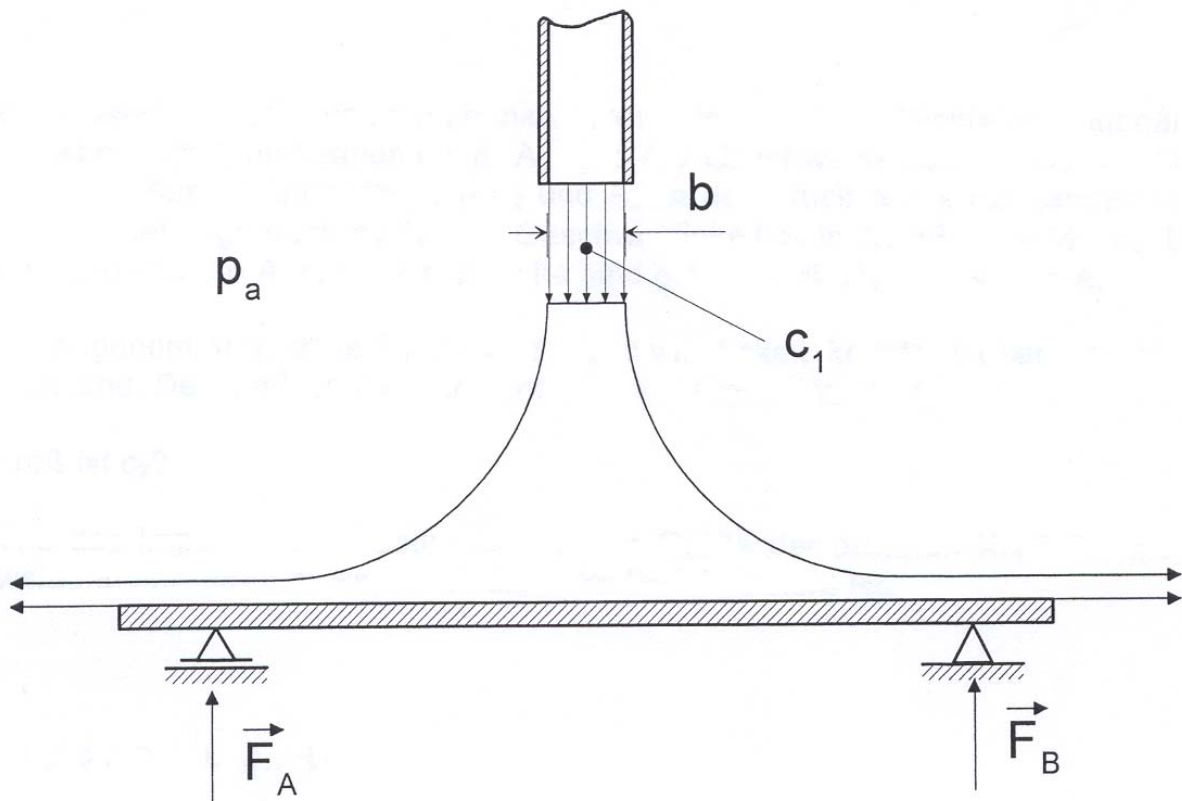
Aufgabe 3

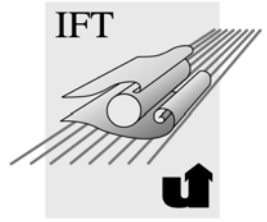
Ein inkompressibles Medium (Dichte ρ) trifft als ebener Freistrahл von der Breite b und der Tiefe h (senkrecht zur Zeichenebene) auf eine ebene Platte und fließt an deren Enden parallel zur Platte ab (s. Abb.). In großer Entfernung von der Platte stehe die Strömungsrichtung im Freistrahл normal zur angeströmten Platte und die Geschwindigkeit c_1 sei konstant über den Freistrahлquerschnitt $b \cdot h$.

Unter Vernachlässigung der Schwerkraft bestimme man die Summe der Lagerkräfte $F_A + F_B$.

Gegeben:

b, h, ρ, c_1 .





Lösungen zu dem Aufgabenblatt 8

3.3 Strömungen mit Reibung

3.3.1 Impulssatz mit Anwendungen

Der Impulssatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Resultierenden der äußeren Kräfte ist:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \vec{w} dm = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{w} dV = \sum \vec{F}_a$$

Nach einigen Umformungen der Zeitableitung $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{w} dV$ erhält man schließlich folgende Form des Impulssatzes, die für

- reibungsfreie und reibungsbehaftete Strömungen
- kompressible und inkompressible Strömungen
- stationäre und instationäre Strömungen

gültig ist:

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{w})}{\partial t} dV + \int_A \rho \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F}_a$$

Der Term $\int_V \frac{\partial(\rho \vec{w})}{\partial t} dV$ beschreibt die lokale Impulsänderung, für die eine Kenntnis der Strömungsgrößen im Volumen erforderlich ist. Der Term $\int_A \rho \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA$ gibt den Impulsstrom durch die Oberfläche.

Für stationäre Strömungen entfällt das Volumenintegral. Die Strömungsdaten werden nur auf der Kontrollraumboberfläche benötigt:

$$\int_A \rho \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F}_a$$

Wird die Impulskraft \vec{F}_j als

$$\vec{F}_j = - \int_A \rho \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA$$

definiert, so schreibt sich der Impulssatz für stationäre Strömungen in der sehr einfachen Form:

$$\sum \vec{F}_j + \sum \vec{F}_a = 0$$

definiert. Die Impulskraft \vec{F}_j weist stets in das Innere des Kontrollraums und ist parallel zu dem Geschwindigkeitsvektor \vec{w} gerichtet.

Die Summe aller äußeren Kräfte $\sum \vec{F}_a$ setzt sich aus Massen- und Oberflächenkräften

$$\sum \vec{F}_a = \sum \vec{F}_M + \sum \vec{F}_O$$

des im Volumen V eingeschlossenen Fluids zusammen, wobei

$$\sum \vec{F}_M = \text{Massenkräfte (Gewicht, Zentrifugalkraft)}$$

$$\sum \vec{F}_O = \text{Oberflächenkräfte (z. B. Druckkraft, Reibkraft)}$$

bezeichnen. Eine wichtige Oberflächenkraft ist die Druckkraft \vec{F}_D , die als

$$\vec{F}_D = - \int_A p \vec{n} dA$$

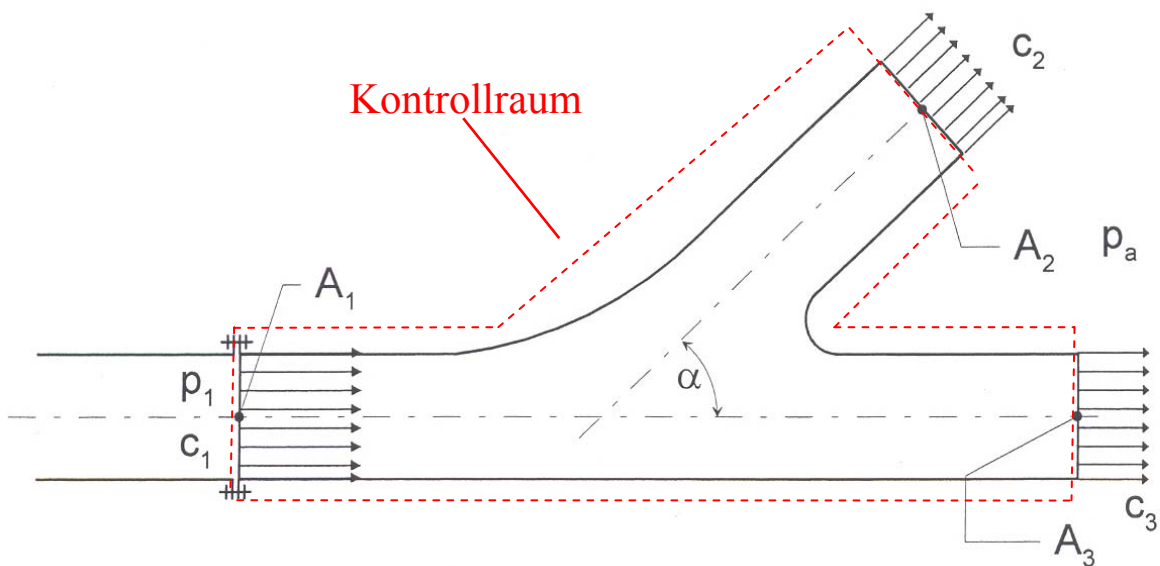
definiert ist.

Aufgabe 1

Gegeben: $A_1, A_2, A_3, c_1, c_3, \rho, p_1, p_a, \alpha$

Gesucht: a) Geschwindigkeit c_2

b) Größe (Betrag und Richtung) der äußeren Kraft F_H , die an der Verzweigung angreifen muss, damit ein Kräftegleichgewicht vorliegt



Begriffe:

- inkompressibles Medium ($\rho = \text{konst.}$)
- stationäre Strömung
- $A_1 = A_2 = A_3 = A$
- Freistrahlabedingung in den Querschnitten A_2 und A_3 , also $p_2 = p_3 = p_a$
- Druck und Geschwindigkeit sind über die jeweiligen Querschnitte konstant

a) Konti-Gleichung:

$$\rho \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho \cdot c_2 \cdot A_2 + \rho \cdot c_3 \cdot A_3$$

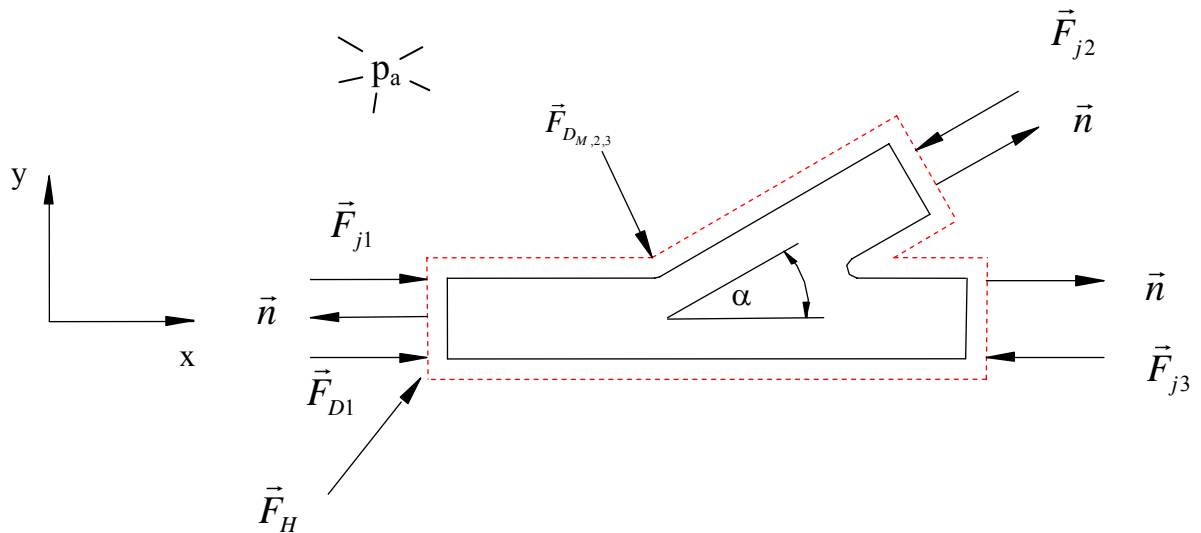
mit $A_1 = A_2 = A_3 = A$ folgt für c_1 :

$$c_1 = c_2 + c_3$$

und mit $c_3 = \frac{1}{2}c_1$ folgt für c_2 :

$$c_2 = c_1 - \frac{1}{2}c_1 = \frac{c_1}{2}$$

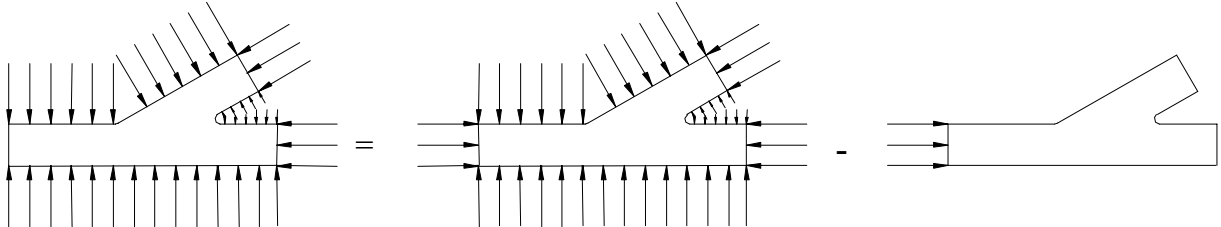
b) Kontrollraum mit Kräften:



Impulssatz:

$$\vec{F}_{j1} + \vec{F}_{D1} + \vec{F}_H + \vec{F}_{D_{M,2,3}} + \vec{F}_{j2} + \vec{F}_{j3} = 0$$

