Lehrstuhl für
Fluiddynamik und Strömungstechnik
Prof. Dr.-Ing. W. Frank

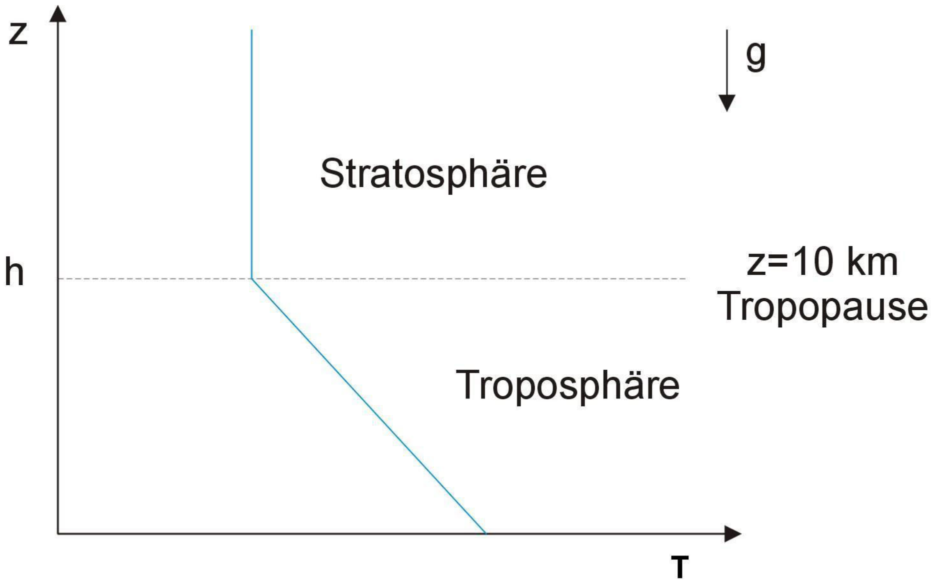
Lösungen zu dem Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Gegeben:

p_0 = 0,981 bar (Druck für z = 0), T_0 = 283 K (Temperatur für z = 0), $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$ K $\cdot$ m^{-1}, m = 29 kg/ kmol (Molmasse der Luft), R_m = 8314 J/ (K $\cdot$ kmol) (universelle Gaskonstante), $H_1 = 1 \cdot 10^3$ m, $H_2 = 12 \cdot 10^3$ m, $h = 10^4$ m, d = 30 cm, g = 9,81 m/ s^2.

Temperaturverlauf in Abhängigkeit der Höhe z (hier in Diagrammform):



$$T(z) = \begin{cases} T_0 - \alpha \cdot z & \text{für } 0 \le z \le h \quad \text{(Troposphäre)} \qquad (1a) \\ T_0 - \alpha \cdot h & \text{für } z \ge h \quad \text{(Stratosphäre)} \qquad (1b) \end{cases}$$

Gesucht:

p(z)

Lösungsweg:

Hydrostatische Grundgleichung (z-Richtung entgegengesetzt zur g-Richtung):

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z) \cdot g \qquad (2)$$

Ideale Gasgleichung:

$$\frac{p(z)}{\rho(z)} = \frac{R}{m} \cdot T(z) \qquad (3)$$

mit

$$\frac{R}{m} = \frac{\text{allg. Gaskonstante}}{\text{Molmasse}} = \mathbb{R} \ = \text{spezifische oder spezielle Gaskonstante}$$

Wird (3) in (2) eingesetzt, so ergibt sich:

$$\frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{g \cdot m}{R} \cdot \frac{dz}{T(z)} \qquad (4)$$

a) <u>In der Troposphäre</u> ($0 \leq z \leq h = 10$ km) gilt (1a):

$$T(z) = T_0 - \alpha \cdot z \qquad (1a)$$

(1a) eingesetzt in (4) ergibt:

$$\frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{g \cdot m}{R} \cdot \frac{dz}{(T_0 - \alpha \cdot z)} \qquad (5)$$

Unbestimmte Integration von (5)

$$\int \frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{g \cdot m}{R} \cdot \int \frac{dz}{(T_0 - \alpha \cdot z)}$$

ergibt:

$$\ln p(z) = \frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha} \cdot \ln(T_0 - \alpha \cdot z) + \underbrace{C_0}_{\ln C_0^*}$$

$$\ln p(z) = \ln\left[(T_0 - \alpha \cdot z)^{\frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha}}\right] + \ln C_0^*$$

$$\ln p(z) = \ln\left[(T_0 - \alpha \cdot z)^{\frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha}} \cdot C_0^*\right]$$

$$p(z) = C_0^* \cdot (T_0 - \alpha \cdot z)^{\frac{g \cdot m}{R \cdot \alpha}} \qquad (6)$$

