18.06.2007

Lehrstuhl für Fluiddynamik und Strömungstechnik
Prof. Dr.-Ing. W. Frank

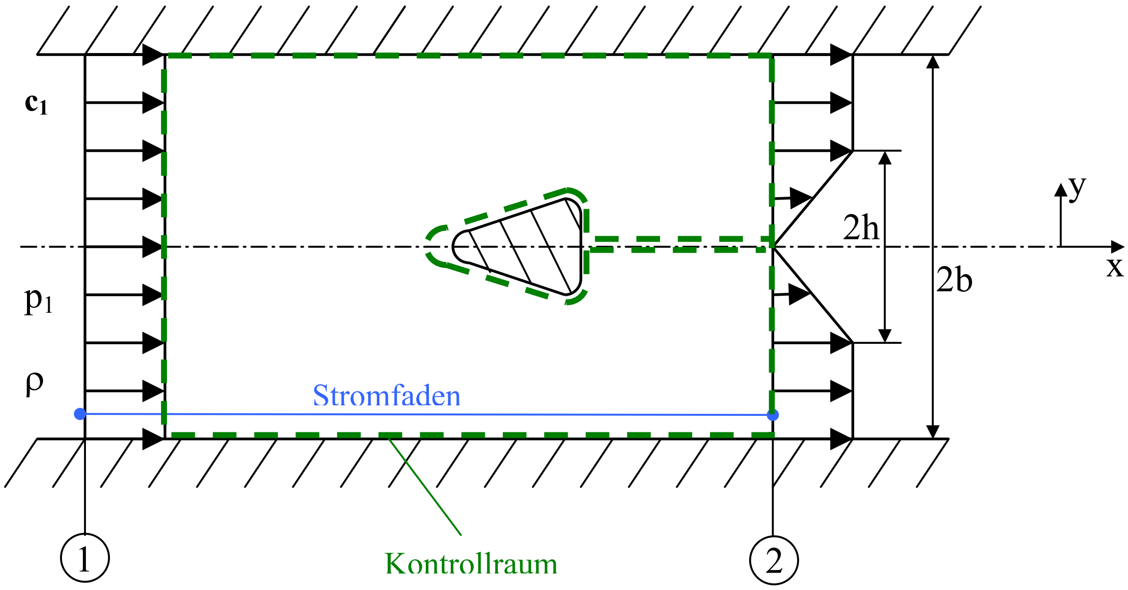
Lösungen zu dem Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1

Gegeben: b, t, c_1, ρ, p_1, h

Gesucht: a) Geschwindigkeit c_2 für $0 \leq |y| \leq h$ und $h \leq |y| \leq b$ und Druck p_2

b) x-Komponente der von dem Medium auf den Körper ausgeübten Kraft nach Größe und Richtung

