10.07.2007

Lehrstuhl für Fluiddynamik und Strömungstechnik
Prof. Dr.-Ing. W. Frank

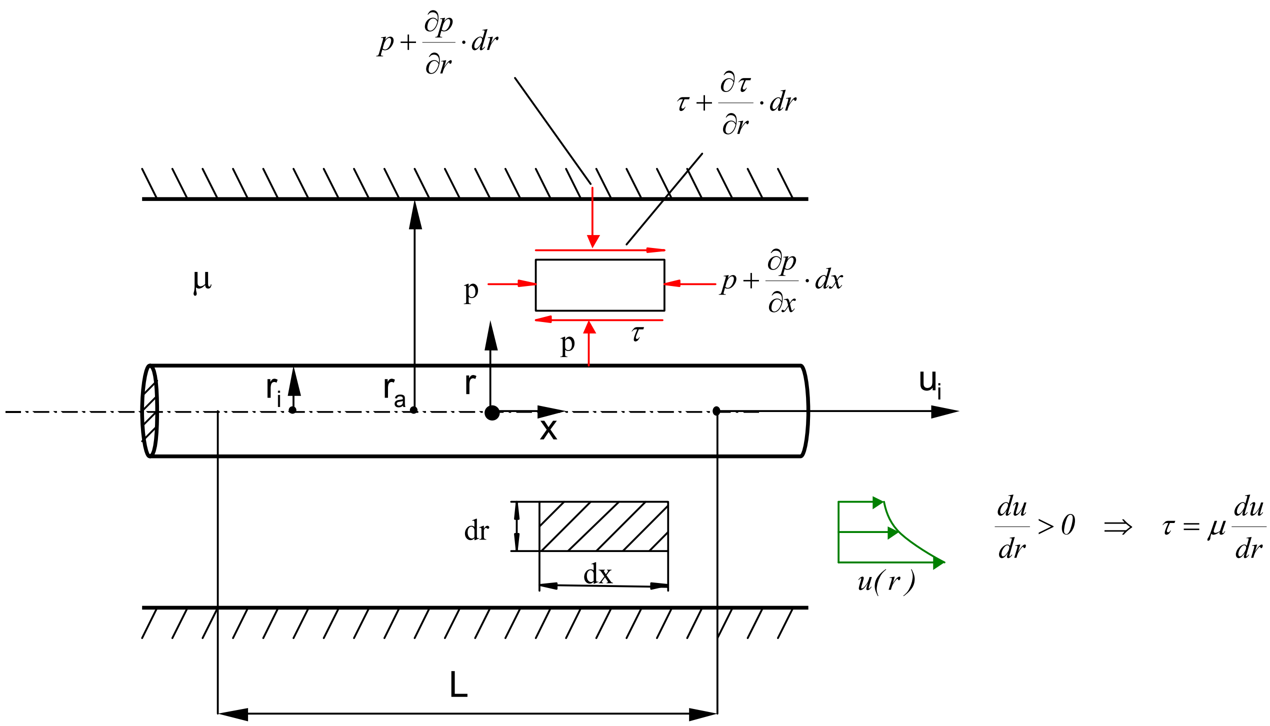
Lösungen zu dem Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1

Gegeben: r_i, r_a, u_i, L, μ, dp/dx

Gesucht: a) die Geschwindigkeitsverteilung $u(r)$ im Medium

b) Größe und Richtung der Kraft $\vec{F}$, die von dem Medium auf den Stab über die Länge L ausgeübt wird



Voraussetzungen:

- inkompressibles Newtonsches Medium (Dichte ρ, dynamische Zähigkeit μ)
- stationäre Strömung $\frac{\partial u}{\partial t}=0$