C_0^* muss aus den Randbedingungen bestimmt werden:

$z = 0$: $\quad p\ (z = 0) = p_0$

In (6) eingesetzt ergibt sich:

$$C_0^* = \frac{p_0}{T_0^{\frac{g\cdot m}{R\cdot\alpha}}} \tag{7}$$

Aus (7) in (6) folgt:

$$p(z) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot z}{T_0}\right)^{\frac{g\cdot m}{R\cdot\alpha}} = p_T(z) \qquad \text{für } 0 \le z \le h = 10 \text{ km (Troposphäre)} \tag{8}$$

b) <u>In der Stratosphäre</u> für $z \ge h = 10$ km gilt (1b):

$$T(z) = T_0 - \alpha \cdot h = \text{const.} \tag{1b}$$

(1b) eingesetzt in (4) liefert:

$$\frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{g \cdot m}{R} \cdot \frac{dz}{T_0 - \alpha \cdot h} \tag{9}$$

Daraus folgt:

$$\ln p(z) = -\frac{g \cdot m \cdot z}{R \cdot (T_0 - \alpha \cdot h)} + \underbrace{C_1}_{\ln C_1^*}$$

$$p(z) = C_1^* \cdot e^{-\frac{g\cdot m\cdot z}{R\cdot(T_0-\alpha\cdot h)}} = p_S(z) \tag{10}$$

Man erhält C_1^* aus der Übergangsbedingung von der Troposphäre zur Stratosphäre:

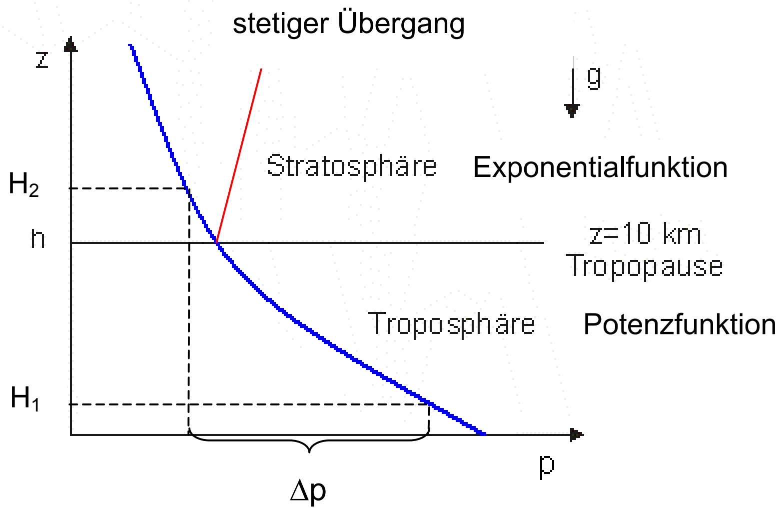
$z = h$: $\qquad p_T(z = h) = p_S(z = h)$

$z = h$ in (8) und (10) eingesetzt und aufgelöst nach C_1^*:

$$C_1^* = p_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g\cdot m}{R\cdot\alpha}} \cdot e^{\frac{g\cdot m\cdot h}{R\cdot(T_0-\alpha\cdot h)}} \tag{11}$$

Wird (11) in (10) eingesetzt, folgt:

$$p_S(z) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g\cdot m}{R\cdot\alpha}} \cdot e^{\frac{g\cdot m\cdot(h-z)}{R\cdot(T_0-\alpha\cdot h)}} \tag{12}$$



Gesucht:

Der Überdruck in einem Flugzeug, welches in der Höhe H_2 fliegt, dessen Innendruck jedoch auf die Höhe $H_1 < H_2$ eingestellt ist, berechnet sich aus:

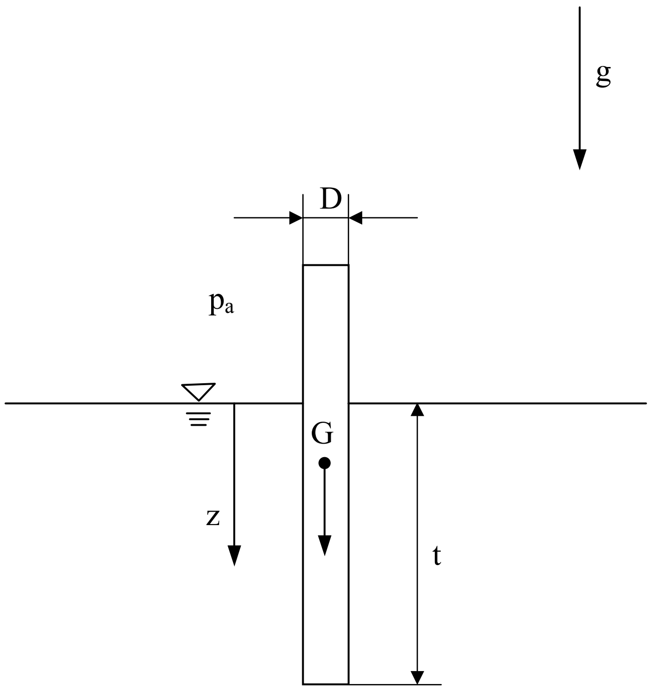
$$\Delta p = p_T(z = H_1) - p_S(z = H_2)$$
$$\Delta p = 0,682 \text{ bar}$$

