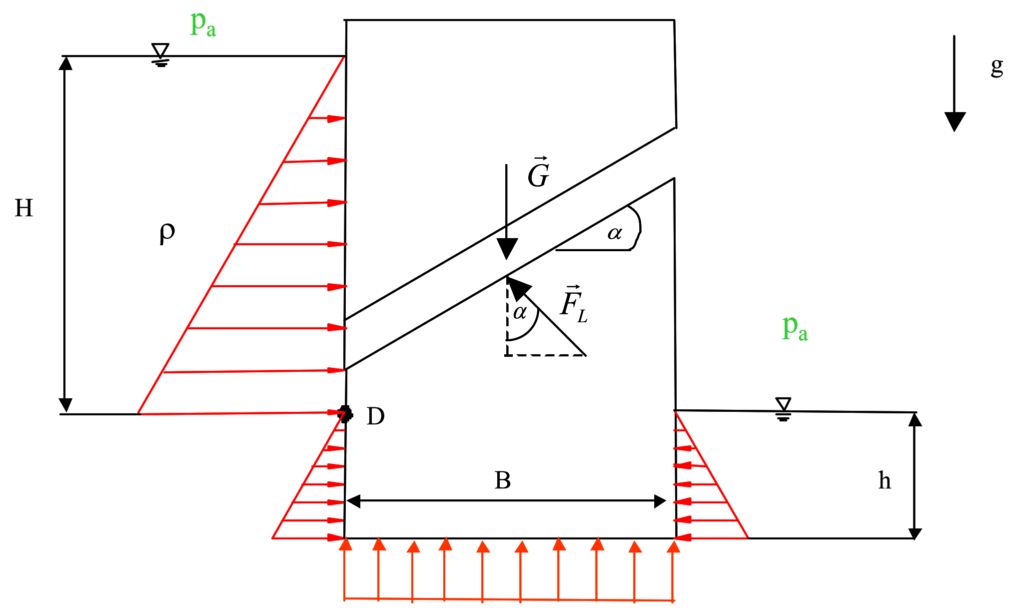
Lehrstuhl für
Fluiddynamik und Strömungstechnik
Prof. Dr.-Ing. W. Frank

Lösungen zu dem Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1

Gegeben: h, H, b, G, ρ, t, g

Gesucht: Winkel α



Annahmen:

- Rollen laufen reibungsfrei
- resultierende Kraft auf Dichtkante $\left|\vec{F}_D\right| = 0$
- über den freien Oberflächen wirkt der Umgebungsdruck, somit gibt es keine resultierende Kraft aufgrund von p_a, die auf den Balken wirkt

03.07.2007

Kräftegleichgewicht am Balken:

$$\sum F_{\rightarrow} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\rho \cdot g \cdot \frac{H}{2}}_{\substack{\textit{Druck im} \\ \textit{Flächenschwerpunkt}}} \cdot \underbrace{H \cdot t}_{\textit{benetzte Fläche}} - \left|\vec{F}_L\right| \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{F}_L\right| = \frac{\rho \cdot g \cdot t}{\sin\alpha} \cdot \frac{H^2}{2} \tag{1.1}$$

$$\sum F_{\uparrow} = 0 \Leftrightarrow \rho \cdot g \cdot h \cdot B \cdot t - \left|\vec{G}\right| + \left|\vec{F}_L\right| \cdot \cos\alpha = 0 \tag{1.2}$$

mit (1.1) in (1.2)

$$\rho \cdot g \cdot h \cdot B \cdot t - \left|\vec{G}\right| + \frac{\rho \cdot g \cdot t}{\sin\alpha} \cdot \frac{H^2}{2} \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{\rho \cdot g \cdot \frac{H^2}{2} \cdot t}{\left|\vec{G}\right| - \rho \cdot g \cdot h \cdot B \cdot t}$$

$$\alpha = \arctan\left[\frac{\rho \cdot g \cdot \frac{H^2}{2} \cdot t}{\left|\vec{G}\right| - \rho \cdot g \cdot h \cdot B \cdot t}\right]$$

