26.06.2007


Lehrstuhl für
Fluiddynamik und Strömungstechnik
Prof. Dr.-Ing. W. Frank


IFT

# Lösungen zu dem Aufgabenblatt 7

## 3.3 Strömungen mit Reibung

### 3.3.1 Impulssatz mit Anwendungen

Der Impulssatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Resultierenden der äußeren Kräfte ist:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \vec{w}\,dm = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\,\vec{w}\,dV = \sum \vec{F}_a$$

Nach einigen Umformungen der Zeitableitung $\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\,\vec{w}\,dV$ erhält man schließlich folgende Form des Impulssatzes, die für

- reibungsfreie und reibungsbehaftete Strömungen
- kompressible und inkompressible Strömungen
- stationäre und instationäre Strömungen

gültig ist:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\vec{w})}{\partial t}\,dV + \int_A \rho\,\vec{w}(\vec{w}\cdot\vec{n})\,dA = \sum \vec{F}_a$$

Der Term $\int_V \frac{\partial(\rho\vec{w})}{\partial t}\,dV$ beschreibt die lokale Impulsänderung, für die eine Kenntnis der Strömungsgrößen im Volumen erforderlich ist. Der Term $\int_A \rho\,\vec{w}(\vec{w}\cdot\vec{n})\,dA$ gibt den Impulsstrom durch die Oberfläche.

Für stationäre Strömungen entfällt das Volumenintegral. Die Strömungsdaten werden nur auf der Kontrollraumoberfläche benötigt:

$$\int_A \rho\,\vec{w}(\vec{w}\cdot\vec{n})\,dA = \sum \vec{F}_a$$

**26.06.2007**

Wird die Impulskraft $\vec{F}_j$ als

$$\vec{F}_j = -\int_A \rho\,\vec{w}\left(\vec{w}\cdot\vec{n}\right)dA$$

definiert, so schreibt sich der Impulssatz für stationäre Strömungen in der sehr einfachen Form:

$$\sum \vec{F}_j + \sum \vec{F}_a = 0$$

definiert. Die Impulskraft $\vec{F}_j$ weist stets in das Innere des Kontrollraums und ist parallel zu dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{w}$ gerichtet.

Die Summe aller äußeren Kräfte $\sum \vec{F}_a$ setzt sich aus Massen- und Oberflächenkräften

$$\sum \vec{F}_a = \sum \vec{F}_M + \sum \vec{F}_O$$

des im Volumen $V$ eingeschlossenen Fluids zusammen, wobei

$\sum \vec{F}_M$ = Massenkräfte (Gewicht, Zentrifugalkraft)
$\sum \vec{F}_O$ = Oberflächenkräfte (z. B. Druckkraft, Reibkraft)

bezeichnen. Eine wichtige Oberflächenkraft ist die Druckkraft $\vec{F}_D$, die als

$$\vec{F}_D = -\int_A p\,\vec{n}\,dA$$

definiert ist.

