

# Klausurtermine

## Einführung in die Fluid- und Thermodynamik

1. Termin: Samstag, 29. Januar 2011
2. Termin: Samstag, 26. März 2011

## Strömungslehre

1. Termin: Donnerstag, 3. Februar 2011
2. Termin: Mittwoch, 30. März 2011



# TESTAT

Eine Flüssigkeit strömt reibungsfrei und stationär unter dem Einfluss der Schwerkraft durch eine Rohrleitung. Zwischen den Stellen 1 und 2 erweitert sich der Querschnitt der Leitung von der Fläche  $A_1$  auf die Fläche  $A_2$ . Unter der Voraussetzung, dass bei 1 und 2 die Geschwindigkeit und der Druck jeweils konstant über die Querschnittsfläche sind, berechne man in Abhängigkeit gegebener Größen

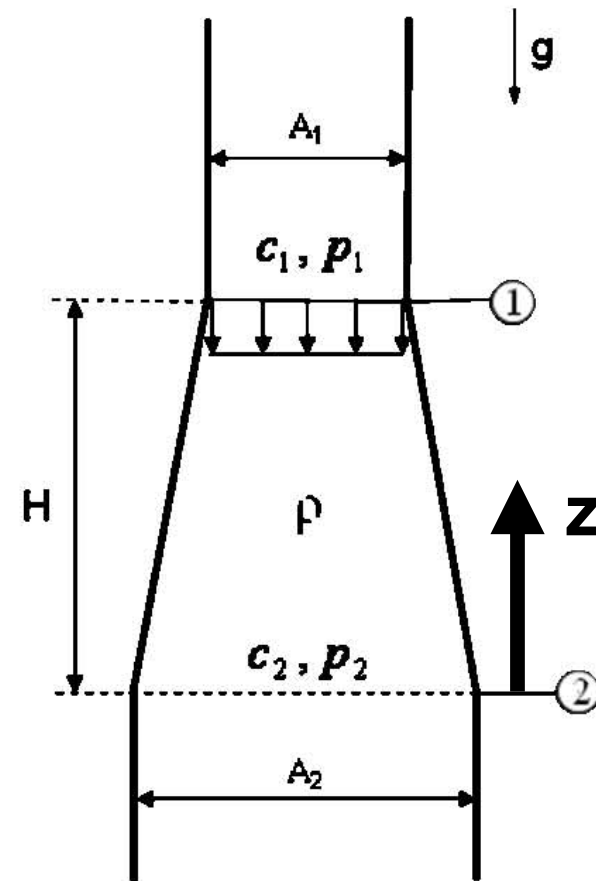
- a) die Geschwindigkeit  $c_2$  bei 2, und
- b) den Druck  $p_2$  bei 2.

Geg:  $A_1, A_2, H, \rho, c_1, p_1, g$

$$\text{a) } \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho c_1 A_1 = \rho c_2 A_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = c_1 \frac{A_1}{A_2}}$$

$$\text{b) } p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho g z_2$$

$$\boxed{p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] + \rho g H}$$



# Wiederholung

a) inkompressibel:  $\rho = \text{konst.}$  (Flüssigkeit)

- großes Reservoir, großer Behälter:  $c_1 \approx 0$
- aus Bernoulli-Gleichung:

$$c_2 = \sqrt{2 \left( \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) \right)} = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho} + 2gh}$$

Spezialfälle:

2. Ausströmen infolge Überdruck (horizontal,  $z_1 = z_2$ )

Wegen  $\rho = \text{konst.}$  nur für Gas bei kleiner Geschwindigkeit ( $c_2 < 70 \text{ m/s}$ )

$$c_2 = \sqrt{2\Delta p / \rho}$$

Druckenergie  $\Delta p$  vollständig in kinetische Energie  $\rho c^2/2$  umgewandelt.



