

**Aufgabe 1:****( 4,0 Punkte)**

Die Dichte  $\rho$  von Flüssigkeiten kann mit Hilfe eines sogn. Aräometers (Spindel) bestimmt werden. Dieses Aräometer besteht aus einem luftgefüllten, kreiszylindrischen Glaskolben, an dessen Boden ein Ballastgewicht angebracht ist, und aus einem coaxialen kreiszylindrischen Glasrohr (Durchmesser  $d$ , Länge  $h_1$ ), das auf den Glaskolben aufgesetzt ist und das eine Messskala von der Länge  $L$  trägt (s.Abb.a)). Wird ein solches Aräometer in eine Flüssigkeit eingetaucht, so kann deren Dichte  $\rho$  direkt an der Messskala abgelesen werden.

Die Gesamtmasse des Aräometers sei  $m$ , das Volumen des Aräometerkolbens (ohne das Glasrohr mit der Messskala) sei  $V$ .

- a) Man bestimme, für welchen Bereich  $\rho_{\max} \geq \rho \geq \rho_{\min}$  das Aräometer verwendet werden kann, wenn folgende Daten gegeben sind:

Gesamtmasse  $m = 9 \text{ g}$ , Kolbenvolumen  $V = 9 \text{ cm}^3$ ,  $d = 0,5 \text{ cm}$ ,  $h_1 = 5,1 \text{ cm}$ ,  
 $L = 2,5 \text{ cm}$ .

- b) Der Schwerpunkt  $S$  des Aräometers liege bei  $h_3 = \frac{1}{3}h_2$  (s.Abb.b)). Ist dann die Schwimmage des Aräometers stabil, wenn für  $\rho > \rho_{\max}$  gerade das Glasrohr mit der Messskala ganz aus der Flüssigkeit herausragt (s.Abb.b))?  
Man begründe die Antwort!

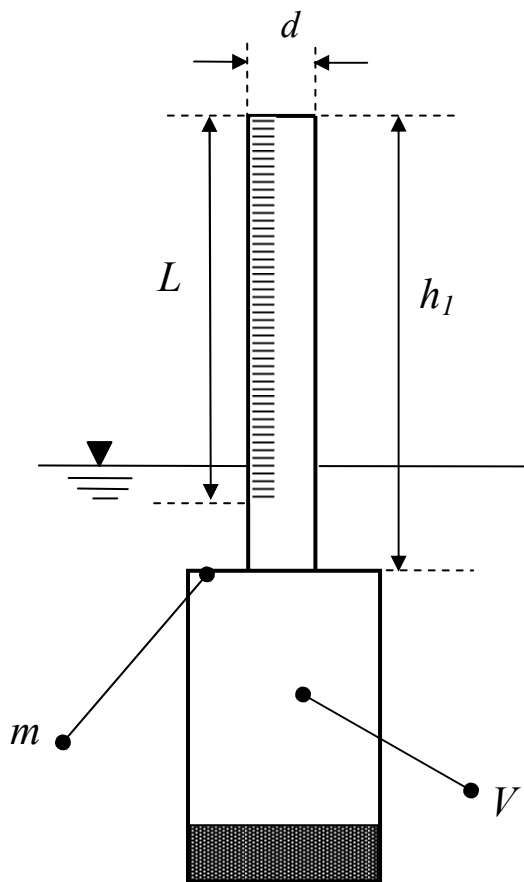


Abb. a)

