Lehrstuhl für Fluiddynamik und Strömungstechnik
Prof. Dr.-Ing. W. Frank

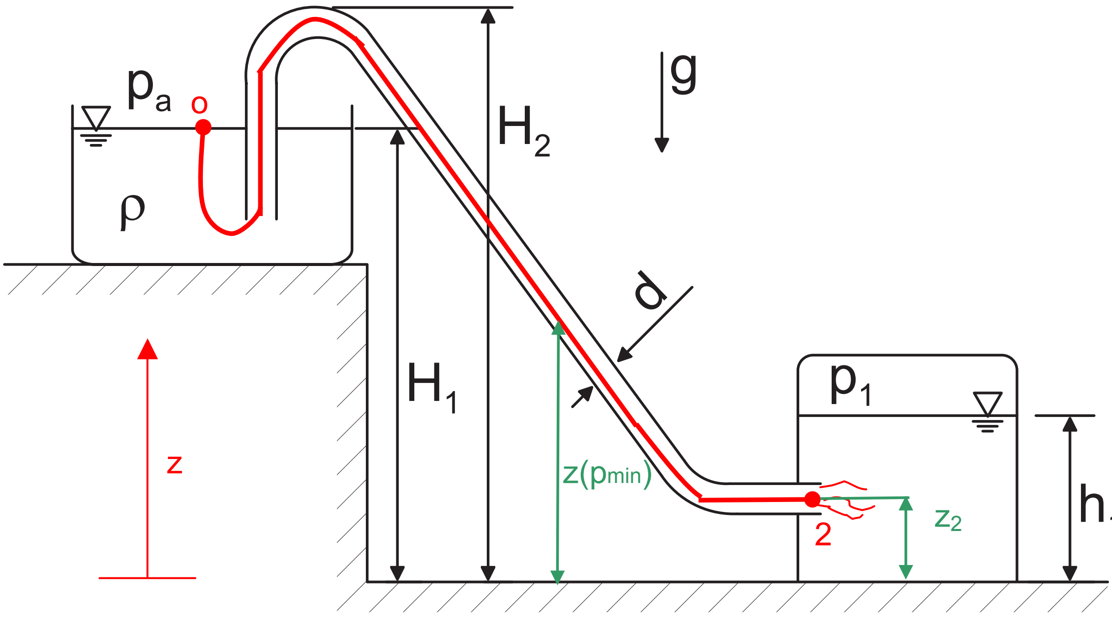
IFT

Lösungen zu dem Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

Gegeben: $\rho = 960\ \text{kg/m}^3$, $h_1 = 2\ \text{m}$, $H_1 = 10\ \text{m}$, $H_2 = 12\ \text{m}$, $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$, $p_a = 1{,}0\ \text{bar}$, $p_1 = 1{,}1\ \text{bar}$, $d = 0{,}1\ \text{m}$.

Gesucht: a) Volumenstrom $\dot{V}$
b) minimaler Druck p_1 zur Vermeidung von Kavitation in der Rohrleitung



Begriffe:

- große Behälter, konstante Spiegelhöhen $\rightarrow$ $c_0 \approx 0$
- zeitlich konstante Niveauhöhen $\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- reibungsfreie Strömung im Rohr
- ρ = konst.
- Kavitation („Hohlraumbildung") ist das Unterschreiten des Dampfdruckes einer Flüssigkeit ($p \leq p_D$) und die damit verbundene Entstehung von Dampfblasen ($V_{Blase} \approx 10^3 \cdot V_{Flüssigkeit}$) in einer Flüssigkeit mit anschließender schlagartiger Kondensation ($p \geq p_D$) und Druckspitzen von bis zu 1000 bar, wobei die Rohrwand zerstört wird $\Rightarrow$ Vermeiden von Kavitation, wenn $p_{min} > p_D$ (kleinster statischer Druck im Rohr muss größer als der Dampfdruck sein)

15.05.2007

a) Der Einströmvorgang in das Rohr kann näherungsweise als reibungsfrei angesehen werden. Der Ausströmvorgang in den Behälter ist stark reibungsbehaftet (Freistrahl).