# Wiederholung

b) kompressibel:  $\rho = (p, T)$  (Gase  $\Rightarrow$  Gasdynamik)

- thermisch und kalorisch ideales Gas

$$p = \rho \frac{R}{m} T \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad \frac{R}{m} = c_p - c_v$$

R: universelle Gaskonstante; m: Molmasse

$c_p$ ,  $c_v$ : spez. Wärmekapazitäten;  $\kappa$ : Isentropenexponent

- großes Reservoir, großer Behälter:  $c_1 \approx 0$
- aus Bernoulli-Gleichung ohne Massenkräfte (Gas bei kleinen Höhendifferenzen ODER horizontal):

$$\frac{c_2^2}{2} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = \cancel{\frac{c_1^2}{2}}$$

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}}$$



# Wiederholung

- Isentrope Zustandsänderung von 1 bis 2:

$$\frac{p}{p_1} = \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^\kappa$$

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}$$

mit Zustandsgleichungen:

$$c_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{R}{m} T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]} = \sqrt{2 c_p T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}$$

$p_1$ : Ruhedruck;  $p_2$ : Gegendruck  
 $\rho_1$ : Ruhedichte;  $T_1$ : Ruhetemperatur

**Namensgebung auch für inkompressible Strömungen!**



# Wiederholung

- Isentrope Zustandsänderung von 1 bis 2:

$$\frac{p}{p_1} = \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^\kappa$$

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}$$

=> Maximalgeschwindigkeit für  $p_2 = 0$  (Vakuum):

$$c_{2,max} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1}} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{R}{m} T_1} = \sqrt{2 c_p T_1} = \begin{cases} \sim \sqrt{T_1} \\ \sim \sqrt{1/m} \end{cases}$$

**z.B. Luft unter Atmosphärenbedingungen:**

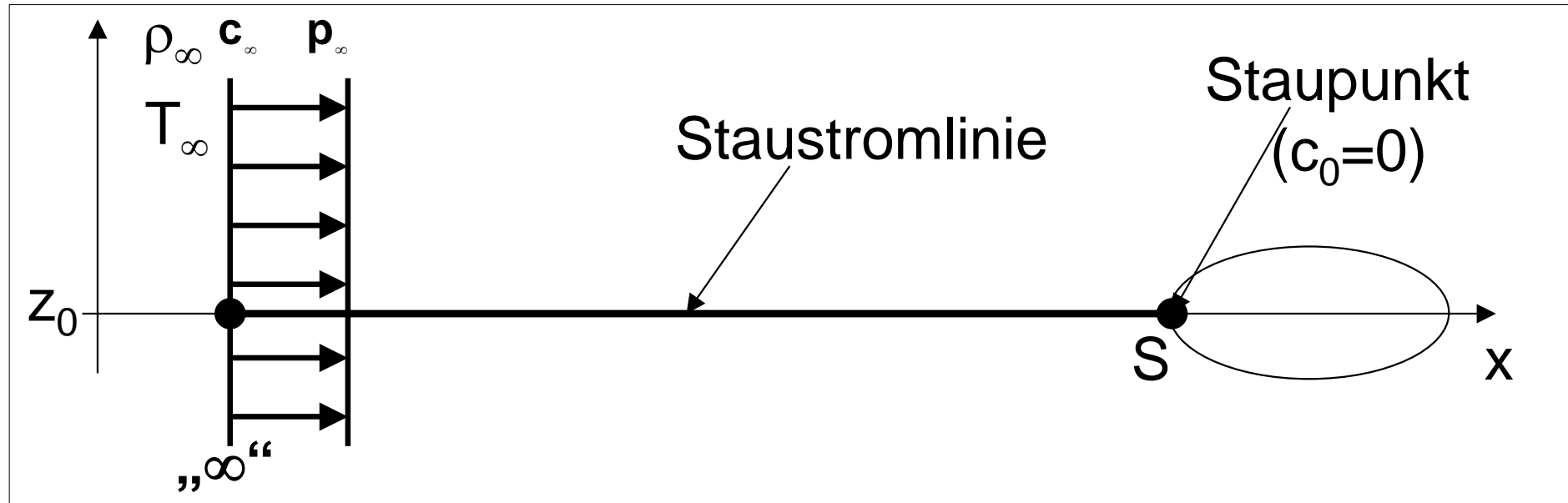
$$\kappa = 1,4, \quad p_1 = 10^5 \text{ Pa}, \quad \rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$$