Gesucht:

Die Kraft F, die auf die Fensterfläche wirkt, berechnet sich zu:

$$F = \Delta p \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} = 4820\text{N}$$

Aufgabe 2



1. Lösungsweg

Gegeben: D, G, t, ε, g, p_a

a) Gesucht: p(z)

hydrostat. Grundgleichung

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p(z)}{\partial z}=+g \tag{1}$$

g hat ein positives Vorzeichen, da es gleichgerichtet zur z-Richtung ist!

$$\rho(z)=\rho_0\cdot(1+\varepsilon\cdot z) \tag{2}$$

Aus (2) in (1) folgt:

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z}=\frac{dp(z)}{dz}=g\cdot\rho_0\cdot(1+\varepsilon\cdot z)$$

$$\Rightarrow p(z)=g\cdot\rho_0\cdot\left(z+\varepsilon\cdot\frac{z^2}{2}\right)+C \tag{3}$$

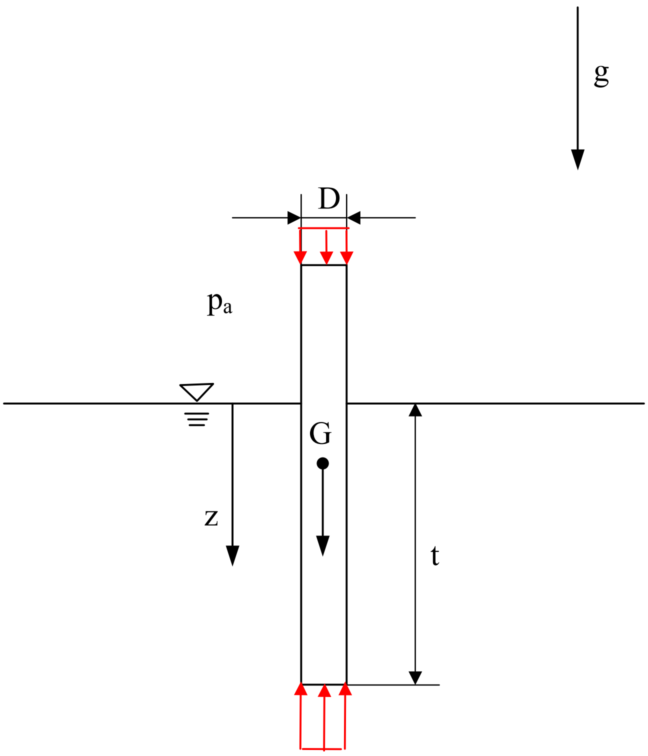
Bestimmung der Konstanten aus den Randbedingungen:

$$p(z=0)=p_a \quad\Rightarrow\quad C=p_a$$

$$p(z)=g\cdot\rho_0\cdot\left(z+\varepsilon\cdot\frac{z^2}{2}\right)+p_a$$

b) Gesucht: ρ_0

<u>Kräftegleichgewicht</u>



$$\sum F = 0$$

$$G + p_a \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - p(z=t) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 0$$

$$G + p_a \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \left(g \cdot \rho_0 \cdot \left(t + \varepsilon \cdot \frac{t^2}{2} \right) + p_a \right) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 0$$