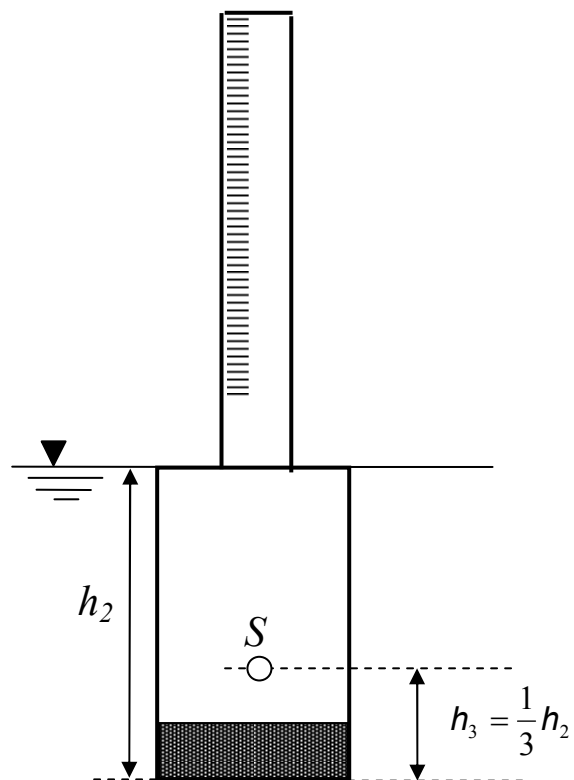


Abb. b)

# Aufgabe 1:

a) Aräometer schwimmt in der Meßflüssigkeit:

$$\rightarrow \text{Auftrieb } A \stackrel{!}{=} \text{Gewicht } G$$

$S_{\min}$  :  $\rightarrow$  Aräometer ist ganz eingetaucht:

$$\rightarrow A = S_{\min} \cdot g \cdot V_{\text{gesamt}} \stackrel{!}{=} G$$

$$\rightarrow S_{\min} \cdot g \cdot \left\{ V + \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h_1 \right\} \stackrel{!}{=} m \cdot g$$

$$\rightarrow S_{\min} = \frac{m}{V + \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h_1} = 0,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

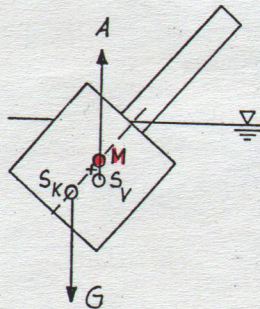
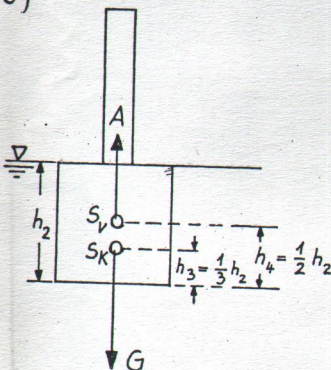
$S_{\max}$  : Aräometer bis  $(h_1 - L)$  eingetaucht:

$$\rightarrow A = S_{\max} \cdot g \cdot \left( V + \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 \cdot [h_1 - L] \right) = G$$

$$\rightarrow S_{\max} = 0,947 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\rightarrow \underline{S_{\min} = 0,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \leq S \leq 0,947 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = S_{\max}}$$

b)