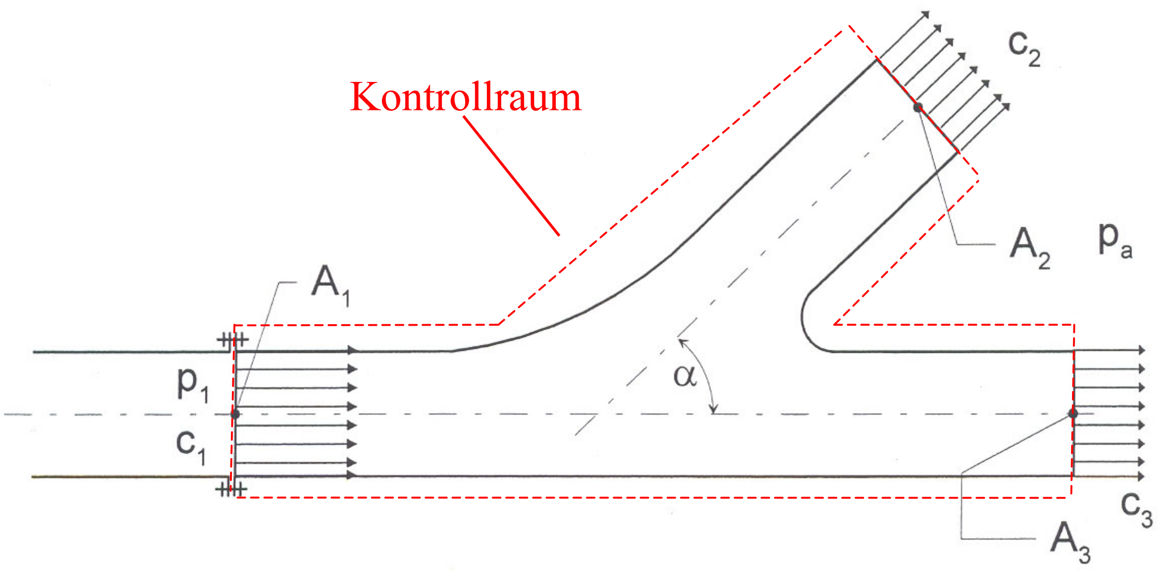
**26.06.2007**

## Aufgabe 1

**Gegeben:** $A_1$, $A_2$, $A_3$, $c_1$, $c_3$, $\rho$, $p_1$, $p_a$, $\alpha$

**Gesucht:** a) Geschwindigkeit $c_2$

b) Größe (Betrag und Richtung) der äußeren Kraft $F_H$, die an der Verzweigung angreifen muss, damit ein Kräftegleichgewicht vorliegt




**Begriffe:**

- inkompressibles Medium ($\rho$ = konst.)
- stationäre Strömung
- $A_1 = A_2 = A_3 = A$
- Freistrahlbedingung in den Querschnitten $A_2$ und $A_3$, also $p_2 = p_3 = p_a$
- Druck und Geschwindigkeit sind über die jeweiligen Querschnitte konstant

a) Konti-Gleichung:

$$\rho \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho \cdot c_2 \cdot A_2 + \rho \cdot c_3 \cdot A_3$$

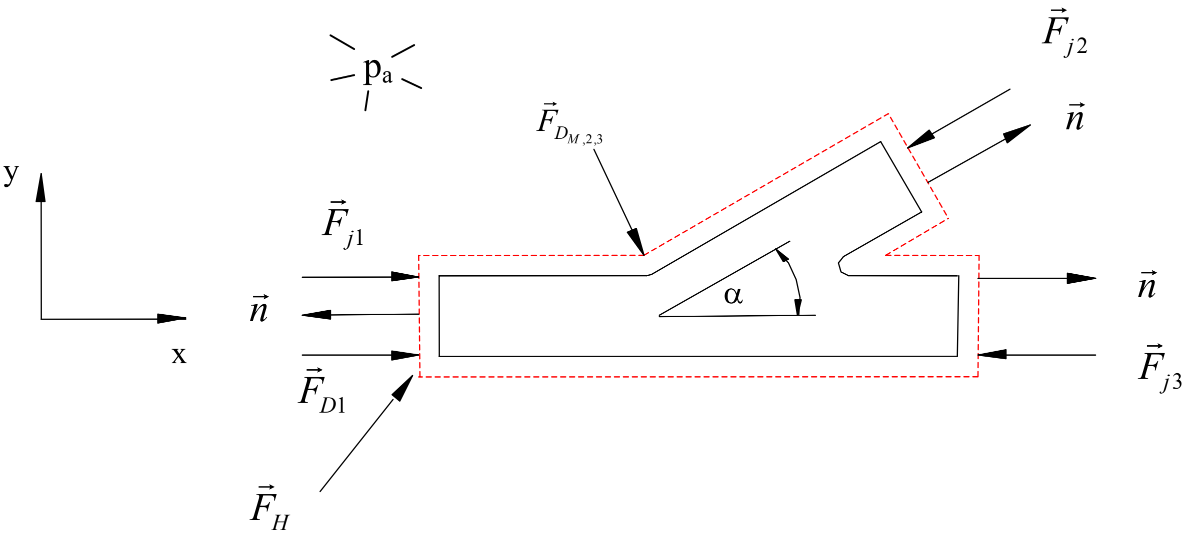
mit $A_1 = A_2 = A_3 = A$ folgt für $c_1$:

