Lösungen zu dem Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

Gegeben:

R = 5 cm, s = 0,2 cm, L = 20 cm, $\omega = \pi/2 \cdot s^{-1}$, $\mu = 5 \times 10^{-2}$ Pa · s.

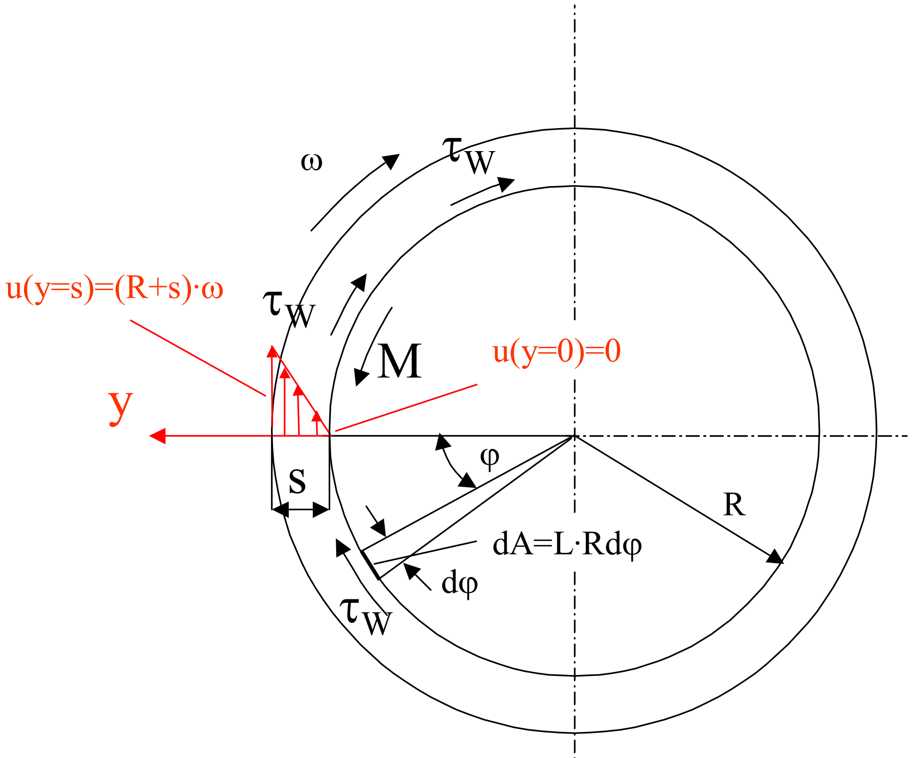
Voraussetzungen:

s<<R → Spaltkrümmung ist vernachlässigbar
s<<L → Randeffekte sind vernachlässigbar

Das Problem kann mit einer zweidimensionalen Couette-Strömung (Strömung zwischen zwei ebenen Platten, lineare Geschwindigkeitsverteilung) gelöst werden.

Gesucht:

Drehmoment M am inneren Zylinder



Momentengleichgewicht:

$$M - F_{\tau_w} \cdot R = 0 \tag{1.1}$$

$$M = F_{\tau_w} \cdot R \tag{1.2}$$

differenzielles Moment:

$$dM = dF_{\tau_w} \cdot R \tag{1.3}$$

differenzielle Kraft:

$$dF_{\tau_w} = \tau_w \cdot dA \tag{1.4}$$

differenzielle Fläche:

$$dA = R \cdot L \cdot d\varphi \tag{1.5}$$

Newtonscher Schubspannungsansatz:

$$\tau = \mu \cdot \frac{du(y)}{dy} \tag{1.6}$$

Lineare Geschwindigkeitsverteilung:

$$u(y) = a \cdot y + b \tag{1.7}$$

Randbedingungen (Haftbedingung):

$$u(y=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{b=0} \tag{1.8}$$

$$u(y=s) = (R+s)\cdot\omega \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(R+s)\cdot\omega}{s}$$

Damit ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung zu:

$$u(y) = \frac{(R+s)\cdot\omega}{s}\cdot y \tag{1.9}$$

(1.9) in den Newtonschen Schubspannungsansatz in (1.6) eingesetzt, liefert:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\omega\cdot(R+s)}{s} = \tau_w \tag{1.10}$$

Man erkennt, dass $\tau = konst. = \tau\left(y=0\right) = \tau_w \neq \tau\left(y\right)$.

