02.07.2007

Lehrstuhl für Fluiddynamik und Strömungstechnik
Prof. Dr.-Ing. W. Frank

IFT

Lösungen zu dem Aufgabenblatt 9

Allgemeine Formel für den Druckverlust bei ausgebildeter Strömung für hydraulisch glatte Rohre:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \zeta_V$$

mit

$$\zeta_V = \frac{l}{D} \cdot \lambda$$

und

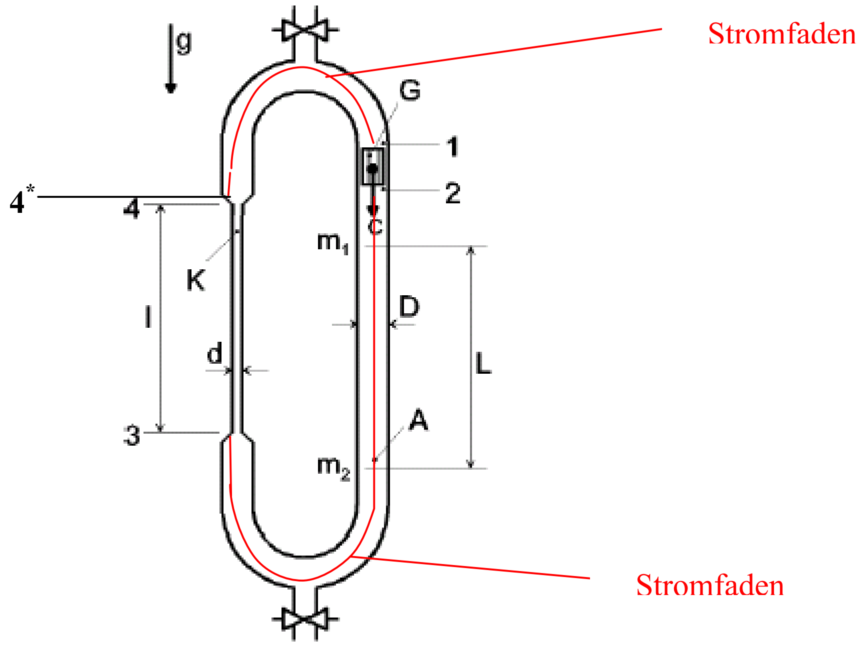
$$\lambda = \begin{cases} \lambda_{lam} = \dfrac{64}{\mathrm{Re}_D} & \mathrm{Re}_D < 2300 \\ \lambda_{turb} = \dfrac{0{,}3164}{\mathrm{Re}_D^{1/4}} & \textit{Blasius-Gesetz für } \mathrm{Re}_D > 2300 \end{cases}$$

02.07.2007

Aufgabe 1

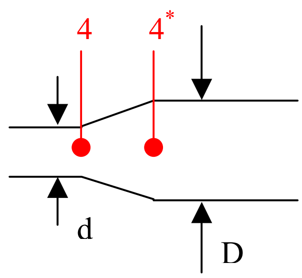
Gegeben: d, D, l, L, G, Δt, ρ

Gesucht: dynamische Zähigkeit $\mu = \rho \cdot \nu$ des untersuchten Gases



Annahmen:

- Sinkgeschwindigkeit c des Kolbens ist konstant → stationäre Strömung
- keine Reibung am Kolben
- Strömung in der Kapillare ist laminar, ohne Einlaufstrecke und voll ausgebildet über die Länge l
- kein Druckverlust von (4) → (4*)



- reibungsfreie Strömung im restlichen Rohr (Durchmesser D)
- konstante Dichte ρ (inkompressibel) und konstante Temperatur T des Gases
- Vernachlässigung des Einflusses der Erdschwere auf das Gas für geringe Höhendifferenzen

02.07.2007

Ansatz für die Druckdifferenzen (sog. Druckkette):

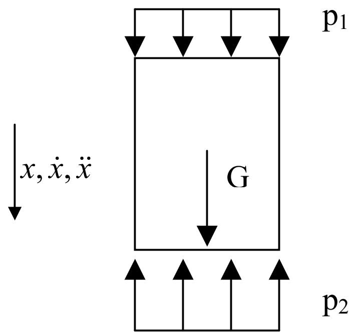
$$p_2 - p_1 = (p_2 - p_3) + (p_3 - p_4) + (p_4 - p_4^*) + (p_4^* - p_1)$$

Wegen konstanter Geschwindigkeit des Kolbens folgt aus dem Newtonschen Grundgesetz:

$$\dot{x} = c = \frac{L}{\Delta t} = konst. \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} = 0 = G + p_1 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 - p_2 \cdot \frac{\pi}{4} D^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p_2 - p_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{G}{D^2}$$