$$\Rightarrow c_{2,max} = 750 \text{ m/s}$$



# Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

## Beispiel: Strömung entlang Staustromlinie



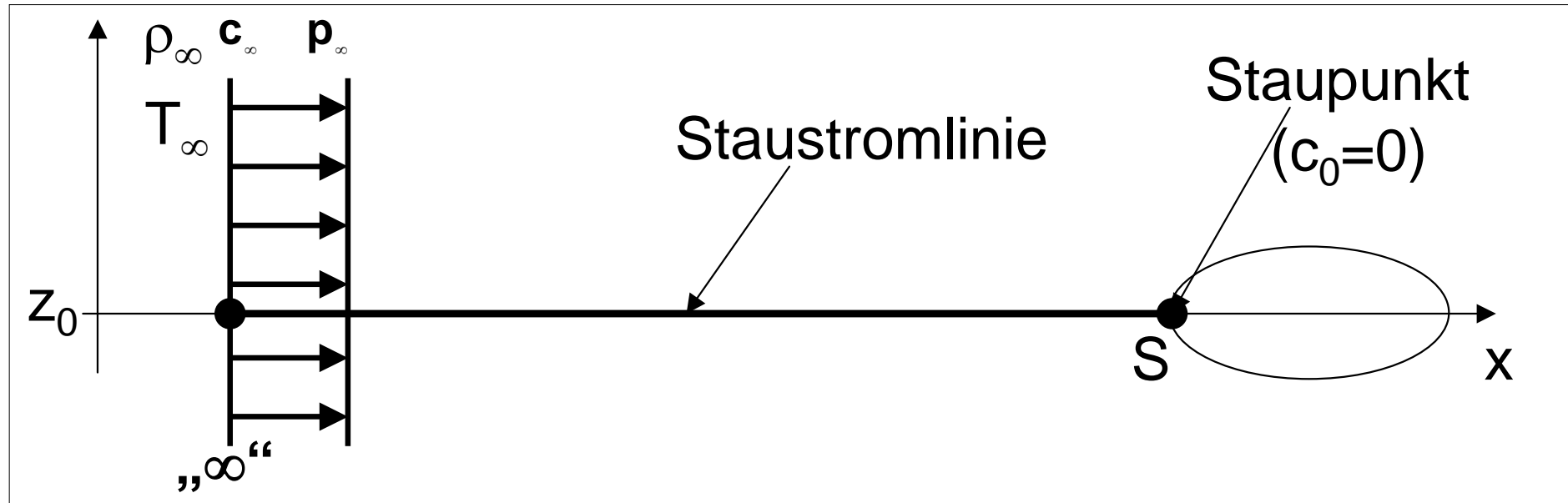
$$\frac{c_{\infty}^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} = \frac{c_{\infty}^2}{2} + c_p T_{\infty} = \cancel{\frac{c_0^2}{2}} + c_p T_0 = \cancel{\frac{c_0^2}{2}} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

Bernoulli Gleichung für kompressible, isentrope Strömung



# Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

## Beispiel: Strömung entlang Staustromlinie



$$T_0 = \frac{c_\infty^2}{2c_p} + T_\infty$$

Ruhetemperatur

Temperaturerhöhung im Staupunkt!



# Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

## Beispiel: Strömung entlang Staustromlinie

$$T_0 = \frac{c_\infty^2}{2c_p} + T_\infty$$

Ruhetemperatur

Luft bei Normalbedingungen:

$T_\infty = 293 \text{ K}$  und  $c_p = 1006 \text{ J/(kg K)}$

-  $c_\infty = 70 \text{ m/s}$ :  **$T_0 = 295 \text{ K}$**

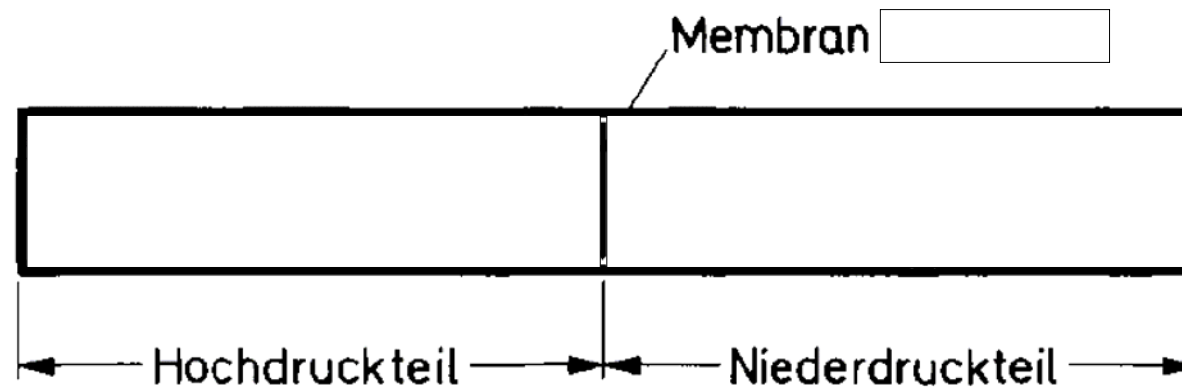
-  $c_\infty = 140 \text{ m/s}$ :  **$T_0 = 303 \text{ K}$**