<u>Bernoulli 0 → 2:</u>

$$p_0 + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_0^2}_{=0} + \rho \cdot g \cdot z_0 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 \qquad (1.1)$$

p_2 wird aus der Freistrahlbedingung bestimmt:

$$p_2 = p_1 + \rho \cdot g \cdot \left(h_1 - z_2\right) \qquad (1.2)$$

mit (1.2) in (1.1)

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H_1 = p_1 + \rho \cdot g \cdot \left(h_1 - z_2\right) + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{\left(p_a - p_1\right) \cdot \frac{2}{\rho} + 2 \cdot g \cdot \left(H_1 - h_1\right)} \qquad (1.3)$$

$$\dot{V} = c_2 \cdot A_2 = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \sqrt{\left(p_a - p_1\right) \cdot \frac{2}{\rho} + 2 \cdot g \cdot \left(H_1 - h_1\right)}$$

$$\underline{\underline{\dot{V} = 0,0916 \frac{m^3}{s}}}$$

b) Zunächst muss die Stelle in der Rohrleitung $z(p_{\min})$ gefunden werden, an welcher der niedrigste Druck $p_{\min}$ wirkt

<u>Bernoulli 0 → z(p_{min}):</u>

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H_1 = p_{\min} + \frac{\rho}{2} c\left(z(p_{\min})\right)^2 + \rho \cdot g \cdot z(p_{\min}) \qquad (1.4)$$

<u>Kontinuitätsgleichung von z(p_{min}) → 2:</u>

$$\rho \cdot c\left(z(p_{\min})\right) \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = \rho \cdot c_2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$$

$$c\left(z(p_{\min})\right) = c_2 \qquad (1.5)$$

mit (1.3) und (1.5) in (1.4) $\Rightarrow$

$$p_a + \rho \cdot g \cdot H_1 = p_{\min} + \rho \cdot g \cdot z(p_{\min}) + \rho \cdot g \cdot \left(H_1 - h_1\right) + \left(p_a - p_1\right)$$

$$p_{\min} = p_1 + \rho \cdot g \cdot \left(h_1 - z(p_{\min})\right) \qquad (1.6)$$

$p_{\min}$ wird am geringsten, wenn z($p_{\min}$) am größten wird

$$z(p_{\min}) = H_2 \qquad (1.7)$$

mit (1.7) in (1.6)

$$p_{\min} = p_1 + \rho \cdot g \cdot \left(h_1 - H_2\right) \qquad (1.8)$$

Damit keine Kavitation auftritt, muss aber gelten:

$$p_{\min} > p_D \tag{1.9}$$

mit (1.8) in (1.9)

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot (h_1 - H_2) > p_D$$

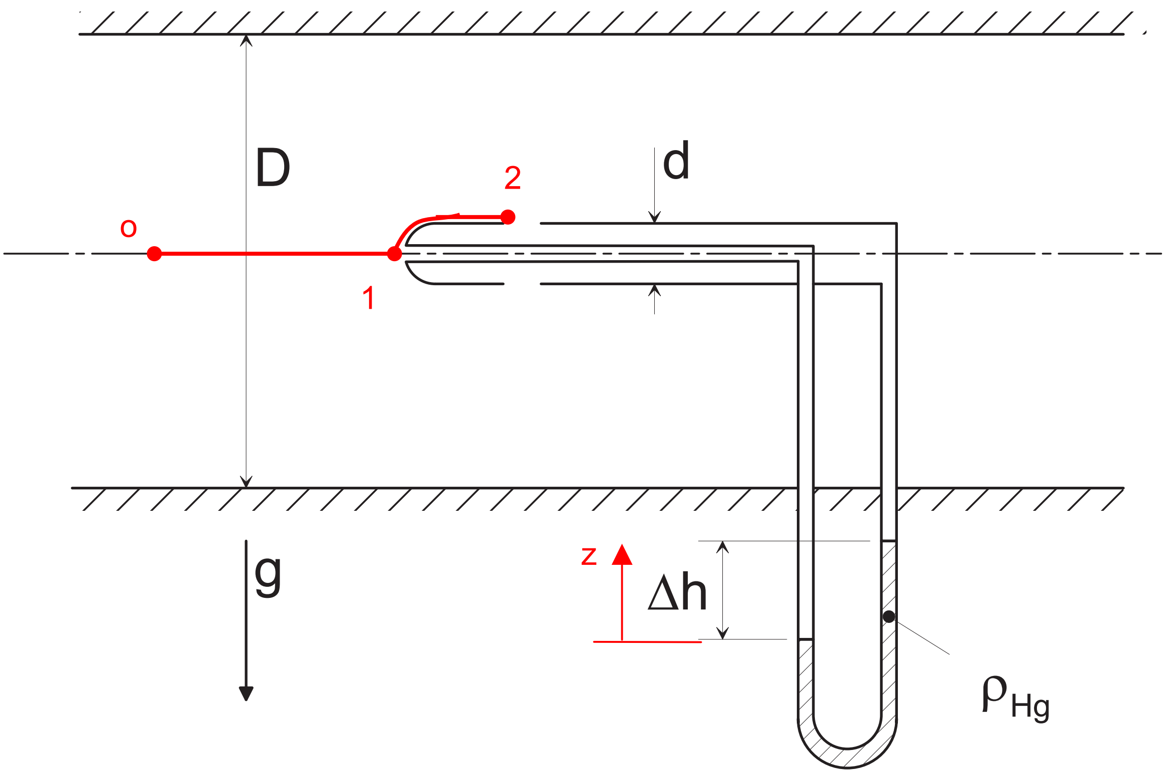
$$\Leftrightarrow p_1 > p_D + \rho \cdot g \cdot (H_2 - h_1)$$