Bernoulli von 2 → 3:

$$p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 = p_3 + \frac{\rho}{2} \cdot c_3^2$$

$$\Rightarrow \quad p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} \cdot \left(c_3^2 - c_2^2\right)$$

aus der Konti Gleichung:

$$\cancel{\rho} \cdot c_3 \cdot A_3 = \cancel{\rho} \cdot c_2 \cdot A_2 \Leftrightarrow c_3 = c_2 \cdot \frac{A_2}{A_3} = c_2 \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

folgt

$$p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \cdot \left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)$$

Druckverlust von 3 → 4 für laminare, voll ausgebildete Rohrströmung:

$$\Delta p = (p_3 - p_4) = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{64}{\mathrm{Re}_d}$$

mit

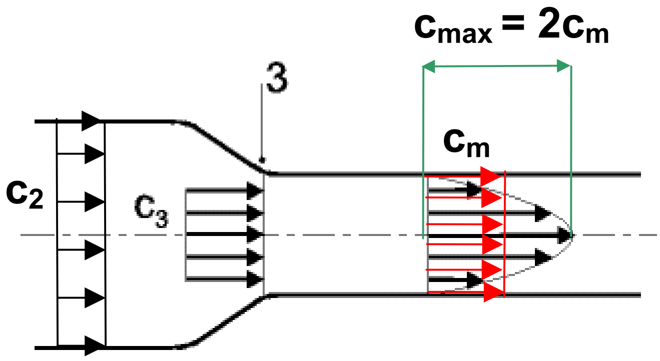
$$\mathrm{Re}_d = \frac{c_m \cdot d}{\nu}$$

folgt

$$p_3 - p_4 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m \cdot \frac{l}{d^2} \cdot 64 \cdot \nu$$

02.07.2007

Der volumetrische Mittelwert der Geschwindigkeit c_m entspricht c_3:



$$c_m = c_3 = c_2 \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

$$\Rightarrow \; p_3 - p_4 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2 \cdot \frac{l \cdot D^2}{d^4} \cdot 64 \cdot \nu$$

kein Druckverlust von 4 $\rightarrow$ 4*:

$$p_4^* - p_4 = 0$$

Bernoulli von 4^* $\rightarrow$ 1:

$$p_4^* + \frac{\rho}{2} c_4^{*2} = p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2$$

aus der Konti-Gl.:

$$\rho \cdot c_4^* \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} = \rho \cdot c_1 \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \; c_4^* = c_1$$

folgt

$$p_4^* - p_1 = 0$$

Einsetzen in die Druckkette:

$$p_2 - p_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{G}{D^2} = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \cdot \left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right) + \frac{\rho}{2} \cdot c_2 \cdot \frac{l \cdot D^2}{d^4} \cdot 64 \cdot \nu + 0 + 0$$

mit

$$\mu = \rho \cdot \nu \quad und \quad c_2 = c = \frac{L}{\Delta t}$$

folgt

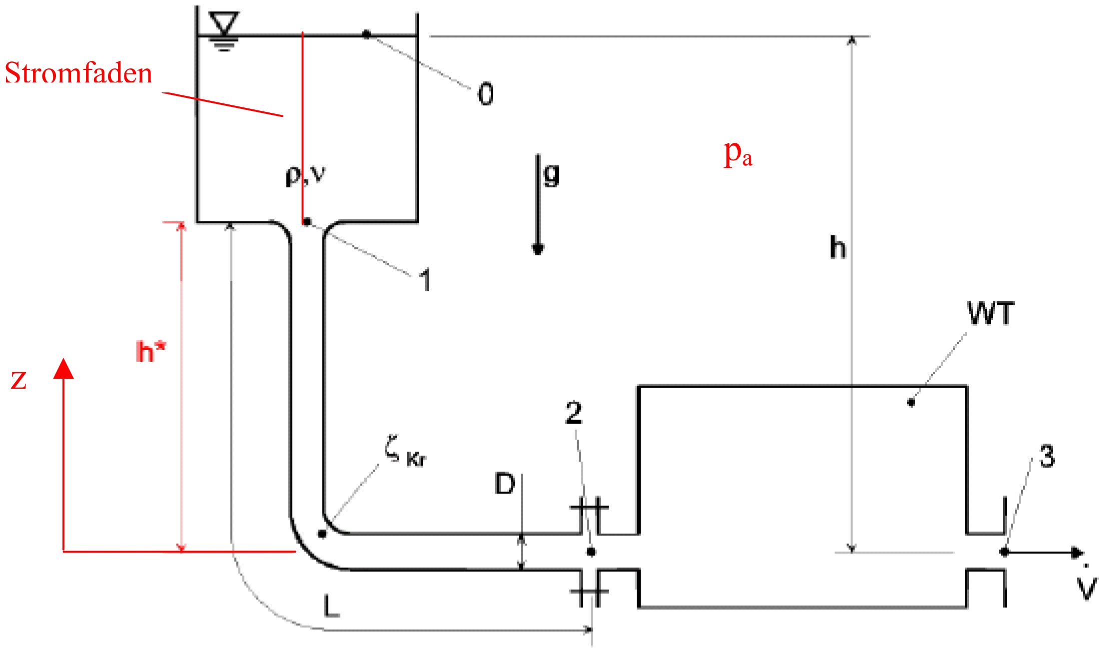
$$\mu = \frac{d^4 \cdot \Delta t}{D^2 \cdot 32 \cdot l \cdot L} \cdot \left\{ \frac{4 \cdot G}{\pi \cdot D^2} - \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{L}{\Delta t}\right)^2 \cdot \left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right) \right\}$$