Berechnung von $\vec{F}_{D_{M,2,3}}$:



$$\vec{F}_{D_{M,2,3}} = - \int_{\substack{\text{Mantelfläche} \\ + A_2 + A_3}} p_a \vec{n} dA = - \underbrace{\int_{\substack{\text{Mantelfläche} \\ + A_1 + A_2 + A_3}} p_a \vec{n} dA}_{=0} - \left(- \int_{A_1} p_a \vec{n} dA \right)$$

$$F_{D_{M,2,3},x} = -p_a \cdot A$$

$$F_{D_{M,2,3},y} = 0$$

Impulssatz in x-Richtung:

$$\rho \cdot \underbrace{c_1^2 \cdot A_1}_{c_1^2 A} + p_1 \cdot \underbrace{A_1}_A + F_{H,x} - p_a \cdot A - \rho \cdot \underbrace{c_2^2 \cdot A_2}_{\frac{c_1^2}{4} A} \cdot \cos \alpha - \rho \cdot \underbrace{c_3^2 \cdot A_3}_{\frac{c_1^2}{4} A} = 0$$

$$\Rightarrow F_{H,x} = (p_a - p_1) \cdot A + \rho \cdot \frac{c_1^2}{4} \cdot A \cdot (\cos \alpha - 3) < 0$$

Impulssatz in y-Richtung:

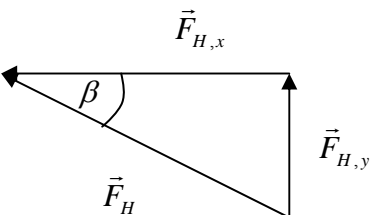
$$F_{H,y} - \rho \cdot \underbrace{c_2^2 \cdot A_2}_{\frac{c_1^2}{4} A} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow F_{H,y} = \rho \cdot \frac{c_1^2}{4} \cdot A \cdot \sin \alpha$$

Betrag der Haltekraft:

$$|\vec{F}_H| = \sqrt{F_{H,x}^2 + F_{H,y}^2} = \sqrt{\left((p_a - p_1) \cdot A + \rho \cdot \frac{c_1^2}{4} \cdot A \cdot (\cos \alpha - 3) \right)^2 + \left(\rho \cdot \frac{c_1^2}{4} \cdot A \cdot \sin \alpha \right)^2}$$

Richtung der Haltekraft:

$$\tan \beta = \frac{F_{H,y}}{F_{H,x}}$$


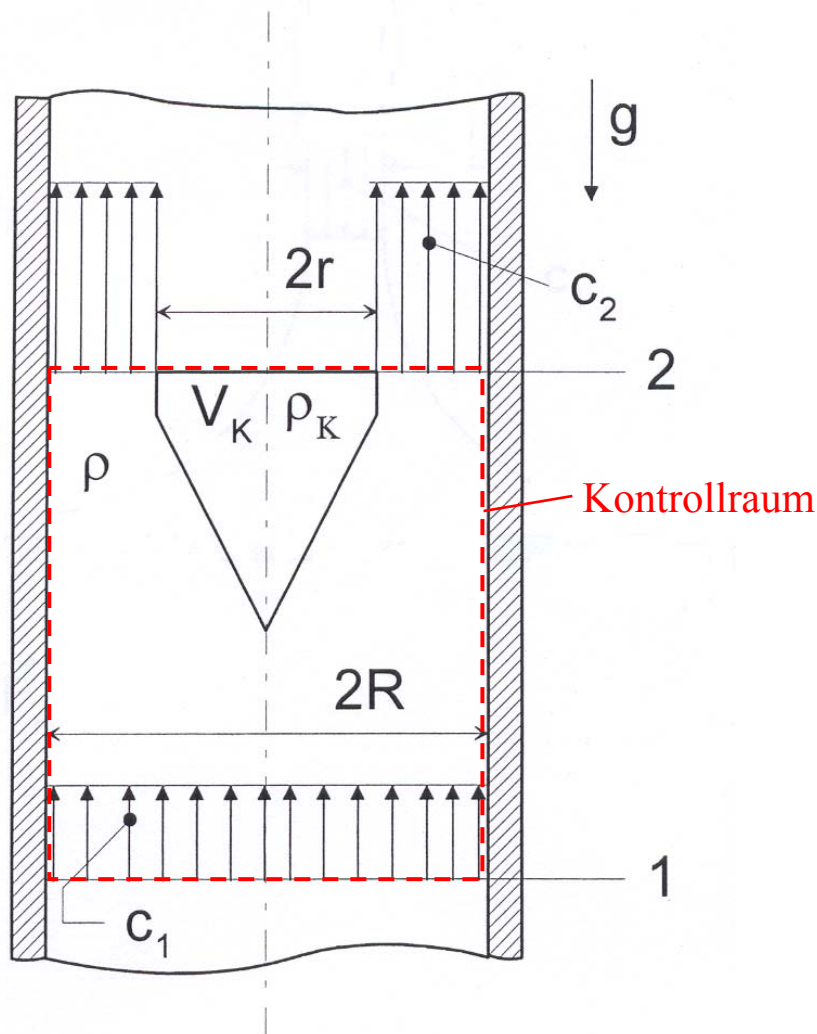
$$\Rightarrow \beta = \arctan \left(\frac{F_{H,y}}{F_{H,x}} \right)$$

$$= \arctan \frac{\left(\rho \cdot \frac{c_1^2}{4} \cdot A \cdot \sin \alpha \right)}{\left((p_a - p_1) \cdot A + \rho \cdot \frac{c_1^2}{4} \cdot A \cdot (\cos \alpha - 3) \right)}$$

Aufgabe 2

Gegeben: $r, R, V_K, \rho_K, \rho, g$.

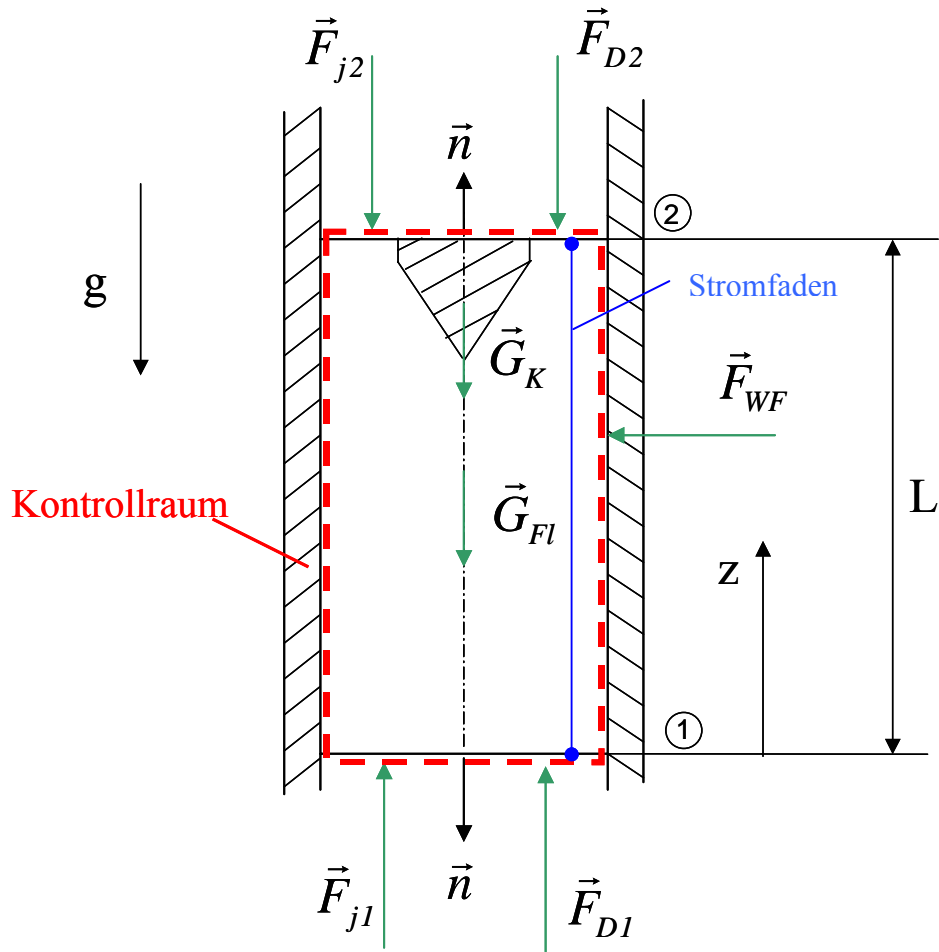
Gesucht: Geschwindigkeit c_1 , bei der der Kegel weder steigt noch fällt



Begriffe:

- stationäre Strömung
- inkompressibles Fluid der Dichte ρ
- reibungsfreie Strömung zwischen 1 und 2 \Rightarrow Stromfadentheorie (Bernoulli-Gl.)
- konstante Geschwindigkeiten über die Querschnitte 1 und 2
- Druck auf die Grundfläche des Kegels gleich dem statischen Druck in der Strömung bei 2

Impulssatz mit Kontrollraum:



Kräfte:

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}_{j1}| &= \rho \cdot c_1^2 \cdot \pi \cdot R^2 & |\vec{F}_{D1}| &= p_1 \cdot \pi \cdot R^2 \\
 |\vec{F}_{j2}| &= \rho \cdot c_2^2 \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2) & |\vec{F}_{D2}| &= p_2 \cdot \pi \cdot R^2 \\
 |\vec{G}_K| &= \rho_K \cdot g \cdot V_K & |\vec{F}_{WF}| &= 0 \\
 |\vec{G}_{Fl}| &= \rho \cdot g \cdot [\pi \cdot R^2 \cdot (z_2 - z_1) - V_K] & \text{mit } z_2 - z_1 &= L
 \end{aligned}$$

Impulssatz in z-Richtung:

$$|\vec{F}_{j1}| + |\vec{F}_{D1}| - |\vec{F}_{j2}| - |\vec{F}_{D2}| - |\vec{G}_K| - |\vec{G}_{Fl}| = 0$$

$$\rho \cdot c_1^2 \cdot \pi \cdot R^2 + p_1 \cdot \pi \cdot R^2 - \rho \cdot c_2^2 \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2) - p_2 \cdot \pi \cdot R^2 - \rho_K \cdot g \cdot V_K - \rho \cdot g \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot L - V_K) = 0$$

$$(p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot R^2 + \rho \cdot \pi \cdot [c_1^2 R^2 - c_2^2 \cdot (R^2 - r^2)] - \rho_K \cdot g \cdot V_K - \rho \cdot g \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot L - V_K) = 0 \quad (1.1)$$

Bernoulli von 1→2:

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + p_1 &= \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot L \\ \Rightarrow p_1 - p_2 &= \frac{\rho}{2} (c_2^2 - c_1^2) + \rho \cdot g \cdot L\end{aligned}\quad (1.2)$$

Kontinuität von 1→2:

$$\begin{aligned}\rho \cdot c_1 \cdot \pi \cdot R^2 &= \rho \cdot c_2 \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2) \\ \Rightarrow c_2 &= c_1 \cdot \frac{R^2}{R^2 - r^2}\end{aligned}\quad (1.3)$$

mit (1.3) in (1.2):

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} c_1^2 \left(\frac{R^4}{(R^2 - r^2)^2} - 1 \right) + \rho \cdot g \cdot L \quad (1.4)$$

mit (1.3) und (1.4) in (1.1):

$$\left[\frac{\rho}{2} c_1^2 \left(\frac{R^4}{(R^2 - r^2)^2} - 1 \right) + \rho \cdot g \cdot L \right] \cdot \pi \cdot R^2 + \rho \cdot \pi \cdot c_1^2 R^2 \left[1 - \frac{R^2}{(R^2 - r^2)} \right] - \rho_K \cdot g \cdot V_K - \rho \cdot g \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot L - V_K) = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho \cdot \pi \cdot c_1^2 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{R^4}{(R^2 - r^2)^2} - 1 \right) + \rho \cdot \pi \cdot c_1^2 R^2 \left[1 - \frac{R^2}{(R^2 - r^2)} \right] - \rho_K \cdot g \cdot V_K + \rho \cdot g \cdot V_K = 0$$

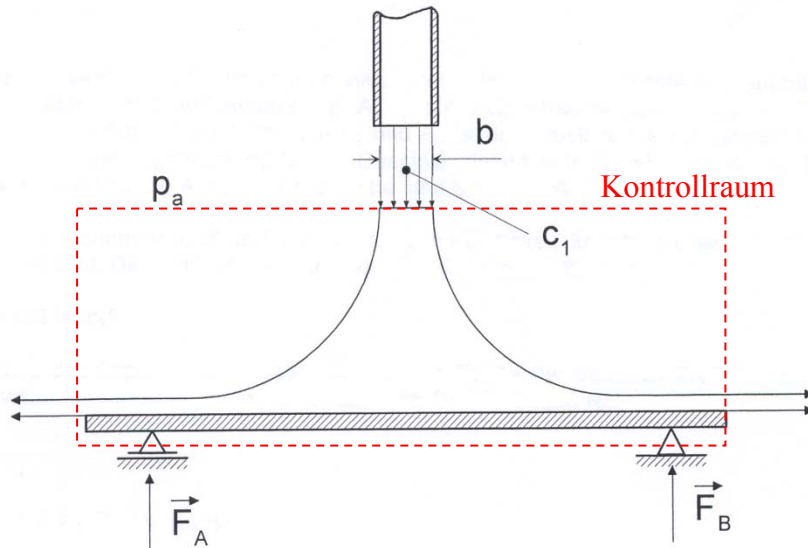
$$\Leftrightarrow \rho \cdot \pi \cdot c_1^2 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{R^4}{(R^2 - r^2)^2} - 1 \right) + \rho \cdot \pi \cdot c_1^2 R^2 \left[1 - \frac{R^2}{(R^2 - r^2)} \right] - \rho_K \cdot g \cdot V_K + \rho \cdot g \cdot V_K = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{R^2 - r^2}{R \cdot r^2} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(\frac{\rho_K}{\rho} - 1 \right) \cdot \frac{g \cdot V_K}{\pi}}$$