$$c_1 = c_2 + c_3$$

und mit $c_3 = \frac{1}{2} c_1$ folgt für $c_2$:

$$c_2 = c_1 - \frac{1}{2} c_1 = \frac{c_1}{2}$$

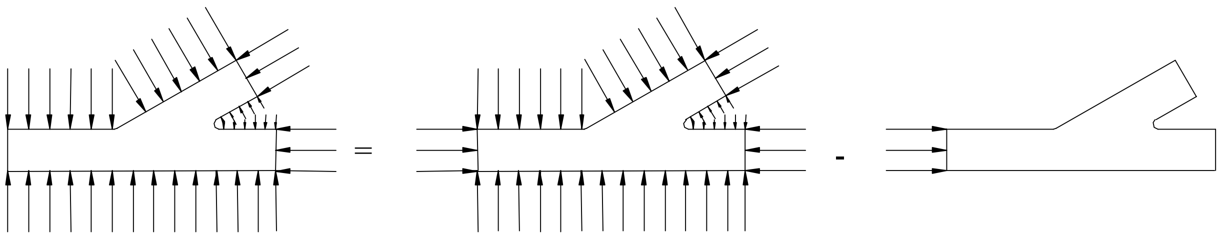
b) Kontrollraum mit Kräften:




Impulssatz:

$$\vec{F}_{j1}+\vec{F}_{D1}+\vec{F}_{H}+\vec{F}_{D_{M,2,3}}+\vec{F}_{j2}+\vec{F}_{j3}=0$$

Berechnung von $\vec{F}_{D_{M,2,3}}$ :




$$\vec{F}_{D_{M,2,3}}=-\int\limits_{\substack{Mantelfläche\\+A_2+A_3}} p_a\,\vec{n}\,dA=\underbrace{-\int\limits_{\substack{Mantelfläche\\+A_1+A_2+A_3}} p_a\,\vec{n}\,dA}_{=0}-\left(-\int\limits_{A_1} p_a\,\vec{n}\,dA\right)$$

$$F_{D_{M,2,3},x}=-p_a\cdot A$$

$$F_{D_{M,2,3},y}=0$$

<u>Impulssatz in x-Richtung:</u>

$$\rho\cdot\underbrace{c_1^2\cdot A_1}_{c_1^2 A}+p_1\cdot\underbrace{A_1}_{A}+F_{H,x}-p_a\cdot A-\rho\cdot\underbrace{c_2^2\cdot A_2}_{\frac{c_1^2}{4}A}\cdot\cos\alpha-\rho\cdot\underbrace{c_3^2\cdot A_3}_{\frac{c_1^2}{4}A}=0$$

$$\Rightarrow\; F_{H,x}=\left(p_a-p_1\right)\cdot A+\rho\cdot\frac{c_1^2}{4}\cdot A\cdot\left(\cos\alpha-3\right)\quad<0$$

**26.06.2007**

Impulssatz in y-Richtung:

$$F_{H,y} - \rho \cdot \underbrace{c_2^2 \cdot A_2}_{\frac{c_1^2}{4}A} \cdot \sin\alpha = 0$$

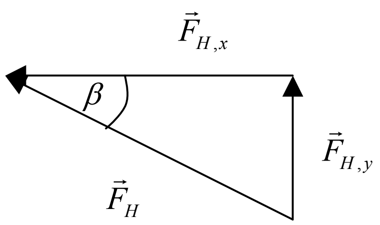
$$\Rightarrow \; F_{H,y} = \rho \cdot \frac{c_1^2}{4} \cdot A \cdot \sin\alpha$$

