14.05.2007

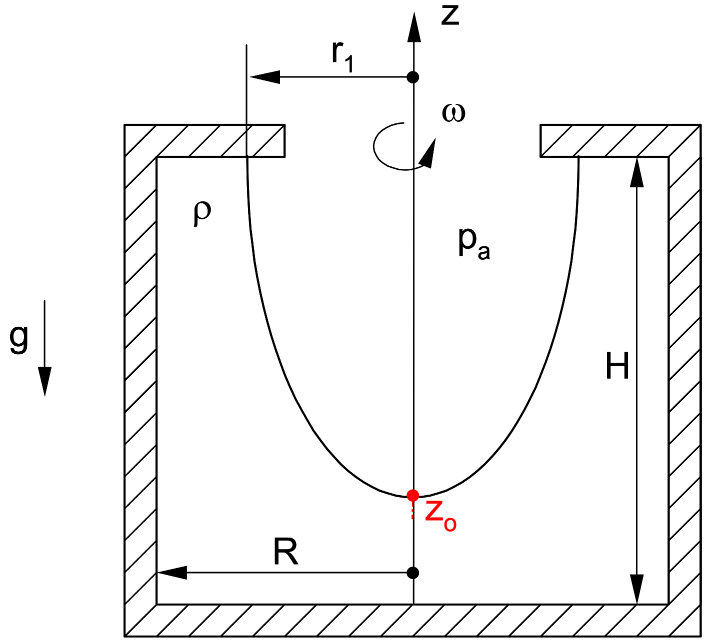
Lehrstuhl für
Fluiddynamik und Strömungstechnik
Prof. Dr.-Ing. W. Frank

Lösungen zu dem Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

Gegeben: R, H, ρ, ω, r_1, g, p_a

a) Gesucht: die Kraft F_B bzw. F_D , welche die Flüssigkeit auf den Boden bzw. Deckel ausübt



Es gilt das Differentialgleichungssystem (streng genommen keine Hydrostatik):

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r} = f_r = \omega^2 r \quad ; \quad \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} = f_z = -g$$

Integration für $\rho = konst$ führt schrittweise auf:

$$p(r,z) = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2 - \rho\cdot g\cdot z + konst \tag{1.1}$$

Für z = H und r = r_1 ist

$$p(r = r_1, z = H) = p_a$$

=> $$p_a = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_1^2 - \rho \cdot g \cdot H + konst$$

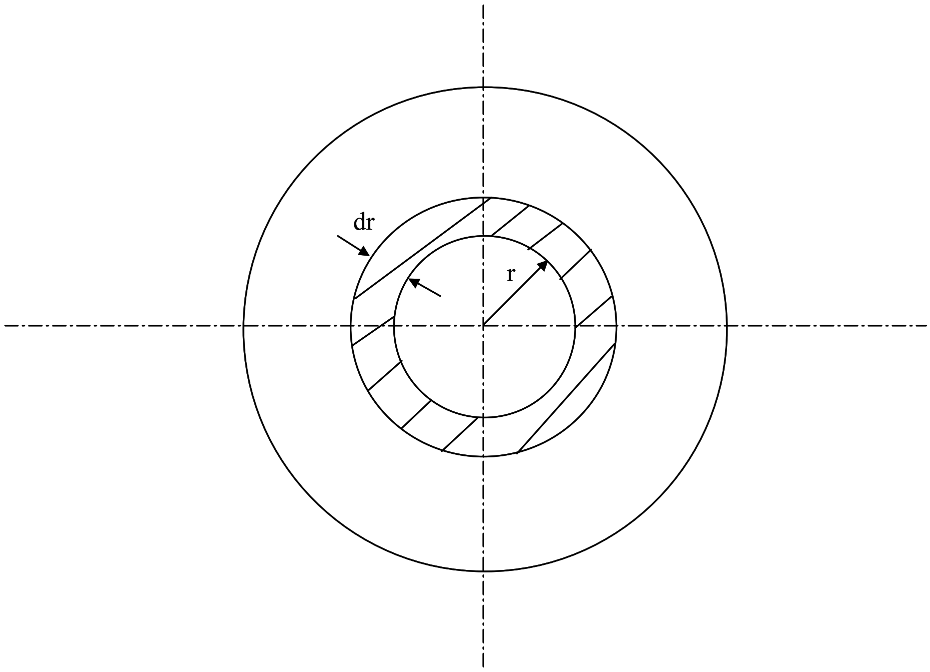
=> $$konst = p_a - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_1^2 + \rho \cdot g \cdot H$$