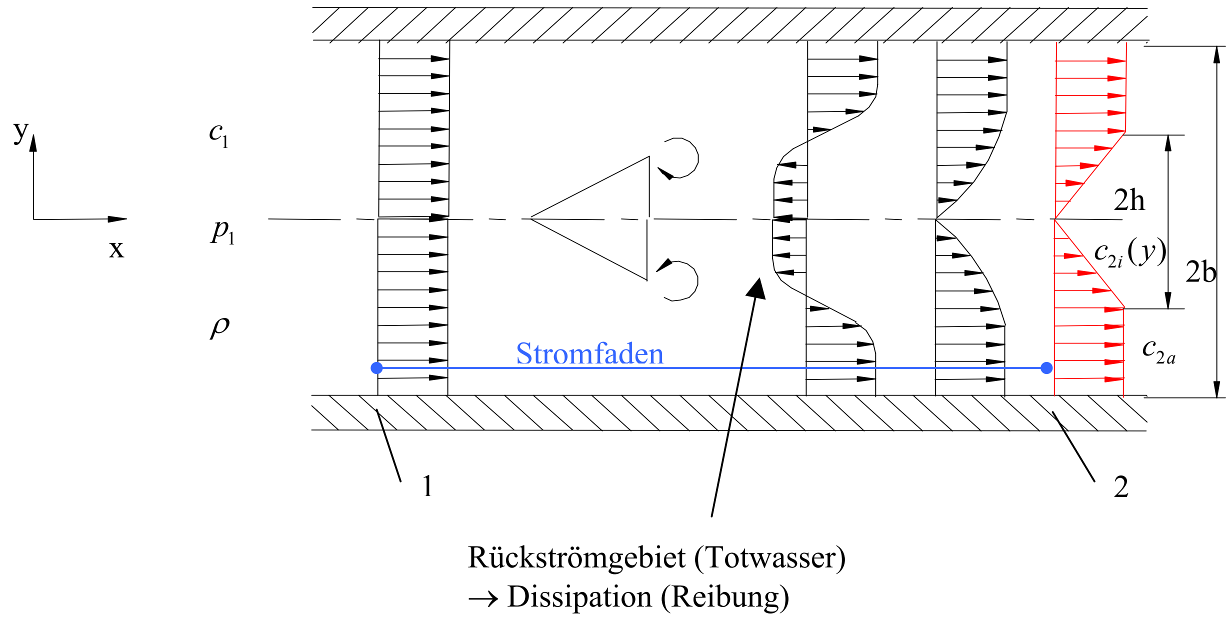


Begriffe:

- inkompressibles Medium (ρ = konst.)
- reibungsbehaftete Strömung
- stationäre Strömung
- Drücke p_1 und p_2 jeweils konstant über den Querschnitt
- Strömung außerhalb des Totwassergebietes näherungsweise reibungsfrei
- Vernachlässigung der Erdschwere

18.06.2007

a) Geschwindigkeitsprofile im Totwassergebiet



Es gilt für: $h \le |y| \le b: \quad c_{2a} = c_2$

$0 \le |y| \le h: \quad c_{2i}(y) = a \cdot y + b$

aus den Randbedingungen folgt:

1.RB: $c_{2i}(y=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

2.RB: $c_{2i}(y=h) = c_{2a} = c_2 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{c_2}{h}$

$$\Rightarrow \quad c_{2i}(y) = c_2 \cdot \frac{y}{h}$$

<u>Konti-Gleichung</u>:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_{2a} + \dot{m}_{2i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{\rho} \cdot c_1 \cdot 2b \cdot t = \cancel{\rho} \cdot c_2 \cdot 2 \cdot (b-h) \cdot t + \cancel{\rho} \cdot 2 \cdot \underbrace{\int_0^h c_2 \cdot \frac{y}{h} \cdot t \cdot dy}_{c_2 \cdot h \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_2 = c_1 \cdot \frac{2b}{2b-h}$$

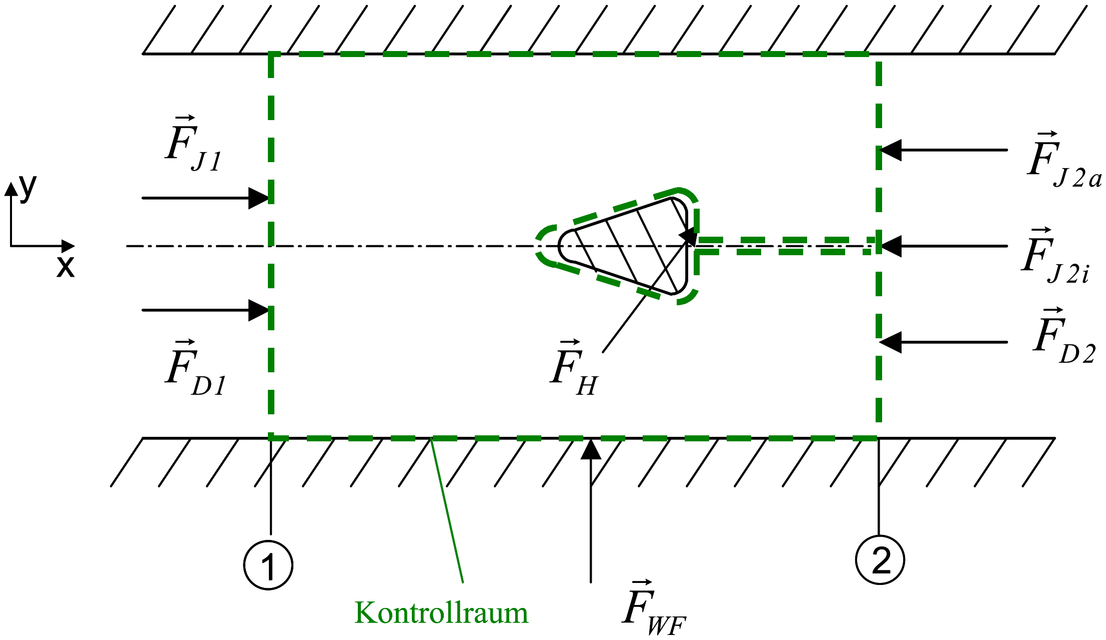
<u>Bernoulli von 1 → 2</u> (da Strömung im Außenbereich reibungsfrei):

$$p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2$$

$$\Rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 \cdot \frac{h \cdot (h-4b)}{(2b-h)^2}$$