Betrag der Haltekraft:

$$\left|\vec{F}_H\right| = \sqrt{F_{H,x}^2 + F_{H,y}^2} = \sqrt{\left(\left(p_a - p_1\right)\cdot A + \rho \cdot \frac{c_1^2}{4} \cdot A \cdot \left(\cos\alpha - 3\right)\right)^2 + \left(\rho \cdot \frac{c_1^2}{4} \cdot A \cdot \sin\alpha\right)^2}$$

Richtung der Haltekraft:

$$\tan\beta = \frac{F_{H,y}}{F_{H,x}}$$




$$\Rightarrow \beta = \arctan\left(\frac{F_{H,y}}{F_{H,x}}\right)$$

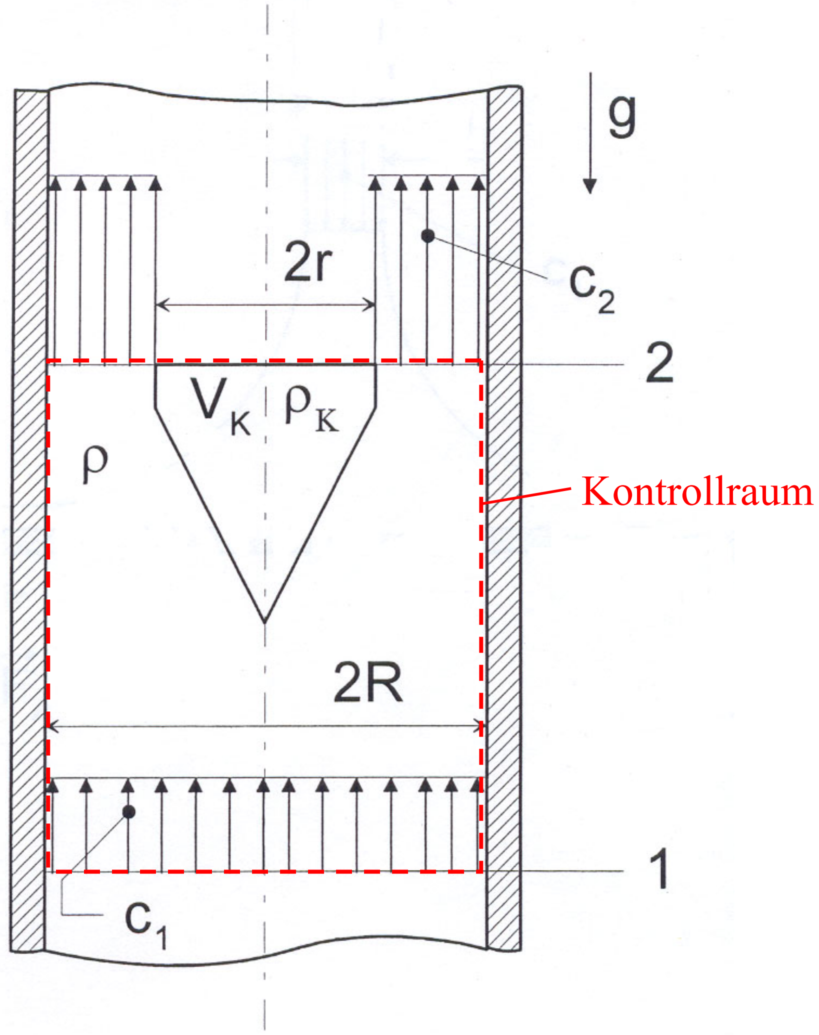
$$= \arctan\frac{\left(\rho \cdot \frac{c_1^2}{4} \cdot A \cdot \sin\alpha\right)}{\left(\left(p_a - p_1\right)\cdot A + \rho \cdot \frac{c_1^2}{4} \cdot A \cdot \left(\cos\alpha - 3\right)\right)}$$

