

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufg.	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

KLAUSUR HFD

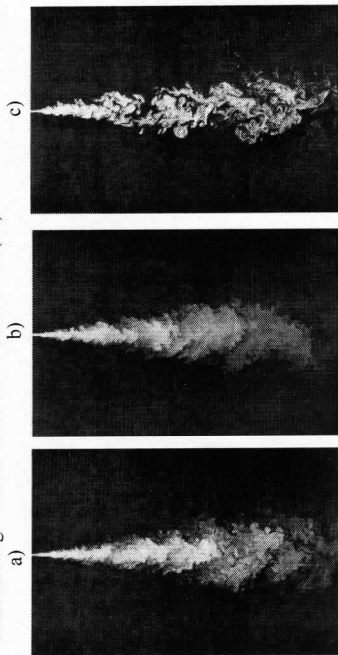
Rechenteil

- 1) Wir sind an der Leistung interessiert, die ein Lastwagen aufbringen muss, um den Reibungswiderstand an den Flächen zu überwinden. Die Wände nähern wir als ebene Platten an, das Führerhaus wird nicht berücksichtigt. Das Fahrzeug besitzt zudem eine abgerundete Nase, um Separation zu vermeiden. (17P)
Gegeben: $V = 90 \text{ km/h}$, Länge $= 10 \text{ m}$, Breite $= 2.5 \text{ m}$, Höhe $= 3 \text{ m}$, $\nu = 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$
- a) Wie groß ist die Leistung, falls die Grenzschicht voll turbulent von Beginn der glatten Platte ist?
b) Wie dick ist die Grenzschicht am Ende des Lastwagens?
c) Wie groß ist die Wandschubspannung am Ende?
d) Die Platte ist nun nicht glatt und $u_{\tau, k}/\nu = 100$; wie groß ist die Leistung nun?
- 2) Wir betrachten ein Rohr mit voll entwickelter turbulenter Strömung. Zeigen Sie, dass die Bulk-Geschwindigkeit (vollständig gemittelt) $49/60$ der Maximalgeschwindigkeit erreicht. Nehmen Sie das $1/7$ -Potenzgesetz für die mittlere Geschwindigkeit an. (13P)

Fragenteil

- 3) (25P)
- a) Was ist eine Wandeinheit und die Wandschubspannungsgeschwindigkeit (Formel + kurze Erklärung)? (5P)
- b) Geben Sie das Taylorsche Mikrolängenmaß λ_g an. Wie hängt dieses für isotrope Turbulenz mit der Dissipation zusammen? Skizzieren Sie ausserdem den typischen Verlauf der Zweipunktkorrelation für u' . Wie lässt sich daraus das Taylorsche Längenmass *graphisch* bestimmen? (6P)
- c) Geben Sie das Verhältnis aus λ_g und dem Kolmogorovschen Mikrolängenmaß η an, unter Verwendung der turbulenten Reynoldszahl $Re_t = k^{1/2} \ell_v / \nu$.
 ℓ_v bezeichnet das integrale Längenmaß (abschätzen wie in der Vorlesung). (5P)
- d) Erklären Sie kurz die Taylorhypothese. (5P)

- e) Ordnen Sie die Abbildungen nach steigender Reynoldszahl und begründen Sie Ihre Entscheidung. Warum weitet der Freistrah auf? (5P).



4) (25P)

Die Gleichungen für eine stationäre turbulente und inkompressible Grenzschicht lauten

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} = 0$$

$$\langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle u'v' \rangle \right]$$

- a) Wie sieht die Gleichung an der Wand aus (inklusive Randbedingungen)? (5P)
- b) Skizzieren Sie den Verlauf der Reynoldsspannung, des viskosen Terms und der Gesamtspannung als Funktion des Wandabstandes in der Grenzschicht. Wie lautet der Zusammenhang zwischen diesen Termen (normiert mit Wandeinheiten)? (5P)
- c) Welche Terme sind nun bedeutend, falls wir uns im Bereich der viskosen Unterschicht befinden und kein Druckgradient vorliegt? Leiten Sie daraus eine Beziehung für die Geschwindigkeit in der viskosen Unterschicht ab. (7P)
- d) Wie dick ist die viskose Unterschicht in etwa in Wandeinheiten? Wird die viskose Unterschicht mit steigender Reynoldszahl dicker oder dünner? Ist die viskose Unterschicht laminar? (3P)
- e) Sie messen die Geschwindigkeit in der Grenzschicht und bestimmen ein relatives Niveau der Fluktuationen $\sigma_u / \langle u \rangle$ von 14%. Wie viele unabhängige Stichproben brauchen Sie mindestens, um den Mittelwert auf 0.5% genau zu bestimmen? Können wir den Mittelwert exakt bestimmen? (5P)

5) Gegeben ist folgende Gleichung in inkompressibler turbulenter Strömung:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_j} = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i} \right]$$

- a) Schreiben Sie die Gleichung in Operatorform (Hinweis, nutzen Sie die Inkompressibilität auf der rechten Seite)
- b) Schreiben Sie nun eine Gleichung für die Mittelwerte für obige Gleichung auf (ρ ist konstant! Korrelation wie in der Vorlesung aufspalten!)
- c) Formulieren Sie eine Gleichung für die Fluktuationen. (15P)

Viel Erfolg!

