

KLAUSUR STRÖMUNGSLEHRE

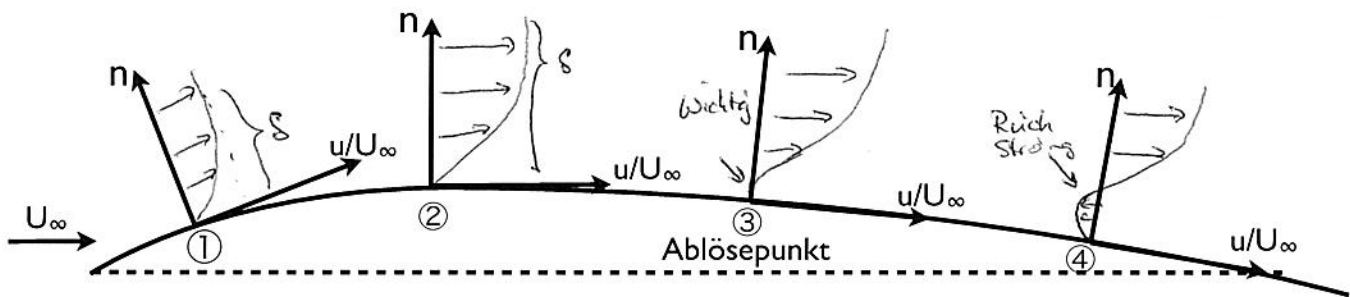
Fragenteil

Bitte direkt auf die Angabe schreiben!

1) Wie lautet die allgemeine Definition einer Stromlinie? (1P)

- Integralkurven des momentanen Geschw. feldes
 oder $dx/ds = u(x(s), t)$, oder Linien zu denen der Geschw. vektor parallel ist.

2) Skizzieren Sie an den Positionen 1-4 das Geschwindigkeitsprofil jeweils in einem lokalen Koordinatensystem (4P).



Wie groß ist die Wandschubspannung am Ablösepunkt 3 und welches Vorzeichen besitzt Sie

am Punkt 4? (1P) $\tau_{\text{Ablöse}} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{\text{wand}} = 0$

(4) negatives Vorzeichen

3) Wie hoch maximal kann man mit einem Strohhalm aus einem Gefäß Wasser saugen? Schätzen Sie ab (Rechnung! 3P).

$p_0 = \rho g z + p_v$ $p_v \approx 0$ für maximale Höhe $z \approx 10 \text{ m}$
 $p_0 \approx 10^5 \text{ Pa}$
 $\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$
 $g \approx 10 \text{ m/s}^2$

$p_0 - p_v = \rho g z \Rightarrow z = \frac{p_0 - p_v}{\rho g}$

4) Das Kolmogorovsche Längenmass (Einheit m) ist definiert als: $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$. ν ist die kinematische Viskosität und ϵ die Dissipationsrate. Leiten Sie diesen Zusammenhang kurz mittels des Buckingham PI-Theorems her (4P).

$$[\epsilon] = \text{m}^2/\text{s}^3 \quad [\nu] = \text{m}^2/\text{s} \quad [\eta] = \text{m}$$

	η	ν	ϵ
L	1	2	2
z	0	-1	-3

$$\Pi = \frac{\eta}{\nu^{\alpha_1} \epsilon^{\alpha_2}}$$

$$\Pi = \frac{\eta}{\nu^{+3/4} \epsilon^{-1/4}} = \frac{\eta}{(\nu^{+3-1} \epsilon)^{1/4}}$$

$$\Rightarrow \eta \propto \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