Aufgabe 3

Gegeben: b, h, ρ, c_1

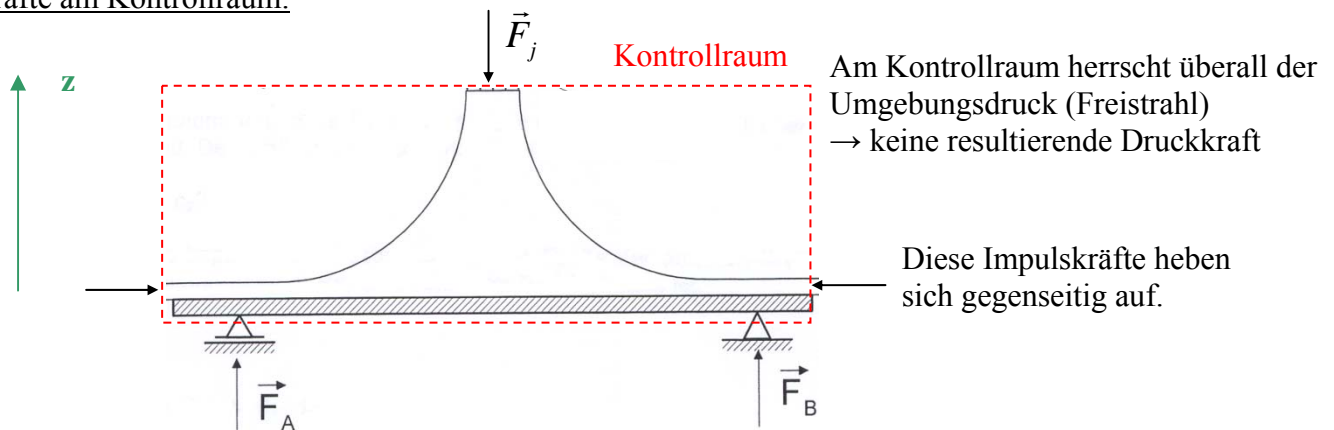
Gesucht: Summe der Lagerkräfte $|\vec{F}_A| + |\vec{F}_B|$ (mittels Impulssatz)



Begriffe:

- $\rho = \text{konst. (inkompressibel)}$
- Freistrah
- stationärer Strömungsvorgang
- c_1 konstant über den Freistrahquerschnitt $b \cdot h$
- Vernachlässigung der Schwerkraft

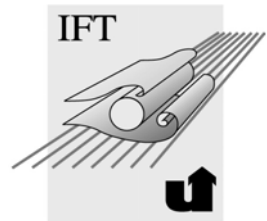
Kräfte am Kontrollraum:



Impulssatz in z-Richtung:

$$|\vec{F}_A| + |\vec{F}_B| - |\vec{F}_j| = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{F}_A| + |\vec{F}_B| = |\vec{F}_j| = \rho \cdot c_1^2 \cdot b \cdot h$$



Übungen im Pflichtfach "Strömungslehre"

9. Aufgabenblatt

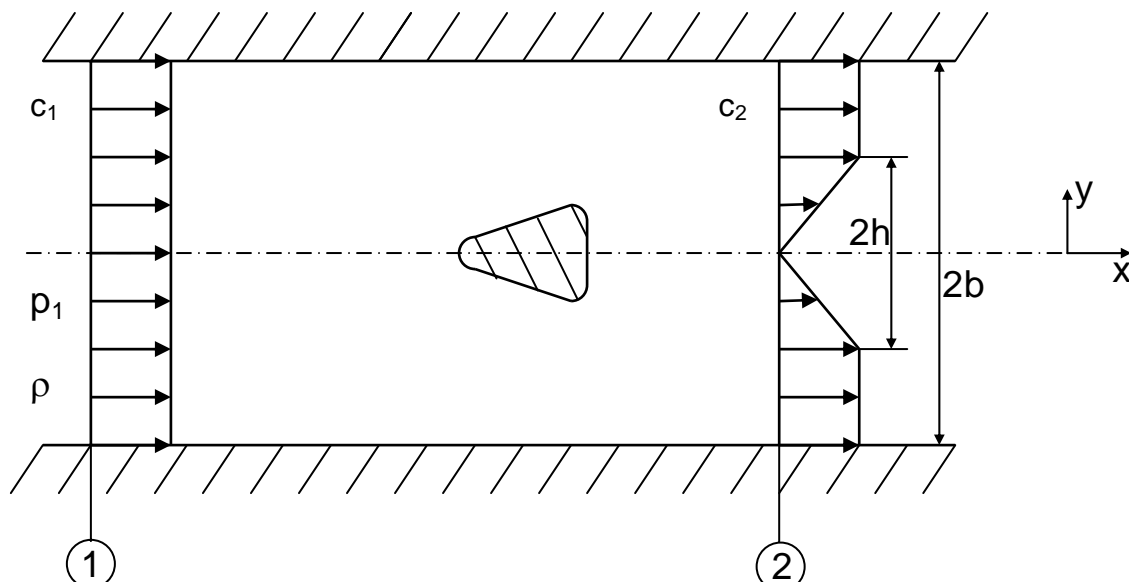
Aufgabe 1

In einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt von der Breite $2b$ und der Tiefe t (senkrecht zur Zeichenebene) ist ein prismatischer Körper mit konstantem Querschnitt eingespannt, dessen Achse senkrecht zur Zeichenebene steht (s. Abb.). Der Kanal wird von einem inkompressiblen, reibungsbehafteten Medium (Dichte ρ) stationär durchströmt. Im Querschnitt 1 sei die Geschwindigkeit c_1 konstant. Im Querschnitt 2 entsteht durch Ausbildung eines Totwassergebietes hinter dem Körper eine Verformung des Geschwindigkeitsprofils, welche näherungsweise durch die in der Abbildung skizzierte lineare Verteilung wiedergegeben werden kann. Die Drücke p_1 und p_2 seien jeweils konstant über den Querschnitt. Die Strömung außerhalb des Totwassergebietes kann näherungsweise als reibungsfrei angesehen werden, der Einfluss der Erdschwere ist zu vernachlässigen.

Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen

- a) die Geschwindigkeit c_2 für $0 \leq |y| \leq h$ und $h \leq |y| \leq b$ und den Druck p_2 im Querschnitt 2,
- b) die x -Komponente der von dem Medium auf den Körper ausgeübten Kraft nach Größe und Richtung.

Gegeben sind: b, t, c_1, ρ, p_1, h .



Aufgabe 2

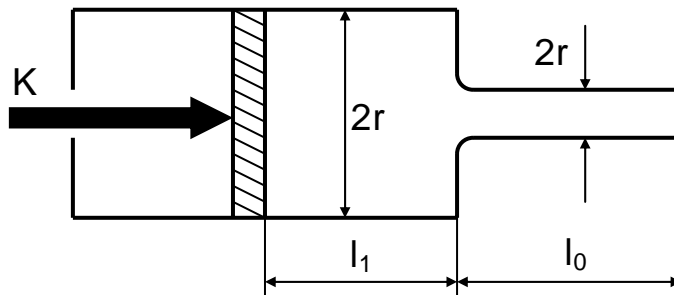
Der Inhalt einer Injektionsspritze vom Radius r_1 wird durch Bewegen eines Kolbens durch eine Kanüle von der Länge l_0 und vom Radius r_0 hinausgedrückt. Der Kolben legt bis zur vollständigen Entleerung den Weg l_1 zurück; die vom Kolben auf die Flüssigkeit wirkende Kraft hat während der Entleerung den konstanten Wert K . Die Injektionsflüssigkeit hat die Dichte ρ und die dynamische Zähigkeit μ . Der Druckabfall im Zylinder (d.h. vom Kolben bis zum Eintritt in die Kanüle) sei vernachlässigbar klein; für die Strömung in der Kanüle gelte das Hagen-Poiseuille-Gesetz. Die Strömung in der Kanüle sei über die ganze Länge voll ausgebildet.

a) Wie groß ist die Entleerungszeit Δt der Spritze?

Zahlenwerte dazu: $K = 5 \text{ N}$
 $l_1 = 2 \text{ cm}$
 $l_0 = 4 \text{ cm}$

$r_0 = 0,02 \text{ cm}$
 $r_1 = 0,5 \text{ cm}$
 $\mu = 0,002 \text{ Ns/m}^2$

b) Ist für obige Zahlenwerte die Anwendung des Hagen-Poiseuille-Gesetzes auf die Strömung in der Kanüle berechtigt?

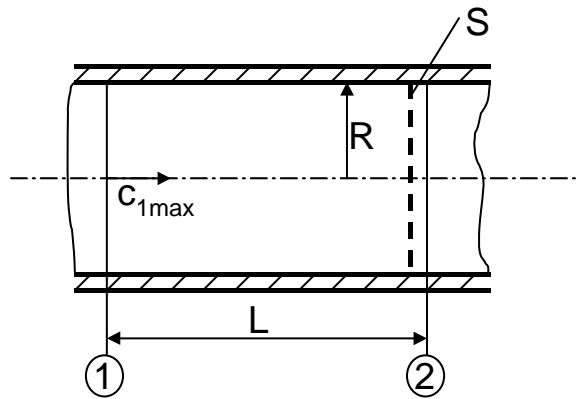


Aufgabe 3

In ein kreiszylindrisches Rohr vom Radius R ist zur Vergleichmäßigung der Geschwindigkeit ein Sieb S eingebaut. Vor dem Sieb liegt eine ausgebildete laminare, inkompressible Rohrströmung vor mit der maximalen Strömungsgeschwindigkeit $c_{1\max}$. An der Stelle 2, unmittelbar hinter dem Sieb, kann die Geschwindigkeit näherungsweise als konstant über den Querschnitt angesehen werden. In den Querschnitten bei 1 und 2 werden die Drücke p_1 und p_2 gemessen.

Unter Berücksichtigung der Wandreibung längs des Rohrstückes der Länge L berechne man mit Hilfe des Impulssatzes die Kraft F_H nach Größe und Richtung, die an dem Sieb angreifen muss, damit dieses im Gleichgewicht ist.

Gegeben sind: R , $c_{1\max}$, p_1 , p_2 , L , μ , r .