- ausgebildete Strömung $\rightarrow u \neq u(x)$, $u = u(r)$
- laminare Strömung, d h. es gilt der Newtonsche Schubspannungsansatz
- keine Berücksichtigung der Erdschwere

a) Kräftebilanz am Massenelement

Gleichgewicht in x-Richtung:

$$p \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr - \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dx + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} \cdot dr \right) \cdot \left(r + dr \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr + \frac{\partial \tau}{\partial r} \cdot dr \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dx + \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot dr \cdot dx + \frac{\partial \tau}{\partial r} \cdot dr^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} + \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial r} \cdot \frac{dr}{r}}_{\approx 0, \text{ da } \frac{dr}{r} << 1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} = \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (1.1)$$

Gleichgewicht in r-Richtung:

$$p \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial r} \cdot dr \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(r + dr \right) \cdot dx = 0$$

$$-p \cdot 2 \cdot \pi \cdot \underbrace{dr \cdot dx}_{\approx 0} - \frac{\partial p}{\partial r} \cdot dr \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(r + dr \right) \cdot dx = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} \cdot dr \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(r + dr \right) \cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow p \neq p\left(r \right) = p\left(x \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} \qquad (1.2)$$

10.07.2007

Newtonscher Schubspannungsansatz:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \tag{1.3}$$

$$\tau \neq \tau(x) \qquad \tau = \tau(r) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{d\tau}{dr} \tag{1.4}$$

(1.4) in (1.3):

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dr} \tag{1.5}$$

(1.4) und (1.2) in (1.1):

$$\Rightarrow \quad \frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} = \frac{dp}{dx} \tag{1.6}$$

Lösung der homogenen Dgl.:

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} = 0 \qquad \left| \cdot \frac{dr}{\tau} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\tau}{\tau} = -\frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \ln \tau = -\ln r + \ln c$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln \tau = \ln \frac{c}{r}$$

$$\tau = \frac{c}{r}$$

Variation der Konstanten (Verfahren zur Lösung von Dgl.):

$$c = c(r) \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{c(r)}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\tau}{dr} = \frac{c'(r)}{r} - \frac{c(r)}{r^2} = \frac{dc(r)}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{c(r)}{r^2}$$

Eingesetzt in die inhomogene Dgl.:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dc(r)}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{c(r)}{r^2} + \frac{c(r)}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dc(r)}{dr} = \frac{dp}{dx} \cdot r$$

Integration:

$$c(r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r^2 + c_1$$

Einsetzen in die homogene DGL:

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r + \frac{c_1}{r} \qquad (1.7)$$

Gleichsetzen von (1.5) und (1.7):

$$\mu \cdot \frac{du}{dr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r + \frac{c_1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du(r)}{dr} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r + \frac{c_1}{r} \right)$$

$$\Rightarrow \quad u(r) = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r^2 + c_1 \ln r \right) + c_2 \qquad (1.8)$$

Bestimmung von c_1 und c_2 aus den Randbedingungen:

$$u(r = r_a) = 0 \quad (1) \qquad ; \qquad u(r = r_i) = u_i \quad (2)$$

aus (1) und (2) in (1.8) folgt:

$$c_1 = \frac{1}{\ln \frac{r_i}{r_a}} \cdot \left[\mu \cdot u_i + \frac{1}{4} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \left(r_a^{\,2} - r_i^2 \right) \right] \quad (3)$$

