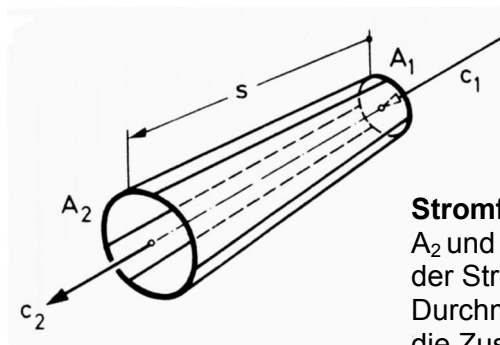


3. Hydro- und Aerodynamik

3.1 Stromfadentheorie

Stromfadentheorie = näherungsweise eindimensionale Untersuchung von zwei- oder dreidimensionalen Strömungen



Stromfaden: Stromlinien beranden die Querschnitte A_1 und A_2 und bilden die sogenannte Stromröhre. Durch den Mantel der Stromröhre erfolgt kein Massendurchtritt. Wird der Durchmesser der Stromröhre solange zusammengezogen, bis die Zustandsgrößen im Querschnitt A_1 oder A_2 durch einen einzigen Wert darstellbar sind (Grenzübergang: $A_1, A_2 \rightarrow 0$), spricht man von einem **Stromfaden**. In einem **Stromfaden** treten in einem Querschnitt (A_1, A_2) jeweils nur ein Wert für p , c , ρ und T unter der Voraussetzung auf, dass die Änderungen dieser Zustandsgrößen in der Querrichtung sehr viel kleiner als in der Längsrichtung ausfallen. Diese Größen hängen dann nur von der Bogenlänge s und gegebenenfalls von der Zeit t ab.

3.1.2 Grundgleichungen der Stromfadentheorie

1. Kontinuitätsgleichung:

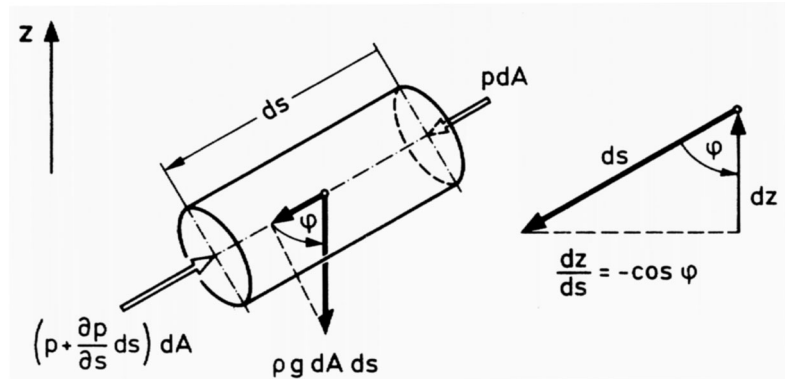
Da die Mantelfläche der Stromröhre aus Stromlinien besteht, kann keine Masse durch diese Mantelfläche austreten. Der Massenstrom durch die Flächen A_1 und A_2 muss gleich sein.

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A_2 = \text{konst.}$$

2a. Kräftegleichgewicht in Richtung des Stromfadens:

Aus dem Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Stromfadenelement in Richtung des Stromfadens folgt die Eulersche Gleichung längs des Stromfadens s

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \cdot \frac{dz}{ds}$$



wobei gilt: $c = c(s, t)$; $p = p(s, t)$; $\rho = \rho(s, t)$

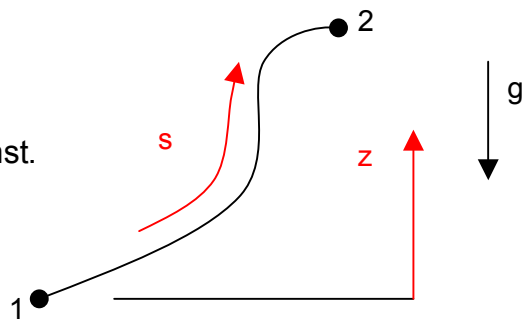
In der Eulerschen Gleichung wird ein ideales Fluid, d.h. ohne Zähigkeit, betrachtet. Somit ist die Reibungsfreiheit der Strömung vorausgesetzt!