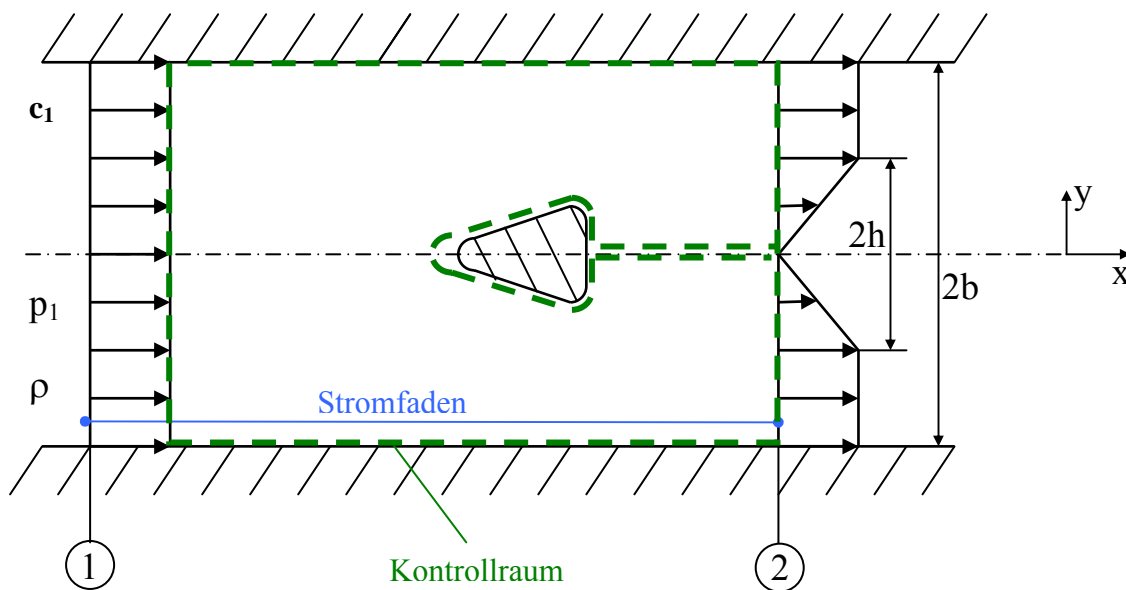
Lösungen zu dem Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1

Gegeben: b, t, c_1, ρ, p_1, h

Gesucht: a) Geschwindigkeit c_2 für $0 \leq |y| \leq h$ und $h \leq |y| \leq b$ und Druck p_2

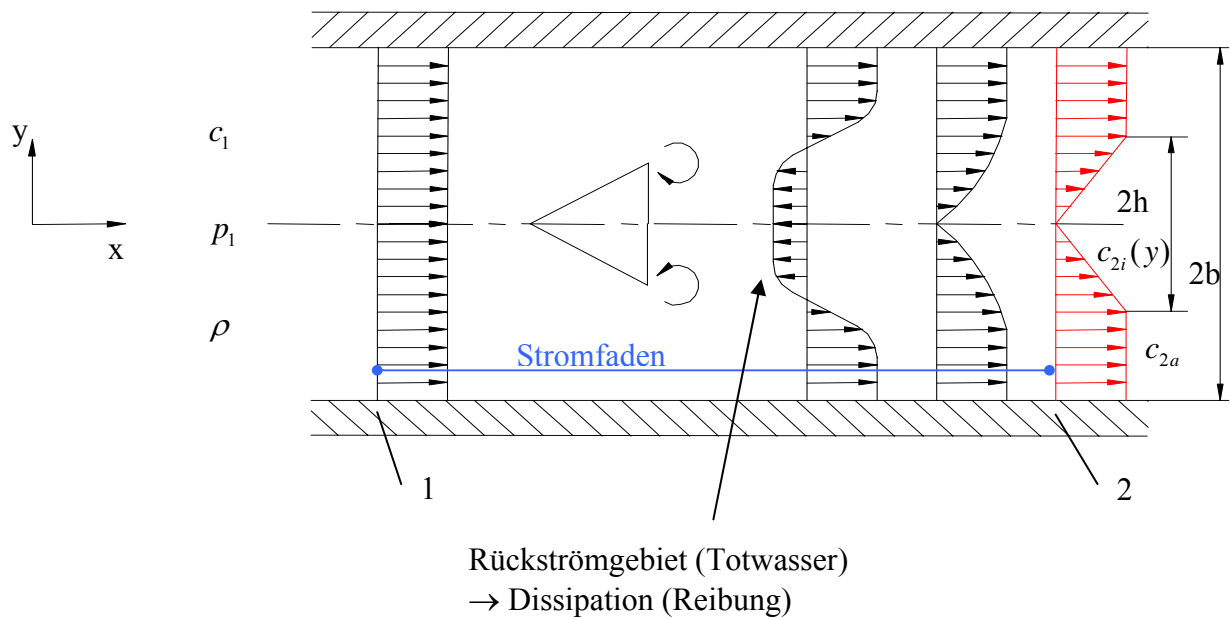
b) x-Komponente der von dem Medium auf den Körper ausgeübten Kraft nach Größe und Richtung



Begriffe:

- inkompressibles Medium ($\rho = \text{konst.}$)
- reibungsbehaftete Strömung
- stationäre Strömung
- Drücke p_1 und p_2 jeweils konstant über den Querschnitt
- Strömung außerhalb des Totwassergebietes näherungsweise reibungsfrei
- Vernachlässigung der Erdschwere

a) Geschwindigkeitsprofile im Totwassergebiet



Es gilt für:

$$h \leq |y| \leq b: \quad c_{2a} = c_2$$

$$0 \leq |y| \leq h: \quad c_{2i}(y) = a \cdot y + b$$

aus den Randbedingungen folgt:

1.RB: $c_{2i}(y=0) = 0 \Rightarrow b = 0$

2.RB: $c_{2i}(y=h) = c_{2a} = c_2 \Rightarrow a = \frac{c_2}{h}$

$$\Rightarrow c_{2i}(y) = c_2 \cdot \frac{y}{h}$$

Konti-Gleichung:

$$m_1 = m_{2a} + m_{2i}$$

$$\Leftrightarrow \rho \cdot c_1 \cdot 2b \cdot t = \rho \cdot c_2 \cdot 2 \cdot (b-h) \cdot t + \underbrace{\rho \cdot 2 \cdot \int_0^h c_2 \cdot \frac{y}{h} \cdot t \cdot dy}_{c_2 \cdot h \cdot t}$$

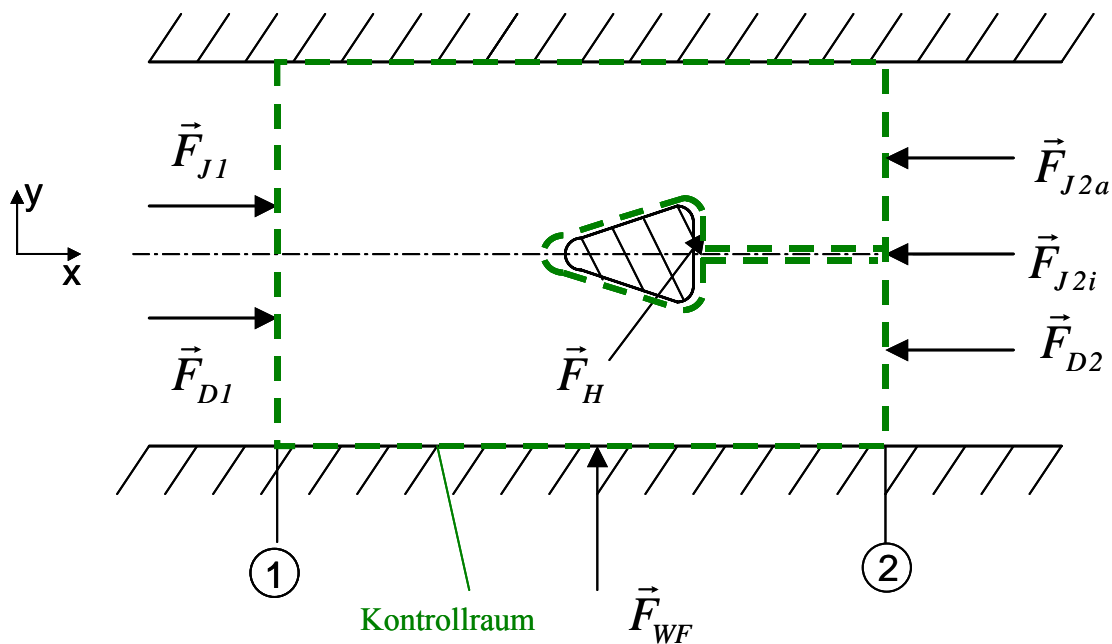
$$\Leftrightarrow c_2 = c_1 \cdot \frac{2b}{2b-h}$$

Bernoulli von 1 → 2 (da Strömung im Außenbereich reibungsfrei):

$$p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2$$

$$\Rightarrow p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 \cdot \frac{h \cdot (h-4b)}{(2b-h)^2}$$

b) Impulssatz mit Kontrollraum



Wegen reibungsfreier Strömung im Außenbereich wirkt an der Kanalwand keine Reibkraft!

Impulssatz:

$$\sum \vec{F}_j + \sum \vec{F}_a = 0$$

$$\vec{F}_{J1} + \vec{F}_{D1} + \vec{F}_H + \vec{F}_{J2a} + \vec{F}_{D2} + \vec{F}_{J2i} + \vec{F}_{WF} = 0$$

Kraft der Wand auf die Flüssigkeit $F_{WF} = 0$, deshalb ist auch $F_{H,y} = 0$.

Impulssatz in x-Richtung:

$$|\vec{F}_{j1}| + |\vec{F}_{D1}| + |\vec{F}_{H,x}| - |\vec{F}_{j2a}| - |\vec{F}_{D2}| - |\vec{F}_{j2i}| = 0$$

Berechnung der Kräfte:

$$|\vec{F}_{j1}| = \rho \cdot c_1^2 \cdot 2 \cdot b \cdot t$$

$$|\vec{F}_{D1}| = p_1 \cdot 2 \cdot b \cdot t$$

$$|\vec{F}_{j2a}| = \rho \cdot c_2^2 \cdot 2 \cdot (b-h) \cdot t$$

$$|\vec{F}_{D2}| = p_2 \cdot 2 \cdot b \cdot t$$

Berechnung von $|\vec{F}_{j2i}|$ über Integration:

$$\Rightarrow |\vec{F}_{j2i}| = \int_A \rho \cdot c_{2i}^2(y) \cdot dA = \int_{y=-h}^{y=h} \rho \cdot \left(c_2 \cdot \frac{y}{h} \right)^2 \cdot t dy = 2 \cdot \int_{y=0}^{y=h} \rho \cdot \left(c_2 \cdot \frac{y}{h} \right)^2 \cdot t \cdot dy$$

$$|\vec{F}_{j2i}| = 2 \cdot \rho \cdot t \cdot c_2^2 \cdot \frac{y^3}{3 \cdot h^2} \Big|_0^h = \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot c_2^2 \cdot t \cdot h$$

Einsetzen in den Impulssatz in x-Richtung liefert:

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}_{j1}| + |\vec{F}_{D1}| + |\vec{F}_{H,x}| - |\vec{F}_{j2a}| - |\vec{F}_{D2}| - |\vec{F}_{j2i}| &= 0 \\
 \Leftrightarrow \rho \cdot c_1^2 \cdot 2bt + p_1 \cdot 2bt + |\vec{F}_{H,x}| - \rho \cdot c_2^2 \cdot 2(b-h)t - p_2 \cdot 2bt - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot c_2^2 \cdot t \cdot h &= 0 \\
 \Leftrightarrow |\vec{F}_{H,x}| &= - \left[(p_1 - p_2) \cdot 2 \cdot b \cdot t + \rho \cdot c_1^2 \cdot 2 \cdot b \cdot t - \rho \cdot c_2^2 \cdot 2 \cdot t \cdot \left(b - \frac{2}{3}h \right) \right] \\
 |\vec{F}_H| = \underbrace{|\vec{F}_{H,x}|}_{da |\vec{F}_{H,y}|=0} &= -2 \cdot b \cdot t \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \frac{h}{b} \cdot \left[\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{b}}{\left(1 - \frac{h}{2 \cdot b} \right)^2} \right] < 0
 \end{aligned}$$

$\vec{F}_{H,x}$ als Kraft des Körpers auf die Strömung (Haltekraft) wirkt somit entgegen der Strömungsrichtung. Gesucht ist aber die x-Komponente der von der Strömung auf den Körper ausgeübten Kraft, die so genannte Widerstandskraft \vec{F}_w , die zu $\vec{F}_{H,x}$ in folgender Beziehung steht:

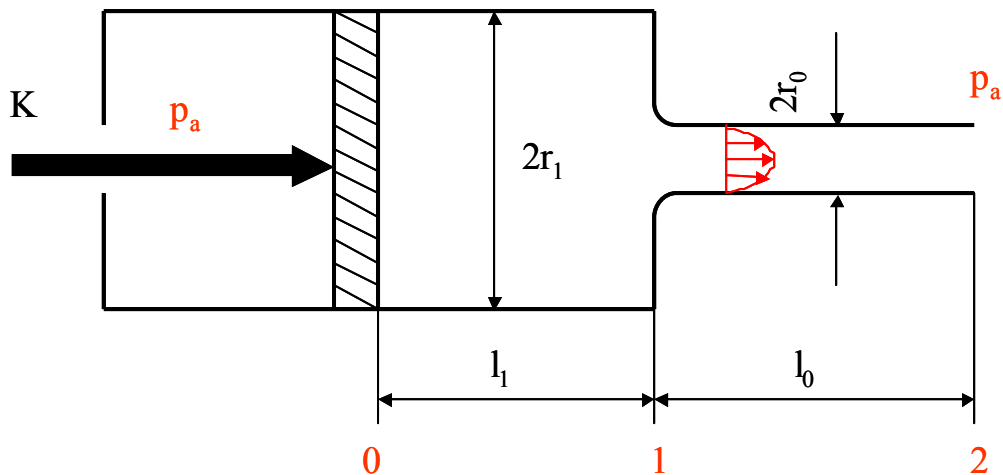
$$\vec{F}_w = \begin{pmatrix} F_w \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{F}_{H,x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot b \cdot t \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \frac{h}{b} \cdot \left[\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{b}}{\left(1 - \frac{h}{2 \cdot b} \right)^2} \right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Widerstandskraft als x-Komponente der von der Strömung auf den Körper ausgeübten Kraft wirkt immer in Strömungsrichtung, siehe dazu auch Kapitel 3.3.13 „Widerstand und Druckverlust“ des Skripts zur Vorlesung „Strömungslehre“.