$S_K$  = Körper =  
schwerpunkt

$S_V$  = Schwerpunkt  
der verdrängten  
Flüssigkeit

$M$  = Metazentrum

$\rightarrow M$  liegt  
oberhalb  $S_K$

$\rightarrow$  stabil

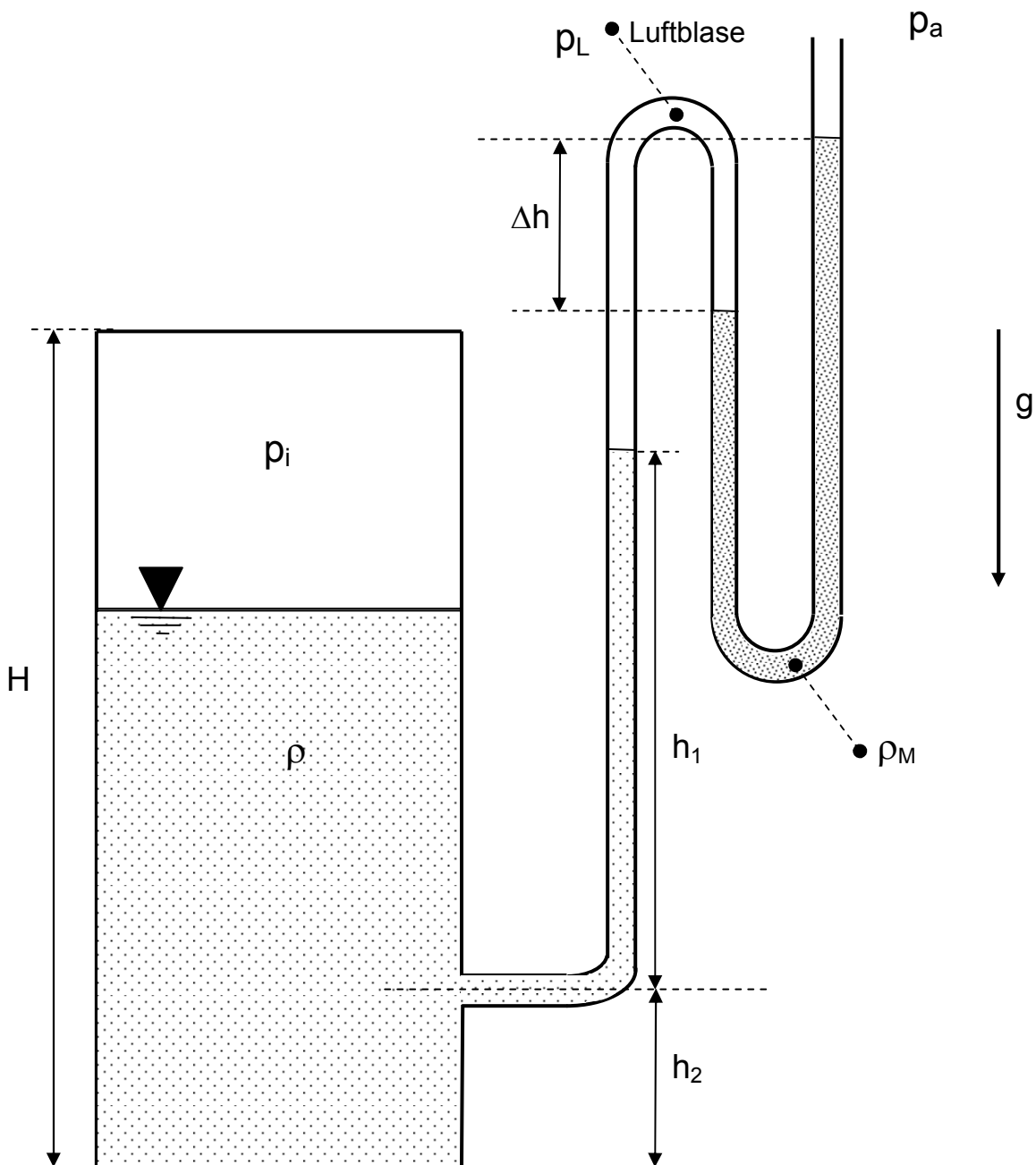
**Aufgabe 1:****( 3,0 Punkte)**

Ein zylindrischer Kessel der Höhe  $H$  ist zu  $2/3$  mit Wasser (Dichte  $\rho$ ) gefüllt. Über der Wasseroberfläche im Kessel befindet sich Luft, die unter dem konstanten Innendruck  $p_i$  steht. Durch diesen Druck  $p_i$  wird Wasser aus dem Kessel in die Verbindungsleitung (die in der Höhe  $h_2$  an den Kessel angeflanscht ist) zwischen Kessel und dem angeschlossenen U-Rohr-Manometer (Dichte der Manometerflüssigkeit =  $\rho_M$ ) bis zur Steighöhe  $h_1$  gedrückt. Außerdem hat sich in dieser Verbindungsleitung eine Luftblase gebildet, die die Meniskenverschiebung  $\Delta h$  im U-Rohr-Manometer beeinflusst. Außerhalb des Kessels und des Manometers herrscht der konstante Außendruck  $p_a$ .

Man bestimme in Abhängigkeit gegebener Größen:

- welcher Druck  $p_L$  in der Luftblase in der Verbindungsleitung herrscht, und
- den Innendruck  $p_i$  der im Kessel eingeschlossenen Luft.

