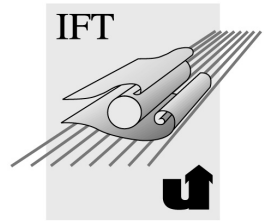


Lehrstuhl für Fluiddynamik und Strömungstechnik

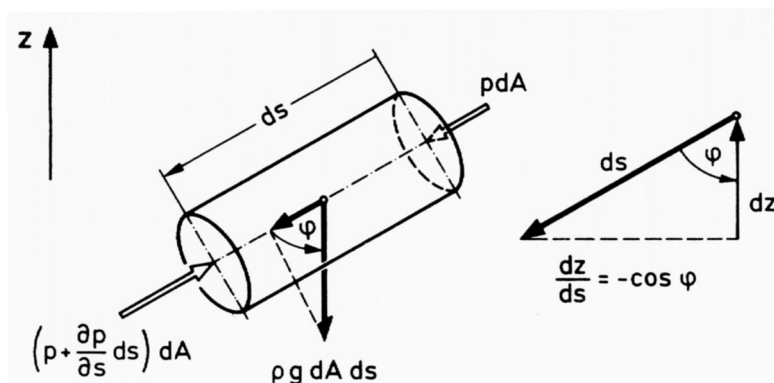
Prof. Dr.-Ing. W. Frank



Lösungen zu dem Aufgabenblatt 6

3.1.2 Grundgleichungen der Stromfadentheorie

2a. Kräftegleichgewicht in Richtung des Stromfadens:



Aus dem Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Stromfadenelement in Richtung des Stromfadens folgt die Eulersche Gleichung längs des Stromfadens s :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + g \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

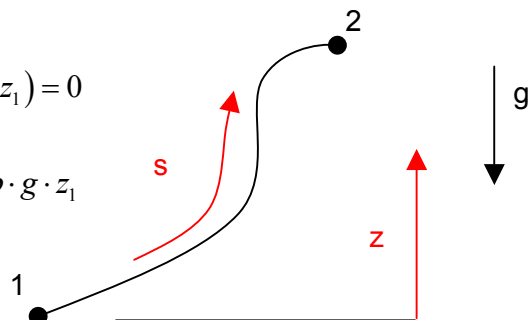
wobei gilt: $c = c(s, t)$; $p = p(s, t)$; $\rho = \rho(s, t)$

In der Eulerschen Gleichung wird ein ideales Fluid, d.h. ohne Zähigkeit, betrachtet. **Somit ist die Reibungsfreiheit der Strömung vorausgesetzt!**

Unter der Voraussetzung inkompressibler Strömung, d.h. $\rho = \text{konstant}$, liefert Integration dieser Gleichung entlang des Stromfadens bei festem t von einem beliebigem Punkt $1 \rightarrow 2$ die instationäre Bernoulli-Gleichung:

$$\rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds + \frac{\rho}{2} \cdot (c_2^2 - c_1^2) + (p_2 - p_1) + \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) = 0$$

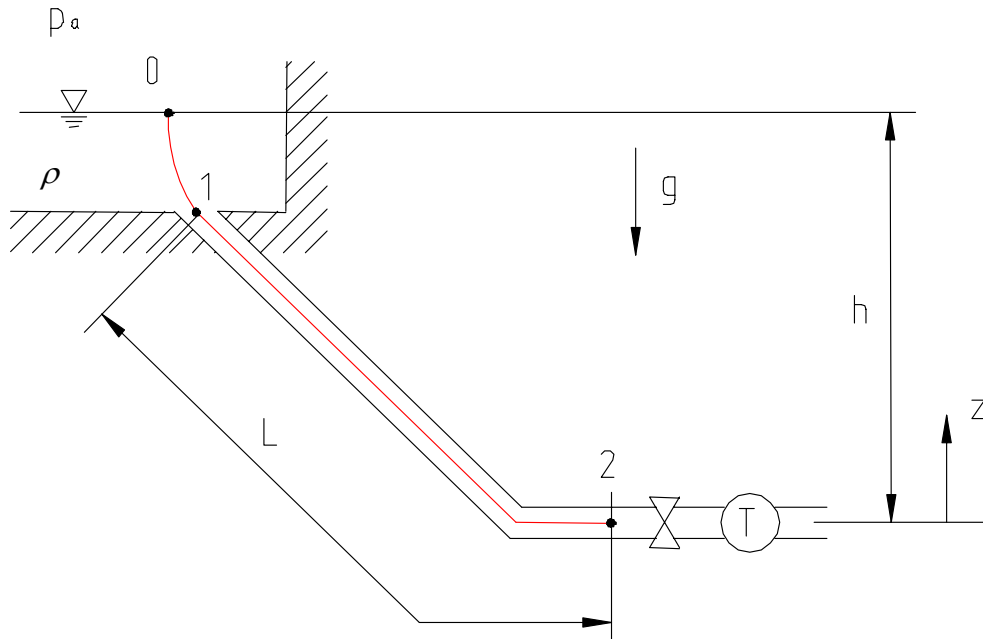
$$\rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 = \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1$$