**26.06.2007**

**Aufgabe 2**

**Gegeben:** r, R, $V_K$, $\rho_K$, $\rho$, g.

**Gesucht:** Geschwindigkeit $c_1$, bei der der Kegel weder steigt noch fällt

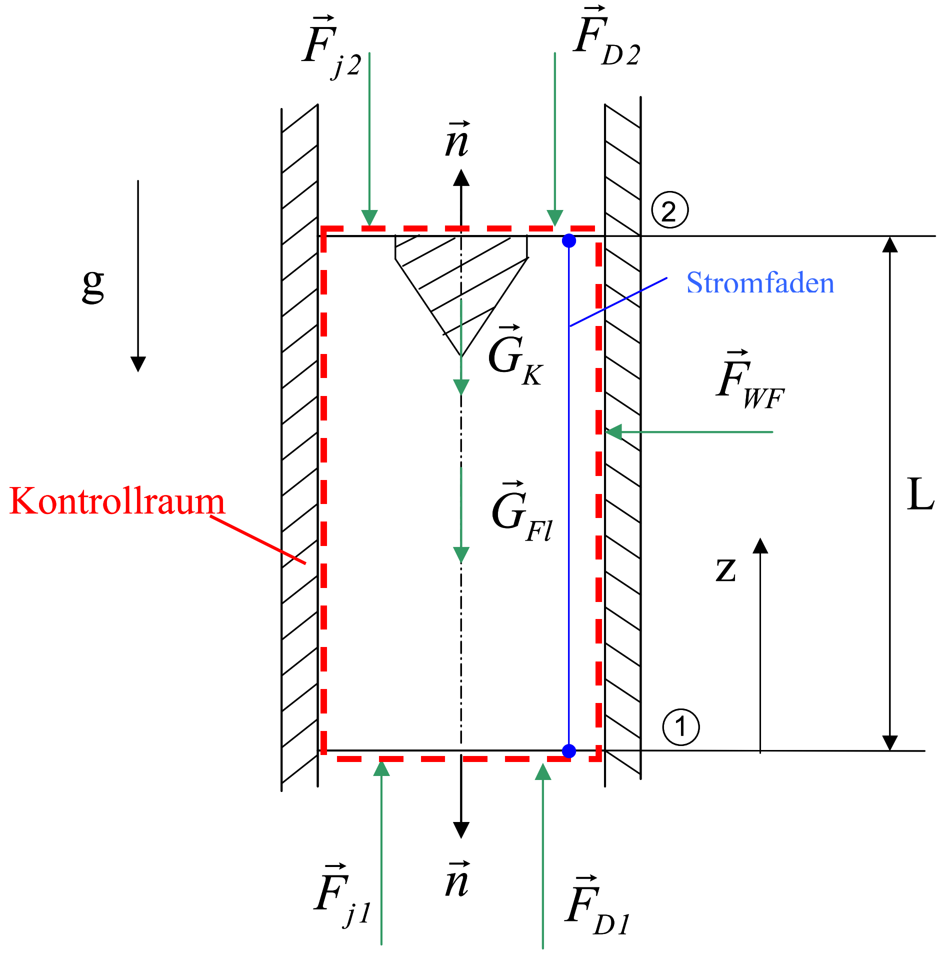



**Begriffe:**

- stationäre Strömung
- inkompressibles Fluid der Dichte $\rho$
- reibungsfreie Strömung zwischen 1 und 2 $\Rightarrow$ Stromfadentheorie (Bernoulli-Gl.)
- konstante Geschwindigkeiten über die Querschnitte 1 und 2
- Druck auf die Grundfläche des Kegels gleich dem statischen Druck in der Strömung bei 2

**26.06.2007**

<u>Impulssatz mit Kontrollraum:</u>




Kräfte:

$$\left|\vec{F}_{j1}\right| = \rho \cdot c_1^2 \cdot \pi \cdot R^2 \qquad \left|\vec{F}_{D1}\right| = p_1 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$\left|\vec{F}_{J2}\right| = \rho \cdot c_2^2 \cdot \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right) \qquad \left|\vec{F}_{D2}\right| = p_2 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$\left|\vec{G}_K\right| = \rho_K \cdot g \cdot V_K \qquad \left|\vec{F}_{WF}\right| = 0$$

$$\left|\vec{G}_{Fl}\right| = \rho \cdot g \cdot \left[\pi \cdot R^2 \cdot (z_2 - z_1) - V_K\right] \quad \text{mit } z_2 - z_1 = L$$