Aufgabe 2

Gegeben: $K = 5 \text{ N}$, $r_0 = 0,02 \text{ cm}$, $l_1 = 2 \text{ cm}$, $r_1 = 0,5 \text{ cm}$, $l_0 = 4 \text{ cm}$, $\mu = 0,002 \text{ Ns/m}^2$

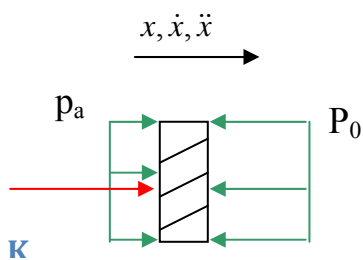
Gesucht: a) Entleerungszeit Δt der Spritze
b) Überprüfung ob $Re_{2r_0} < 2300$, da das Hagen-Poiseuille-Gesetz als Synonym für ausgebildete laminare Rohrströmung steht



Begriffe:

- ausgebildete Strömung \rightarrow stationärer Vorgang \rightarrow konstante Kolbengeschwindigkeit
- Druckabfall $p_0 - p_1 \approx 0 \Rightarrow p_0 \approx p_1$
- In der Kanüle gilt das Hagen-Poiseuille-Gesetz, d.h. ausgebildete laminare Rohrströmung

Wegen konstanter Geschwindigkeit des Kolbens folgt aus dem Newtonschen Grundgesetz:



$$\dot{x} = \frac{l_1}{\Delta t} = \text{konst.} \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} = 0 = p_a \cdot \pi \cdot r_1^2 + K - p_0 \cdot \pi \cdot r_1^2$$

$$\Rightarrow p_0 - p_a = \frac{K}{\pi \cdot r_1^2}$$

mit

$$p_0 - p_1 = 0 \Leftrightarrow p_0 = p_1$$

folgt

$$\Rightarrow p_1 - p_a = \frac{K}{\pi \cdot r_1^2} \quad (2.1)$$

Druckverlust in der Kanüle:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = p_1 - p_a = \frac{\rho}{2} c_m^2 \frac{L_o}{2 \cdot r_o} \cdot \lambda_{lam}$$

mit

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{\text{Re}_{2r_o}} \quad ; \quad \text{Re}_{2r_o} = \frac{\rho \cdot c_m \cdot 2 \cdot r_o}{\mu} \quad ; \quad \mu = \rho \cdot \nu$$

folgt

$$\Delta p = p_1 - p_a = 8 \cdot c_m \frac{L_o}{r_o^2} \cdot \mu \quad (2.2)$$

Konti von 0 \rightarrow 1:

$$\cancel{\varnothing} \cdot \underbrace{c_0}_{\frac{l_1}{\Delta t}} \cdot \pi \cdot r_1^2 = \cancel{\varnothing} \cdot \underbrace{c_1}_{c_m} \cdot \pi \cdot r_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_1}{\Delta t} \cdot \pi \cdot r_1^2 = c_m \cdot \pi \cdot r_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad c_m = \frac{l_1}{\Delta t} \cdot \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 \quad (2.3)$$

mit (2.3) in (2.2)

$$\Delta p = p_1 - p_a = 8 \cdot \frac{l_1}{\Delta t} \cdot \frac{r_1^2 \cdot L_o}{r_o^4} \cdot \mu \quad (2.4)$$

mit (2.1) = (2.4)

$$\frac{K}{\pi \cdot r_1^2} = 8 \cdot \frac{l_1}{\Delta t} \cdot \frac{r_1^2 \cdot L_o}{r_o^4} \cdot \mu$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot L_o \cdot L_1}{K} \cdot \frac{r_1^4}{r_o^4} = 3,14 \text{ s}$$

b) Überprüfung ob laminare Rohrströmung vorliegt, d.h. ob $\text{Re}_{2r_o} < 2300$

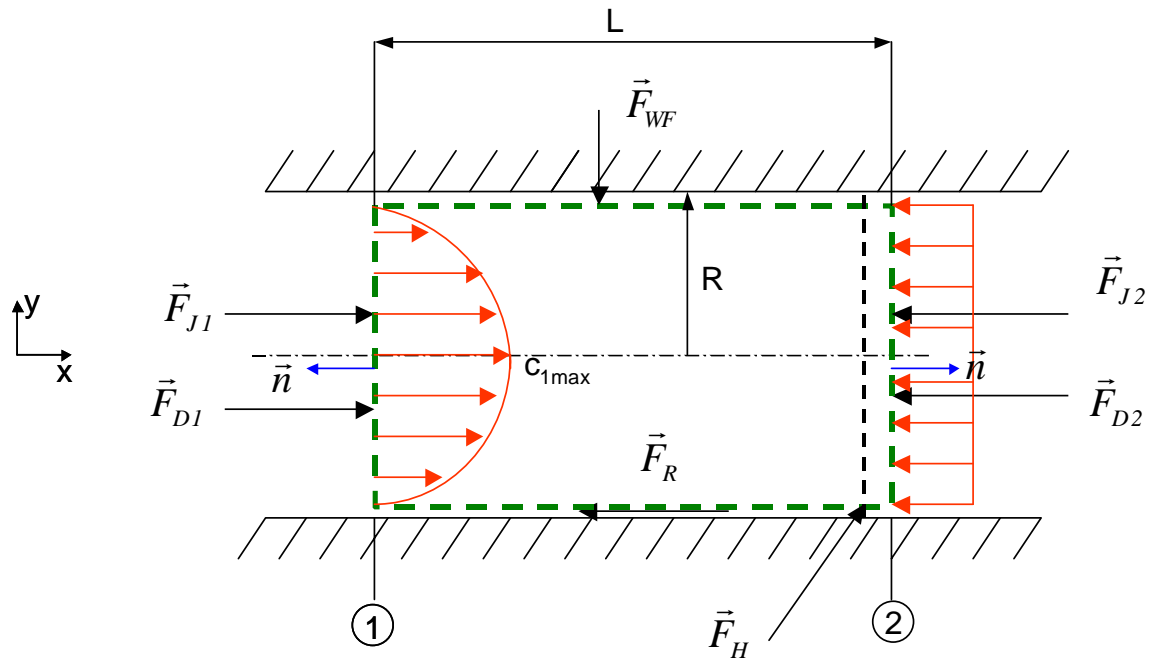
$$\text{Re}_{2r_o} = \frac{\rho \cdot c_m \cdot 2 \cdot r_o}{\mu}$$

ρ ist nicht gegeben, deshalb ist die numerische Berechnung der Reynolds-Zahl nicht möglich.

Aufgabe 3

Gegeben: $R, c_{1\max}, p_1, p_2, L, \mu, \rho$.

Gesucht: Kraft F_H nach Größe und Richtung, die an dem Sieb angreift



Annahmen:

- ausgebildete laminare, inkompressible Rohrströmung vor dem Sieb bei 1
- Blockprofil hinter dem Sieb bei 2
- Berücksichtigung der Wandreibung längs des Rohrstückes der Länge L

Berechnung der Haltekraft \vec{F}_H mittels Impulssatz:

$$\vec{F}_J + \sum \vec{F}_a = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{J1} + \vec{F}_{D1} + \vec{F}_{J2} + \vec{F}_{D2} + \vec{F}_{WF} + \vec{F}_R + \vec{F}_H = 0$$

Strömung im Rohr ist rotationssymmetrisch:

\Rightarrow Kraft der Wand auf die Flüssigkeit $F_{WF} = 0$, deshalb ist auch $F_{H,y} = 0$.

Impulssatz nur in Strömungsrichtung:

$$|\vec{F}_{J1}| - |\vec{F}_{J2}| + |\vec{F}_{D1}| - |\vec{F}_{D2}| - |\vec{F}_R| + |\vec{F}_{H,x}| = 0$$

Berechnung von $\left| \vec{F}_{J1} \right|$:

$$\left| \vec{F}_{J1} \right| = \rho \cdot \int_0^R c_1^2(r) \cdot \underbrace{2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}_{\text{Kreisringquerschnitt}}$$

$$\text{mit } c_1(r) = c_{1\max} \cdot \underbrace{\left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]}_{\text{Hagen-Poiseuille-Gesetz}}$$

$$\left| \vec{F}_{J1} \right| = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot \int_0^R \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right]^2 \cdot r \cdot dr$$

$$\left| \vec{F}_{J1} \right| = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot \int_0^R \left[r - 2 \cdot \frac{r^3}{R^2} + \frac{r^5}{R^4} \right] \cdot dr$$

$$\left| \vec{F}_{J1} \right| = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^4}{R^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{r^6}{R^4} \right]_0^R$$

$$\left| \vec{F}_{J1} \right| = \pi \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot \left[R^2 - R^2 + \frac{1}{3} \cdot R^2 \right] = \frac{\pi}{3} \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot R^2$$

Berechnung von $\left| \vec{F}_{J2} \right|$:

$$\left| \vec{F}_{J2} \right| = \rho \cdot c_2^2 \cdot A_2 = \rho \cdot c_2^2 \cdot \pi \cdot R^2$$

aus der Konti-Gl. folgt

$$\rho \cdot c_{1m} \cdot \pi \cdot R^2 = \rho \cdot c_2 \cdot \pi \cdot R^2 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = c_{1m}$$

mit

$$c_{1m} = \frac{c_{1\max}}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \vec{F}_{J2} \right| = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot c_{1\max}^2 \cdot R^2$$

Berechnung der Druckkräfte:

$$\left| \vec{F}_{D1} \right| = p_1 \cdot \pi \cdot R^2; \quad \left| \vec{F}_{D2} \right| = p_2 \cdot \pi \cdot R^2$$

Berechnung von \vec{F}_R mittels Integration der Schubspannungsverteilung:

$$|\vec{F}_R| = \int_0^L |\tau_w| \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot dx$$

Newtonscher Schubspannungsansatz:

$$|\tau_w| = \left| \mu \cdot \frac{dc}{dr} \right|_{r=R} = \left| \mu \cdot \frac{d(c_1(r))}{dr} \right|_{r=R}$$

mit

$$c_1(r) = c_{1\max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \rightarrow \frac{d(c_1(r))}{dr} = -2 \cdot c_{1\max} \cdot \frac{r}{R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d(c_1(r))}{dr} \bigg|_{r=R} = -2 \cdot c_{1\max} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_R| = \int_0^L \left| \mu \cdot \left(-2 \cdot c_{1\max} \cdot \frac{1}{R} \right) \right| \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot dx = |\vec{F}_R| = 4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot L \cdot c_{1\max}$$

Einsetzen in den Impulssatz liefert:

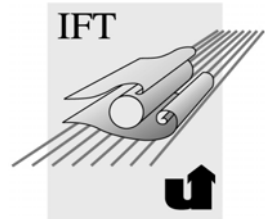
$$\begin{aligned} |\vec{F}_{H,x}| &= |\vec{F}_H| = \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) + (p_2 - p_1) \cdot \pi \cdot R^2 + 4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot L \cdot c_{1\max} \\ &= R^2 \cdot \pi \cdot \left[4 \cdot \frac{\mu \cdot L}{R^2} \cdot c_{1\max} - \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 - (p_1 - p_2) \right] \end{aligned}$$

Da der Druckabfall im Rohr $(p_1 - p_2)$ die Reibungskraft und das Sieb überwinden muss, muss gelten:

$$p_1 - p_2 > 4 \cdot \frac{\mu \cdot L}{R^2} \cdot c_{1\max}$$

Somit wirkt $|\vec{F}_{H,x}|$ in negative x-Richtung:

$$\vec{F}_H = \begin{pmatrix} R^2 \cdot \pi \cdot \left[4 \cdot \frac{\mu \cdot L}{R^2} \cdot c_{1\max} - \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 - (p_1 - p_2) \right] < 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Übungen im Pflichtfach "Strömungslehre"

10. Aufgabenblatt

Aufgabe 1

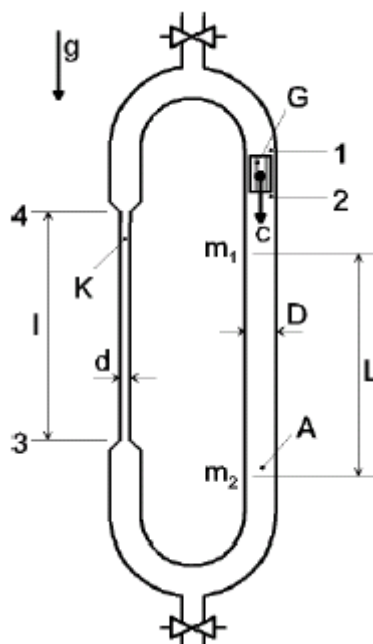
Bei einem Gasviskosimeter bilden eine Kapillare K und ein Kreisrohr A eine geschlossene Strecke, die mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt ist. Im vertikalen Rohr A gleitet ein Kolben reibungsfrei, aber völlig abdichtend, unter dem Einfluss seines Gewichtes G mit konstanter Geschwindigkeit c abwärts und treibt so das Gas durch die Kapillare K.

Die Strömung in der Kapillare sei laminar und über die ganze Länge voll ausgebildet. Die Druckänderung beim Übergang vom Ende der Kapillare zum erweiterten Querschnitt bei 4 sei vernachlässigbar klein. Im restlichen Rohr ist der Reibungseinfluss zu vernachlässigen. Das Gas ist als inkompressibel anzusehen, sein Gewicht ist vernachlässigbar klein, seine Temperatur sei konstant.