$$\underline{\underline{p_1 > 0{,}94676\,bar}}$$

Aufgabe 2

Gegeben: D, d, ρ, Δh, g, ρ_{Hg}.

Gesucht: Massenstrom $\dot{m}$ durch das Rohr



Begriffe:

- Strömungsmedium Luft mit ρ = konst.
- Schwerkrafteinfluss auf strömende Luft vernachlässigbar
- stationäre Strömung → $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- reibungsfreie, eindimensionale Strömung → Stromfadentheorie anwenden → Bernoulli-Gleichung

15.05.2007

Bernoulli 1 → 2:

$$p_1 + \underbrace{\cancel{\frac{\rho}{2} c_1^2}}_{=0,\ Staupunkt} + \underbrace{\cancel{\rho \cdot g \cdot z_1}}_{\substack{Gewicht\ der\ Luft \\ vernachlässigbar}} = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \underbrace{\cancel{\rho \cdot g \cdot z_2}}_{\substack{Gewicht\ der\ Luft \\ vernachlässigbar}}$$

$$\Leftrightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} c_2^2 \qquad (1.10)$$

Aus der Hydrostatik folgt:

$$p_1 + \underbrace{\cancel{\rho \cdot g \cdot \Delta h}}_{\substack{Gewicht\ der\ Luft \\ vernachlässigbar}} = p_2 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\Leftrightarrow p_1 - p_2 = \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h \qquad (1.11)$$

mit (1.10) = (1.11)

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\rho_{Hg}}{\rho} \cdot g \cdot \Delta h} \qquad (1.12)$$

mit

$$\dot{m} = \rho \cdot c_2 \cdot A_2 \qquad (1.13)$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) \qquad (1.14)$$

mit (1.12) und (1.14) in (1.13)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{m} = \rho \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\rho_{Hg}}{\rho} \cdot g \cdot \Delta h} \cdot \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)}}$$