eingesetzt in (1.1) folgt

$$p(r,z) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left(r^2 - r_1^2\right) + \rho \cdot g \cdot \left(H - z\right) + p_a \tag{1.2}$$

<u>Kraft auf den Boden:</u>

$$F_B = \int_0^R p\left(r, z=0\right) \cdot dA \tag{1.3}$$



mit

$$dA = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \tag{1.4}$$

(1.2), (1.4) eingesetzt in (1.3)

$$F_B = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R \left[\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left(r^2 - r_1^2\right) + \rho \cdot g \cdot \left(H - z\right) + p_a\right] \cdot r \cdot dr$$

$$F_B = \pi \cdot R^2 \cdot \left[\frac{\rho}{2} \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{R^2}{2} - r_1^2\right) + \rho \cdot g \cdot H + p_a\right] \tag{1.5}$$

<u>Kraft auf den Deckel:</u>

$$F_D = \int_{r_1}^{R} p(r, z = H) \cdot dA \qquad (1.6)$$

mit (1.2) und (1.4) in (1.6)

$$F_D = 2 \cdot \pi \cdot \int_{r_1}^{R} \left[\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left(r^2 - r_1^2 \right) + p_a \right] \cdot r \cdot dr$$

$$F_D = \pi \cdot \left(R^2 - r_1^2 \right) \cdot \left[\frac{\rho}{4} \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2} \right) + p_a \right] \qquad (1.7)$$

b) Gesucht: Lage des tiefsten Punktes der freien Oberfläche:

$$p(r = 0, z = z_0) = p_a$$

$$\Rightarrow z_0 = H - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cdot r_1^2$$

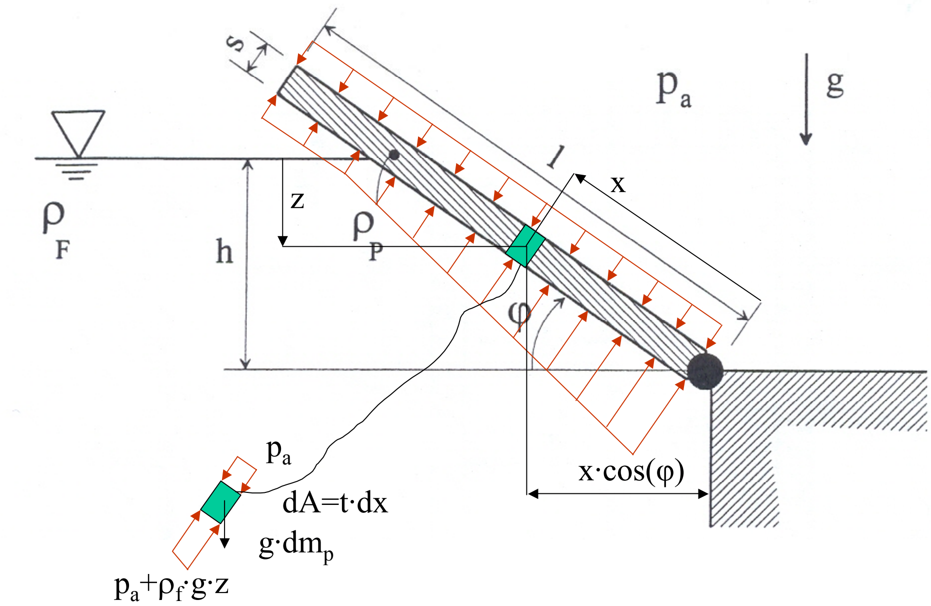
14.05.2007

Aufgabe 2

Gegeben : l, s, ρ_P, ρ_F, φ, t, g.