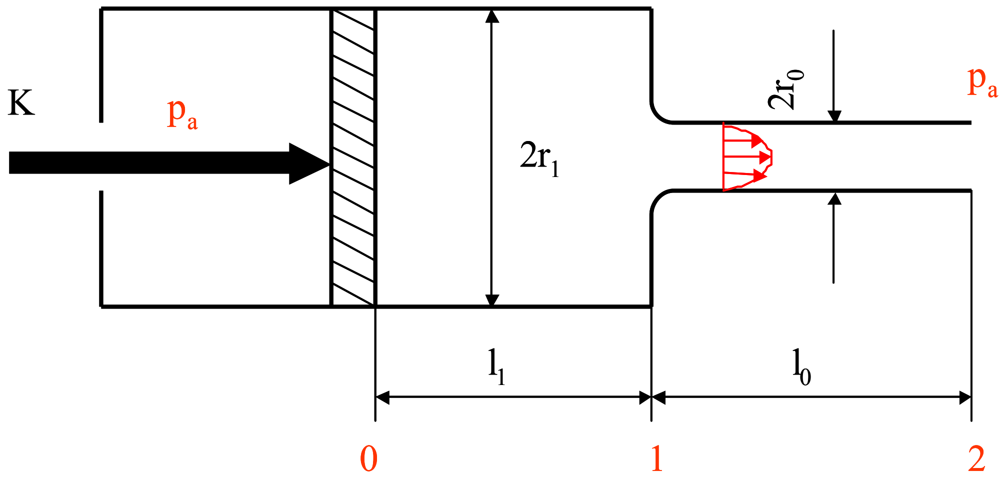
03.07.2007

Aufgabe 2

Gegeben: K = 5 N , r_0 = 0,02 cm , l_1 = 2 cm , r_1 = 0,5 cm , l_0 = 4 cm , μ = 0,002 Ns/m²

Gesucht: a) Entleerungszeit Δt der Spritze

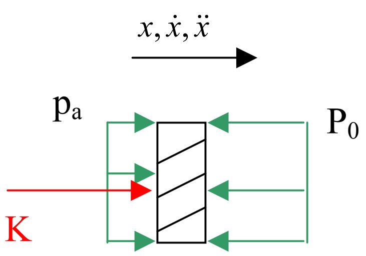
b) Überprüfung ob $\mathrm{Re}_{2r_0} < 2300$, da das Hagen-Poiseuille-Gesetz als Synonym für ausgebildete laminare Rohrströmung steht



Begriffe:

- ausgebildete Strömung → stationärer Vorgang → konstante Kolbengeschwindigkeit
- Druckabfall $p_0 - p_1 \approx 0 \;\Rightarrow\; p_0 \approx p_1$
- In der Kanüle gilt das Hagen–Poiseuille–Gesetz, d.h. ausgebildete laminare Rohrströmung

Wegen konstanter Geschwindigkeit des Kolbens folgt aus dem Newtonschen Grundgesetz:



$$\dot{x} = \frac{l_1}{\Delta t} = konst. \;\Rightarrow\; \ddot{x} = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} = 0 = p_a \cdot \pi \cdot r_1^2 + K - p_0 \cdot \pi \cdot r_1^2$$

$$\Rightarrow\; p_0 - p_a = \frac{K}{\pi \cdot r_1^2}$$

mit

$$p_0 - p_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; p_0 = p_1$$

folgt

$$\Rightarrow \quad p_1 - p_a = \frac{K}{\pi \cdot r_1^2} \tag{2.1}$$

Druckverlust in der Kanüle:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = p_1 - p_a = \frac{\rho}{2} c_m^2 \frac{L_o}{2 \cdot r_o} \cdot \lambda_{lam}$$

mit

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{\mathrm{Re}_{2r_0}} \quad ; \quad \mathrm{Re}_{2r_0} = \frac{\rho \cdot c_m \cdot 2 \cdot r_0}{\mu} \quad ; \quad \mu = \rho \cdot \nu$$

folgt

$$\Delta p = p_1 - p_a = 8 \cdot c_m \frac{L_o}{r_0^2} \cdot \mu \tag{2.2}$$

Konti von 0 → 1:

$$\cancel{\rho} \cdot \underbrace{c_0}_{\frac{l_1}{\Delta t}} \cdot \pi \cdot r_1^2 = \cancel{\rho} \cdot \underbrace{c_1}_{c_m} \cdot \pi \cdot r_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_1}{\Delta t} \cdot \pi \cdot r_1^2 = c_m \cdot \pi \cdot r_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad c_m = \frac{l_1}{\Delta t} \cdot \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 \tag{2.3}$$

mit (2.3) in (2.2)

$$\Delta p = p_1 - p_a = 8 \cdot \frac{l_1}{\Delta t} \cdot \frac{r_1^2 \cdot L_o}{r_0^4} \cdot \mu \tag{2.4}$$