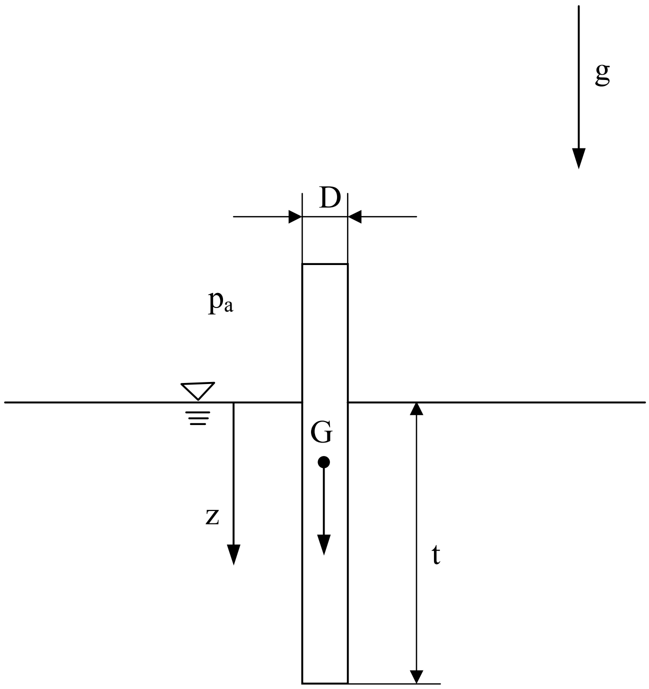
$$\Rightarrow \rho_0 = \frac{4 \cdot G}{\left(t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \right) \cdot g \cdot \pi \cdot D^2}$$

2. Lösungsweg

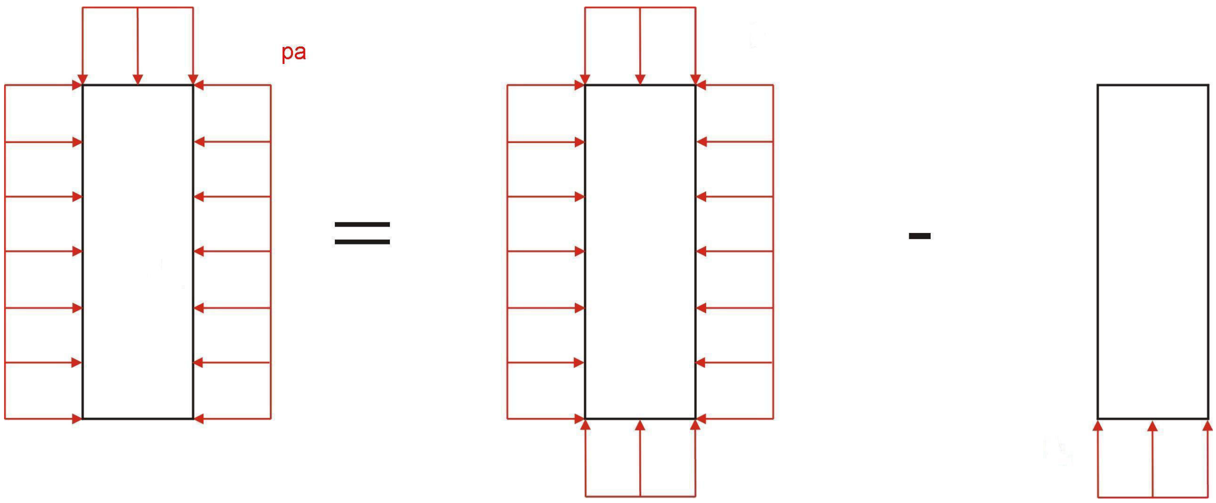
Gegeben: D, G, t, ε, g, p_a

a) Gesucht: p(z) aus 1. Lösungsweg

Die Lösung der Aufgabe erfolgt durch die Anwendung des Archimedischen Prinzips (Auftrieb = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit) für eingetauchte Körper, das auch für teilweise eingetauchte Körper gilt.