Gesucht: h als Funktion des Winkels φ und der übrigen gegebenen Größen in der Gleichgewichtslage

Gleichgewicht herrscht dann, wenn im Drehpunkt ein Momentengleichgewicht vorliegt!



1. Moment durch das Gewicht der Platte:

$$dM_G = dm_p \cdot g \cdot x \cdot \cos\varphi = \rho_p \cdot s \cdot t \cdot dx \cdot g \cdot x \cdot \cos\varphi$$

$$M_G = \int_{x=0}^{x=L} dM_G = \rho_p \cdot s \cdot t \cdot g \cdot \cos\varphi \cdot \int_0^l x \cdot dx$$

$$= \overbrace{\rho_P \cdot \underbrace{L \cdot t \cdot s}_{V_P} \cdot g}^{\text{Kraft durch das Plattengewicht}} \cdot \underbrace{\cos\varphi \cdot \frac{L}{2}}_{\text{Hebelarm im Flächenschwerpunkt}}$$

2. Moment aus der Druckverteilung:

$$dM_F = \left(\underbrace{p_a - (p_a + \rho_F \cdot g \cdot z)}_{\substack{\text{Druck, der das resultierende} \\ \text{Moment verursacht}}} \right) \cdot dA \cdot x$$

$$M_F = \int_{x=0}^{x=\frac{h}{\sin\varphi}} \left[-(\rho_F \cdot g \cdot z) \cdot x \right] \cdot t \cdot dx$$

mit

$$\sin\varphi = \frac{h-z}{x}$$

folgt

$$z = h - x\cdot\sin\varphi$$

also ist

$$M_F = t\cdot \int_{x=0}^{x=\frac{h}{\sin\varphi}} \left[-\rho_F\cdot g\cdot\left(h - x\cdot\sin\varphi\right)\right]\cdot x\cdot dx$$

$$M_F = -\rho_F\cdot g\cdot t\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{h^3}{\sin^2\varphi} = \overbrace{-\underbrace{\rho_F\cdot g\cdot\frac{h}{2}}_{\text{Druck bei } \frac{h}{2}}\cdot t\cdot\underbrace{\frac{h}{\sin\varphi}}_{\text{Fläche } A}}^{\text{Kraft durch Fluiddruck}}\cdot\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{\sin\varphi}}_{\text{Hebelarm}}$$

⇨ der Angriffspunkt der Kraft liegt stets unter dem Schwerpunkt (Skript S.37-38)

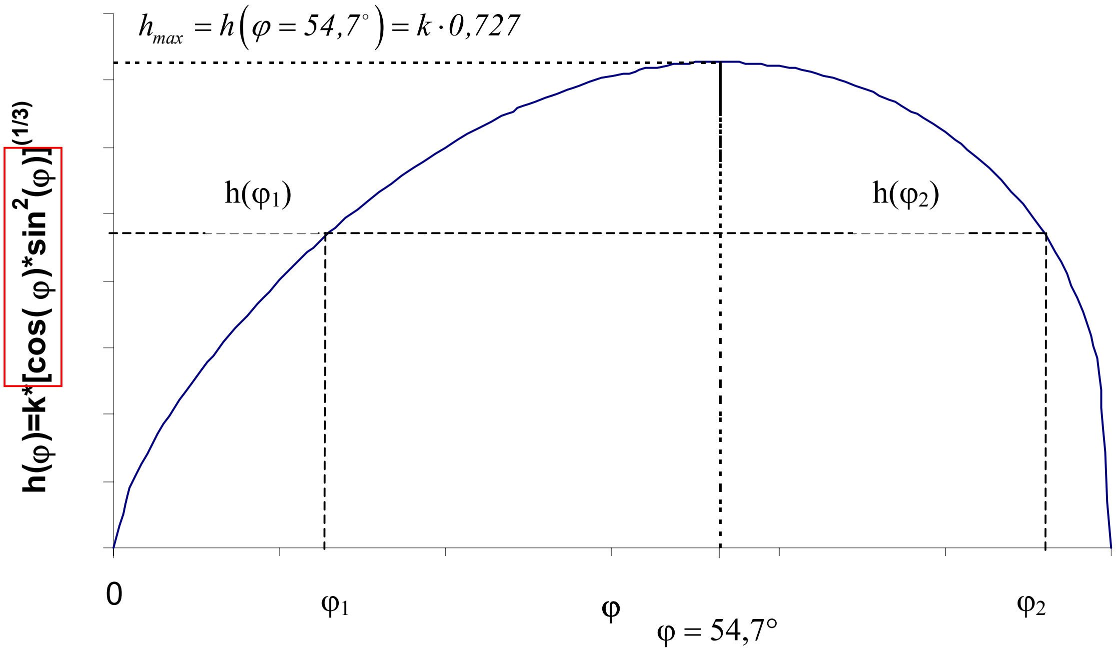
⇨ Die von der Flüssigkeit ausgeübte Kraft ist damit gleich dem Druck im Flächenschwerpunkt multipliziert mit der Fläche