02.07.2007

Aufgabe 2

Gegeben: h, L, ζ_{Kr}, g, D = 0,03 m, $\nu = 4 \cdot 10^{-6}\ m^2 \cdot s^{-1}$, $\dot{V} = 3 \cdot \pi \cdot 10^{-4}\ m^3 \cdot s^{-1}$

Gesucht: Druckverlustbeiwert $\zeta_{WT} = \dfrac{p_2 - p_3}{\frac{\rho}{2} c_D^2}$ des Wärmetauschers



Begriffe:

- großer Behälter, konstante Spiegelhöhe
- stationäre Strömung
- Newtonsches Medium
- Freistrahl bei 3
- reibungsfreie Strömung von 0 → 1
- im Rohr (Länge L) ist die Strömung ausgebildet
- inkompressible Strömung (Dichte ρ)

Druckkette von 0→ 3:

$$p_0 - p_3 = p_a - p_a = 0 = (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \underbrace{(p_2 - p_3)}_{gesucht!}$$

Bernoulli von 0 → 1:

$$p_0 + \underbrace{\frac{\rho}{2} \cdot c_0^2}_{=0} + \rho \cdot g \cdot h = p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + \rho \cdot g \cdot h^*$$

mit

$$c_1 = c_m = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^2} = c_D$$

folgt

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 + \rho \cdot g \cdot \left(h^* - h\right)$$

Druckverlust von 1 nach 2 (ausgebildete Rohrströmung und Rohrkrümmer):

$$\left(p_1 - p_2\right) = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left[\zeta_{Kr} + \frac{L}{D} \cdot \lambda\right] - \rho \cdot g \cdot h^*$$

Überprüfung, ob laminare oder turbulente Strömung vorliegt:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{c_m \cdot D}{\nu} = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D \cdot \nu} = 1 \cdot 10^4 > 2300 \Rightarrow \text{turbulent}$$

aus dem Blasius-Gesetz

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\mathrm{Re}_D^{1/4}} = 0{,}03164$$

folgt

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} c_m^2 \cdot \left(\zeta_{Kr} + \frac{L}{D} \cdot 0{,}03164\right) - \rho \cdot g \cdot h^*$$

Druckverlust von 2 nach3:

$$\Delta p = p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \zeta_{WT}$$

Einsetzen in Druckkette:

$$0 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 + \rho \cdot g \cdot \left(\cancel{h^*} - h\right) + \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left[\zeta_{Kr} + 0{,}03164 \cdot \frac{L}{D}\right] - \rho \cdot g \cdot \cancel{h^*} + \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \zeta_{WT}$$

$$\Leftrightarrow \zeta_{WT} = \frac{2 \cdot g \cdot h}{c_m^2} - \left[1 + \zeta_{Kr} + 0{,}03164 \cdot \frac{L}{D}\right]$$

mit

$$c_m = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^2}$$

folgt

$$\zeta_{WT} = \frac{1}{8} \frac{g \cdot h \cdot \pi^2 \cdot D^4}{\dot{V}^2} - \left(1 + \zeta_{Kr} + 0{,}03164 \cdot \frac{L}{D}\right)$$