18.06.2007

b) Impulssatz mit Kontrollraum



Wegen reibungsfreier Strömung im Außenbereich wirkt an der Kanalwand keine Reibkraft!

Impulssatz:

$$\sum \vec{F}_j + \sum \vec{F}_a = 0$$

$$\vec{F}_{J1} + \vec{F}_{D1} + \vec{F}_H + \vec{F}_{J2a} + \vec{F}_{D2} + \vec{F}_{J2i} + \vec{F}_{WF} = 0$$

Kraft der Wand auf die Flüssigkeit $F_{WF} = 0$, deshalb ist auch $F_{H,y} = 0$.

Impulssatz in x-Richtung:

$$\left|\vec{F}_{j1}\right| + \left|\vec{F}_{D1}\right| + \left|\vec{F}_{H,x}\right| - \left|\vec{F}_{j2a}\right| - \left|\vec{F}_{D2}\right| - \left|\vec{F}_{j2i}\right| = 0$$

Berechnung der Kräfte:

$$\left|\vec{F}_{j1}\right| = \rho \cdot c_1^2 \cdot 2 \cdot b \cdot t \qquad \left|\vec{F}_{j2a}\right| = \rho \cdot c_2^2 \cdot 2 \cdot (b-h) \cdot t$$

$$\left|\vec{F}_{D1}\right| = p_1 \cdot 2 \cdot b \cdot t \qquad \left|\vec{F}_{D2}\right| = p_2 \cdot 2 \cdot b \cdot t$$

Berechnung von $\left|\vec{F}_{j2i}\right|$ über Integration:

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{j2i}\right| = \int_A \rho \cdot c_{2i}^2(y) \cdot dA = \int_{y=-h}^{y=h} \rho \cdot \left(c_2 \cdot \frac{y}{h}\right)^2 \cdot t dy = 2 \cdot \int_{y=0}^{y=h} \rho \cdot \left(c_2 \cdot \frac{y}{h}\right)^2 \cdot t \cdot dy$$

$$\left|\vec{F}_{j2i}\right| = 2 \cdot \rho \cdot t \cdot c_2^2 \cdot \left.\frac{y^3}{3 \cdot h^2}\right|_0^h = \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot c_2^2 \cdot t \cdot h$$

18.06.2007

Einsetzten in den Impulssatz in x-Richtung liefert:

$$\left|\vec{F}_{j1}\right| + \left|\vec{F}_{D1}\right| + \left|\vec{F}_{H,x}\right| - \left|\vec{F}_{j2a}\right| - \left|\vec{F}_{D2}\right| - \left|\vec{F}_{j2i}\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho \cdot c_1^2 \cdot 2bt + p_1 \cdot 2bt + \left|\vec{F}_{H,x}\right| - \rho \cdot c_2^2 \cdot 2(b-h)t - p_2 \cdot 2bt - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot c_2^2 \cdot t \cdot h = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\vec{F}_{H,x}\right| = -\left[(p_1 - p_2) \cdot 2 \cdot b \cdot t + \rho \cdot c_1^2 \cdot 2 \cdot b \cdot t - \rho \cdot c_2^2 \cdot 2 \cdot t \cdot \left(b - \frac{2}{3} h\right)\right]$$

$$\left|\vec{F}_H\right| = \underbrace{\left|\vec{F}_{H,x}\right|}_{da\left|\vec{F}_{H,y}\right|=0} = -2 \cdot b \cdot t \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \frac{h}{b} \cdot \left[\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{b}}{\left(1 - \frac{h}{2 \cdot b}\right)^2}\right] < 0$$