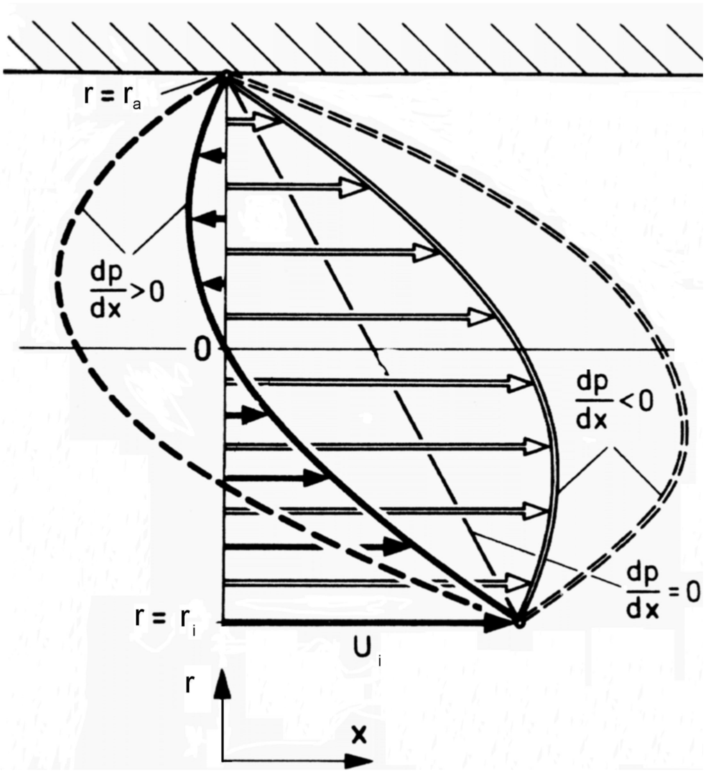
$$c_2 = \frac{\ln r_a}{\ln \frac{r_i}{r_a}} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \left(r_i^2 - r_a^2 \right) - u_i \right] - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r_a^2 \quad (4)$$

Einsetzen von (3) und (4) in (1.8):

$$\Rightarrow \quad u(r) = u_i \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_a}}{\ln \frac{r_i}{r_a}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \left[\left(r^2 - r_a^2 \right) - \frac{\ln \frac{r}{r_a}}{\ln \frac{r_i}{r_a}} \cdot \left(r_i^2 - r_a^2 \right) \right]$$

b)

Größe der Kraft, die von dem Medium auf den Stab ausgeübt wird:



Schematische Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit von dp/dx (unter Vernachlässigung der Spaltkrümmung, siehe auch Zierep S.143-145)

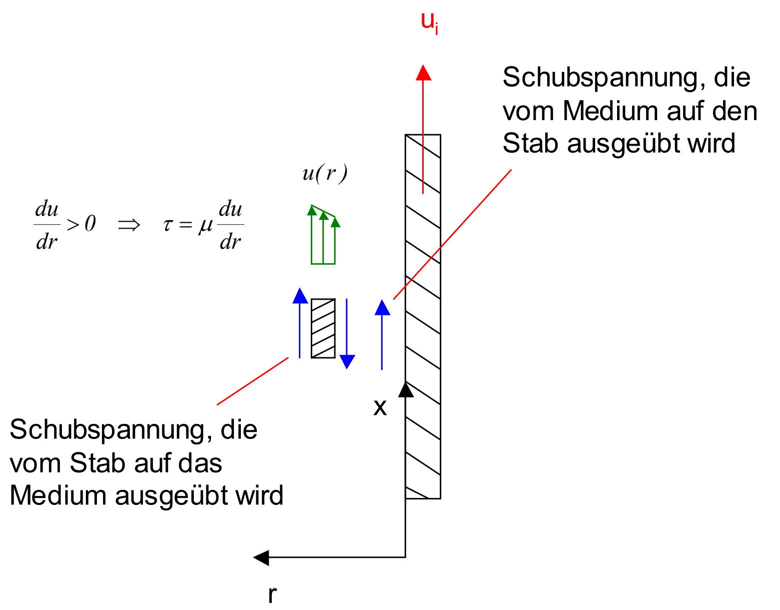
$$\left|\vec{F}\right| = \left|\tau_w\right| \cdot A = \left|\tau(r = r_i)\right| \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L \cdot \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r_i + \frac{c_1}{r_i}\right|$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L \cdot \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r_i + \frac{1}{r_i} \frac{1}{\ln \frac{r_i}{r_a}} \left(\mu \cdot u_i + \frac{1}{4} \frac{dp}{dx}\left(r_a^2 - r_i^2\right)\right)\right|$$

