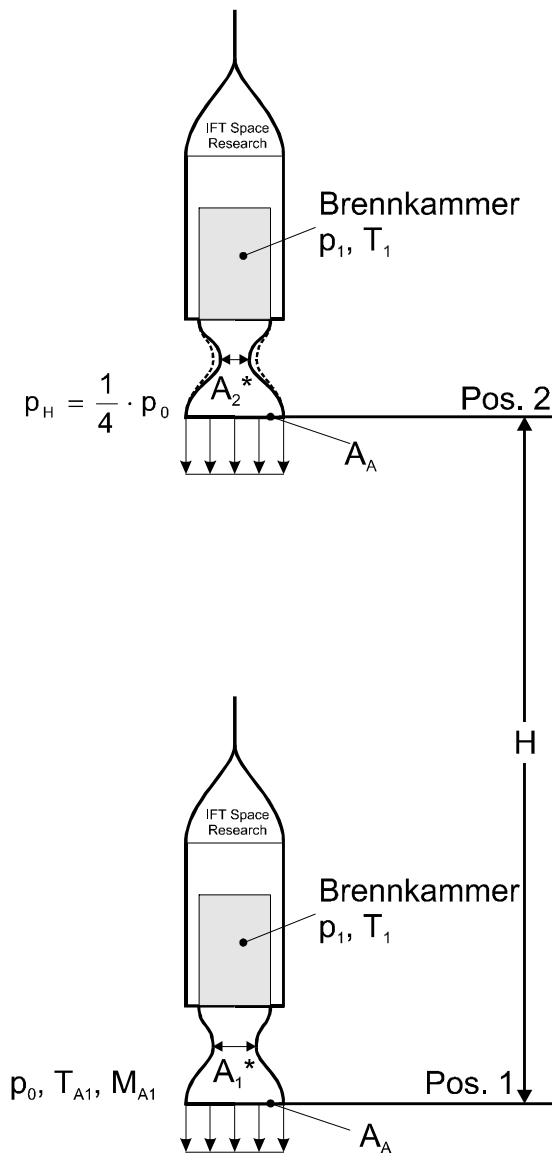


Aufgabe 6



Eine Rakete ist mit einem Triebwerk mit verstellbarer LAVALDüse ausgestattet. Unmittelbar nach dem Start am Boden (Pos. 1) tritt der Düsenstrahl durch den Austrittsquerschnitt A_A mit konstanter Machzahl $M_{A1} = 2$ und konstanter Temperatur $T_{A1} = 2000^\circ\text{C}$ parallel in die Umgebung mit dem Druck p_0 aus.

Nachdem die Rakete die Höhe H erreicht hat (Pos. 2), ist der Umgebungsdruck p_H auf $1/4$ des ursprünglichen Umgebungsdruckes p_0 abgesunken ($p_H = 1/4 \cdot p_0$). Die Zustandsgrößen im Inneren der Brennkammer p_1 und T_1 sind indes konstant geblieben. Um weiterhin eine parallele Abströmung zu gewährleisten, muß jedoch der engste Querschnitt von A_1^* auf A_2^* nachgestellt werden

Bestimmen Sie:

- die Zustandsgrößen (Ruhegrößen) T_1 und p_1 in der Brennkammer des Raketen-triebwerks,
- für die Pos. 1 im Austrittsquerschnitt A_A die Schallgeschwindigkeit a_{A1} und die Austrittsgeschwindigkeit v_{A1} ,
- für die Pos. 2 in der Höhe H die Strahltemperatur T_{A2} sowie die Machzahl M_{A2} ,
- das Verhältnis der engsten Querschnitte A_1^*/A_2^* .

geg: $\kappa = 1.4$, $IR = 286.9 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K})$, $T_{A1} = 2000^\circ\text{C}$, $p_0 = 1 \text{ bar}$, $M_{A1} = 2$, $p_H = 1/4 \cdot p_0$

Hinweis: Man nehme eine isentrope Zustandsänderung an

Aufgabe 5:

(15)

mit den Formeln aus der Vorlesung für die LAVAL-Düse freigt:

$$a) \frac{T_{A1}}{T_1} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{A1}^2}$$

mit $\kappa = 1.40$ und $M_{A1} = 2$

$$\Rightarrow T_1 = 1.8 \times T_{A1} = 409 \text{ K}$$

isentrope Zustandsänderung:

da der Düsenstrahl bei Pos. 1 mit konstanter Machzahl $M_{A1} = 2$

und konst. Temperatur T_{A1}

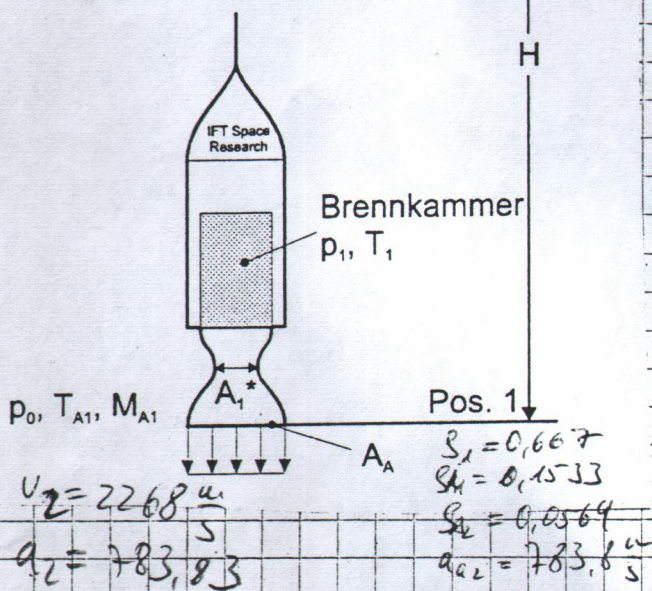
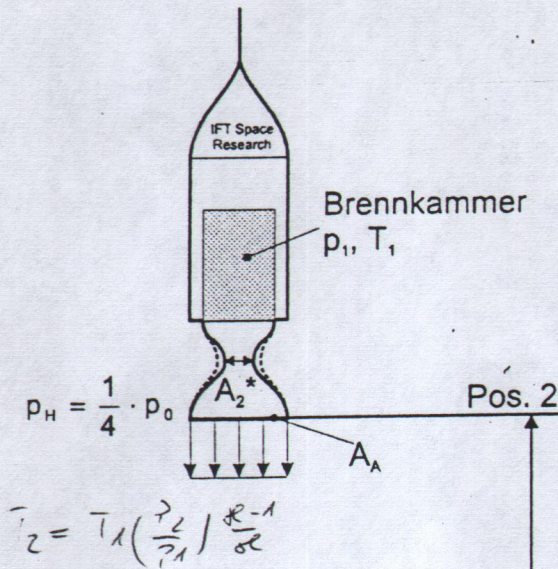
parallel in die Atmosphäre

mit dem Druck p_0 austritt;

freigt:

$$p_{A1} = p_0$$

$$\Rightarrow \frac{p_{A1}}{p_1} = \frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{A1}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$



$$\Rightarrow p_1 = 7.824 \text{ bar}$$

b) für die Schallgeschwindigkeit a gilt, (siehe Vorlesung):

$$a^2 = \kappa \cdot \frac{p}{\rho} = \kappa \cdot R \cdot T : \Rightarrow a_{A1} = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_{A1}} = 455.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

aus Definition für Machzahl: $M = \frac{v}{a}$

$$\Rightarrow v_{A1} = M_{A1} \cdot a_{A1} = 1911 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c) \underline{T_{A_2} = ?} ; \underline{M_{A_2} = ?} :$$

aus Teil a) sind T_1 und p_1 bekannt.

In der Höhe H bei Pos. 2 gilt, da der Düsenstrahl wiederum parallel ausströmen soll:

$$p_{A_2} = p_H = \frac{1}{4} \cdot p_0$$

$$\Rightarrow \frac{p_{A_2}}{p_1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{A_2}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

$$\Rightarrow M_{A_2} = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} \cdot \left\{ \left(\frac{p_1}{p_{A_2}}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right\}} = 2,894$$

$$\frac{T_{A_2}}{T_1} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{A_2}^2}$$

$$\Rightarrow T_{A_2} = \frac{T_1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{A_2}^2} = 1529,6 \text{ K}$$

d) s. Volesung:

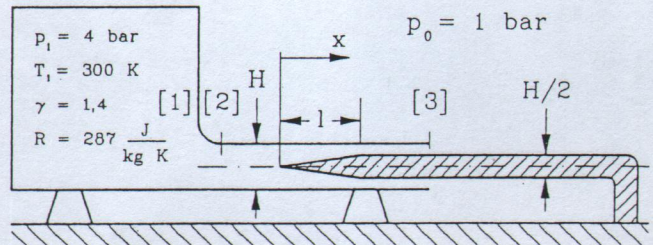
$$\frac{A_A}{A_1^*} = \frac{1}{M_{A_1}} \cdot \left\{ 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M_{A_1}^2 - 1) \right\}^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}$$

$$\frac{A_A}{A_2^*} = \frac{1}{M_{A_2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M_{A_2}^2 - 1) \right\}^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}$$

$$\rightarrow \frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{M_{A_1}}{M_{A_2}} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M_{A_2}^2 - 1)}{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M_{A_1}^2 - 1)} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 2.268$$

Aus einem großen Behälter [1] strömt Luft (als ideales Gas zu betrachten) durch ein Rohr mit dem Rechteckquerschnitt $b \times H$, in welches eine angespitzte, ebene Platte (Querschnitt $b \times H/2$) hineinragt, in die Atmosphäre aus.