mit (2.1) = (2.4)

$$\frac{K}{\pi \cdot r_1^2} = 8 \cdot \frac{l_1}{\Delta t} \cdot \frac{r_1^2 \cdot L_o}{r_0^4} \cdot \mu$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot L_0 \cdot L_1}{K} \cdot \frac{r_1^4}{r_0^4} = 3{,}14\ s$$

b) Überprüfung ob laminare Rohrströmung vorliegt, d.h. ob $\mathrm{Re}_{2r_0} < 2300$

$$\mathrm{Re}_{2r_0} = \frac{\rho \cdot c_m \cdot 2 \cdot r_0}{\mu}$$

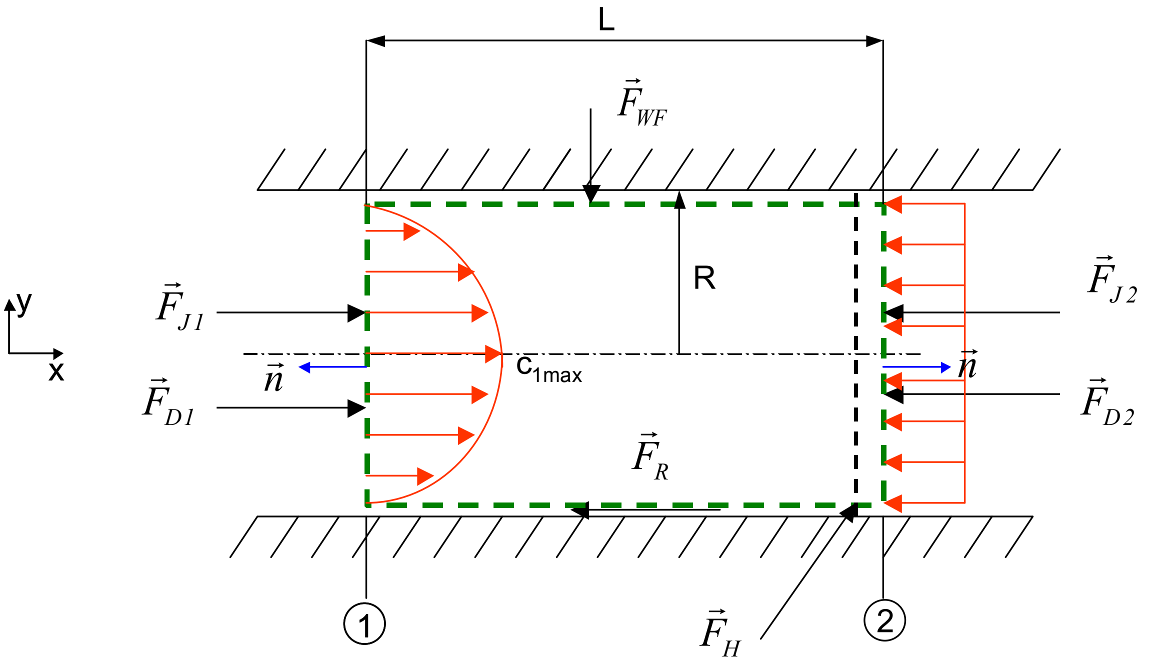
ρ ist nicht gegeben, deshalb ist die numerische Berechnung der Reynolds-Zahl nicht möglich.

03.07.2007

Aufgabe 3

Gegeben: R, c_{1max}, p_1, p_2, L, μ, ρ.

Gesucht: Kraft F_H nach Größe und Richtung, die an dem Sieb angreift



Annahmen:

- ausgebildete laminare, inkompressible Rohrströmung vor dem Sieb bei 1
- Blockprofil hinter dem Sieb bei 2
- Berücksichtigung der Wandreibung längs des Rohrstückes der Länge L

Berechnung der Haltekraft $\vec{F}_H$ mittels Impulssatz:

$$\vec{F}_J + \sum \vec{F}_a = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{J1} + \vec{F}_{D1} + \vec{F}_{J2} + \vec{F}_{D2} + \vec{F}_{WF} + \vec{F}_R + \vec{F}_H = 0$$

Strömung im Rohr ist rotationssymmetrisch:

$\Rightarrow$ Kraft der Wand auf die Flüssigkeit $F_{WF} = 0$, deshalb ist auch $F_{H,y} = 0$.