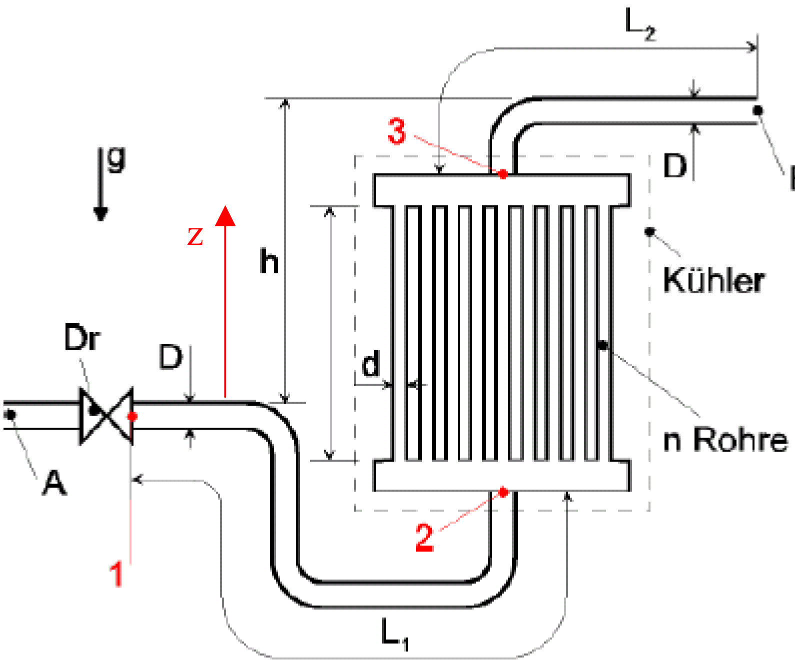
02.07.2007

Aufgabe 3

Gegeben: $L_1,\ L_2,\ l,\ \rho,\ \zeta_{Kr},\ h,\ g,\ \zeta_{Dr},$

$D = 0{,}1\,m,\quad n = 60,\quad d = 1\,cm,\quad \dot{V} = 4{,}71\cdot 10^{-3}\,\frac{m^3}{s},\quad \nu = 1\cdot 10^{-5}\,\frac{m^2}{s}$

Gesucht: Druckdifferenz $\Delta p_{AB} = p_A - p_B$



Begriffe:

- stationäre Strömung (konstanter Volumenstrom)
- inkompressible Strömung (Dichte ρ)
- Newtonsches Medium
- alle Rohre hydraulisch glatt
- Druckverluste im Kühler nur durch Rohrreibung in den *n* Rohren
- in allen Rohren ist die Strömung ausgebildet

Druckkette von A nach B:

$$\Delta p_{AB} = p_A - p_B = (p_A - p_1) + (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) + (p_3 - p_B) + \rho\cdot g\cdot h$$

Druckverlust von A nach 1:

$$p_A - p_1 = \frac{\rho}{2}\cdot c_m^2\cdot \zeta_{Dr}$$

Druckverlust von 1 nach 2:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\cdot c_m^2\cdot\left(3\cdot\zeta_{Kr} + \frac{L_1}{D}\cdot\lambda\right)$$

02.07.2007

Überprüfung, ob laminare oder turbulente Strömung vorliegt:

$$Re_D = \frac{c_m \cdot D}{\nu} = \frac{\dot{V} \cdot D}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \nu} = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D \cdot \nu} \approx 6 \cdot 10^3 > 2300 \Rightarrow turbulente\ Rohrströmung$$

Blasius-Gesetz:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\mathrm{Re}_D^{1/4}} = 0,036$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left(3 \cdot \zeta_{Kr} + \frac{L_1}{D} \cdot 0,036 \right)$$

Druckverlust im Kühler durch die n Rohre:

$$p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} \cdot c_d^2 \cdot \frac{l}{d} \cdot \lambda$$

Überprüfung, ob laminare oder turbulente Strömung vorliegt:

$$\mathrm{Re}_d = \frac{c_d \cdot d}{\nu} \quad ; \quad c_d = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2 \cdot n} = 1,0 \frac{m}{s}$$

$\Rightarrow \mathrm{Re}_d = 1 \cdot 10^3 < 2300 \quad \Rightarrow$ *laminare Rohrströmung*

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{\mathrm{Re}_d} = 0,064$$

$$p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} \cdot c_d^2 \cdot \frac{l}{d} \cdot 0,064$$

Druckverlust von 3 nach B für ausgebildete, turbulente Rohrströmung:

$$p_3 - p_B = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left[\zeta_{Kr} + \frac{L_2}{D} \cdot 0,036 \right]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_{AB} = p_A - p_B = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \left[4 \cdot \zeta_{Kr} + \zeta_{Dr} + \frac{L_1 + L_2}{D} \cdot 0,036 \right] + \frac{\rho}{2} \cdot c_d^2 \cdot \frac{l}{d} \cdot 0,064 + \rho \cdot g \cdot h$$

mit

$$c_m = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^2} \text{ und } c_d = \frac{4 \cdot \dot{V}}{n \cdot \pi \cdot d^2}$$

folgt

$$\Delta p_{AB} = p_A - p_B = \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^2} \right)^2 \cdot \left[4 \cdot \zeta_{Kr} + \zeta_{Dr} + \frac{L_1 + L_2}{D} \cdot 0,036 \right] + \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2 \cdot n} \right)^2 \cdot \frac{l}{d} \cdot 0,064 + \rho \cdot g \cdot h$$