Die Plattenhalterung ist weit vom Punkt [3] entfernt befestigt. Die Strömung zwischen [1] und [3] sei isentrop und das Druckverhältnis $p_1/p_0 = 4$.



- Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit u_3 des Gases und welcher Druck p_3 herrscht dort?
- Man ermittle p_2 , u_2 und M_2 .

Geg.: $p_1 = 4 \text{ bar}$, $T_1 = 300 \text{ K}$, $\gamma = 1,4$, $R = 287 \text{ J/(kg K)}$

Lösung

- u_3 und p_3 :

Das Druckverhältnis Kesseldruck/Atmosphärendruck ist überkritisch

$$\frac{p_1}{p_0} = 4.$$

Die Machzahl am Austritt ist daher

$$M_3 = 1,$$

das Druckverhältnis also kritisch:

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0,528$$

$$\Rightarrow p_3 = 0,528 \cdot 4 \text{ bar} = 2,112 \text{ bar}.$$

Die Schallgeschwindigkeit am Austritt (Austrittsgeschwindigkeit) ist

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a^*}{a_t} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} = 0,913,$$

$$a_1 = a_t = \sqrt{\gamma R T_1} = 347 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow u_3 = a_3 = 0,913 \cdot a_t = 317 \text{ m/s}.$$

b) Strömungsgrößen an der Stelle [2]:

Der kritische Querschnitt ist an der Stelle [3], da dort die Machzahl eins ist:

$$A^* = A_3 = \frac{1}{2} b H$$

und daher gilt für die Stelle [2]

$$\frac{A^*}{A_2} = \frac{A_3}{A_2} = \frac{1}{2} .$$

Mit diesen Daten lesen wir aus der gasdynamischen Tabelle (Unterschallbereich !) die Größen

$$M_2 = 0,306 ,$$

$$\frac{p_2}{p_t} = 0,937$$

ab und daher

$$p_2 = 0,937 p_1 = 3,748 \text{ bar} .$$

Weiter

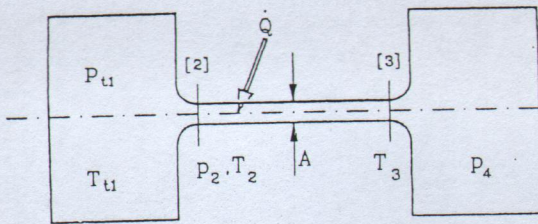
$$\frac{a_2}{a_t} = 0,991$$

und daher

$$a_2 = 0,991 a_1 = 344 \text{ m/s} .$$

Die Strömungsgeschwindigkeit ist mit

$$u_2 = M_2 a_2 = 105 \text{ m/s}$$



Aus einem großen Behälter (p_{t1} , T_{t1}) strömt stationär und isentrop Luft. An der Stelle [2] sind p_2 und T_2 bekannt. Im Kanal zwischen [2] und [3] (Querschnitt A) wird gerade soviel Wärme

zugeführt, daß die Temperatur bei [3] doppelt so hoch ist wie die bei [2]. Anschließend strömt die Luft in einen zweiten großen Behälter (p_4). Die Luft kann als thermisch und kalorisch ideales Gas angesehen werden.

- Wie groß sind Geschwindigkeit, Dichte und Massenstrom an der Stelle [2]?
- Man berechne die Zustandsgrößen bei [3]

Geg.: γ , R , c_p , p_{t1} , T_{t1} , p_2 , T_2 , T_3 , A , p_4

Lösung

- Größen an der Stelle [2]:

Die Ausflußgeschwindigkeit aus einem großen Behälter berechnet sich nach der Gleichung von Saint-Venant-Wantzel (S. L. (9.88))

$$u_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

mit $p_1 = p_{t1}$ und $\rho_1 = \rho_{t1} = p_{t1}/(RT_{t1})$ zu

$$u_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_{t1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_{t1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (1)$$

Die Dichte ρ_2 ergibt sich aus der thermischen Zustandsgleichung

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2},$$

der Massenstrom aus $\dot{m} = \rho_2 u_2 A_2$ zu

$$\dot{m} = A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{T_{t1} p_2^2}{R T_2^2} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_{t1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (2)$$

- Größen an der Stelle [3]

Der Druck im austretenden Unterschallstrahl ist gleich dem Umgebungsdruck (hier p_4)

$$\Rightarrow p_3 = p_4,$$

aus der thermischen Zustandsgleichung folgt dann

$$\rho_3 = \frac{p_3}{RT_3} = \frac{p_4}{R 2 T_2},$$

die Kontinuitätsgleichung liefert u_3 :

$$\rho_3 u_3 A_3 = \rho_2 u_2 A_2 \quad (\text{mit } A_2 = A_3 = A)$$

$$\Rightarrow u_3 = u_2 \frac{\rho_2}{\rho_3} = u_2 \frac{p_2}{R T_2} \frac{R 2 T_2}{p_4}$$

$$\Rightarrow u_3 = u_2 \frac{2 p_2}{p_4} \quad (3)$$