-  $c_\infty = 210 \text{ m/s}$ :  **$T_0 = 315 \text{ K}$**



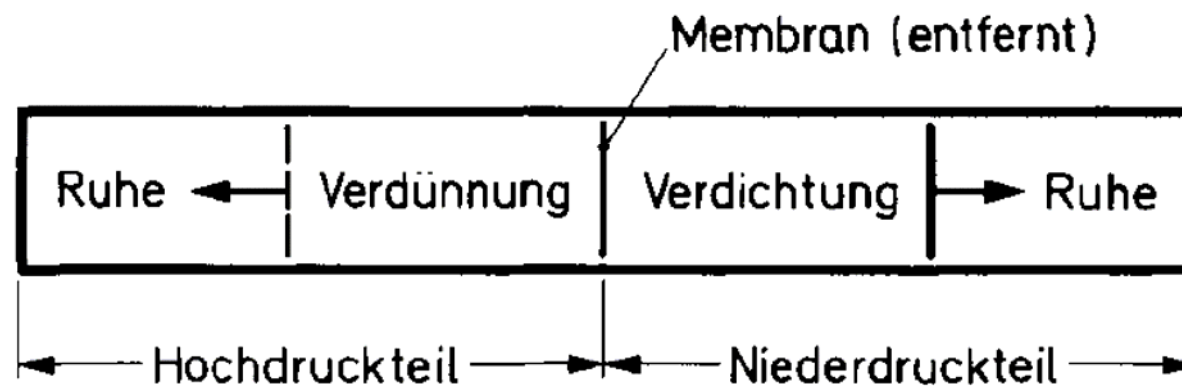
# Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