Wie groß ist die dynamische Zähigkeit μ des untersuchten Gases, wenn zwischen den Durchgängen des Kolbens an den Marken m_1 und m_2 eine Zeitspanne Δt gemessen wird?

Gegeben:

$d, D, l, L, G, \Delta t, \rho$.



Aufgabe 2

Zur Bestimmung des Druckverlustbeiwerts eines Wärmetauschers WT soll folgende Anordnung benutzt werden:

Aus einem großen, offenen Behälter mit konstanter Spiegelhöhe strömt Flüssigkeit (Newtonsches Medium, Dichte ρ , kin. Zähigkeit ν) stationär über eine Leitung in den Wärmetauscher (kreisförmiger Eintrittsquerschnitt bei 2 mit Durchmesser D) und tritt bei 3 mit dem gemessenen Volumenstrom \dot{V} in die Umgebung aus.

Die Leitung von der Länge L hat kreisförmigen Querschnitt (Durchmesser D) und enthält einen 90°-Krümmer mit dem Druckverlustbeiwert ζ_{Kr} . Über dem Flüssigkeitsspiegel bei 0 und in der Umgebung des Austrittsstutzens bei 3, herrsche der konstante Umgebungsdruck. Es kann näherungsweise angenommen werden, dass die Strömung von 0 bis zum Leitungsanfang bei 1 reibungsfrei ist und dass über die ganze Länge L der Leitung ausgebildete Strömung vorliegt.

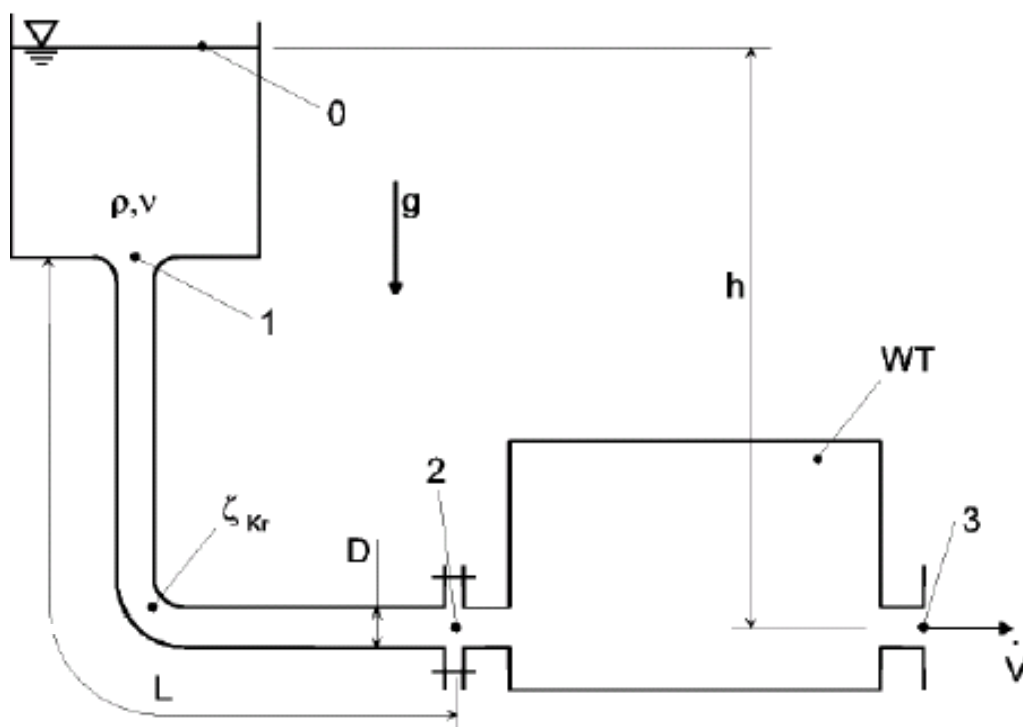
Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen den Druckverlustbeiwert

$$\zeta_{Kr} = \frac{p_2 - p_3}{\frac{\rho}{2} c_D^2}$$

des Wärmetauschers.

Gegeben:

$h, L, \zeta_{Kr}, g, D = 0,03 \text{ m}, \dot{V} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}, \nu = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$



Aufgabe 3

Ein inkompressibles Newtonsches Medium (Dichte ρ , kin. Zähigkeit ν) strömt durch ein Kühlsystem, das folgende Elemente enthält:

Ein Drosselorgan Dr (Druckverlustbeiwert ζ_{Dr}), ein Kreisrohr (Länge L_1 , Durchmesser D) mit drei 90°-Krümmern, einen Kühler, der aus n einzelnen Rohren (Länge l , Durchmesser d) besteht, ein weiteres Kreisrohr (Länge L_2 , Durchmesser D) mit einem 90°-Krümmer, welches das Medium in der Höhe h über dem Eintrittsniveau abführt (Druckverlustbeiwert je Krümmer ζ_{Kr}).

Man bestimme die Druckdifferenz Δp_{AB} zwischen den Punkten A und B, die notwendig ist, damit sich ein vorgegebener Volumenstrom \dot{V} einstellt.

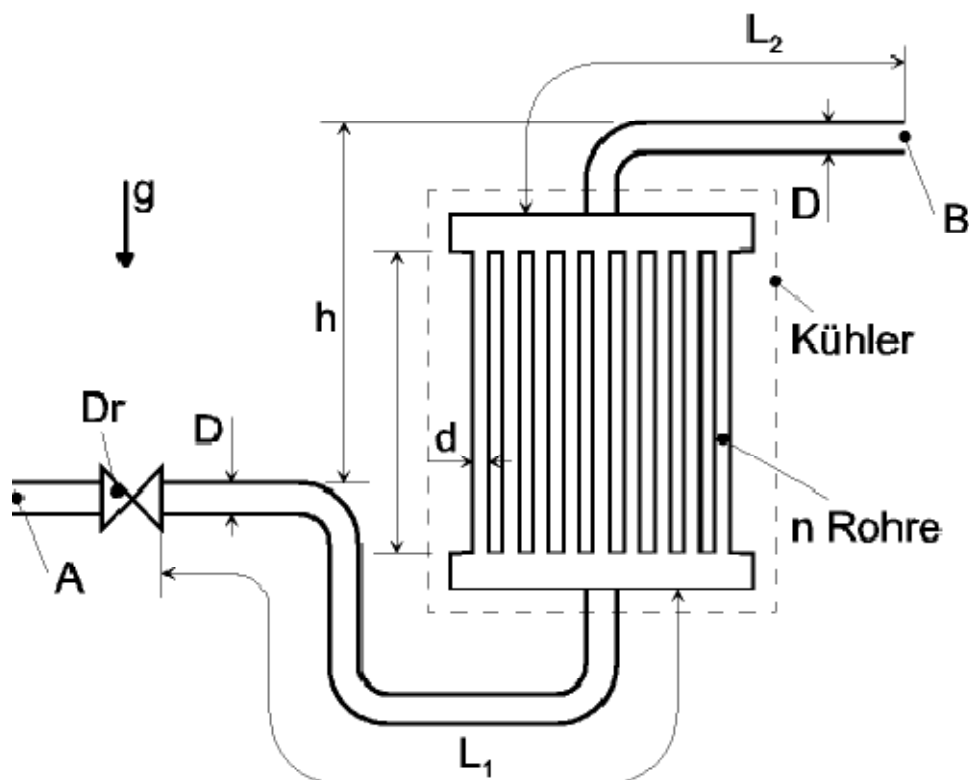
Voraussetzungen:

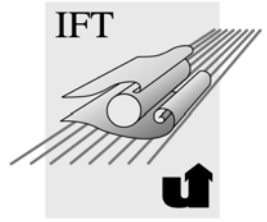
Alle Rohre seien hydraulisch glatt. Als Druckverlust im Kühler soll nur derjenige in den n Rohren berücksichtigt werden. In allen Rohren ist die Strömung als ausgebildet anzusehen.

Gegeben:

$L_1, L_2, l, \rho, \zeta_{Kr}, h, g, \zeta_{Dr},$

$D = 0,1 \text{ m}, n = 60, d = 1 \text{ cm}, \dot{V} = 4,71 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}, \nu = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$





Lösungen zu dem Aufgabenblatt 10

Allgemeine Formel für den Druckverlust bei ausgebildeter Strömung für hydraulisch glatte Rohre:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \zeta_v$$

mit

$$\zeta_v = \frac{l}{D} \cdot \lambda$$

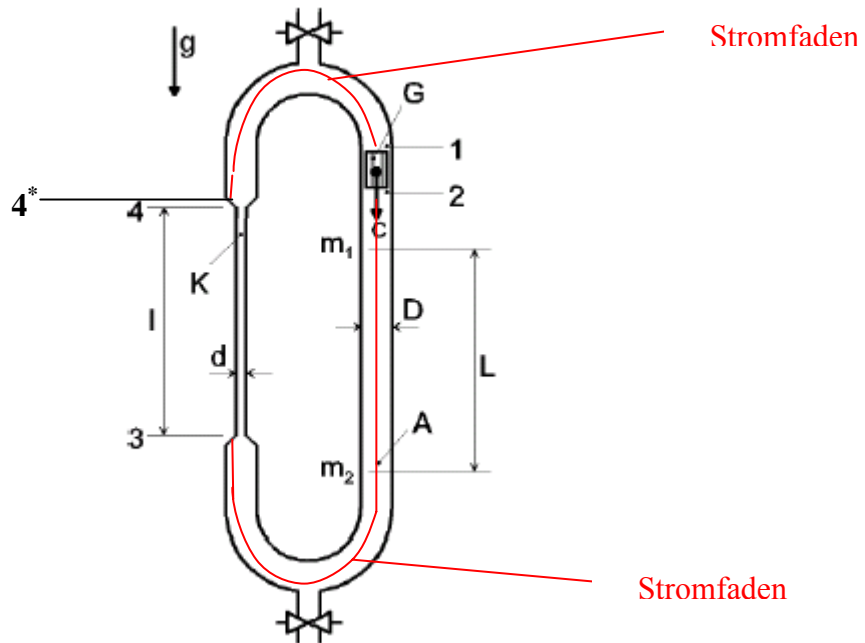
und

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_{lam} = \frac{64}{Re_D} & Re_D < 2300 \\ \lambda_{turb} = \frac{0,3164}{Re_D^{1/4}} & \text{Blasius-Gesetz für } Re_D > 2300 \end{cases}$$

Aufgabe 1

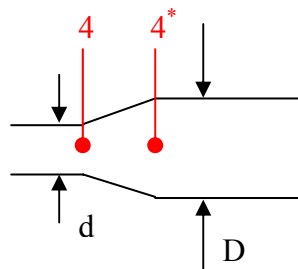
Gegeben: $d, D, l, L, G, \Delta t, \rho$

Gesucht: dynamische Zähigkeit $\mu = \rho \cdot \nu$ des untersuchten Gases



Annahmen:

- Sinkgeschwindigkeit c des Kolbens ist konstant \rightarrow stationäre Strömung
- keine Reibung am Kolben
- Strömung in der Kapillare ist laminar, ohne Einlaufstrecke und voll ausgebildet über die Länge l
- kein Druckverlust von (4) \rightarrow (4*)

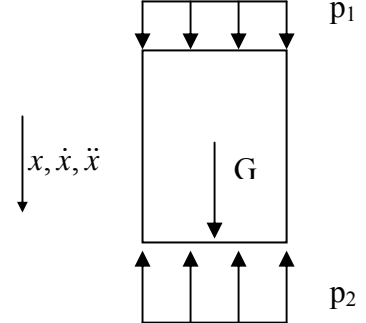


- reibungsfreie Strömung im restlichen Rohr (Durchmesser D)
- konstante Dichte ρ (inkompressibel) und konstante Temperatur T des Gases
- Vernachlässigung des Einflusses der Erdschwere auf das Gas für geringe Höhendifferenzen

Ansatz für die Druckdifferenzen (sog. Druckkette):

$$p_2 - p_1 = (p_2 - p_3) + (p_3 - p_4) + (p_4 - p_4^*) + (p_4^* - p_1)$$

Wegen konstanter Geschwindigkeit des Kolbens folgt aus dem Newtonschen Grundgesetz:

$$\begin{aligned} \dot{x} = c = \frac{L}{\Delta t} = \text{konst.} &\Rightarrow \ddot{x} = 0 \\ m \cdot \ddot{x} = 0 &= G + p_1 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 - p_2 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \\ \Leftrightarrow p_2 - p_1 &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{G}{D^2} \end{aligned}$$


Bernoulli von 2 \rightarrow 3:

$$\begin{aligned} p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 &= p_3 + \frac{\rho}{2} \cdot c_3^2 \\ \Rightarrow p_2 - p_3 &= \frac{\rho}{2} \cdot (c_3^2 - c_2^2) \end{aligned}$$

aus der Konti Gleichung:

$$\rho \cdot c_3 \cdot A_3 = \rho \cdot c_2 \cdot A_2 \Leftrightarrow c_3 = c_2 \cdot \frac{A_2}{A_3} = c_2 \cdot \left(\frac{D}{d} \right)^2$$

folgt

$$p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \cdot \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right)$$