Impulssatz nur in Strömungsrichtung:

$$\left|\vec{F}_{J1}\right| - \left|\vec{F}_{J2}\right| + \left|\vec{F}_{D1}\right| - \left|\vec{F}_{D2}\right| - \left|\vec{F}_R\right| + \left|\vec{F}_{H,x}\right| = 0$$

Berechnung von $\left|\vec{F}_{J1}\right|$:

$$\left|\vec{F}_{J1}\right| = \rho \cdot \int_0^R c_1^2(r) \cdot \underbrace{2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}_{Kreisringquerschnitt}$$

$$\text{mit } \underbrace{c_1(r) = c_{1\max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}_{Hagen-Poiseuille-Gesetz}$$

$$\left|\vec{F}_{J1}\right| = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot \int_0^R \left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]^2 \cdot r \cdot dr$$

$$\left|\vec{F}_{J1}\right| = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot \int_0^R \left[r - 2 \cdot \frac{r^3}{R^2} + \frac{r^5}{R^4}\right] \cdot dr$$

$$\left|\vec{F}_{J1}\right| = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^4}{R^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{r^6}{R^4}\right]_0^R$$

$$\left|\vec{F}_{J1}\right| = \pi \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot \left[R^2 - R^2 + \frac{1}{3} \cdot R^2\right] = \frac{\pi}{3} \cdot \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot R^2$$

Berechnung von $\left|\vec{F}_{J2}\right|$:

$$\left|\vec{F}_{J2}\right| = \rho \cdot c_2^2 \cdot A_2 = \rho \cdot c_2^2 \cdot \pi \cdot R^2$$

aus der Konti-Gl. folgt

$$\rho \cdot c_{1m} \cdot \pi \cdot R^2 = \rho \cdot c_2 \cdot \pi \cdot R^2 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = c_{1\mathrm{m}}$$

mit

$$c_{1\mathrm{m}} = \frac{c_{1\max}}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{J2}\right| = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot c_{1\max}^2 \cdot R^2$$

Berechnung der Druckkräfte:

$$\left|\vec{F}_{D1}\right| = p_1 \cdot \pi \cdot R^2; \qquad \left|\vec{F}_{D2}\right| = p_2 \cdot \pi \cdot R^2$$

Berechnung von $\vec{F}_R$ mittels Integration der Schubspannungsverteilung:

$$\left|\vec{F}_R\right| = \int_0^L \left|\tau_w\right| \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot dx$$

Newtonscher Schubspannungsansatz:

$$\left|\tau_w\right| = \left|\mu \cdot \frac{dc}{dr}\right|_{r=R} = \left|\mu \cdot \frac{d\left(c_1(r)\right)}{dr}\right|_{r=R}$$

mit $$c_1(r) = c_{1\max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \rightarrow \frac{d\left(c_1(r)\right)}{dr} = -2 \cdot c_{1\max} \cdot \frac{r}{R^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\left(c_1(r)\right)}{dr}\right|_{r=R} = -2 \cdot c_{1\max} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_R\right| = \int_0^L \left|\mu \cdot \left(-2 \cdot c_{1\max} \cdot \frac{1}{R}\right)\right| \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot dx = \left|\vec{F}_R\right| = 4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot L \cdot c_{1\max}$$

Einsetzen in den Impulssatz liefert:

$$\left|\vec{F}_{H,x}\right| = \left|\vec{F}_H\right| = \rho \cdot c_{1\max}^2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \left(p_2 - p_1\right) \cdot \pi \cdot R^2 + 4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot L \cdot c_{1\max}$$

$$= R^2 \cdot \pi \cdot \left[4 \cdot \frac{\mu \cdot L}{R^2} \cdot c_{1\max} - \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot c_{1\max}{}^2 - \left(p_1 - p_2\right)\right]$$

Da der Druckabfall im Rohr $(p_1 - p_2)$ die Reibungskraft und das Sieb überwinden muss, muss gelten:

$$p_1 - p_2 > 4 \cdot \frac{\mu \cdot L}{R^2} \cdot c_{1\max}$$

Somit wirkt $\left|\vec{F}_{H,x}\right|$ in negative x-Richtung:

$$\vec{F}_H = \begin{pmatrix} R^2 \cdot \pi \cdot \left[4 \cdot \frac{\mu \cdot L}{R^2} \cdot c_{1\max} - \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot c_{1\max}{}^2 - \left(p_1 - p_2\right)\right] < 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$