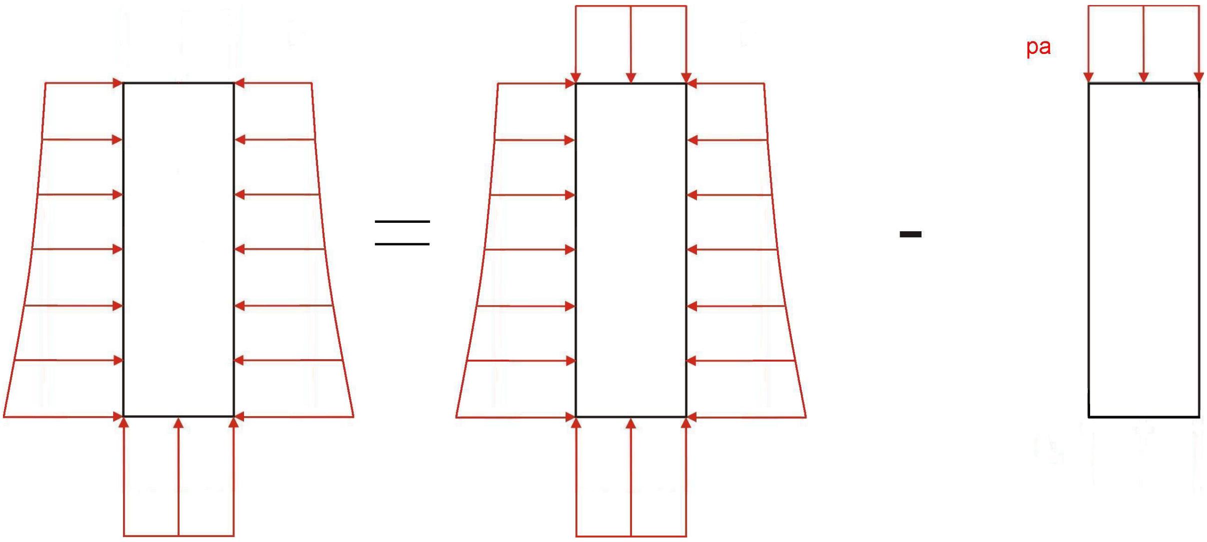


Die Druckkraft F_o auf den oberen, nicht eingetauchten Zylinderteil wird wie folgt ermittelt:



$$F_o = 0 - \left(-p_a \frac{\pi D^2}{4}\right) = p_a \frac{\pi D^2}{4}$$

Die Druckkraft auf den unteren, eingetauchten Zylinderteil F_u wird wie folgt ermittelt:



$$F_u = -\underbrace{\int_0^t \rho(z)\cdot g\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot dz}_{Auftrieb} - p_a\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}$$

$$F_u = -\int_0^t \rho_0\cdot g\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot(1+\varepsilon\cdot z)\cdot dz - p_a\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}$$

$$F_u = -\rho_0\cdot g\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot\left(z+\varepsilon\cdot\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^t - p_a\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}$$

$$F_u = -\rho_0\cdot g\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot\left(t+\varepsilon\cdot\frac{t^2}{2}\right) - p_a\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}$$

b) Gesucht: ρ_0

<u>Kräftegleichgewicht:</u>

$$F_o + F_u + G = 0$$

$$\Leftrightarrow p_a\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4} - \rho_0\cdot g\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot\left(t+\frac{\varepsilon\cdot t^2}{2}\right) - p_a\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4} + G = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho_0 = \frac{4\cdot G}{g\cdot\pi\cdot D^2}\cdot\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\varepsilon t^2\right)}$$

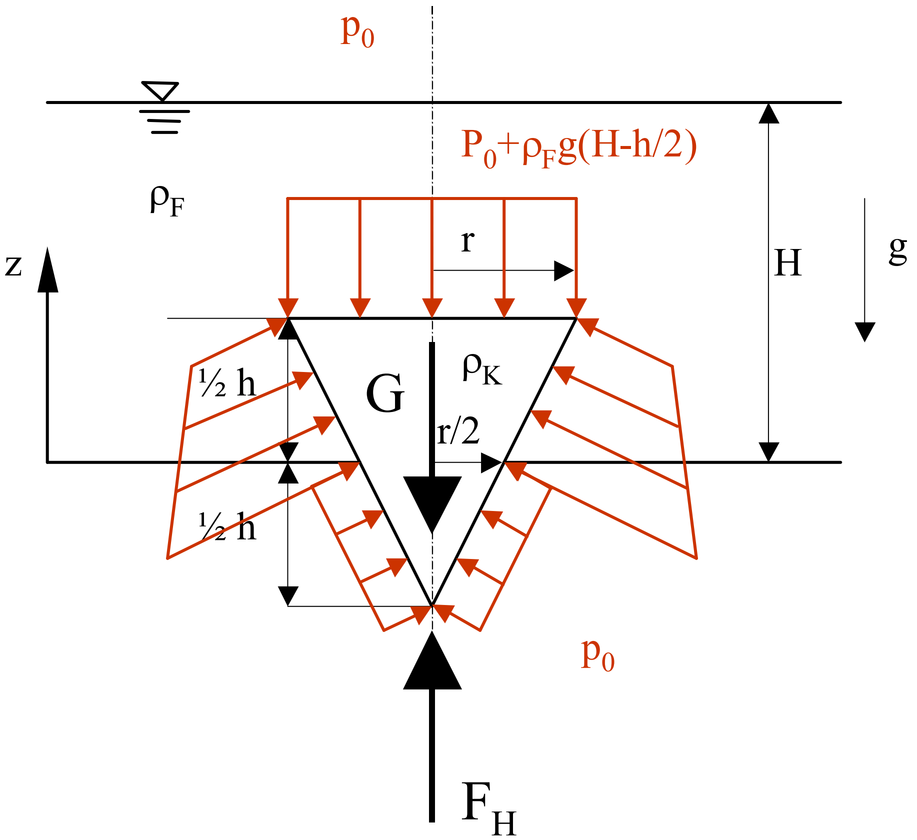
Aufgabe 3

Gegeben:

H = 80 cm, r = 4 cm, h = 10 cm, ρ_F = 1 g/cm³, ρ_K = 6 g/cm³, g = 9,81 m/s².