① $v = 90 \text{ km/h}$, $L = 10 \text{ m}$, $B = 2,5 \text{ m}$, $\nu = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $S = 1,225 \text{ kg/m}^3$
 $A = 25 \text{ m}^2$

a) $P = D \cdot u$ ① $D = C_D \cdot \frac{1}{2} S u^2 \cdot A \Rightarrow P = \frac{1}{2} S u^3 A \cdot C_D$

$Re_L = \frac{u \cdot L}{\nu} = \frac{25 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ m}}{1,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,786 \cdot 10^7$ ①

voll turbulent $\Rightarrow C_D = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}}$ oder $\frac{0,455}{(\log Re_L)^{2,58}}$ ①
 bis $10^7 = Re$ besser geeignet da $Re > 10^7$ ①

$\Rightarrow P = \frac{0,455}{(\log Re_L)^{2,58}} \cdot \frac{1}{2} S u^3 (A_1 + A_2 + A_3)$ falls Boden auch berechnet wurde, ist das in Ordnung ①
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $25 \text{ m}^2 \quad 30 \text{ m}^2 \quad 30 \text{ m}^2$
 $= 2,231 \text{ kW}$ ①

b) $\frac{\delta}{x} \approx \frac{0,37}{Re_L^{1/5}} \Rightarrow \underline{\underline{\delta(L) = \frac{0,37}{Re_L^{1/5}} \cdot 10 \text{ m} = 0,13 \text{ m}}}$ ①

c) $\tau_w = S u^2 \cdot 0,0225 \left(\frac{\nu}{S u_{\infty}} \right)^{1/4} = S u^2 \cdot 0,0225 \cdot \left(\frac{1}{Re_L} \frac{L}{\delta} \right)^{1/4}$ ①
 $\approx 0,78 \text{ Pa}$ ①

d) $u_r \frac{k_s}{\nu} = 100$ $Re_r = \frac{k_s \cdot u}{\nu}$ ①
 $C_D = \left[1,89 - 1,62 \cdot \log \left(\frac{k_s}{L} \right) \right]^{-2,5}$
 $= \frac{Re_w}{Re_L}$

$P = \frac{1}{2} S u^3 \cdot [A_1 + A_2 + A_3] \cdot \left[1,89 - 1,62 \cdot \log \left(\frac{k_s}{L} \right) \right]^{-2,5}$ ①

Wir bräuchten u um k_s/L ausrechnen zu können, nicht gegeben. (1 Extrapunkt). Abschätzung mit Hilfe Aufgabe c) möglich, aber nicht gefragt.

1,7 total

① $u_B = 49/60 u_{max}$ u_{max} an Centerlinie (Polenmitte) ① 3/

daher: $\frac{\langle u \rangle}{u_{max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n} = \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n}$ $n=7$ ②

$\Rightarrow u_B = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \langle u \rangle 2\pi r dr$ $\eta = r/R$ ②

$\Rightarrow \frac{u_B}{u_{max}} = \frac{1}{\pi R^2} 2\pi \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n} r dr = 2 \int_0^1 (1-\eta)^{1/n} \eta d\eta$ ①

$\Rightarrow$ partielle Integration $\Rightarrow 2 \frac{1}{\frac{1}{n}+1} (1-\eta)^{1/n+1} \Big|_0^1 -$ ①

$\int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{n}+1} (1-\eta)^{1/n+1} d\eta$ ②

$= - \frac{2}{\left(\frac{1}{n}+1 \right) \left(\frac{1}{n}+2 \right)} (1-\eta)^{1/n+2} \Big|_0^1 = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \stackrel{n=7}{=} \frac{49}{60}$ ①

$= u_B / u_{max}$

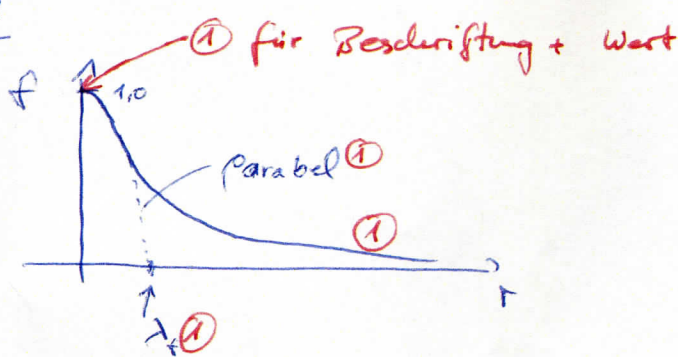
13 Punkte

③ a) $\ell^+ = \frac{\nu}{u_x}$ $u_x = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ ①