<u>Impulssatz in z-Richtung:</u>

$$\left|\vec{F}_{j1}\right| + \left|\vec{F}_{D1}\right| - \left|\vec{F}_{j2}\right| - \left|\vec{F}_{D2}\right| - \left|\vec{G}_K\right| - \left|\vec{G}_{Fl}\right| = 0$$

$$\rho \cdot c_1^2 \cdot \pi \cdot R^2 + p_1 \cdot \pi \cdot R^2 - \rho \cdot c_2^2 \cdot \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right) - p_2 \cdot \pi \cdot R^2 - \rho_K \cdot g \cdot V_K - \rho \cdot g \cdot \left(\pi \cdot R^2 \cdot L - V_K\right) = 0$$

$$\left(p_1 - p_2\right) \cdot \pi \cdot R^2 + \rho \cdot \pi \cdot \left[c_1^2 R^2 - c_2^2 \cdot \left(R^2 - r^2\right)\right] - \rho_K \cdot g \cdot V_K - \rho \cdot g \cdot \left(\pi \cdot R^2 \cdot L - V_K\right) = 0 \qquad (1.1)$$

<u>Bernoulli von 1→2:</u>

$$\frac{\rho}{2}\cdot c_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2}\cdot c_2^2 + p_2 + \rho\cdot g\cdot L$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(c_2^2 - c_1^2\right) + \rho\cdot g\cdot L \tag{1.2}$$

<u>Konti von 1→2:</u>

$$\rho\cdot c_1\cdot\pi\cdot R^2 = \rho\cdot c_2\cdot\pi\cdot\left(R^2 - r^2\right)$$

$$\Rightarrow c_2 = c_1\cdot\frac{R^2}{R^2 - r^2} \tag{1.3}$$

mit (1.3) in (1.2):

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}c_1^2\left(\frac{R^4}{\left(R^2 - r^2\right)^2} - 1\right) + \rho\cdot g\cdot L \tag{1.4}$$

mit (1.3) und (1.4) in (1.1):

$$\left[\frac{\rho}{2}c_1^2\left(\frac{R^4}{\left(R^2 - r^2\right)^2} - 1\right) + \rho\cdot g\cdot L\right]\cdot\pi\cdot R^2 + \rho\cdot\pi\cdot c_1^2 R^2\left[1 - \frac{R^2}{\left(R^2 - r^2\right)}\right] - \rho_K\cdot g\cdot V_K - \rho\cdot g\cdot\left(\pi\cdot R^2\cdot L - V_K\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho\cdot\pi\cdot c_1^2\cdot R^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{R^4}{\left(R^2 - r^2\right)^2} - 1\right) + \rho\cdot\pi\cdot c_1^2 R^2\left[1 - \frac{R^2}{\left(R^2 - r^2\right)}\right] - \rho_K\cdot g\cdot V_K + \rho\cdot g\cdot V_K = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho\cdot\pi\cdot c_1^2\cdot R^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{R^4}{\left(R^2 - r^2\right)^2} - 1\right) + \rho\cdot\pi\cdot c_1^2 R^2\left[1 - \frac{R^2}{\left(R^2 - r^2\right)}\right] - \rho_K\cdot g\cdot V_K + \rho\cdot g\cdot V_K = 0$$