10.07.2007

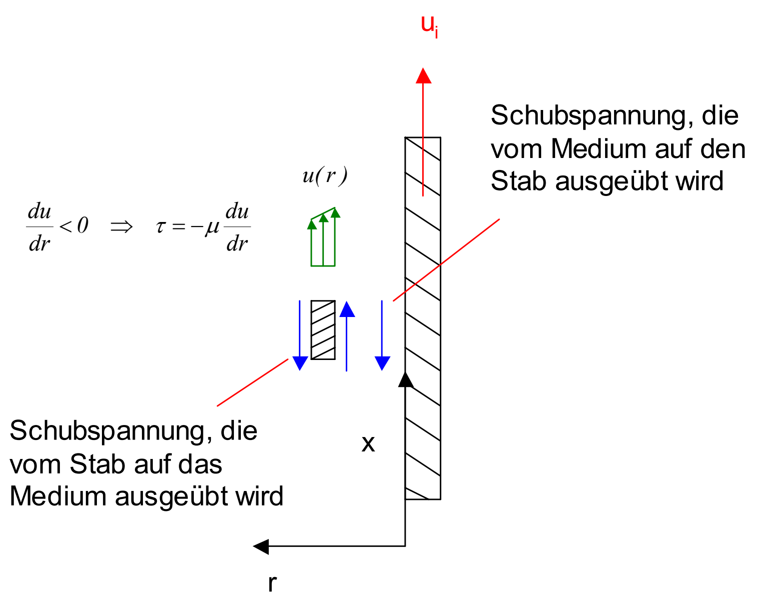
Richtung der Kraft, die von dem Medium auf den Stab ausgeübt wird:

Für dp/dx < 0 ergibt sich folgendes Geschwindigkeitsprofil in der Nähe des bewegten Stabes:



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} +2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L \cdot \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r_i + \frac{1}{r_i} \frac{1}{\ln \frac{r_i}{r_a}} \left(\mu \cdot u_i + \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} \left(r_a^2 - r_i^2 \right) \right) \right| \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für dp/dx > 0 ergibt sich folgendes Geschwindigkeitsprofil in der Nähe des bewegten Stabes:



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L \cdot \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r_i + \frac{1}{r_i} \frac{1}{\ln \frac{r_i}{r_a}} \left(\mu \cdot u_i + \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} \left(r_a^2 - r_i^2 \right) \right) \right| \\ 0 \end{pmatrix}$$

10.07.2007

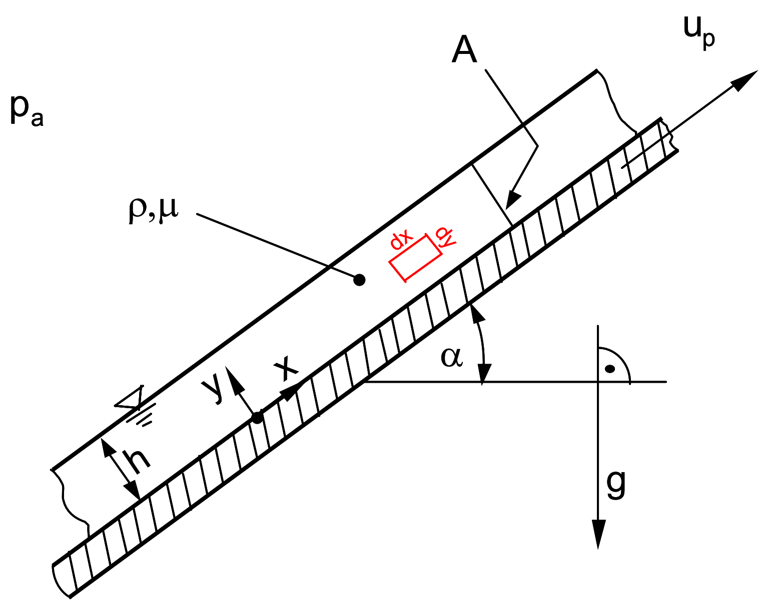
Aufgabe 2

Gegeben: u_p, α, h, μ, ρ, g, p_a.