## Stoßrohr zur Erzeugung hoher Geschwindigkeiten



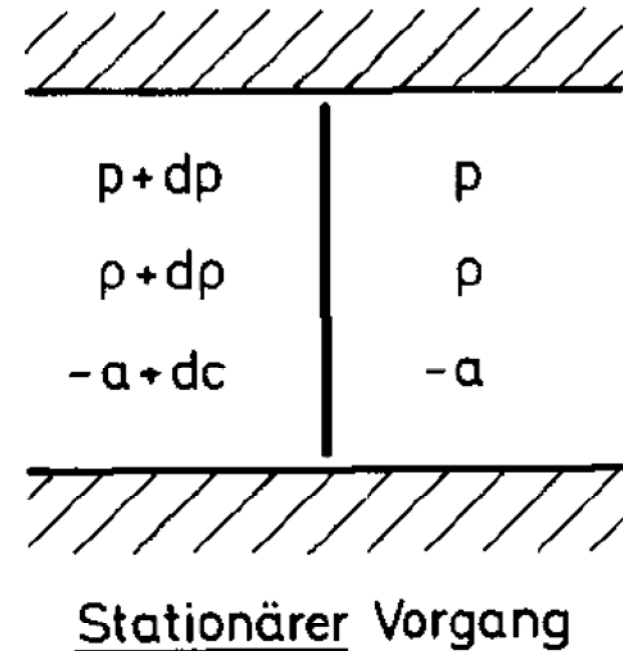
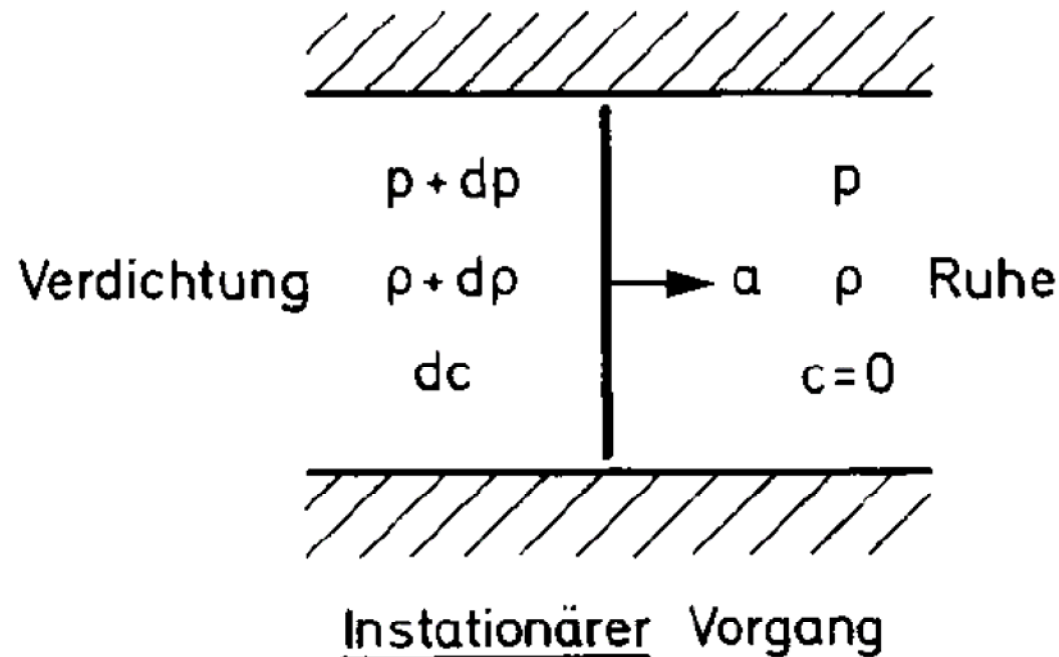
# Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

## Stoßrohr zur Erzeugung hoher Geschwindigkeiten



# Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

## Ausbreitung kleiner Störungen der Zustandsgrößen in ruhendem, kompressiblen Medium



Stationär im mit der Störung bewegten Koordinatensystem

**=> Massenerhaltung, Bernoulli Glg. und Linearisierung**



# Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

## Ausbreitung kleiner Störungen der Zustandsgrößen in ruhendem, kompressiblen Medium

- Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner Druckstörungen (Schall)  
Isentrope Zustandsänderung und ideale Gasgleichung

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa \frac{R}{m} T$$

Gas (T=300K)	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	Luft
m in g/mol	32	28,016	2,016	~ 29
a in m/s	330	353	1316	347



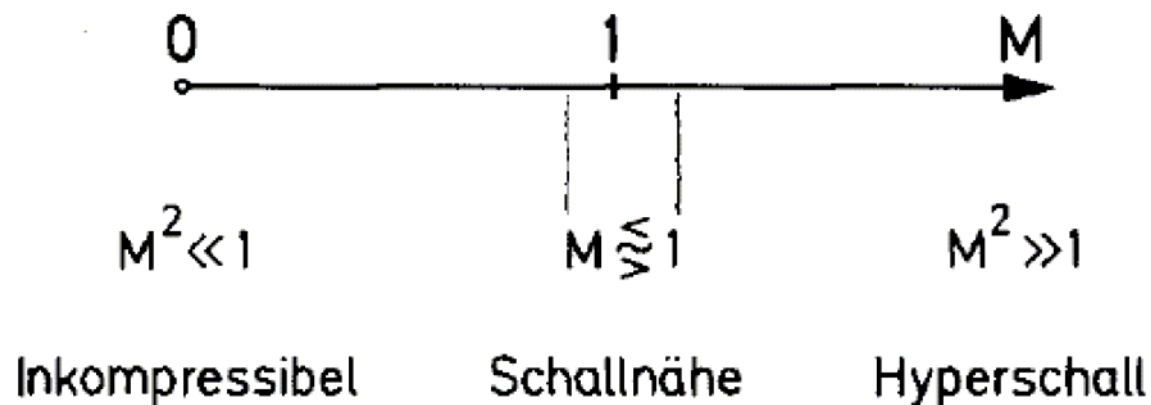
# Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