Momentengleichgewicht:

$$M_G + M_F = 0$$

$$\Rightarrow h = h(\varphi) = \sqrt[3]{\frac{\rho_P}{\rho_F}\cdot 3\cdot l^2\cdot s\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi} \quad = \quad k\cdot\sqrt[3]{\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}$$

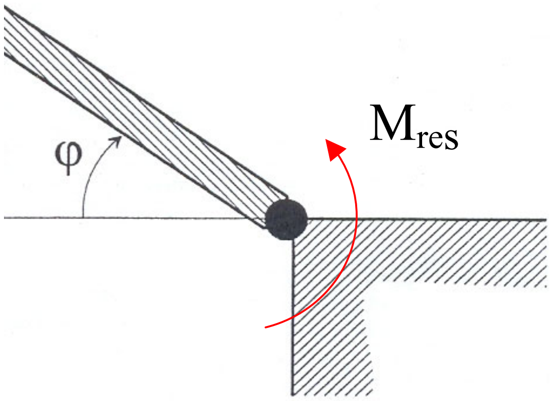
Somit ergeben sich für ein vorgegebenes h immer 2 Lösungen für φ:



Stabilität der Lösungen für φ_1 und φ_2:

Definition eines resultierenden Momentes M_{res}:

$$M_{res} = M_G + M_F$$



$$M_{res} = \rho_P \cdot g \cdot L^2 \cdot t \cdot s \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi) - \rho_F \cdot g \cdot t \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{h^3}{\sin^2(\varphi)}$$

$$M_{res} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t \cdot \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \cdot \left[\rho_P \cdot L^2 \cdot s \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi) - \frac{1}{3} \cdot \rho_F \cdot h^3 \right] \qquad (1.8)$$

Wenn φ_1 aus der Gleichgewichtslage heraus kleiner wird, dann wird $\cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$ kleiner (siehe Abbildung) und $M_{res}<0$ (1.8). Die Platte dreht in die Gleichgewichtslage für $h(\varphi_1)$ zurück.

Wenn φ_1 aus der Gleichgewichtslage heraus größer wird, dann wird $\cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$ größer (siehe Abbildung) und $M_{res}>0$ (1.8). Die Platte dreht ebenfalls in die Gleichgewichtslage für $h(\varphi_1)$ zurück.

Das heißt, dass die Gleichgewichtslage für φ_1 stabil ist.

Wenn φ_2 aus der Gleichgewichtslage heraus kleiner wird, dann wird $\cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$ größer (siehe Abbildung) und $M_{res}>0$ (1.8). Auch hier dreht die Platte in die Gleichgewichtslage für $h(\varphi_1)$ zurück.

Wenn φ_2 aus der Gleichgewichtslage heraus größer wird, dann wird $\cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$ kleiner (siehe Abbildung) und $M_{res}<0$. Folglich kippt die Platte um und die Flüssigkeit tritt aus dem Becken aus.