$\vec{F}_{H,x}$ als Kraft des Körpers auf die Strömung (Haltekraft) wirkt somit entgegen der Strömungsrichtung. Gesucht ist aber die x-Komponente der von der Strömung auf den Körper ausgeübten Kraft, die so genannte Widerstandskraft $\vec{F}_W$, die zu $\vec{F}_{H,x}$ in folgender Beziehung steht:

$$\vec{F}_W = \begin{pmatrix} F_W \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{F}_{H,x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot b \cdot t \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \frac{h}{b} \cdot \left[\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{b}}{\left(1 - \frac{h}{2 \cdot b}\right)^2}\right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Widerstandskraft als x-Komponente der von der Strömung auf den Körper ausgeübten Kraft wirkt immer in Strömungsrichtung, siehe dazu auch Kapitel 3.3.13 „Widerstand und Druckverlust“ des Skripts zur Vorlesung „Strömungslehre“.

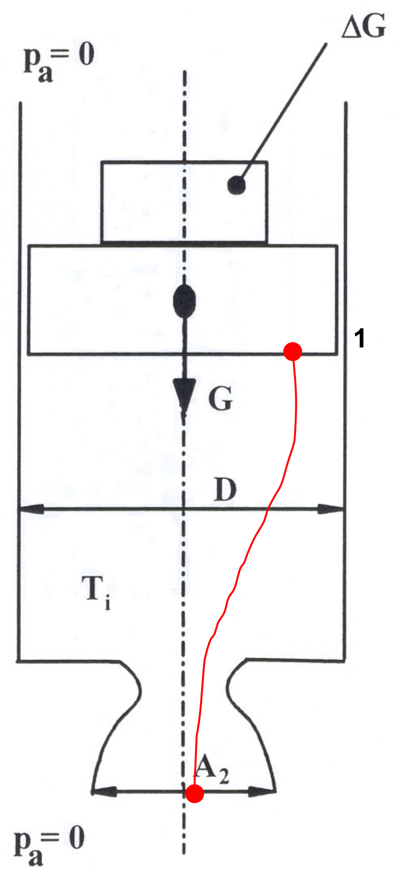
18.06.2007

Aufgabe 2

Gegeben: G, D, IR, κ, T_{i1}, $p_a = 0$

Gesucht: a) Ausströmgeschwindigkeit c_2 bei A_2 sowie Innendruck p_{i1}

b) Zusatzgewicht ΔG für isentrope Kompression auf den neuen Innendruck p_{i2} und die neue Austrittsgeschwindigkeit $c_2^* = 1{,}25 \cdot c_2$ bei A_2



Begriffe:

- ideales Gas → KOMPRESSIBEL = Änderung der Dichte bei Druckunterschieden → Gasdynamik ρ = ρ (p, T)
- stationäre Strömung
- Ausströmen ins Vakuum ($p_a = 0$)
- isentrope Zustandsänderungen
- es wirken keinerlei Reibungskräfte auf den Kolben
- Strömungsgeschwindigkeit im Inneren des Kreiszylinders $c_i \approx 0$
- der Schwerkrafteinfluss darf vernachlässigt werden, wenn nicht zu große Höhendifferenzen betrachtet werden

18.06.2007

a) Für den <u>Ausfluss eines kompressiblen Mediums aus einem Reservoir ohne Schwerkrafteinfluss bei isentropen Zustandsänderungen</u> gilt die **Ausflussformel nach Saint-Venant und Wantzell** (Skript zur Vorlesung „Strömungslehre“, Kapitel 3.1.3 „Stromfadentheorie in Einzelausführungen“, Gleichung 3.45):

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \mathbb{R} \cdot T_{i1} \cdot \left(1 - \underbrace{\cancel{\frac{p_2}{p_{i1}}}}_{da\ p_2 = p_a = 0}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}}$$

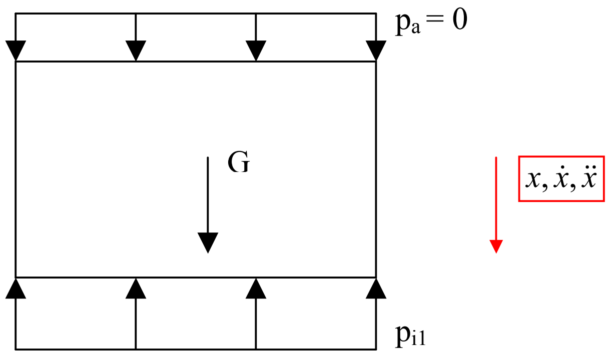
$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \mathbb{R} \cdot T_{i1}} \qquad (1.1)$$