Druckverlust von 3 \rightarrow 4 für laminare, voll ausgebildete Rohrströmung:

$$\Delta p = (p_3 - p_4) = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{64}{\text{Re}_d}$$

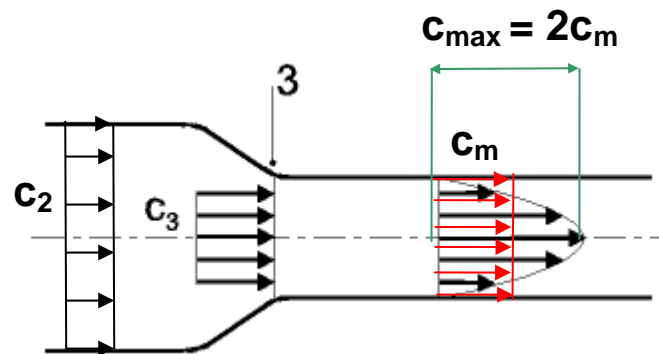
mit

$$\text{Re}_d = \frac{c_m \cdot d}{\nu}$$

folgt

$$p_3 - p_4 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m \cdot \frac{l}{d^2} \cdot 64 \cdot \nu$$

Der volumetrische Mittelwert der Geschwindigkeit c_m entspricht c_3 :



$$c_m = c_3 = c_2 \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

$$\Rightarrow p_3 - p_4 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2 \cdot \frac{l \cdot D^2}{d^4} \cdot 64 \cdot \nu$$

kein Druckverlust von 4 \rightarrow 4*:

$$p_4^* - p_4 = 0$$

Bernoulli von 4* \rightarrow 1:

$$p_4^* + \frac{\rho}{2} c_4^{*2} = p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2$$

aus der Konti-Gl.:

$$\rho \cdot c_4^* \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} = \rho \cdot c_1 \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow c_4^* = c_1$$

folgt

$$p_4^* - p_1 = 0$$

Einsetzen in die Druckkette:

$$p_2 - p_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{G}{D^2} = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \cdot \left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right) + \frac{\rho}{2} \cdot c_2 \cdot \frac{l \cdot D^2}{d^4} \cdot 64 \cdot \nu + 0 + 0$$

mit

$$\mu = \rho \cdot \nu \quad \text{und} \quad c_2 = c = \frac{L}{\Delta t}$$

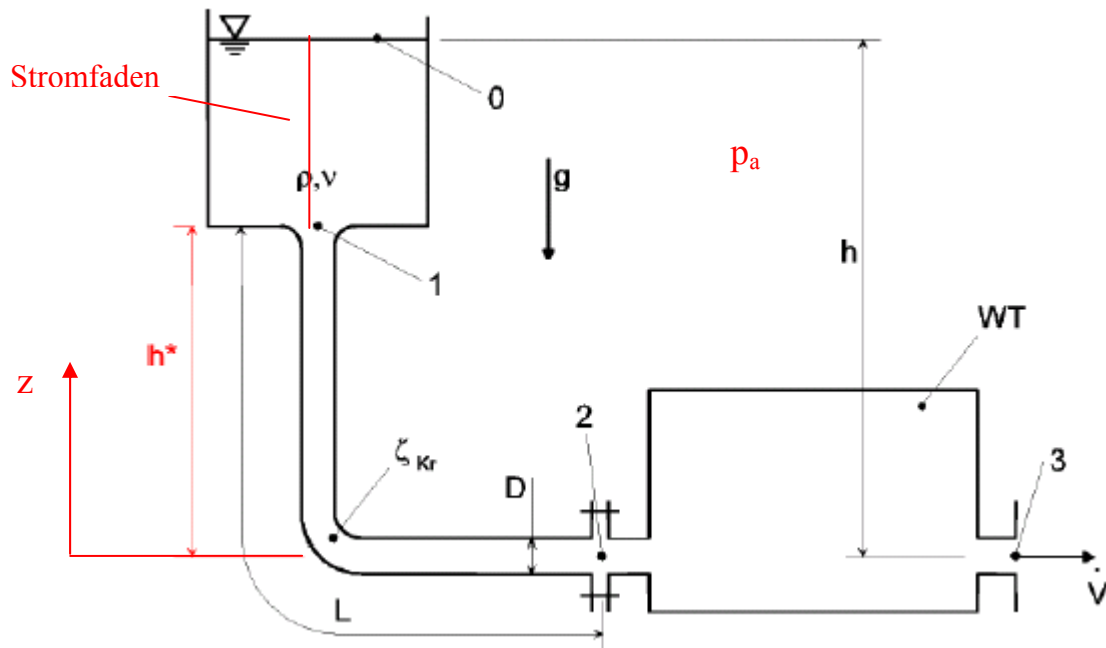
folgt

$$\mu = \frac{d^4 \cdot \Delta t}{D^2 \cdot 32 \cdot l \cdot L} \cdot \left\{ \frac{4 \cdot G}{\pi \cdot D^2} - \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{L}{\Delta t} \right)^2 \cdot \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right) \right\}$$

Aufgabe 2

Gegeben: $h, L, \zeta_{Kr}, g, D = 0,03 \text{ m}, v = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \dot{V} = 3 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Gesucht: Druckverlustbeiwert $\zeta_{WT} = \frac{p_2 - p_3}{\frac{\rho}{2} c_D^2}$ des Wärmetauschers



Begriffe:

- großer Behälter, konstante Spiegelhöhe
- stationäre Strömung
- Newtonsches Medium
- Freistrahle bei 3
- reibungsfreie Strömung von $0 \rightarrow 1$
- im Rohr (Länge L) ist die Strömung ausgebildet
- inkompressible Strömung (Dichte ρ)

Druckkette von $0 \rightarrow 3$:

$$p_0 - p_3 = p_a - p_a = 0 = (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \underbrace{(p_2 - p_3)}_{\text{gesucht!}}$$

Bernoulli von $0 \rightarrow 1$:

$$p_0 + \underbrace{\frac{\rho}{2} \cdot c_0^2}_{=0} + \rho \cdot g \cdot h = p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + \rho \cdot g \cdot h^*$$

mit

$$c_1 = c_m = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^2} = c_D$$

folgt

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 + \rho \cdot g \cdot (h^* - h)$$

Druckverlust von 1 nach 2 (ausgebildete Rohrströmung und Rohrkrümmer):

$$(p_1 - p_2) = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left[\zeta_{Kr} + \frac{L}{D} \cdot \lambda \right] - \rho \cdot g \cdot h^*$$

Überprüfung, ob laminare oder turbulente Strömung vorliegt:

$$\text{Re}_D = \frac{c_m \cdot D}{\nu} = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D \cdot \nu} = 1 \cdot 10^4 > 2300 \Rightarrow \text{turbulent}$$

aus dem Blasius-Gesetz

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}_D^{1/4}} = 0,03164$$

folgt

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left(\zeta_{Kr} + \frac{L}{D} \cdot 0,03164 \right) - \rho \cdot g \cdot h^*$$

Druckverlust von 2 nach 3:

$$\Delta p = p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \zeta_{WT}$$

Einsetzen in Druckkette:

$$0 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 + \rho \cdot g \cdot (\cancel{h^*} - h) + \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left[\zeta_{Kr} + 0,03164 \cdot \frac{L}{D} \right] - \rho \cdot g \cdot \cancel{h^*} + \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \zeta_{WT}$$

$$\Leftrightarrow \zeta_{WT} = \frac{2 \cdot g \cdot h}{c_m^2} - \left[1 + \zeta_{Kr} + 0,03164 \cdot \frac{L}{D} \right]$$

mit

$$c_m = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^2}$$

folgt

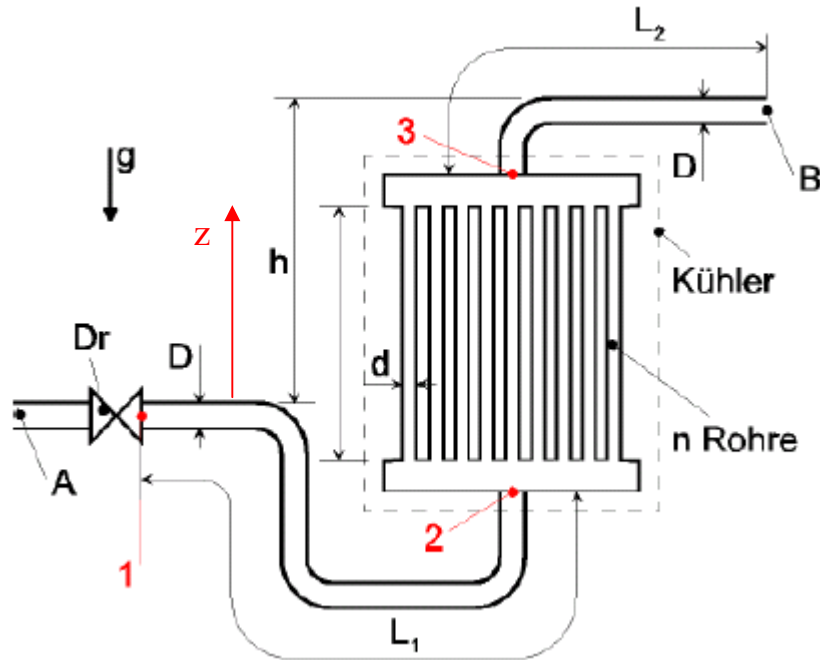
$$\zeta_{WT} = \frac{1}{8} \frac{g \cdot h \cdot \pi^2 \cdot D^4}{\dot{V}^2} - \left(1 + \zeta_{Kr} + 0,03164 \cdot \frac{L}{D} \right)$$

Aufgabe 3

Gegeben: $L_1, L_2, l, \rho, \zeta_{Kr}, h, g, \zeta_{Dr},$

$$D = 0,1 \text{ m}, \quad n = 60, \quad d = 1 \text{ cm}, \quad \dot{V} = 4,71 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}, \quad \nu = 1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Gesucht: Druckdifferenz $\Delta p_{AB} = p_A - p_B$



Begriffe:

- stationäre Strömung (konstanter Volumenstrom)
- inkompressible Strömung (Dichte ρ)
- Newtonsches Medium
- alle Rohre hydraulisch glatt
- Druckverluste im Kühler nur durch Rohrreibung in den n Rohren
- in allen Rohren ist die Strömung ausgebildet

Druckkette von A nach B:

$$\Delta p_{AB} = p_A - p_B = (p_A - p_1) + (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) + (p_3 - p_B) + \rho \cdot g \cdot h$$

Druckverlust von A nach 1:

$$p_A - p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \zeta_{Dr}$$

Druckverlust von 1 nach 2:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left(3 \cdot \zeta_{Kr} + \frac{L_1}{D} \cdot \lambda \right)$$

Überprüfung, ob laminare oder turbulente Strömung vorliegt:

$$Re_D = \frac{c_m \cdot D}{\nu} = \frac{\dot{V} \cdot D}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \nu} = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D \cdot \nu} \approx 6 \cdot 10^3 > 2300 \Rightarrow \text{turbulente Rohrströmung}$$

Blasius-Gesetz:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re_D^{1/4}} = 0,036$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left(3 \cdot \zeta_{Kr} + \frac{L_1}{D} \cdot 0,036 \right)$$

Druckverlust im Kühler durch die n Rohre:

$$p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} \cdot c_d^2 \cdot \frac{l}{d} \cdot \lambda$$

Überprüfung, ob laminare oder turbulente Strömung vorliegt:

$$Re_d = \frac{c_d \cdot d}{\nu} \quad ; \quad c_d = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2 \cdot n} = 1,0 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow Re_d = 1 \cdot 10^3 < 2300 \Rightarrow \text{laminare Rohrströmung}$$

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re_d} = 0,064$$

$$p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} \cdot c_d^2 \cdot \frac{l}{d} \cdot 0,064$$

Druckverlust von 3 nach B für ausgebildete, turbulente Rohrströmung:

$$p_3 - p_B = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left[\zeta_{Kr} + \frac{L_2}{D} \cdot 0,036 \right]$$

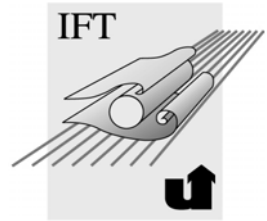
$$\Rightarrow \Delta p_{AB} = p_A - p_B = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left[4 \cdot \zeta_{Kr} + \zeta_{Dr} + \frac{L_1 + L_2}{D} \cdot 0,036 \right] + \frac{\rho}{2} \cdot c_d^2 \cdot \frac{l}{d} \cdot 0,064 + \rho \cdot g \cdot h$$

mit

$$c_m = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^2} \quad \text{und} \quad c_d = \frac{4 \cdot \dot{V}}{n \cdot \pi \cdot d^2}$$

folgt

$$\Delta p_{AB} = p_A - p_B = \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^2} \right)^2 \cdot \left[4 \cdot \zeta_{Kr} + \zeta_{Dr} + \frac{L_1 + L_2}{D} \cdot 0,036 \right] + \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2 \cdot n} \right)^2 \cdot \frac{l}{d} \cdot 0,064 + \rho \cdot g \cdot h$$