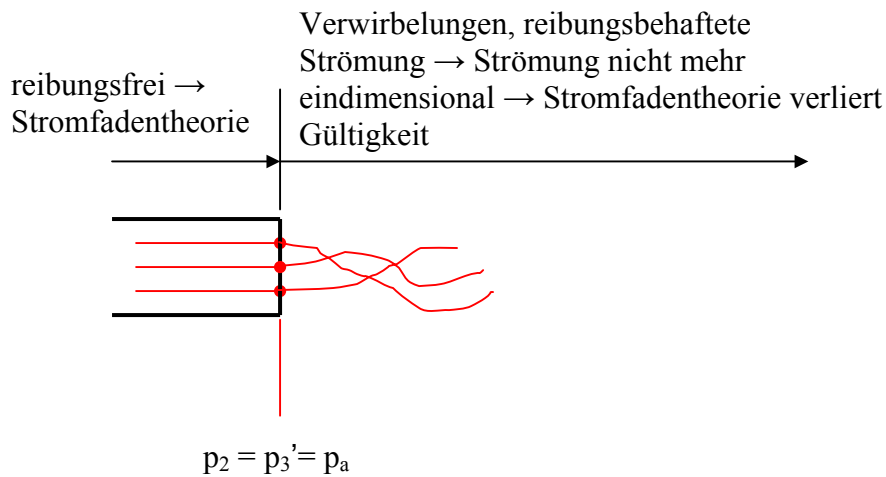
Unter der Voraussetzung stationärer Strömung, d.h. $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ und somit $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{d}{ds}$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$c \cdot \frac{dc}{ds} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{ds} + g \cdot \frac{dz}{ds} = 0$$

Integration längs des Stromfadens von 1 $\rightarrow$ 2 unter der Voraussetzung inkompressibler Strömung, d.h. $\rho = \text{konstant}$, ergibt

$$\frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 = \text{konst.}$$





a) $c_1, c_2, p_1, p_2, \dot{V}$

Bernoulli 0 → 2:

$$\underbrace{p_0}_{p_a} + \rho \cdot g \cdot H + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_0^2}_{=0} = \underbrace{p_2}_{p_a} + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2$$

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (\text{vergleiche Toricellische Formel})$$

Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung):

$$\dot{m} = \text{konst.} \Rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \cancel{\rho}_1 \cdot \underbrace{c_1 \cdot A_1}_{\dot{V}_1} = \cancel{\rho}_2 \cdot \underbrace{c_2 \cdot A_2}_{\dot{V}_2}; \quad \rho = \text{konst.}; \quad A_1 = A_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V} = c_2 \cdot A_2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

Bernoulli 0 → 1:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + \rho \cdot g \cdot (H - h)$$

$$p_1 = p_a + \rho \cdot g \cdot h - \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2$$

$$p_1 = p_a - \underbrace{\rho \cdot g \cdot (H - h)}_{>0} \Rightarrow \underline{\underline{p_1 < p_a}}$$

b) $c_1', c_2', c_3', p_1', p_2', p_3', \dot{V}'$

Bernoulli $0' \rightarrow 3'$:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p_a + \frac{\rho}{2} \cdot c_3'^2$$

$$c_3' = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (\text{Toricelli})$$

$$\dot{V}' = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} > \dot{V} \rightarrow \text{durch Anbringen des Diffusors wird der Volumenstrom erhöht}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{m}_1' = \dot{m}_2' = \dot{m}_3' = \rho_1' \cdot c_1' \cdot A_1 = \rho_2' \cdot c_2' \cdot A_2 = \rho_3' \cdot c_3' \cdot A_3 \quad \rho = \text{konst.}; \quad A_1 = A_2$$

$$\Rightarrow c_1' = c_2' = c_3' \cdot \frac{A_3}{A_1} = \left(\frac{D}{d} \right)^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} > c_1 = c_2 \rightarrow \text{durch Anbringen des Diffusors an gleicher}$$