Gesucht:

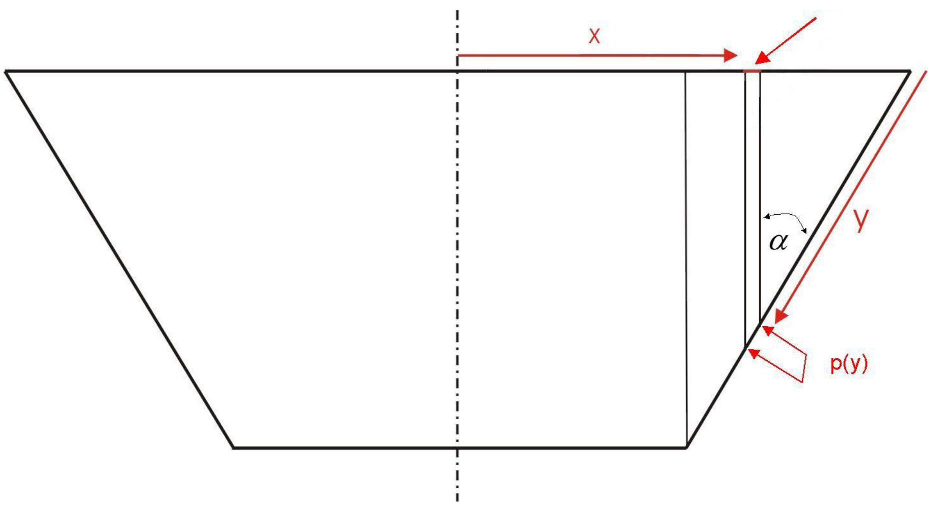
F_H = Hebekraft



1. Lösungsweg

Die Lösung der Aufgabe erfolgt mittels der Berechnung aller Druckkräfte, die auf die Kreiskegeloberfläche einwirken:

$$dA = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dx$$



$$p(y) = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) + \rho_{Fl} \cdot g \cdot y \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

$$\sin\alpha = \frac{r - x}{y} \Rightarrow y = \frac{r - x}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

(2) in (1) eingesetzt ergibt:

$$p(x) = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \frac{r - x}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha \qquad (3)$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \frac{h/2}{r/2} = \frac{h}{r} \qquad (4)$$

(4) in (3) eingesetzt:

$$p(x) = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) + \rho_{Fl} \cdot g \cdot (r - x) \cdot \frac{h}{r}$$

$$p(x) = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(h - \frac{h}{r} \cdot x \right)$$

$$p(x) = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) - \rho_{Fl} \cdot g \cdot \frac{h}{r} \cdot x$$

Die Druckkraft F_M, die in <u>z-Richtung</u> auf die <u>Mantelfläche des Kegelstumpfes</u> wirkt, berechnet sich wie folgt:

$$F_M = \int_{r/2}^{r} p(x) \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dx$$

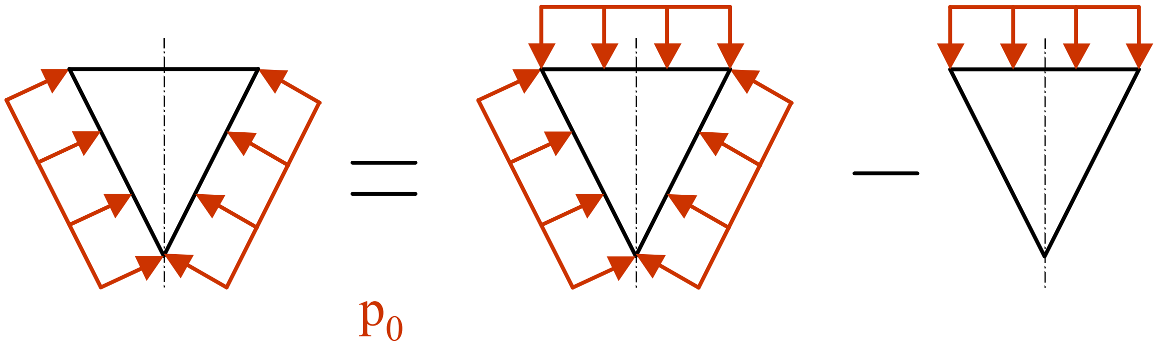
$$F_M = \int_{r/2}^{r} \left[p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) - \rho_{Fl} \cdot g \cdot \frac{h}{r} \cdot x \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dx$$

$$F_M = p_0 \cdot \pi \cdot x^2 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) \cdot \pi \cdot x^2 - \rho_{Fl} \cdot g \cdot \frac{h}{r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_{\frac{r}{2}}^{r}$$

$$F_M = p_0 \cdot \pi \cdot \left(r^2 - \frac{r^2}{4} \right) + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) \cdot \pi \cdot \left(r^2 - \frac{r^2}{4} \right) - \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{r} \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{8} \right)$$

$$F_M = p_0 \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot r^2 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot r^2 - \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{7}{12} \cdot r^2$$