Aufgabe 1

Gegeben: $\rho, g, h, l, c_{20}, \Delta t$

Gesucht: a) Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_a$ bei völlig geöffnetem bzw. geschlossenem Schieber
b) Verlauf der Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_a$ während des Schließvorganges als Funktion der Zeit



Begriffe:

- reibungsfreie Durchströmung der Leitung $\Rightarrow$ Stromfadentheorie (Bernoulli-Gl.)
- $\rho = \text{konst.}$ (inkompressible Strömung)
- großer Behälter (aus Zeichnung) $\Rightarrow c_0 = 0$

a) Die Strömung ist jeweils stationär: $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$

Bernoulli von 0 $\rightarrow$ 2:

$$\underbrace{p_0}_{p_a} + \underbrace{\frac{\rho}{2} c_0^2}_{=0} + \rho \cdot g \cdot \underbrace{z_0}_{=h} = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \underbrace{\rho \cdot g \cdot z_2}_{=0}$$

$$\Delta p = p_2 - p_a = \rho \cdot g \cdot h - \frac{\rho}{2} \cdot c_{20}^2 \quad (\text{völlig geöffneter Schieber})$$

$$\Delta p = p_2 - p_a = \rho \cdot g \cdot h \quad (\text{völlig geschlossener Schieber, Hydrostatik})$$

b) Die Strömung ist jeweils instationär: $\frac{\partial c}{\partial t} \neq 0$, $c_2(t) = c_{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(\pi \cdot t / \Delta t))$

Bernoulli von 0 $\rightarrow$ 2:

$$\rho \int_0^2 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2(t) + p_2(t) + \underbrace{\rho \cdot g \cdot z_2}_{=0} = p_a + \rho \cdot g \cdot h$$

$$\text{mit } \rho \int_0^2 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds = \underbrace{\rho \int_0^1 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds}_{\substack{\text{da im "großen Behälter"} \\ c \approx c_0 \approx 0 \text{ gilt, ist } \frac{\partial c}{\partial t} = 0}} + \underbrace{\rho \int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds}_{\substack{\text{da in der Leitung der} \\ \text{Querschnitt konst. ist,} \\ \text{ergibt die Konti-Gl.} \\ c = c(t) \neq c(s)}}$$

$$\text{mit } \rho \int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds = \rho \int_1^2 \frac{dc}{dt} \cdot ds = \rho \cdot \frac{dc}{dt} \cdot \int_1^2 ds = \rho \cdot \frac{dc}{dt} \cdot l = \rho \cdot \underbrace{\frac{d c_2(t)}{dt}}_{\substack{\text{wegen Konti-Gl.}}} \cdot l = -\rho \cdot \frac{c_{20}}{2} \cdot \frac{\pi}{\Delta t} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{\Delta t}\right) \cdot l$$

Für die instationäre Bernoulli-Gleichung von 0 $\rightarrow$ 2 folgt damit:

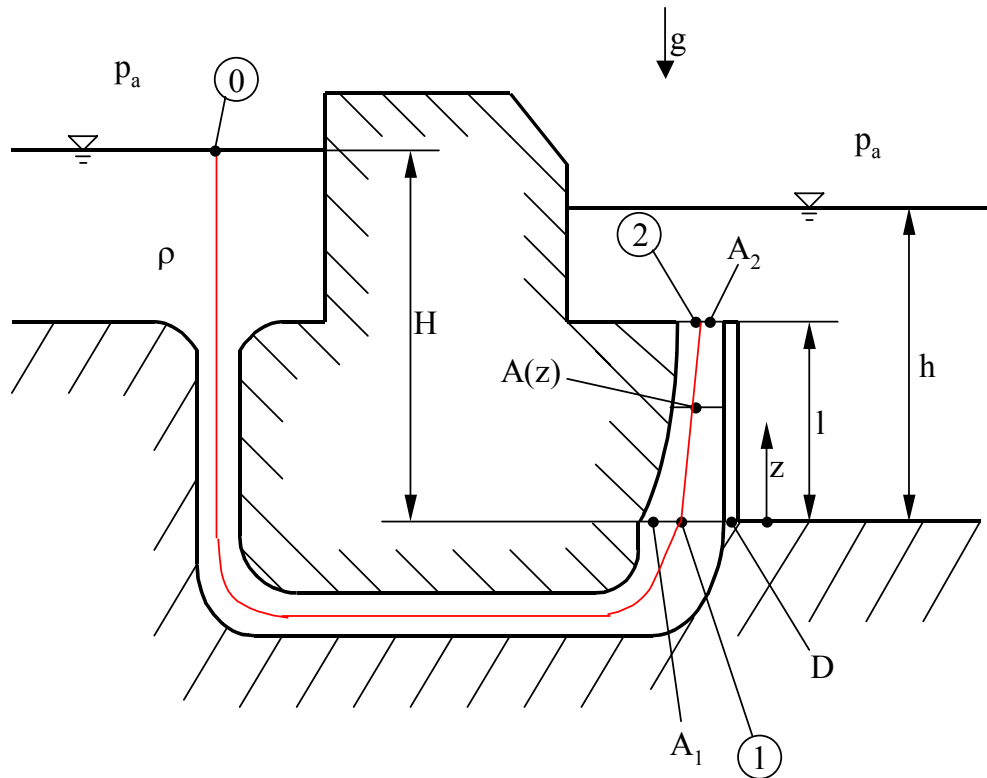
$$-\rho \frac{c_{20}}{2} \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Delta t} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{\Delta t}\right) + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{c_{20}^2}{4} \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{\Delta t}\right)\right)^2 + p_2(t) = p_a + \rho \cdot g \cdot h$$

$$\Delta p = p_2(t) - p_a = \rho \cdot \frac{c_{20} \cdot l \cdot \pi}{2 \cdot \Delta t} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{\Delta t}\right) - \frac{\rho}{8} \cdot c_{20}^2 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{\Delta t}\right)\right)^2 + \rho \cdot g \cdot h$$

Aufgabe 2

Gegeben: $\rho, H, h, p_a, A_1, A_2, \alpha, l, b, g$

Gesucht: a) Geschwindigkeit c_1 im Querschnitt A_1
 b) Verlauf des statischen Druckes $p(z)$ zwischen 1 und 2 für gegebenes c_1
 c) Gesamtmoment M_{ges} bezüglich D, das die Platte durch Flüssigkeitsdruck auf ihre linke und rechte Seite erfährt.

**Begriffe:**

- eindimensionale und reibungsfreie Strömung durch den Kanal bis ②
 $\Rightarrow$ Stromfadentheorie (Bernoulli-Gl.)
- stationäre Strömung
- großes Becken, Spiegelhöhen konstant $\Rightarrow c_0 = 0$
- Wasser, $\rho = \text{konst.}$
- Freistrahл bei ②

a) Bernoulli von 0 $\rightarrow$ 2:

$$p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot c_0^2 + \rho \cdot g \cdot z_0 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

$$\Leftrightarrow p_a + \rho \cdot g \cdot H = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \rho \cdot g \cdot l$$

Freistrahle bei 2:

$$p_2 = p_a + \rho \cdot g \cdot (h - l)$$

eingesetzt in die Bernoulli-Gl.:

$$\begin{aligned} p_a + \rho \cdot g \cdot H &= p_a + \rho \cdot g \cdot (h - l) + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \rho \cdot g \cdot l \\ \Leftrightarrow c_2 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)} \end{aligned}$$

Konti.-Gleichung:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_1 \cdot A_1 &= \rho \cdot c_2 \cdot A_2 \Leftrightarrow c_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot c_2 \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{A_2}{A_1} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)} \end{aligned}$$

b) Bernoulli von $0 \rightarrow z$ (beliebige Stelle zwischen 1 und 2):

$$\begin{aligned} p_a + \rho \cdot g \cdot H &= p(z) + \frac{\rho}{2} \cdot c^2(z) + \rho \cdot g \cdot z \\ \Leftrightarrow p(z) &= p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z) - \frac{\rho}{2} \cdot c^2(z) \end{aligned}$$

Konti-Gleichung:

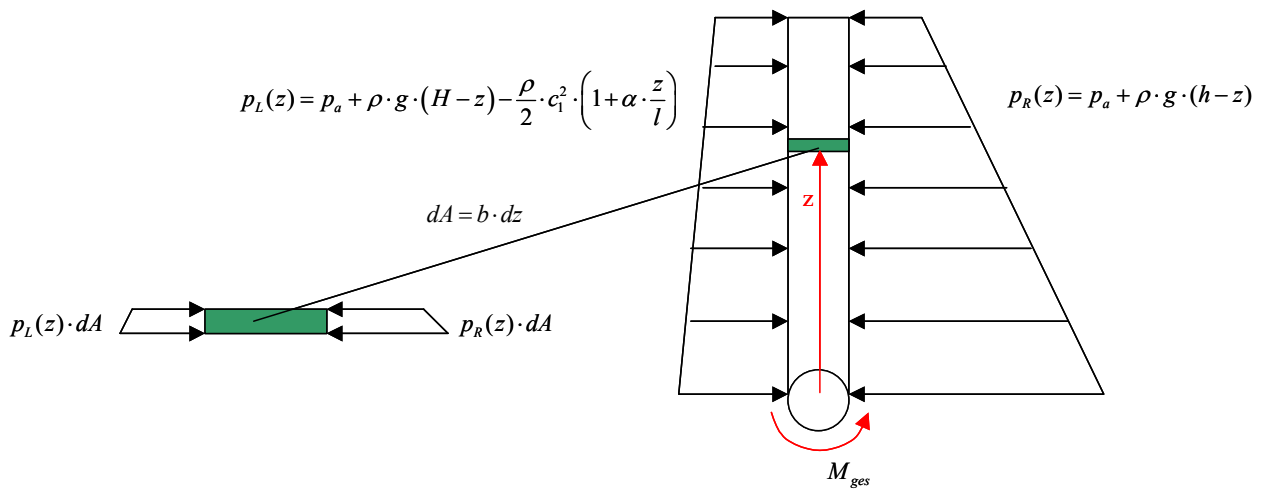
$$\rho \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho \cdot c(z) \cdot A(z) \Leftrightarrow c(z) = c_1 \cdot \frac{A_1}{A(z)}$$

eingesetzt in die Bernoulli-Gl.:

$$p(z) = p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z) - \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \left(\frac{A_1}{A(z)} \right)^2$$

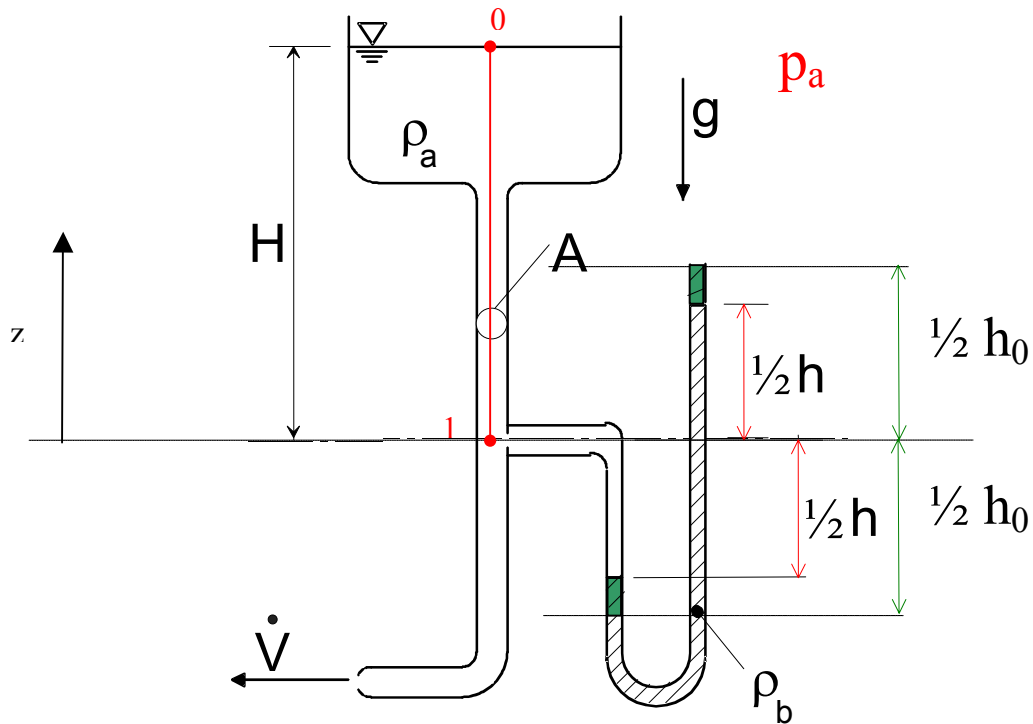
$$\text{mit } \frac{A(z)}{A_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \cdot \frac{z}{l}}}$$