**Gegeben sind:**  $g, H, h_1, h_2, \Delta h, \rho, \rho_M, p_a$ .





### Aufgabe 1:

Kessel zu  $\frac{2}{3}$  gefüllt:  $\rightarrow$  Wasserhöhe  $H^*$  im Kessel:  $H^* = \frac{2}{3} H$

a) Gleichgewichtsbedingung im rechten U-Rohr-Schenkel:

$$\underline{\underline{p_L = p_a + \rho_H \cdot g \cdot \Delta h}} \quad (1)$$

b) Gleichgewichtsbedingung in der Stigleitung:

$$p_i + \rho \cdot g \cdot (H^* - h_2) = p_i + \rho \cdot g \cdot \left(\frac{2}{3} H - h_2\right) = p_L + \rho \cdot g \cdot h_1$$

$$\rightarrow p_L = p_i + \rho \cdot g \cdot \left(\frac{2}{3} H - [h_1 + h_2]\right) \quad (2)$$

(1) in (2) einsetzen:

$$p_a + \rho_H \cdot g \cdot \Delta h = p_i + \rho \cdot g \cdot \left(\frac{2}{3} H - [h_1 + h_2]\right)$$

$$\rightarrow \underline{\underline{p_i = p_a + \rho_H \cdot g \cdot \Delta h - \rho \cdot g \cdot \left(\frac{2}{3} H - [h_1 + h_2]\right)}} \quad ($$

**Aufgabe 1:****(30 Punkte)**

Ein großer Behälter ist mit Öl gefüllt, dessen Dichte wegen der Temperaturverteilung im Behälter gemäß

$$\rho = \rho_0 (1 + 2bz)$$

von der Höhenkoordinate  $z$  abhängt.

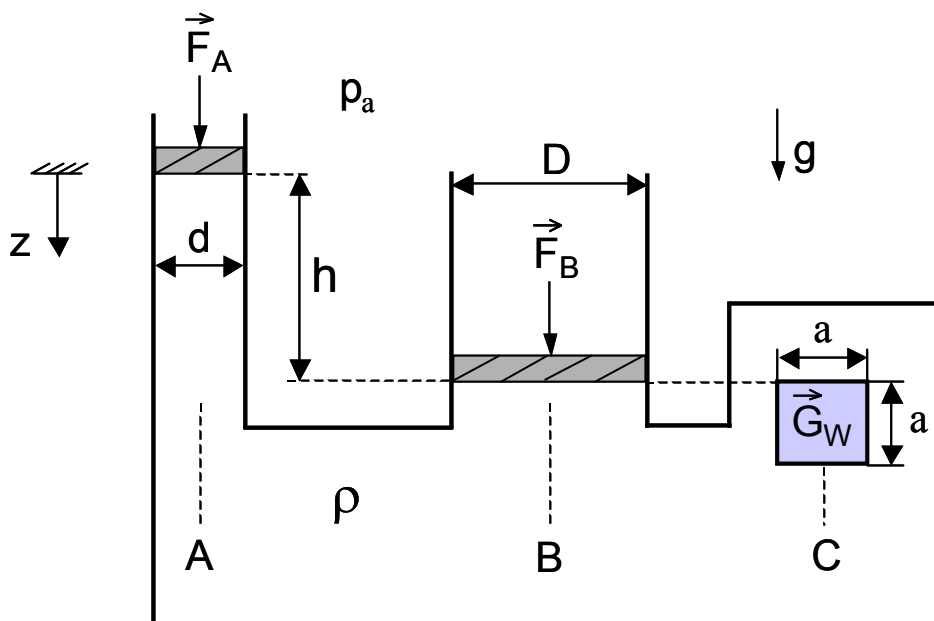
An den Behälter sind drei Rohre A, B und C angeschlossen, siehe Abbildung. Das rechte Rohr C ist oben geschlossen und vollständig mit Öl gefüllt. In dem Rohr C schwimmt ein Würfel mit Kantenlänge  $a$  und dem Gewicht  $\vec{G}_W$ . Die Oberseite des Würfels befindet sich auf derselben Höhe, wie die Unterseite des Kolbens, der sich im mittleren Rohr B (Durchmesser  $D$ ) reibungsfrei in vertikaler Richtung bewegen kann und das Öl von der umgebenden Luft trennt. Durch Aufbringen der konstanten Kraft  $\vec{F}_B$  wird der Kolben im Gleichgewicht gehalten.