<u>Wegen stationärer Strömung folgt aus dem Newtonschen Grundgesetz:</u>

$$\dot{x} = konst. \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} = 0 = G - p_{i1} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 + \underbrace{p_a \cdot \frac{\pi}{4} D^2}_{=0,\, da\ p_a = 0}$$

$$p_{i1} = \frac{G}{D^2} \cdot \frac{4}{\pi} \qquad (1.2)$$

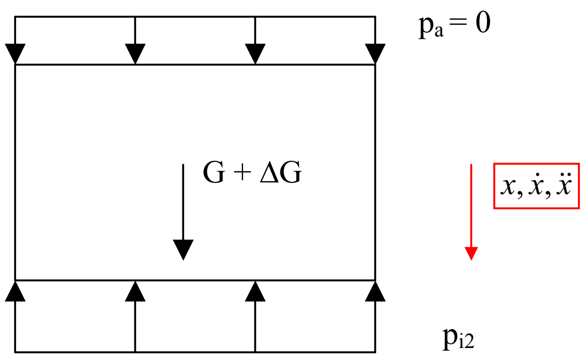


b) <u>Wegen stationärer Strömung folgt aus dem Newtonschen Grundgesetz:</u>

$$\dot{x} = konst. \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} = 0 = G + \Delta G - p_{i2} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 + \underbrace{p_a \cdot \frac{\pi}{4} D^2}_{=0,\, da\ p_a = 0}$$

$$\Delta G = p_{i2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - G \qquad (1.3)$$



Bestimmung von c_2^*:

$$c_2^* = 1{,}25 \cdot c_2 = 1{,}25 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \mathbb{R} \cdot T_{i1}} \qquad (1.4)$$

$$c_2^* = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \mathbb{R} \cdot T_{i2}} \qquad (1.5)$$

18.06.2007

Gleichsetzen von (1.4) und (1.5):

$$1,25 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \mathbb{R} \cdot T_{i1}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \mathbb{R} \cdot T_{i2}}$$

$$\Rightarrow \quad T_{i2} = (1,25)^2 \cdot T_{i1} \tag{1.6}$$

<u>isentrope Zustandsänderung:</u>

$$\frac{p_{i1}}{p_{i2}} = \left(\frac{\rho_{i1}}{\rho_{i2}}\right)^{\kappa} \tag{1.7}$$

<u>Zustandsgleichung für ideales Gas:</u>

$$\frac{p_{i1,2}}{\rho_{i1,2}} = \mathbb{R} \cdot T_{i1,2} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{i1,2} = \frac{p_{i1,2}}{\mathbb{R} \cdot T_{i1,2}} \tag{1.8}$$

mit (1.8) in (1.7)

$$\frac{p_{i1}}{p_{i2}} = \left(\frac{\dfrac{p_{i1}}{\mathbb{R} \cdot T_{i1}}}{\dfrac{p_{i2}}{\mathbb{R} \cdot T_{i2}}}\right)^{\kappa} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_{i1} \cdot p_{i2}{}^{\kappa}}{p_{i2} \cdot p_{i1}{}^{\kappa}} = \left(\frac{T_{i2}}{T_{i1}}\right)^{\kappa} \tag{1.9}$$

mit (1.6) in (1.9)

$$p_{i1}^{(1-\kappa)} \cdot p_{i2}^{(\kappa-1)} = 1,25^{(2\kappa)}$$

$$p_{i2}^{(K-1)} = \frac{1,25^{(2\kappa)}}{p_{i1}^{(1-\kappa)}} \quad \Leftrightarrow \quad p_{i2} = 1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} \cdot p_{i1} \tag{1.10}$$

mit (1.10) in (1.3)

$$\Delta G = 1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} \cdot p_{i1} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 - G \tag{1.11}$$

mit (1.2) in (1.11)

$$\Delta G = 1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} \cdot G \cdot \frac{\frac{\pi}{4} D^2}{\frac{\pi}{4} D^2} - G = G \cdot \left(1,25^{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right)} - 1\right) \tag{1.12}$$