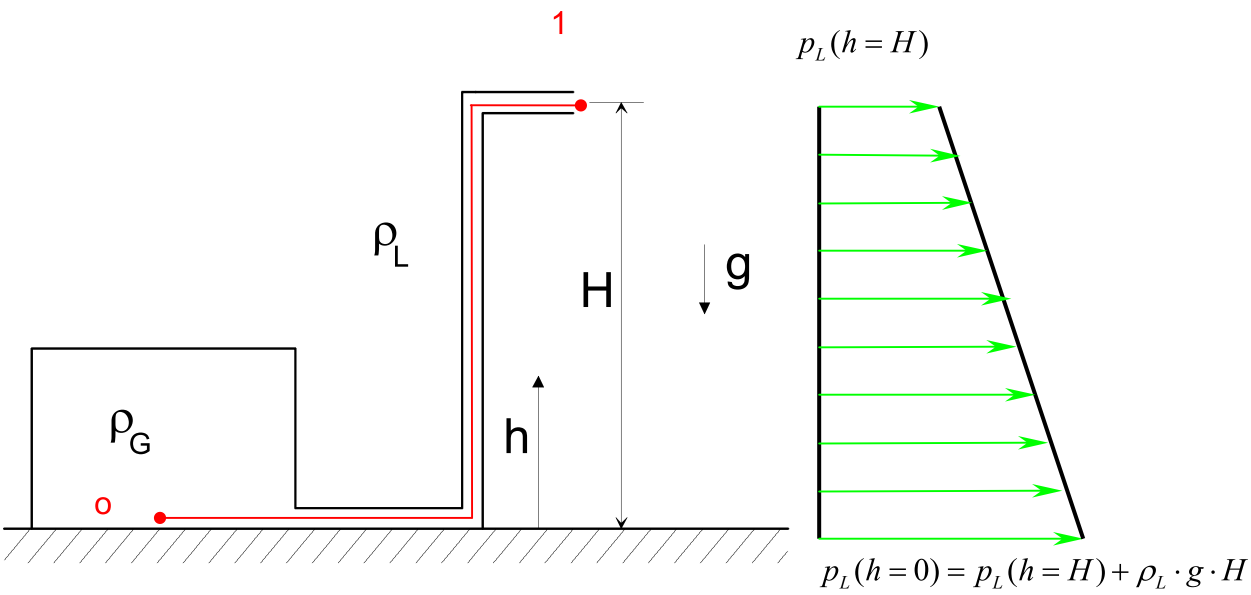
15.05.2007

Aufgabe 3

Gegeben: $w = w\,(h = H) = 40$ m/s, $H = 35$ m, $\rho_G = 0{,}49$ kg/m^3, $\rho_L = 1{,}29$ kg/m^3, $g = 9{,}81$ m/s²

Gesucht: a) $\Delta p_0 = p_G(h=0) - p_L(h=0)$ für vorgegebene Austrittsgeschwindigkeit $w\,(h = H) = 40$ m/s

b) $h = H^*$ für $w(h = H^*) = 0$ als Funktion des zuvor errechneten Überdrucks Δp_0



Begriffe:

- „großer Kessel"
- Freistrahl am Austritt der Leitung
- vorgegebene Austrittsgeschwindigkeit $w = w\,(h = H) = 40$ m/s $\Rightarrow$ stationäre Strömung
- T = konst., geringe Höhendifferenzen $\Rightarrow$ Luft und Gas sind inkompressible Medien $\Rightarrow$ ρ_L = konst. und ρ_G = konst.
- reibungsfreie Strömung $\rightarrow$ Bernoulli-Gleichung

15.05.2007

a) <u>Bernoulli 0 → 1:</u>

$$p_0 + \frac{\rho_G}{2} c_0^2 + \rho_G \cdot g \cdot h_0 = p_1 + \frac{\rho_G}{2} c_1^2 + \rho_G \cdot g \cdot h_1$$

$$p_G(h=0) + \underbrace{\cancel{\frac{\rho_G}{2} \cdot w(h=0)^2}}_{=0,\ großer\ Kessel} + \cancel{\rho_G \cdot g \cdot (h=0)} = p_G(h=H) + \frac{\rho_G}{2} w(h=H)^2 + \rho_G \cdot g \cdot (h=H)$$

$$p_G(h=0) - p_G(h=H) = \frac{\rho_G}{2} w(h=H)^2 + \rho_G \cdot g \cdot (h=H) \tag{1.15}$$

Wegen der Freistrahlbedingung muss folgen:

$$p_G(h=H) = p_L(h=H) \tag{1.16}$$

Aus der Hydrostatik ergibt sich:

$$p_L(h=0) = p_L(h=H) + \rho_L \cdot g \cdot (h=H)$$

$$\Leftrightarrow p_L(h=H) = p_L(h=0) - \rho_L \cdot g \cdot (h=H) \tag{1.17}$$

mit (1.17) in (1.16) und (1.16) in (1.15)

$$p_G(h=0) - \left(p_L(h=0) - \rho_L \cdot g \cdot (h=H)\right) = \frac{\rho_G}{2} w(h=H)^2 + \rho_G \cdot g \cdot (h=H)$$

$$\Leftrightarrow \Delta p_0 = p_G(h=0) - p_L(h=0) = \frac{\rho_G}{2} w(h=H)^2 + (\rho_G - \rho_L) \cdot g \cdot (h=H) \tag{1.18}$$

$$\underline{\underline{\Delta p_0 = 117{,}32\ Pa}}$$

b) Aus (1.18) folgt somit:

$$\Delta p_0 = 117{,}32\ Pa = \underbrace{\cancel{\frac{\rho_G}{2} \cdot w(h=H^*)^2}}_{=0,\ da\ w(h=H^*)=0} + (\rho_G - \rho_L) \cdot g \cdot (h=H^*)$$

$$\underline{\underline{\Leftrightarrow H^* = \frac{\Delta p_0}{g \cdot (\rho_G - \rho_L)} = -14{,}95\ m}}$$