Längemaß zur Beschreibung physikalischer Prozesse bei wandgebundenen Strömungen. In Wandnähe sind die Viskosität und τ_w von Bedeutung, daraus wird das Längemaß und u_x konstruiert. $u_x \sim$ Geschwindigkeitsfluktuationen. ①

b) $\lambda_g = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2} g''}}$ ①

$\lambda_g^2 \approx \frac{15 \nu u^2}{\epsilon}$ ①



c) $l_e = k^{3/2} / \epsilon$, $Re_e = k^{1/2} l_e / \nu$, $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$

$\lambda_g / \eta = \sqrt{10} Re_e^{1/4}$ für Rechenweg 2 Punkte

Ergebnis.

d) Die Approximation räumlicher Korrelationen durch zeitl. Korrelation, Voraussetzung: "froze Turbulenz", sehr hohe Geschwindigkeit.

$R_{ij}(s) \sim R_{ij}(e, r, x_0, 0)$, s zeitl. Unterschied, r räumlicher

(1 Extrapunkt)

auch $\frac{\partial}{\partial t} \tau - \langle u \rangle \frac{\partial}{\partial x}$

e) Hohe $Re \Rightarrow$ kleiner Strukturen vorhanden, weniger kohärent

$\Rightarrow$ c) a) b)

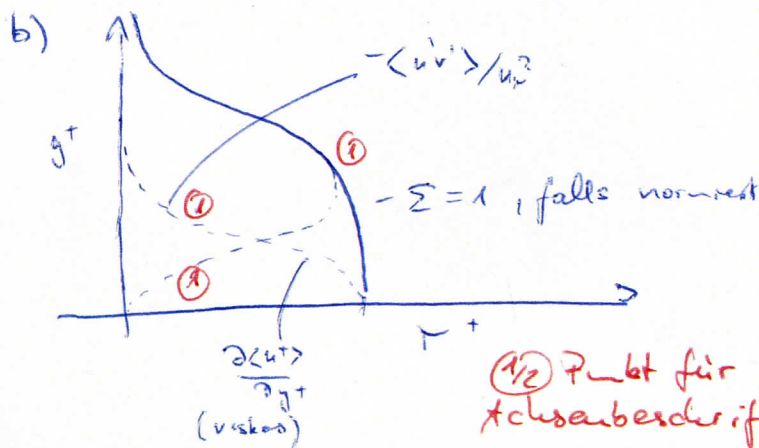
25 Punkte

4 a) $\text{div } \underline{u} |_{\text{wand}} = 0$

$-\frac{1}{s} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle u'v' \rangle \right] = 0$

$\langle u_i \rangle = 0$, $\langle u'v' \rangle = 0$ | wand

$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} = 0$



$\mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - s \langle u'v' \rangle = \tau_w$

$\Rightarrow \left[\frac{\partial \langle u^+ \rangle}{\partial y^+} - \langle u'^+ v'^+ \rangle = 1 \right]$

4/

Integration

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow \mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu w$$

wegstreichen (2 Punkte)

$$\Rightarrow \langle u \rangle = \frac{\mu w}{\mu} y_m \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{\langle u^+ \rangle = y^+}}$$

d) ~ 5 Wandeneinheiten, wird dünner, ist nicht vollständig laminar (turbulente bursts)

e)

$$(0,005)^2 = \frac{(0,14)^2}{N} \quad \left(\sigma^2 = \frac{\bar{x}^2}{N} \right)$$

$$\Rightarrow N = 784$$

Nein, wir kennen die PDF nicht, wir bräuchten ∞ Samples!

b)

a) $\Delta p = -\rho \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}$

alternativ $\partial_j (u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) = \nabla \cdot (\underline{u} \cdot \nabla \underline{u})$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} u_j + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \\ &= \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}_{\nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}} + u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \right.$$

b)

$$\frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial x_j \partial x_j} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\langle u_i u_j \rangle \right) = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u_i' u_j' \rangle \right)$$

(1) aufspalten

c) Aufspalten, dann b) abziehen

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \langle p \rangle + p'}{\partial x_j \partial x_j} + \rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u_i' \rangle u_j' + u_i' \langle u_j \rangle + u_i' u_j' \right)$$

$$\frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial x_j \partial x_j} - \rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u_i' u_j' \rangle \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2 p'}{\partial x_j \partial x_j} + \rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\langle u_i \rangle u_j' + u_i' \langle u_j \rangle + (u_i' u_j' - \langle u_i' u_j' \rangle) \right] \right] = 0$$