Druckkraft auf den unteren Kegel F_{Du}:



$$F_{Du} = 0 - \left(-p_0 \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} \right) = p_0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r^2$$

Kräftegleichgewicht:

$$F_H - G - \left(p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) \right) \cdot \pi \cdot r^2 + F_{Du} + F_M = 0$$

$$F_H - G - \left(p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) \right) \cdot \pi \cdot r^2 + p_0 \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} + p_0 \cdot \pi \cdot \frac{3 \cdot r^2}{4} +$$
$$\rho_{Fl} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h}{2} \right) \cdot \pi \frac{3}{4} \cdot r^2 - \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{7}{12} \cdot r^2 = 0$$

$$F_H - \frac{1}{3} \cdot \rho_K \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g - \rho_{Fl} \cdot g \cdot H \cdot \pi \cdot r^2 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot H \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot r^2 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{2} +$$
$$\rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{3}{8} \cdot r^2 - \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{7}{12} \cdot r^2 = 0$$

$$F_H - \frac{1}{3} \cdot \rho_K \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g - \rho_{Fl} \cdot g \cdot H \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot r^2 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \frac{7}{12} \cdot r^2 = 0$$

$$F_H = \frac{1}{3} \cdot \rho_K \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 - \rho_{Fl} \cdot g \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \left(\frac{7}{6} h - H \right)$$

$$\underline{\underline{F_H = 18{,}3\ N}}$$

Ag. 3

2.Lösungsweg

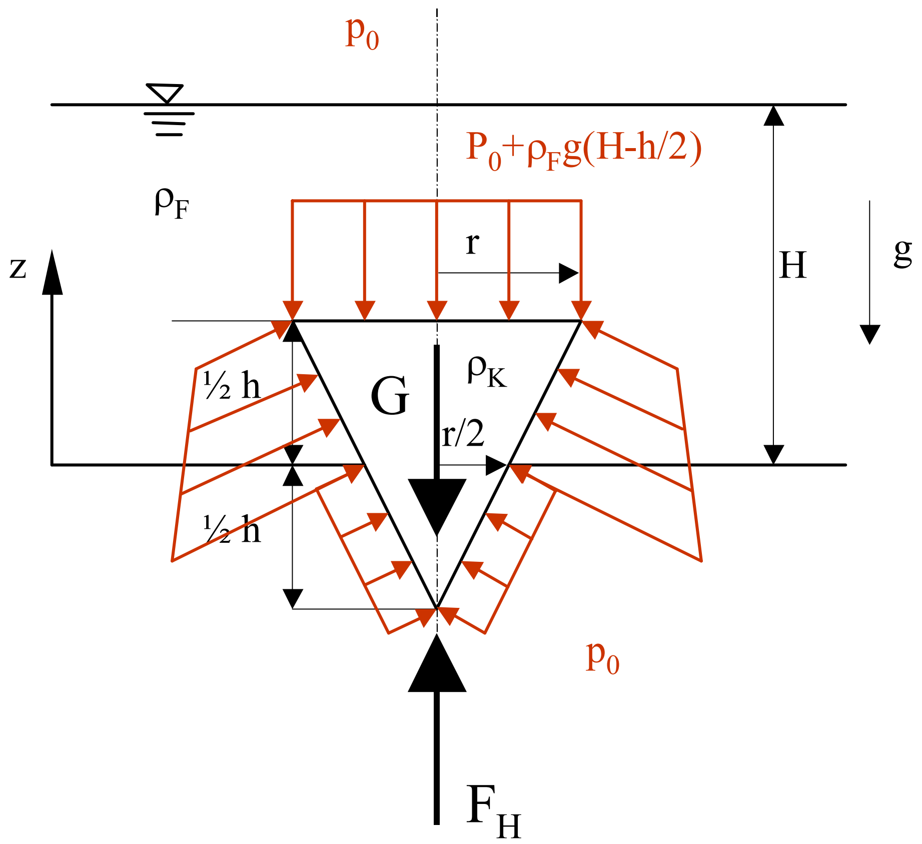
Gegeben:

H = 80 cm, r = 4 cm, h = 10 cm, ρ_F = 1 g/cm³, ρ_K = 6 g/cm³, g = 9,81 m/s².