Gesucht: a) $u(y)$ und $\tau(y)$ mittels Kräftebilanz am Massenelement

b) die kritische Plattengeschwindigkeit $u_{P_{krit}}$ für $\dot{V} = 0$

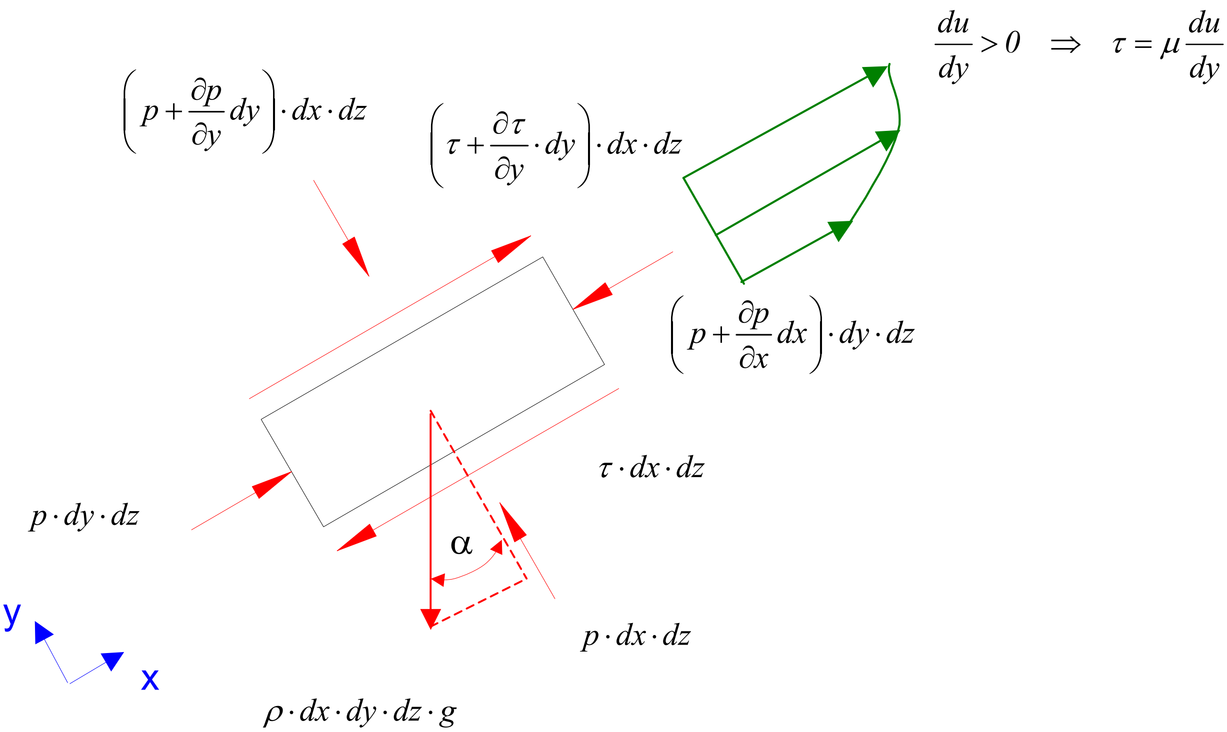
c) die Leistung P, die pro Oberflächeneinheit von der Platte an das Medium abgegeben wird



Voraussetzungen:

- inkompressibles Newtonsches Medium (Dichte ρ, dynamische Zähigkeit μ)
- keine Reibung zwischen dem Medium und der darüber liegenden Luft
- konstante Schichthöhe h
- konstanter Außendruck p_a
- ebene Strömung → keine Krümmung der Stromlinien
- stationäre Strömung $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$
- voll ausgebildete Strömung → $u \neq u(x)$, $u = u(y)$
- laminare Strömung, d h. es gilt der Newtonsche Schubspannungsansatz

a) Kräftebilanz am Massenelement



Kräftebilanz in x-Richtung:

$$p \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dy \cdot dz - \tau \cdot dx \cdot dz + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \cdot dz - \rho \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} - \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) = 0 \qquad (2.1)$$