Im linken Rohr (Durchmesser  $d$ ) trennt ein ebenfalls in vertikaler Richtung reibungsfrei beweglicher Kolben Öl und Luft. Auf diesen Kolben wirkt die konstante Kraft  $\vec{F}_A$ .

Unter der Voraussetzung, dass die Luft unter konstantem Atmosphärendruck  $p_a$  steht und das Eigengewicht der beiden Kolben vernachlässigt werden kann, bestimme man in Abhängigkeit gegebener Größen

- die Höhe  $h$  zwischen den Unterseiten der Kolben in Rohr A und B, und
- die Kraft  $\vec{F}_B$ . Hierbei kann die Höhe  $h$  als gegeben angesehen werden, d.h. das Ergebnis von Teil a) muss nicht für  $h$  eingesetzt werden.

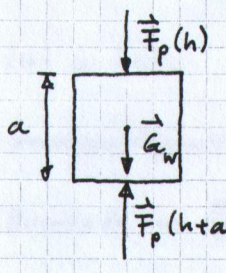
**Gegeben sind:**  $\vec{F}_A$ ,  $D$ ,  $d$ ,  $\rho_0$ ,  $g$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $\vec{G}_W$ .



Musterlösung Teil Fluidmechanik der Klausur „Einführung in die Fluid- und Thermodynamik“ vom 18.12.2009

Aufgabe 1) Geg:  $\vec{F}_A$ ,  $D$ ,  $d$ ,  $s_0$ ,  $g$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $\vec{G}_W$ ,  $s(z) = s_0(1+2bz)$

a) Bestimmung von  $h$ : Kräftegleichgewicht am Würfel


$$\downarrow + \Sigma \vec{F} = \vec{0} : \vec{F}_p(h) + \vec{G}_W - \vec{F}_p(h+a) = \vec{0} \quad (1)$$
$$\text{mit: } |\vec{F}_p(h)| = p(h) \cdot a^2 \quad (2)$$
$$|\vec{F}_p(h+a)| = p(h+a) \cdot a^2 \quad (3)$$
$$(2), (3) \wedge (1) : p(h) a^2 + |\vec{G}_W| - p(h+a) a^2 = 0 \quad (4)$$

Bestimmung der Druckverteilung  $p(z)$ :

$$\text{Aus: } \frac{dp}{dz} = sg = s_0 g (1+2bz) \Rightarrow dp = s_0 g (1+2bz) dz$$

$$\text{Integration: } p(z) = s_0 g \left( z + 2 \cdot b \cdot \frac{1}{2} z^2 \right) + C' \quad (5)$$

Bestimmung der Konstante  $C'$ :

$$\text{Aus: } p(0) = p_a + \frac{|\vec{F}_A|}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Kräftegleichgewicht} \\ \text{am Kolben in A} \end{array} \right)$$

$$\text{folgt: } C' = p_a + \frac{|\vec{F}_A|}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

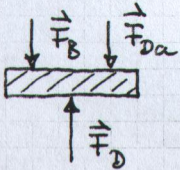
$$\wedge (5) : p(z) = s_0 g \left( z + b z^2 \right) + p_a + \frac{|\vec{F}_A|}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad (5')$$



$$(5') \leadsto (4): \rho_0 g (h + b h^2) + \frac{|\vec{G}_w|}{a^2} - \rho_0 g [(h+a) + b(h+a)^2] = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2b} \left[ \frac{|\vec{G}_w|}{\rho_0 g a^3} - b a - 1 \right]$$

b) Bestimmung von  $\vec{F}_B$ : Kräftegleichgewicht am Kolben in B



$$+\downarrow \sum \vec{F} = 0: \vec{F}_B + \vec{F}_{Da} - \vec{F}_D = \vec{0} \quad (6)$$

$$\text{mit: } |\vec{F}_{Da}| = p_a \frac{\pi}{4} D^2 \quad (7)$$

$$|\vec{F}_D| = p(h) \frac{\pi}{4} D^2 \quad (8)$$

$$(5') \leadsto (8): |\vec{F}_D| = \rho_0 g (h + b h^2) + p_a + \frac{|\vec{F}_A|}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = \rho_0 g (h + b h^2) \frac{\pi}{4} D^2 + |\vec{F}_A| \left( \frac{D}{d} \right)^2$$