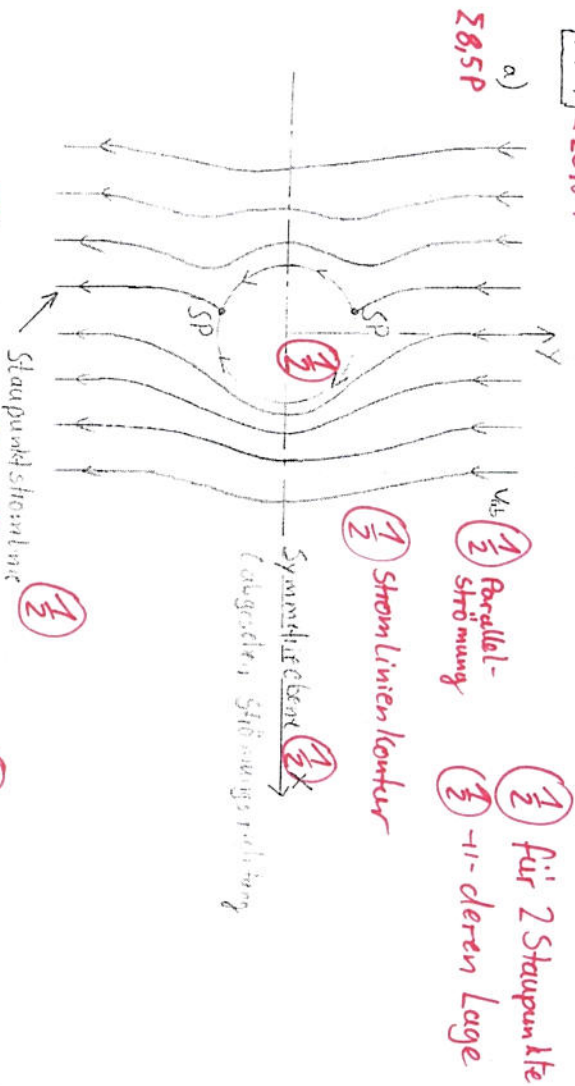
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ -\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha_2 + \alpha_2 = 1/2 \\ \Rightarrow \alpha_2 = -1/4 \\ \Rightarrow \alpha_1 = -3\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = +3/4 \end{cases}$$

Musterlösung Klausur Strömungslehre

SoSe 2012 1. Termin 20.07.2012

A1 **Σ28,5 P**



$$F(z) = \dots \left(\frac{1}{2} \right) \cdot V_{\infty} \cdot z \left(\frac{1}{2} \right) + i \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{2} \right) + (-i) \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z) \left(\frac{1}{2} \right)$$

$\Gamma < 0$: da Drehung im Uhrzeigersinn nötig (auf Potential-wirbel bezogen) (1)

b) $\psi = \text{Im}(F(z))$

$$F(z) = i V_{\infty} (x+iy) + i \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x+iy} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(r+i\varphi) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$= V_{\infty} (ix-y) + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{ix+y}{x^2+y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} (i \ln r - \varphi) \left(\frac{1}{2} \right)$$

~~Wiederholung~~

$$\psi = V_{\infty} x + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \left(\frac{1}{2} \right)$$

Kartesische Koordinaten:

$$r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \psi = V_{\infty} x + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(x^2+y^2) \left(\frac{1}{2} \right)$$

polare Koordinaten: mit $x = r \cdot \cos \varphi$ $x^2+y^2 = r^2$ (1/2)

$$\psi = V_{\infty} r \cdot \cos \varphi + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \left(\frac{1}{2} \right)$$

Geschwindigkeitskomponenten:

$$w_{\varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\left(V_{\infty} \cos \varphi + \frac{M}{2\pi} \cos \varphi \frac{1}{r^2} (-1) - \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$w_{\varphi} = -V_{\infty} \cos \varphi + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \left(-V_{\infty} r \cdot \sin \varphi - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} - 0 \right)$$

$$= -V_{\infty} \sin \varphi - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2} \left(\frac{1}{2} \right)$$

c) auf Heckauslegerfläche ist $w_r = 0$ (1)

$$\Rightarrow 0 = -V_{\infty} \sin \varphi - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2} \quad | \cdot (-\sin \varphi)^{-1} \quad r = \frac{D}{2} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$0 = +V_{\infty} + \frac{M}{2\pi} \cdot \left(\frac{2}{D} \right)^2 = V_{\infty} + \frac{2M}{\pi D^2} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$M = -V_{\infty} \cdot \frac{\pi}{2} D^2 \left(\frac{1}{2} \right)$$

d) - die Druckverteilung auf der Oberfläche des Heckauslegers bestimmt die resultierende Kraft

- die Druckverteilung ist symmetrisch zur x-Achse
 $\Rightarrow$ keine Luftkraft in y-Richtung $F_{y\text{Luft}} = 0$

- resultierende Kraft in positiver x-Richtung
 Momentengleichgewicht: $N = F \cdot L \Rightarrow F = \frac{N}{L}$

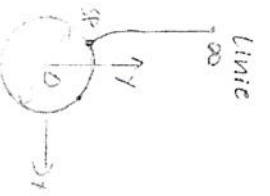
- für eine ebene, reibungsfreie Strömung lautet die Auftriebskraft an einem geschlossenen Körper gemäß der Kutta-Zukhovski-Formel: $F_{\text{Auftrieb}} = \rho u_{\infty} \Gamma$