Kräftebilanz in y-Richtung:

$$p \cdot dx \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \cdot dz - \rho \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad p = -\rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot y + c \qquad (2.2)$$

Randbedingungen:

$$p(y = h) = p_a \quad \Leftrightarrow \quad p_a = -\rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot h + c \quad \Leftrightarrow \quad c = p_a + \rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot h$$

$$\Rightarrow \quad p = p_a + \rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot (h - y)$$

$$\Rightarrow \quad p \neq p(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (2.3)$$

mit (2.3) in (2.1)

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \tag{2.4}$$

Newtonscher Schubspannungsansatz:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.5}$$

$$\tau \neq \tau(x) \qquad \tau = \tau(y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{d\tau}{dy} \tag{2.6}$$

mit (2.6) in (2.5):

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} \tag{2.7}$$

mit (2.6) in (2.4):

$$\Rightarrow \quad \frac{d\tau}{dy} = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \tag{2.8}$$

mit (2.7) in (2.8):

$$\mu \cdot \frac{d^2 u}{dy^2} = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \mu \cdot \frac{d\ u}{dy} = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot y + c_1 = \tau$$

Randbedingung 1:

$$\tau(y = h) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot h + c_1 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = -\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot h$$

$$\Rightarrow \quad \mu \cdot \frac{du}{dy} = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot (y - h)$$

$$\Rightarrow \quad u(y) = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{\mu} \cdot \left(\frac{y^2}{2} - h \cdot y \right) + c_2$$

Randbedingung 2:

$$u(y = 0) = u_P \quad \Rightarrow \quad c_2 = u_P$$

$$u(y) = u_P + \frac{\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{\mu} \cdot \left(\frac{y^2}{2} - h \cdot y \right)$$

b) Berechnung des Volumenstroms:

$$\dot{V} = \int_0^h u(y)\cdot 1\cdot dy = \left[u_{P_{krit}}\cdot y + \frac{1}{\mu}\cdot\rho\cdot g\cdot \sin(\alpha)\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot y^3 - \frac{1}{2}\cdot h\cdot y^2\right)\right]_0^h$$

$$= u_{P_{krit}}\cdot h + \frac{1}{\mu}\cdot\rho\cdot g\cdot \sin(\alpha)\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot h^3 - \frac{1}{2}\cdot h^3\right)$$

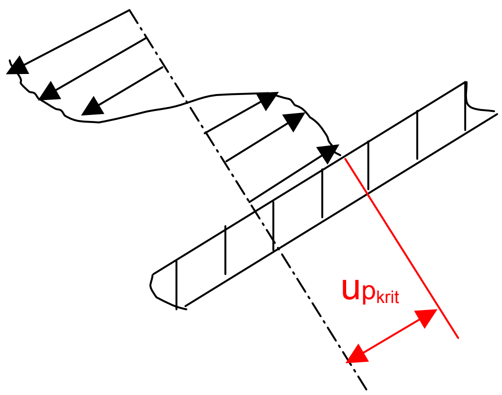
$$= u_{P_{krit}}\cdot h - \frac{1}{\mu}\cdot\rho\cdot g\cdot \sin(\alpha)\cdot\frac{1}{3}h^3$$

Berechnung von $u_{P_{krit}}$:

$$\dot{V} = 0$$

$$\Leftrightarrow u_{P_{krit}}\cdot h - \frac{1}{\mu}\cdot\rho\cdot g\cdot \sin(\alpha)\cdot\frac{1}{3}h^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow u_{P_{krit}} = \frac{1}{\mu}\cdot\rho\cdot g\cdot \sin(\alpha)\cdot\frac{1}{3}h^2$$



c)

$$P = \frac{Leistung}{Fläche} = \frac{Kraft}{Fläche}\cdot\frac{Weg}{Zeit} = \frac{Kraft}{Fläche}\cdot Geschwindigkeit$$

$$P = |\tau_w|\cdot u_P = \rho\cdot g\cdot \sin(\alpha)\cdot h\cdot u_P$$