## Definition der Mach Zahl

Charakteristische Strömungsgeschw. / Schallgeschwindigkeit

$$M = \frac{c}{a}$$

- $M < 1$ : Unterschallströmung
- $M > 1$ : Überschallströmung



# Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

## Bernoulli Gleichung für kompressible Strömungen

Für beliebige Stelle auf dem Stromfaden:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{2} + c_p T = \text{konstant}$$

**Mit:**  $a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa \frac{R}{m} T$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1} = \text{konstant}$$

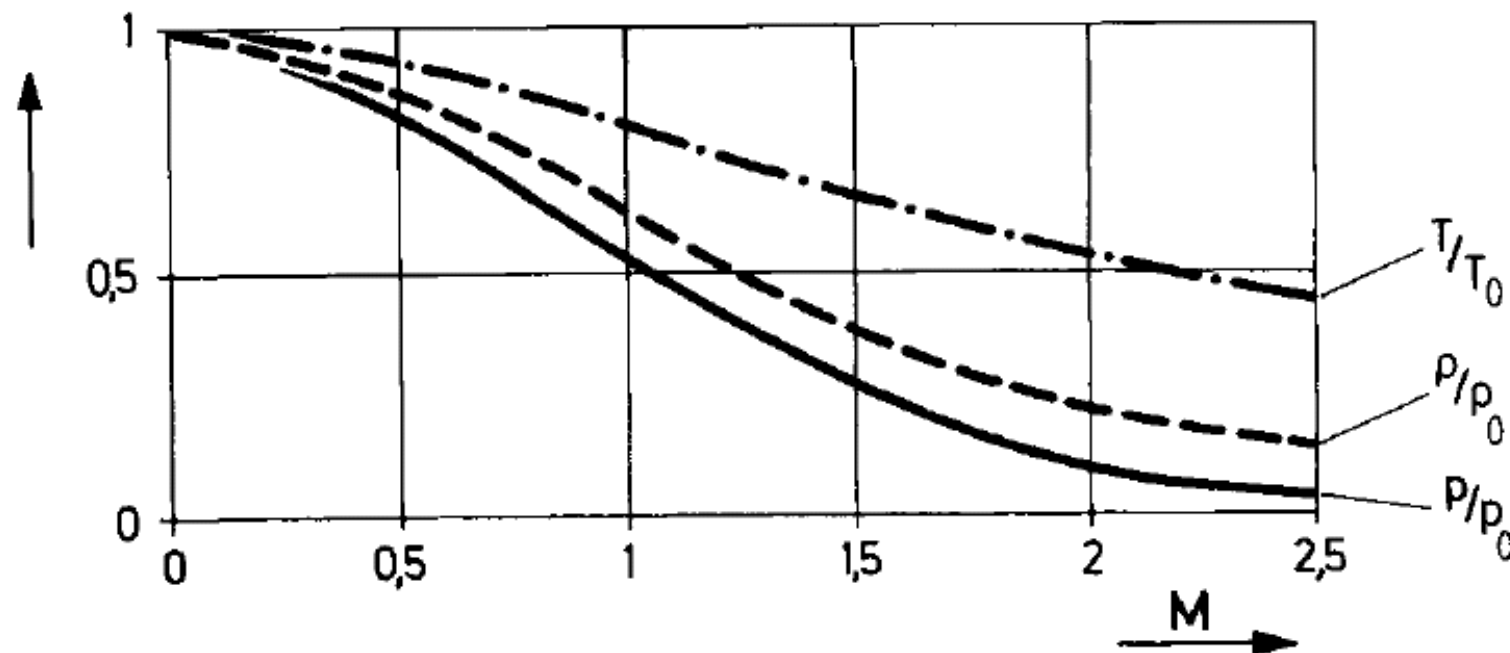
=> Festlegung der Konstante durch Ruhegrößen (Index 0)



# Gasdynamik – kompressible Stromfadentheorie

## Bernoulli Gleichung für kompressible Strömungen

Temperatur-, Druck- und Dichteverhältnis als Funktion der Mach Zahl  $M$



**$T$ ,  $\rho$ ,  $p$  berechenbar, wenn Ruhewerte und lokale Mach Zahl bekannt**