Position höhere Geschwindigkeit

Bernoulli $0' \rightarrow 1'$:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p_1' + \rho \cdot g \cdot (H - h) + \frac{\rho}{2} \cdot c_1'^2$$

$$\Rightarrow p_1' = p_a + \rho \cdot g \cdot h - \underbrace{\rho \cdot g \cdot H \cdot \left(\frac{D}{d} \right)^4}_{> H}$$

$$\Rightarrow p_1' < p_a \quad ; \quad p_1' < p_1 \rightarrow \text{durch Anbringen des Diffusors an gleicher Position niedrigerer Druck}$$

Bernoulli $0' \rightarrow 2'$:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p_2' + \frac{\rho}{2} \cdot c_2'^2$$

$$p_2' = p_a + \rho \cdot g \cdot H \cdot \left[\underbrace{1 - \left(\frac{D}{d} \right)^4}_{< 0} \right]$$

$$p_2' < p_a \rightarrow \text{durch Anbringen des Diffusors an gleicher Position niedrigerer Druck}$$

c) Verlauf von c und p bzw. c' und p' durch das System

Berechnung des statischen Druckverlaufs und der Geschwindigkeit längs einer Stromlinie von **0** → **1** mittels Bernoulli- und Konti-Gleichung:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p(z) + \underbrace{\frac{\rho}{2} \cdot c(z)^2}_{=0 \text{ (großer Behälter)}} + \rho \cdot g \cdot z$$

$$p(z) = p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z)$$

Berechnung des statischen Druckverlaufs und der Geschwindigkeit längs einer Stromlinie von **1** → **2** mittels Bernoulli- und Konti-Gleichung:

$$p_1 + \rho g (H - h) + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_1^2}_{\rho g H} = p(z) + \underbrace{\frac{\rho}{2} c(z)^2}_{\frac{\rho}{2} c_1^2 = \rho g H} + \rho g z$$

$$p_a - \rho g (H - h) + \rho g (H - h) = p(z) + \rho g z$$

$$p(z) = p_a - \rho g z$$

Berechnung des statischen Druckverlaufs und der Geschwindigkeit längs einer Stromlinie von **0'** → **1'** mittels Bernoulli- und Konti-Gleichung:

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H = p(z) + \underbrace{\frac{\rho}{2} \cdot c(z)^2}_{=0 \text{ (großer Behälter)}} + \rho \cdot g \cdot z$$

$$p(z) = p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z)$$

Berechnung des statischen Druckverlaufs und der Geschwindigkeit längs einer Stromlinie von **1'** → **2'** mittels Bernoulli- und Konti-Gleichung:

$$\underbrace{p_1'}_{p_a + \rho \cdot g \cdot h - \rho \cdot g \cdot H \cdot \left(\frac{D^4}{d^4}\right)} + \rho g (H - h) + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_1'^2}_{\rho g H \left(\frac{D^4}{d^4}\right)} = p(z) + \underbrace{\frac{\rho}{2} c(z)^2}_{\frac{\rho}{2} c_1'^2 = \rho g H \left(\frac{D^4}{d^4}\right)} + \rho g z$$

$$p_a + \rho g H \left(1 - \frac{D^4}{d^4}\right) = p(z) + \rho g z$$

$$p(z) = p_a + \rho g H \left(1 - \frac{D^4}{d^4}\right) - \rho g z$$

Berechnung des statischen Druckverlaufs und der Geschwindigkeit längs einer Stromlinie von $2' \rightarrow 3'$:

1. Bernoulli-Gleichung:

$$\underbrace{p_2'}_{p_a + \rho \cdot g \cdot H \cdot \left[1 - \frac{D^4}{d^4}\right]} + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_2'^2}_{\rho g H \left(\frac{D^4}{d^4}\right)} = p(x) + \frac{\rho}{2} c(x)^2$$

$$p_a + \rho g H \left(1 - \frac{D^4}{d^4}\right) + \rho g H \left(\frac{D^4}{d^4}\right) = p(x) + \frac{\rho}{2} c(x)^2$$

$$p(x) = p_a + \rho g H - \frac{\rho}{2} c(x)^2$$

2. Konti-Gleichung:

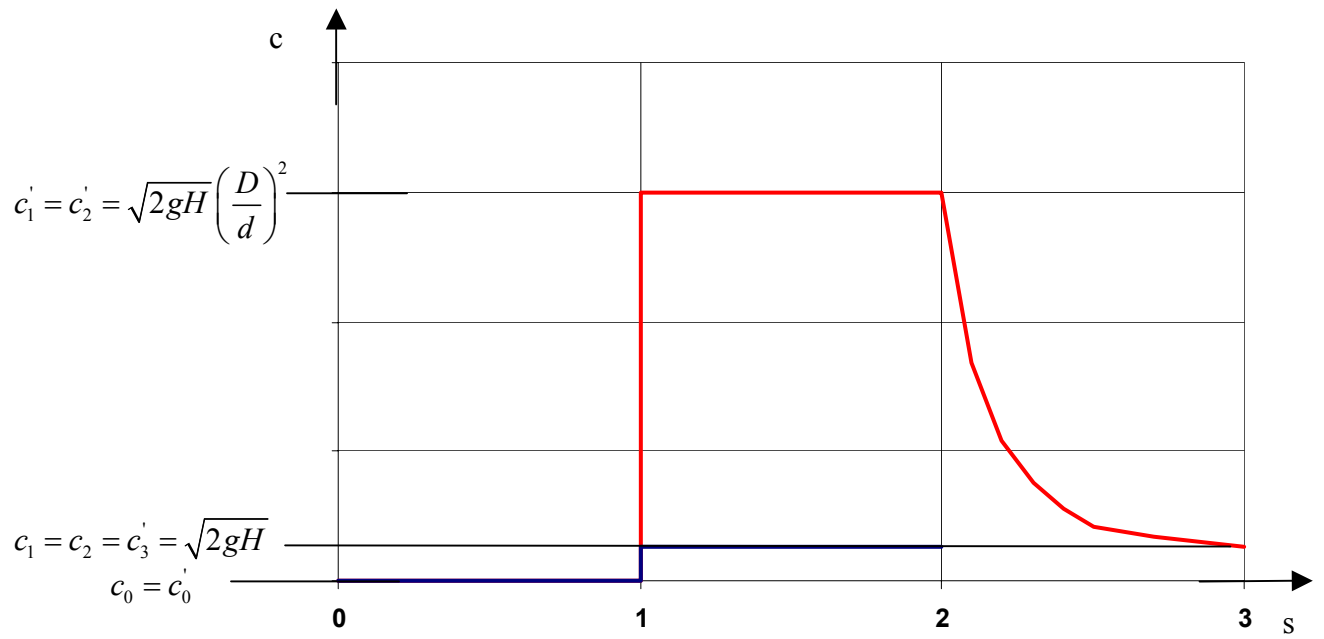
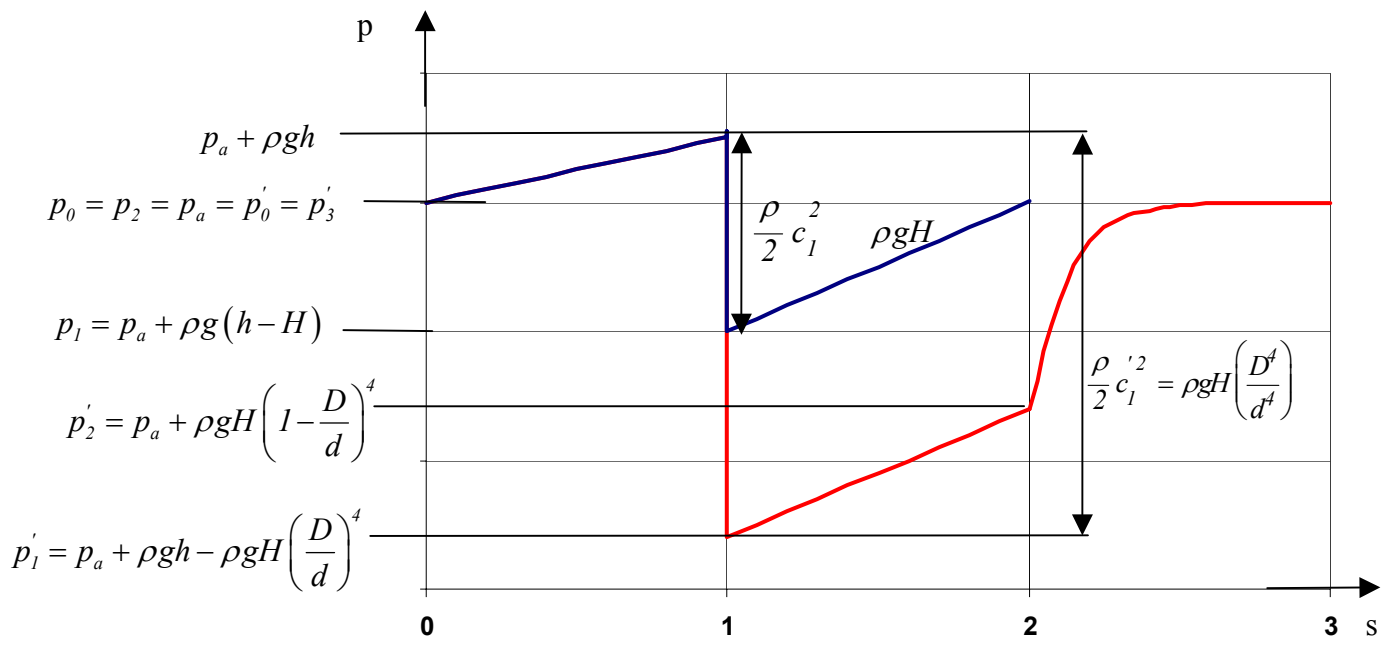
$$\rho \cdot c(x) \cdot \frac{\pi \cdot D(x)^2}{4} = \rho \cdot \underbrace{c_2'}_{\sqrt{2gH} \left(\frac{D^2}{d^2}\right)} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$c(x) \cdot \frac{\pi \cdot D(x)^2}{4} = \sqrt{2gH} \cdot \left(\frac{D^2}{d^2}\right) \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$c(x) = \sqrt{2gH} \cdot \frac{D^2}{D(x)^2}$$