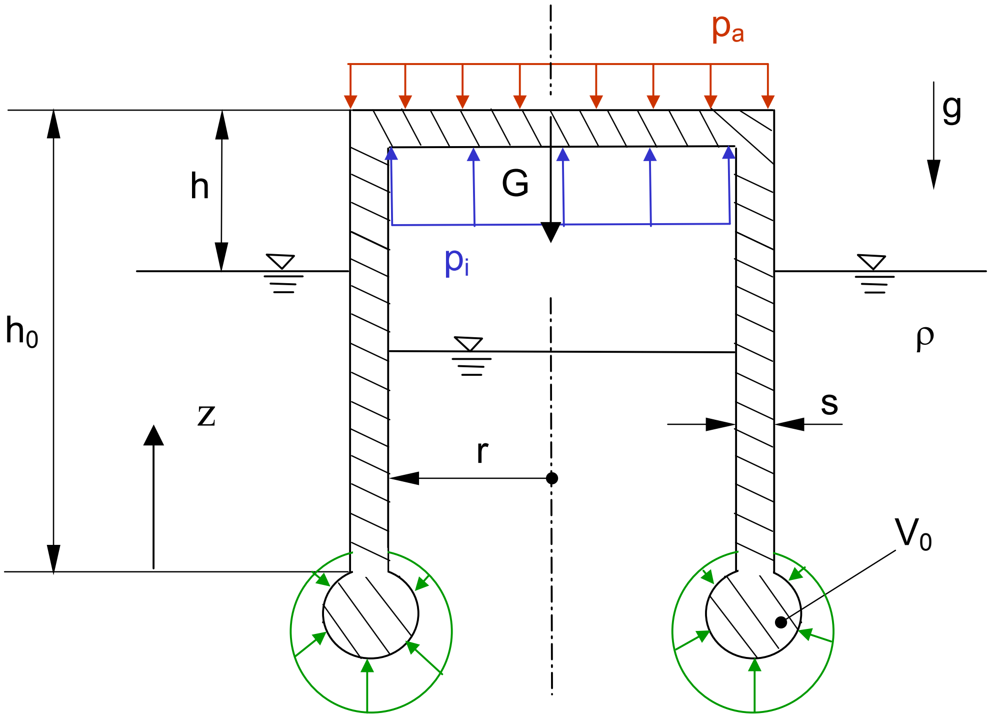
Dies bedeutet, dass die Gleichgewichtslage für φ_2 instabil ist.

14.05.2007

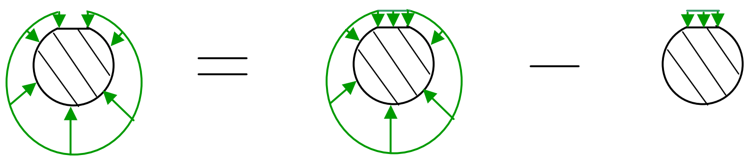
Aufgabe 3

Gegeben: r, s, h_0, G, V_0, ρ, p_i, p_a, g.

Gesucht: Höhe h als Funktion gegebener Größen



Berechnung der Auftriebskraft des Ringballastes mit Hilfe des Archimedischen Prinzips:



F_B = Auftrieb - Druckkraft

$$F_B = \rho \cdot g \cdot V_0 - \left\{ -\left[p_a + \rho \cdot g \cdot (h_0 - h) \right] \cdot \pi \cdot \left[(r+s)^2 - r^2 \right] \right\}$$

Kräftebilanz:

$$\sum \uparrow = 0 \Leftrightarrow p_i \cdot \pi \cdot r^2 - p_a \cdot \pi \cdot (r+s)^2 + F_B - G = 0$$

$$p_i \cdot \pi \cdot r^2 - p_a \cdot \pi \cdot (r+s)^2 + \rho \cdot g \cdot V_0 + \left[p_a + \rho \cdot g \cdot (h_0 - h) \right] \cdot \pi \cdot \left[(r+s)^2 - r^2 \right] - G = 0$$

$$h = \frac{G - p_i \cdot \pi \cdot r^2 - \rho \cdot g \cdot V_0 + p_a \cdot \pi \cdot r^2 - \rho \cdot g \cdot h_0 \cdot \pi \cdot \left[(r+s)^2 - r^2 \right]}{\rho \cdot g \cdot \pi \cdot \left[(r+s)^2 - r^2 \right]}$$