Übungen im Pflichtfach "Strömungslehre"

11. Aufgabenblatt

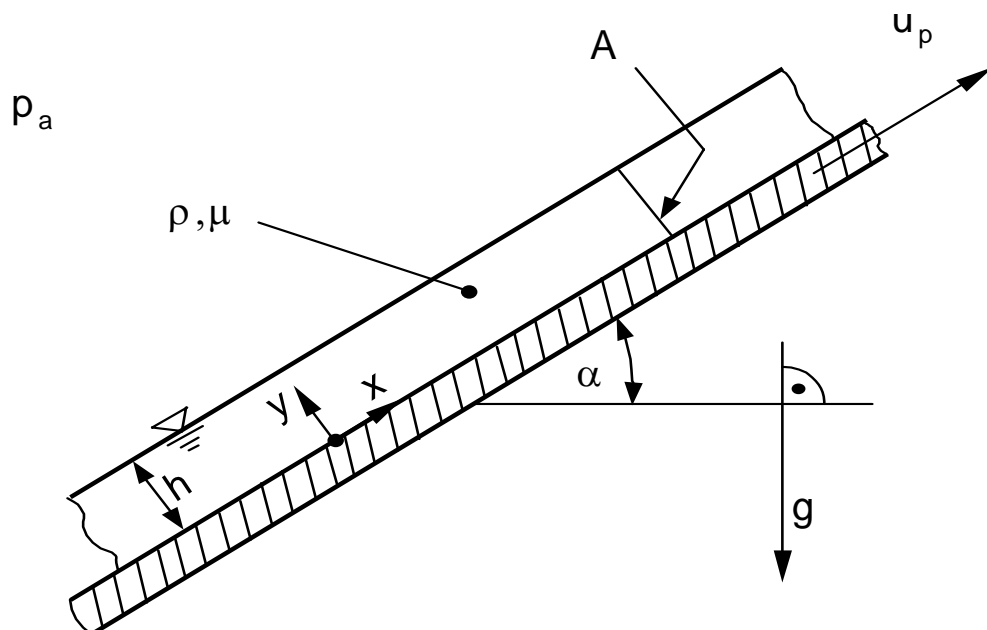
Aufgabe 1

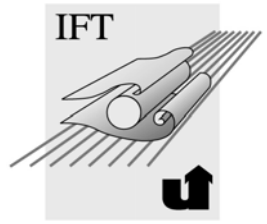
Eine ebene Platte wird mit der konstanten Geschwindigkeit u_p unter dem Winkel α gegen die Horizontale bewegt (s. Abb.). Auf der Plattenoberseite befindet sich in einer Schicht mit konstanter Höhe h ein inkompressibles Newtonsches Medium (Dichte ρ , dyn. Zähigkeit μ), das unter dem Einfluss der Erdschwere und der Schleppwirkung der Platte steht. Die Reibungskräfte zwischen dem Medium und der darüber liegenden Luft seien vernachlässigbar klein. Über der Schicht herrsche der konstante Außendruck p_a .

Unter der Voraussetzung einer ebenen, stationären und voll ausgebildeten, laminaren Strömung bestimme man in Abhängigkeit gegebener Größen

- a) die Geschwindigkeit $u(y)$ und die Schubspannung $\tau(y)$ im strömenden Medium durch eine Kräftebilanz am Massenelement,
- b) die kritische Plattengeschwindigkeit $u_{p,krit}$, bei welcher der Volumenstrom durch einen senkrecht zur Zeichenebene stehenden Querschnitt A (s. Abb.) gerade = 0 ist,
- c) die Leistung P , die pro Flächeneinheit von der Platte an das Medium abgegeben wird.

Gegeben sind: u_p , α , h , μ , ρ , g , p_a .





Lösungen zu dem Aufgabenblatt 11

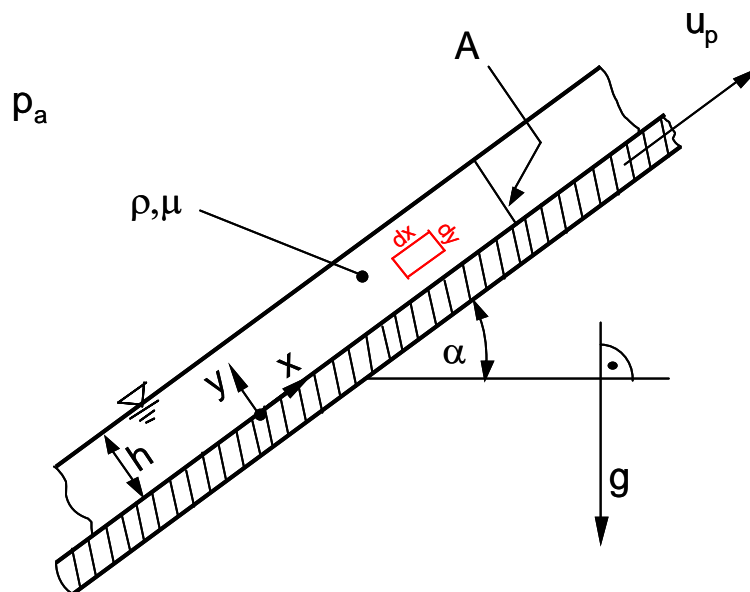
Aufgabe 1

Gegeben: $u_p, \alpha, h, \mu, \rho, g, p_a$.

Gesucht: a) $u(y)$ und $\tau(y)$ mittels Kräftebilanz am Massenelement

b) die kritische Plattengeschwindigkeit $u_{p_{krit}}$ für $\dot{V} = 0$

c) die Leistung P , die pro Flächeneinheit von der Platte an das Medium abgegeben wird

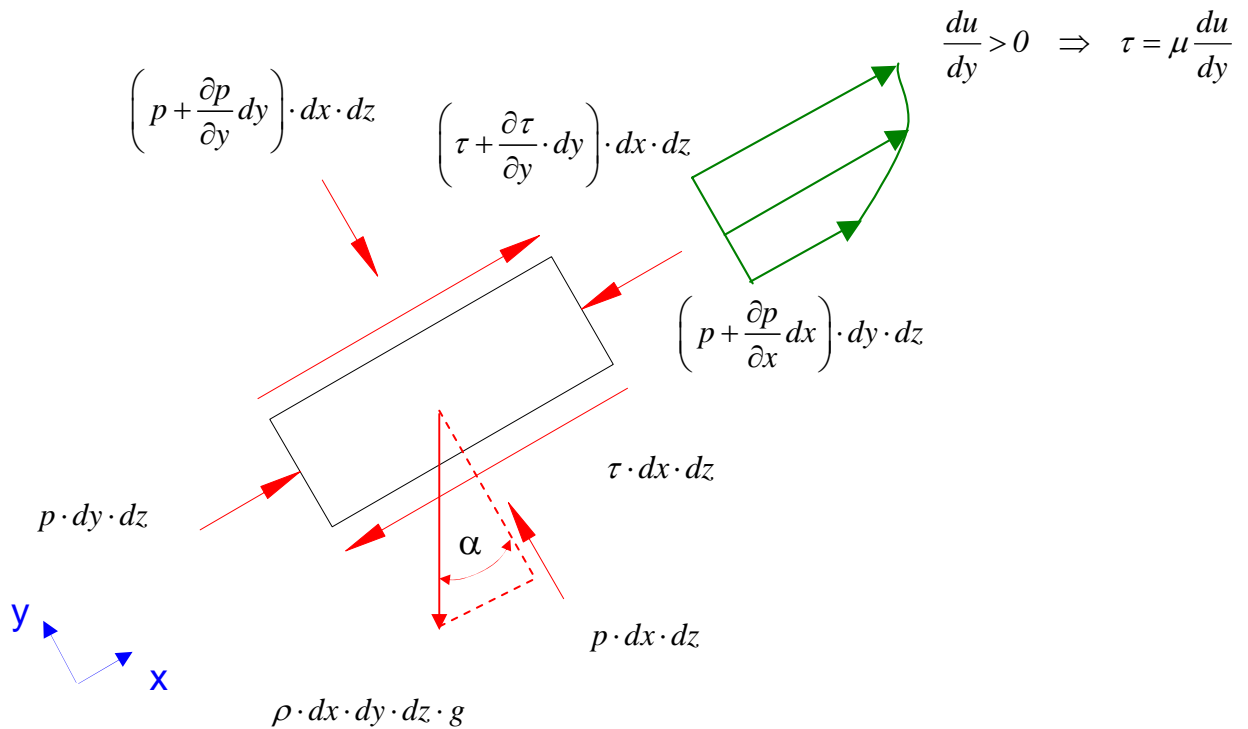


Voraussetzungen:

- inkompressibles Newtonsches Medium (Dichte ρ , dynamische Zähigkeit μ)
- keine Reibung zwischen dem Medium und der darüber liegenden Luft
- konstante Schichthöhe h

- konstanter Außendruck p_a
- ebene Strömung \rightarrow keine Krümmung der Stromlinien
- stationäre Strömung $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$
- voll ausgebildete Strömung $\rightarrow u \neq u(x), u = u(y)$
- laminare Strömung, d. h. es gilt der Newtonsche Schubspannungsansatz

a) Kräftebilanz am Massenelement



Kräftebilanz in x-Richtung:

$$p \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz - \tau \cdot dx \cdot dz + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) \cdot dx \cdot dz - \rho \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} - \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) = 0 \quad (2.1)$$

Kräftebilanz in y-Richtung:

$$p \cdot dx \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \cdot dx \cdot dz - \rho \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow p = -\rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot y + c \quad (2.2)$$

Randbedingungen:

$$p(y=h) = p_a \Leftrightarrow p_a = -\rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot h + c \Leftrightarrow c = p_a + \rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot h$$

$$\Rightarrow p = p_a + \rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot (h - y)$$

$$\Rightarrow p \neq p(x) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

mit (2.3) in (2.1)

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \quad (2.4)$$

Newtonscher Schubspannungsansatz:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\tau \neq \tau(x) \quad \tau = \tau(y) \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{d\tau}{dy} \quad (2.6)$$

mit (2.6) in (2.5):

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} \quad (2.7)$$

mit (2.6) in (2.4):

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \quad (2.8)$$

mit (2.7) in (2.8):

$$\mu \cdot \frac{d^2 u}{dy^2} = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \mu \cdot \frac{du}{dy} = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot y + c_1 = \tau$$

Randbedingung 1:

$$\tau(y=h) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot h + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot h$$

$$\Rightarrow \mu \cdot \frac{du}{dy} = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot (y - h)$$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{\mu} \cdot \left(\frac{y^2}{2} - h \cdot y \right) + c_2$$

Randbedingung 2:

$$u(y=0) = u_p \Rightarrow c_2 = u_p$$

$$u(y) = u_p + \frac{\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{\mu} \cdot \left(\frac{y^2}{2} - h \cdot y \right)$$

b) Berechnung des Volumenstroms:

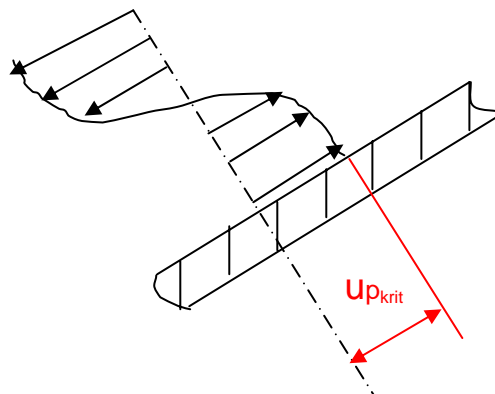
$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^h u(y) \cdot I \cdot dy = \left[u_{p_{krit}} \cdot y + \frac{1}{\mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot y^3 - \frac{1}{2} \cdot h \cdot y^2 \right) \right]_0^h \\ &= u_{p_{krit}} \cdot h + \frac{1}{\mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot h^3 - \frac{1}{2} \cdot h^3 \right) \\ &= u_{p_{krit}} \cdot h - \frac{1}{\mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{1}{3} h^3 \end{aligned}$$

Berechnung von $u_{p_{krit}}$:

$$\dot{V} = 0$$

$$\Leftrightarrow u_{p_{krit}} \cdot h - \frac{1}{\mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{1}{3} h^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow u_{p_{krit}} = \frac{1}{\mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{1}{3} h^2$$



c)

$$P = \frac{\textit{Leistung}}{\textit{Fläche}} = \frac{\textit{Kraft}}{\textit{Fläche}} \cdot \frac{\textit{Weg}}{\textit{Zeit}} = \frac{\textit{Kraft}}{\textit{Fläche}} \cdot \textit{Geschwindigkeit}$$

$$P = |\tau_w| \cdot u_p = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot h \cdot u_p$$