$c(x)$ in $p(x)$ eingesetzt:

$$\Rightarrow p(x) = p_a + \rho g H \cdot \left(1 - \frac{D^4}{D(x)^4}\right)$$



Aufgabe 2

Gegeben:

Meniskendifferenz $\Delta h = 36 \text{ mm}$

Dichte des Wassers $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Rohrdurchmesser $D = 100 \text{ mm}$

Lufttemperatur $t = 26^\circ\text{C}$

Umgebungsdruck $p_a = 1029 \text{ hPa}$

Normdichte der Luft $\rho_N = 1,293 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
(bei 0°C und 1013 hPa)

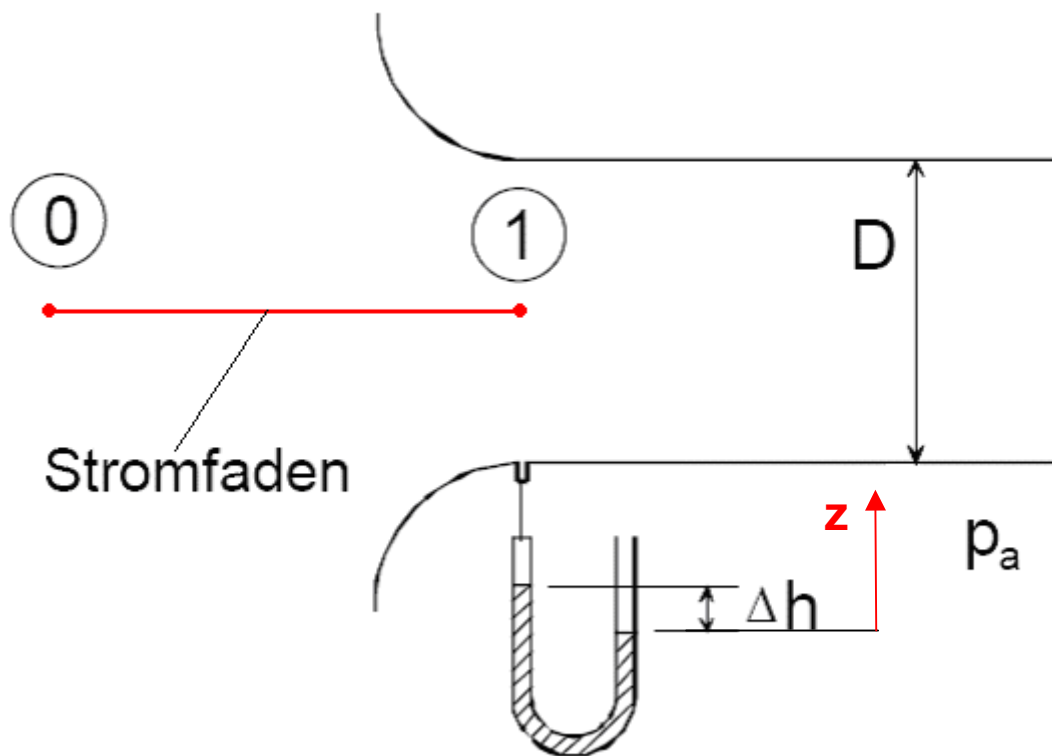
Erdschwere $g = 9,807 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Gesucht:

c_1 und $\dot{m}$

Vorraussetzungen:

- reibungsfreie Strömung (keine Druckverluste) $\rightarrow$ Stromfadentheorie anwenden $\rightarrow$ Bernoulli-Gleichung
- stationäre Strömung $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Luft darf in der Düse als inkompressibel betrachtet werden, d.h. $\rho_0 = \rho_1$



Bernoulli 0 → 1

mit $c_0 = 0$; $z_0 = z_1$; $\rho_0 = \rho_1$; $p_0 = p_a$

$$p_a = p_1 + \frac{\rho_0}{2} \cdot c_1^2 \quad (1.1)$$

Hydrostatik am U-Rohr-Manometer:

$$p_1 + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot \Delta h = p_a \quad (1.2)$$

mit (1.2) in (1.1)

$$\rho_{H_2O} \cdot g \cdot \Delta h = \frac{\rho_0}{2} \cdot c_1^2 \quad (1.3)$$

ideale Gasgleichung:

$$\frac{p_0}{\rho_0} = R \cdot T_0 \Leftrightarrow \frac{p_0}{\rho_0 \cdot T_0} = R = \frac{p_N}{\rho_N \cdot T_N} \Leftrightarrow \rho_0 = \frac{p_0}{T_0} \cdot \frac{\rho_N \cdot T_N}{p_N} \quad (1.4)$$

mit (1.4) in (1.3)

$$\begin{aligned} \rho_{H_2O} \cdot g \cdot \Delta h &= \frac{1}{2} \cdot \frac{p_0}{T_0} \cdot \frac{\rho_N \cdot T_N}{p_N} \cdot c_1^2 \\ \Leftrightarrow c_1 &= \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_{H_2O} \cdot g \cdot \Delta h \cdot \underbrace{T_0}_t \cdot \underbrace{p_N}_{1013hPa}}{\underbrace{p_0}_{p_a} \cdot \rho_N \cdot \underbrace{T_N}_{273,15K \hat{=} 0^\circ C}}} \\ &\Leftrightarrow \underline{\underline{c_1 = 24,26 \frac{m}{s}}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\dot{m} = \rho_0 \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho_0 \cdot c_1 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \quad (1.6)$$

mit (1.4) und (1.5) in (1.6)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{m} = 0,228 \frac{kg}{s}}}$$