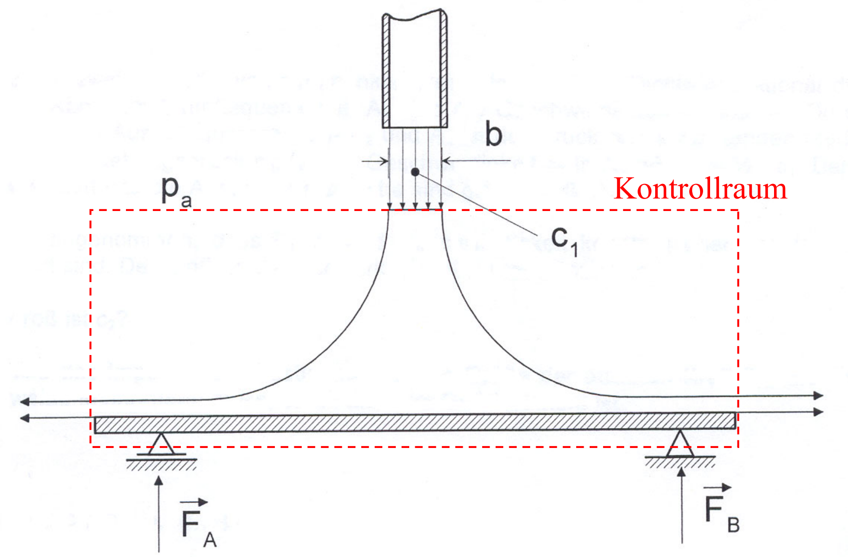
$$\Rightarrow c_1 = \frac{R^2 - r^2}{R\cdot r^2}\cdot\sqrt{2\cdot\left(\frac{\rho_K}{\rho} - 1\right)\cdot\frac{g\cdot V_K}{\pi}}$$

**26.06.2007**

## Aufgabe 3

**Gegeben:** b, h, ρ, $c_1$

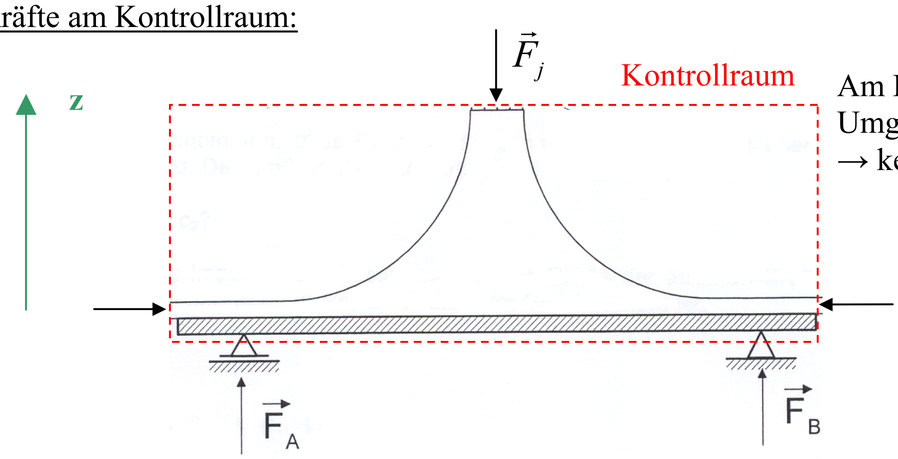
**Gesucht:** Summe der Lagerkräfte $|\vec{F}_A| + |\vec{F}_B|$ (mittels Impulssatz)




**Begriffe:**

- $\rho$ = konst. (inkompressibel)
- Freistrahl
- stationärer Strömungsvorgang
- $c_1$ konstant über den Freistrahlquerschnitt b·h
- Vernachlässigung der Schwerkraft

Kräfte am Kontrollraum:




Am Kontrollraum herrscht überall der Umgebungsdruck (Freistrahl)
→ keine resultierende Druckkraft

Diese Impulskräfte heben sich gegenseitig auf.

Impulssatz in z-Richtung:

$$|\vec{F}_A| + |\vec{F}_B| - |\vec{F}_j| = 0$$

$$\Leftrightarrow \; |\vec{F}_A| + |\vec{F}_B| = |\vec{F}_j| = \rho \cdot c_1^2 \cdot b \cdot h$$