(1.10) und (1.5) in (1.4) eingesetzt und dF_{τ_w} über die Zylinderfläche integriert, liefern:

$$F_{\tau_w} = \int_A \tau_w \cdot dA = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mu \cdot \frac{\omega \cdot (R+s)}{s} \cdot R \cdot L \cdot d\varphi = \mu \cdot \frac{\omega \cdot (R+s)}{s} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot L \tag{1.11}$$

(1.11) in (1.2) eingesetzt, liefert das Drehmoment M am inneren Zylinder:

$$M = \mu \cdot \frac{\omega \cdot (R+s)}{s} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot L = 64{,}15 \cdot 10^{-4}\ Nm \tag{1.12}$$

Aufgabe 2

Gegeben:

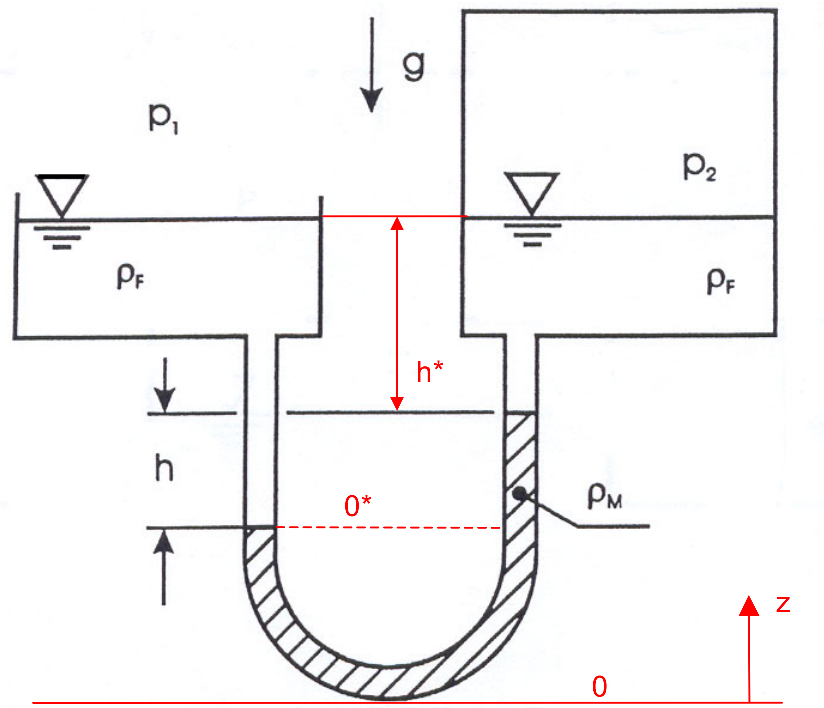
ρ_F = 1,0 g/cm³, ρ_M = 13,6 g/cm³, g = 9,81 m/s², p_1 = 1,05 · 10^5 Pa, p_2 = 1,00 · 10^5 Pa.

Gesucht:

a) Auslenkung h
b) Messgenauigkeit und Stabilität des Systems

Voraussetzungen:

- keine Vermischung der Flüssigkeit mit der Messflüssigkeit
- äußere Flüssigkeitsspiegel gleich hoch



Der Druck nimmt im linken wie auch im rechten Schenkel mit $\rho_M \cdot g \cdot z$ von 0 bis zur Stelle 0* ab. Da $\rho_F < \rho_M$ ist, nimmt er links dann weiter mit $\rho_F \cdot g \cdot z$ ab, rechts aber noch mit $\rho_M \cdot g \cdot z$.

Also: Druckgleichheit in beiden Schenkeln herrscht nur bis zu dem Niveau 0*.

Regel: Unterhalb des gleichen Druckniveaus muss sich in beiden Schenkeln des U-Rohr-Manometers das gleiche Medium befinden.

a) Gleichgewichtsbetrachtung für das Niveau 0*:

$$p_1 + \rho_F \cdot g \cdot h^* + \rho_F \cdot g \cdot h = p_2 + \rho_F \cdot g \cdot h^* + \rho_M \cdot g \cdot h$$

Der Term mit h* kürzt sich heraus:

$$p_1 + \rho_F \cdot g \cdot h = p_2 + \rho_M \cdot g \cdot h$$

Nach h aufgelöst:

$$h = \frac{p_1 - p_2}{g \cdot \left(\rho_M - \rho_F\right)} \approx 4\ cm$$

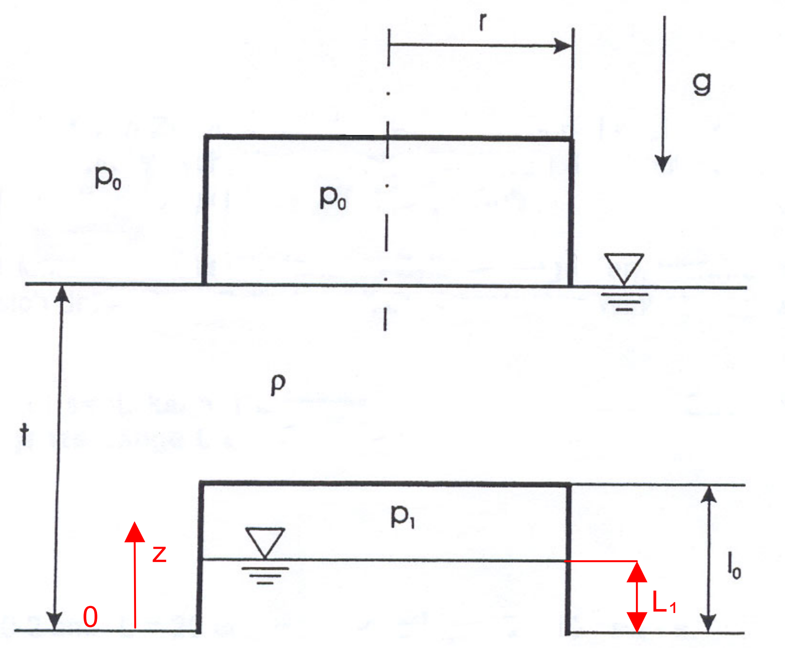
b) Erhöhung der Messgenauigkeit:

Wenn $(p_1 - p_2)$ und g konstant bleiben, dann kann h und damit die Messgenauigkeit durch Verringerung von $(\rho_M - \rho_F)$ vergrößert werden.
Für $(\rho_M - \rho_F)$ < 0 findet ein Umschlag der Flüssigkeitssäulen zur entgegengesetzten Seite hin statt, da dann die Dichte der Messflüssigkeit kleiner als diejenige der Flüssigkeit ist.
Bei $(\rho_M - \rho_F)$ = 0 ist die Gleichung (2.1) mathematisch nicht definiert. Zudem träfe dann die Vorgabe, dass $p_1 \neq p_2$ ist, nicht mehr zu. Bei konstanten Spiegelhöhen müssten auch die Drücke über den Behältern gleich groß sein.

Aufgabe 3

Gegeben: p_0, l_0, r, ρ, g

Gesucht: $p_1(t)$



Voraussetzungen:

- isotherme Kompression eines idealen Gases (Luft) → p·V = konst. (Boyle-Mariotte)
- bei geringen Höhendifferenzen kann der Einfluss der Schwerkraft auf die Luftmoleküle vernachlässigt werden → Gewicht von Luft vernachlässigbar

Druckgleichgewicht:

$$p_0 + \rho \cdot g \cdot t = p_1 + \rho \cdot g \cdot l_1$$

$$p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot \left(t - \underbrace{l_1}_{\text{unbekannt}} \right) \qquad (3.1)$$

Boyle-Mariotte-Gesetz für isotherme Prozesse:

$$p \cdot V = konst.$$

hier: $p_0 \cdot V_0 = p_1 \cdot V_1$

mit $V_0 = \pi \cdot r^2 \cdot l_0 \quad ; \quad V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot (l_0 - l_1)$

folgt $p_0 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l_0 = p_1 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (l_0 - l_1)$

$$l_1 = l_0 \cdot \left(1 - \frac{p_0}{p_1} \right) \qquad (3.2)$$

mit (3.2) in (3.1) $p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot \left(t - l_0 \cdot \left(1 - \frac{p_0}{p_1} \right) \right)$

Aufgelöst nach p_1 ergibt sich eine quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen:

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot (t - l_0) + \frac{1}{2} \cdot p_0 \overset{+}{\underset{(-)}{}} \sqrt{\left(\frac{1}{4} \cdot \left(\rho \cdot g \cdot (t - l_0) + p_0 \right)^2 + \rho \cdot g \cdot l_0 \cdot p_0 \right)}$$

Betrachtet man den Term $\sqrt{\left(\frac{1}{4} \cdot \left(\rho \cdot g \cdot (t - l_0) + p_0 \right)^2 + \rho \cdot g \cdot l_0 \cdot p_0 \right)}$, so stellt man fest, dass dieser größer als $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot (t - l_0) + \frac{1}{2} \cdot p_0$ ist.

Somit ist nur die Lösung

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot (t - l_0) + \frac{1}{2} \cdot p_0 + \sqrt{\left(\frac{1}{4} \cdot \left(\rho \cdot g \cdot (t - l_0) + p_0 \right)^2 + \rho \cdot g \cdot l_0 \cdot p_0 \right)}$$

sinnvoll, da p_1 nicht negativ werden kann.