$$\Rightarrow p(z) = p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z) - \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{z}{l} \right) = p_L(z)$$

c) Berechnung des Gesamtmoments M_{ges} bezüglich D

$$\begin{aligned}
 dM_{\text{ges}} &= p_R(z) \cdot dA \cdot z - p_L(z) \cdot dA \cdot z \\
 &= \left[p_a + \rho \cdot g \cdot (h - z) \right] \cdot b \cdot dz \cdot z - \left[p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z) - \frac{\rho}{2} c_1^2 \cdot \left(1 + \alpha \frac{z}{l}\right) \right] \cdot b \cdot dz \cdot z \\
 &= b \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot z \cdot dz - b \cdot \rho \cdot g \cdot H \cdot z \cdot dz + \frac{\rho}{2} c_1^2 \cdot b \cdot z \cdot dz + \frac{\rho}{2} c_1^2 \cdot \frac{\alpha \cdot b}{l} \cdot z^2 \cdot dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\text{ges}} &= \int_0^l dM_{\text{ges}} \\
 &= \left[b \cdot \rho \cdot g \cdot (h - H) \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot b \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \frac{\alpha \cdot b}{l} \cdot \frac{z^3}{3} \right]_0^l \\
 &= b \cdot \rho \cdot g \cdot (h - H) \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot b \cdot \left(\frac{l^2}{2} + \alpha \cdot \frac{l^2}{3} \right)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3**Gegeben:** H, A, ρ_a, ρ_b, g **Gesucht:** a) Höhenunterschied h_0 der Menisken im U-Rohr bei geschlossener Austrittsdüse ($\dot{V} = 0$)b) Volumenstrom $\dot{V}$ als Funktion der Meniskenverschiebung $\Delta h = h_0 - h$ **Begriffe:**

- großer Behälter mit konstanter Spiegelhöhe $\Rightarrow c_0 = 0$
- inkompressible Flüssigkeiten der Dichten ρ_a und ρ_b
- reibungsfreie Strömung $\Rightarrow$ Stromfadentheorie (Bernoulli-Gl.)
- zeitlich konstanter Volumenstrom $\dot{V} \Rightarrow$ stationäre Strömung

a) Druckgleichgewicht am U-Rohr bei geschlossener Austrittsdüse, Hydrostatik:

$$p_a + \rho_a \cdot g \cdot \left(H + \frac{h_0}{2} \right) = p_a + \rho_b \cdot g \cdot h_0$$

$$\Rightarrow h_0 = \frac{H}{\frac{\rho_b}{\rho_a} - \frac{1}{2}}$$

b) Druckgleichgewicht am U-Rohr bei offener Austrittsdüse, Hydrodynamik:

$$p_1 + \rho_a \cdot g \cdot \frac{h}{2} = p_a + \rho_b \cdot g \cdot h \quad (1.1)$$

$$\Leftrightarrow p_1 = p_a + \rho_b \cdot g \cdot h - \rho_a \cdot g \cdot \frac{h}{2} \quad (1.2)$$

Bestimmung von p_1 aus Bernoulli-Gleichung von $0 \rightarrow 1$:

$$p_a + \rho_a \cdot g \cdot H = p_1 + \frac{\rho_a}{2} c_1^2 \quad (1.3)$$

mit (1.2) in (1.3)

$$\begin{aligned} p_a + \rho_a \cdot g \cdot H &= p_a + \rho_b \cdot g \cdot h - \rho_a \cdot g \cdot \frac{h}{2} + \frac{\rho_a}{2} c_1^2 \\ \Rightarrow c_1 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot \left[H - h \cdot \left(\frac{\rho_b}{\rho_a} - \frac{1}{2} \right) \right]} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Bestimmung des Volumenstroms $\dot{V}$:

$$\dot{V} = c_1 \cdot A = \sqrt{2 \cdot g \cdot \left[H - h \cdot \left(\frac{\rho_b}{\rho_a} - \frac{1}{2} \right) \right]} \cdot A \quad (1.5)$$

Volumenstrom $\dot{V}$ als Funktion der Meniskenverschiebung $\Delta h = h_0 - h$:

aus Aufgabenteil a)

$$H = h_0 \cdot \left(\frac{\rho_b}{\rho_a} - \frac{1}{2} \right) \quad (1.6)$$

mit (1.6) in (1.5)

$$\dot{V} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_b}{\rho_a} - \frac{1}{2} \right) \cdot \underbrace{(h_0 - h)}_{\Delta h}} \cdot A$$