Gesucht:

F_H = Hebekraft

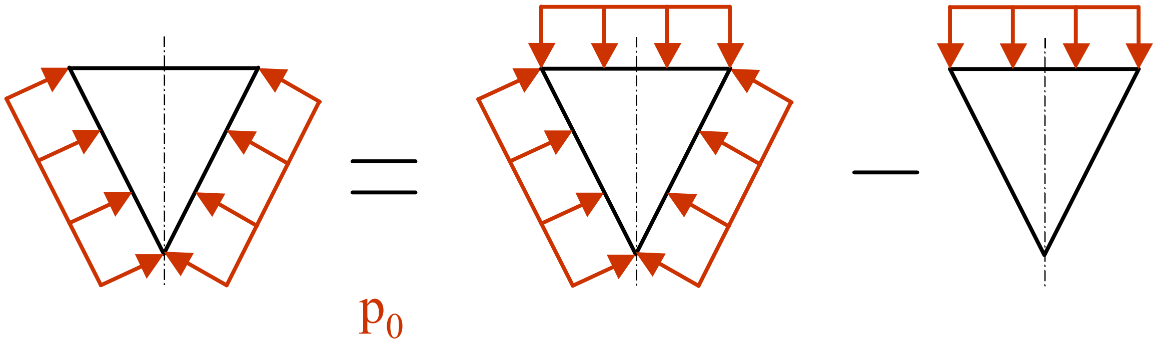
Die Lösung der Aufgabe erfolgt durch die Anwendung des Archimedischen Prinzips (Auftrieb = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit) für eingetauchte Körper, das auch für teilweise eingetauchte Körper gilt.



Wirkende Kräfte:

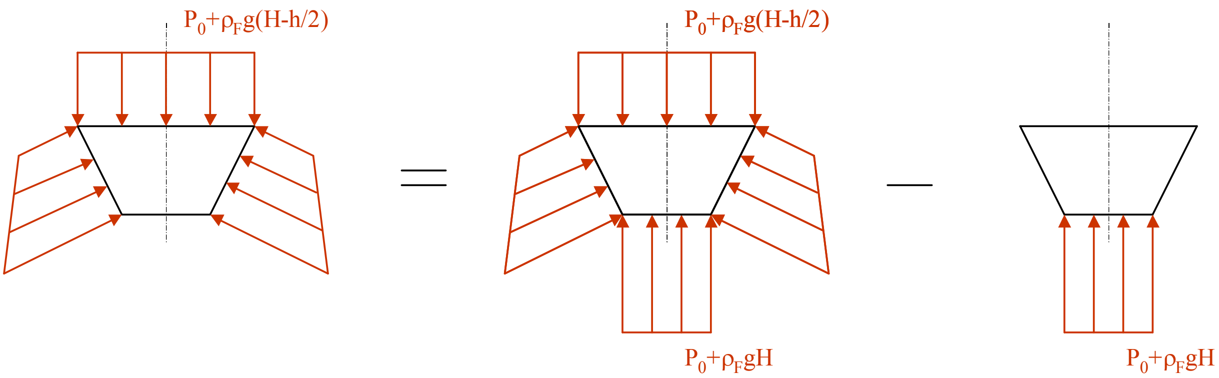
- G = Gewichtskraft
- F_H = Hebekraft (gesucht)
- F_D = resultierende Druckkraft am Kegel, die sich aus der Druckkraft auf den unteren Kegel F_{Du} und auf den oberen eingetauchten Kegelstumpf F_{Do} zusammensetzt

Druckkraft auf den unteren Kegel F_{Du}:



$$F_{Du} = 0 - \left(-p_0 \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} \right) = p_0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r^2$$

Druckkraft auf den Kegelstumpf im Fluid F_{Do}:



$$F_{Do} = \underbrace{\rho_{Fl} \cdot g \cdot V_{St}}_{Auftrieb} - \left(p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot H \right) \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4}$$

mit

$$V_{St} = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi \cdot r^2 \cdot h - \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{7}{24} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

bzw. mit der Formel zur Berechnung des Volumens eines Kegelstumpfes

$$V_{St} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left[r^2 + r \cdot \frac{r}{2} + \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{2} = \frac{7}{24} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

folgt für F_{Do}:

$$F_{Do} = \rho_{Fl} \cdot g \cdot \frac{7}{24} \pi \cdot r^2 \cdot h - \left(p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot H \right) \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4}$$

Gewichtskraft:

$$G = \rho_K \cdot V_K \cdot g = \rho_K \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g$$

Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_{\uparrow} = 0$$
$$F_H - G + F_{Du} + F_{Do} = 0$$
$$\Rightarrow F_H = \frac{1}{3}\rho_K \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g - \rho_{Fl} \cdot g \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \left(\frac{7}{6}h - H\right)$$
$$\underline{\underline{F_H = 18{,}3\ N}}$$