- beim Hubschrauber wirkt die Auftriebskraft (bzw. die resultierende Kraft) entlang der Strecke b des Heckauslegers

$$F = F_{\text{Auftrieb}} \cdot b = \rho u_{\infty} \cdot \Gamma \cdot b$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{F}{\rho u_{\infty} \cdot b} = \frac{N}{L \cdot \rho u_{\infty} \cdot b}$$

e) Bernoulli-Gl. von ∞ auf Körperkontur entlang Stauströmlinie



$$p_{\infty} + \frac{\rho}{2} u_{\infty}^2 = p + \frac{\rho}{2} u^2$$

$$u_{\text{kontur}}^2 = u_r^2 + u_\theta^2 ; u_r = 0$$

$$\Rightarrow p_{\infty} + \frac{\rho}{2} u_{\infty}^2 = p + \frac{\rho}{2} u_\theta^2 = \text{konst.}$$

$\Rightarrow p$ ist minimal, wo $u_\theta^2 = \text{max}$ ist!

$$w_p^2 = \left(-u_{\infty} \cos \beta + \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \beta}{r^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \right)^2$$

mit $r = \frac{D}{2}$ und $r^2 = -\frac{D}{2} \frac{D}{2}$

$$w_p^2 = \left(-u_{\infty} \cos \beta + \frac{-u_{\infty} \frac{D}{2}}{2\pi} \cdot \frac{\cos \beta}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2}{D} \right)^2$$

$$w_p^2 = \left(-2 u_{\infty} \cos \beta + \frac{\Gamma}{\pi D} \right)^2$$

$\Gamma < 0$ (siehe Teil a) $\Rightarrow -2 u_{\infty} \cos \beta + \frac{\Gamma}{\pi D} \Big|_{\text{max}} = \text{maximal}$,

wenn $\cos \beta = 1 \Rightarrow \beta = 0$

$\Rightarrow$ Der Ort maximaler Geschwindigkeit (minimalen Drucks) ist bei $r = \frac{D}{2}$ und $\beta = 0$.

$$w_{p\text{max}} = w_p (\beta=0) = -2 u_{\infty} \cdot 1 + \frac{\Gamma}{\pi D} = -2 u_{\infty} + \frac{\Gamma}{\pi D}$$

$$p_{\text{max}} = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} u_{\infty}^2 - \frac{\rho}{2} w_{p\text{max}}^2$$

$$p_{\text{max}} = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} \left(u_{\infty}^2 - \left(-2 u_{\infty} + \frac{\Gamma}{\pi D} \right)^2 \right)$$

A2 $\Sigma 26,5 P$

a) Bernoulli: $p_0 = p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2$

Kont.: $Q_2 = u_2 \cdot A_2 \Rightarrow u_2 = \frac{Q_2}{A_2}$

$$\Rightarrow p_2 = p_0 - \frac{\rho}{2} u_2^2 = p_0 - \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q_2}{A_2} \right)^2$$

(Zahlenwerte (nicht gefragt): $u_2 = \frac{4 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{0,2 \text{ m}^2} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$)

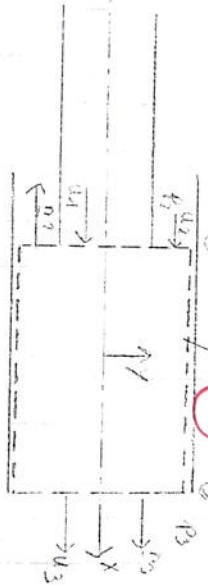
$$p_2 = 100.000 \text{ Pa} - \frac{1,25 \text{ kg}}{2} \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 99.750 \text{ Pa}$$

b)

für Schnitt
an Stelle 2

für KV in
Strömung

für Schnitt
an Stelle 3



Kräftegleichgewicht in x-Richtung

- Kontrollvolumen in Strömung: $\Rightarrow$ keine Halbkraft: $F_H = 0$

$$\rho u_3^2 A_3 - \rho u_2^2 A_2 - \rho u_1^2 A_1 = p_2 \cdot (A_1 + A_2) - p_0 A_3$$

Kontl.-Gl.: $u_3 A_3 = u_1 A_1 + u_2 A_2 \Rightarrow u_3 = \frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{A_3}$

~~Strömung~~

$$\rho \frac{(u_1 A_1 + u_2 A_2)^2}{A_3} - \rho u_2^2 A_2 - \rho u_1^2 A_1 = (p_2 - p_0) A_3 \quad | \cdot \frac{A_3}{\rho}$$

$$(u_1 A_1 + u_2 A_2)^2 - u_2^2 A_2 A_3 - u_1^2 A_1 A_3 = \frac{(p_2 - p_0)}{\rho} A_3^2$$

$$u_1^2 A_1^2 + 2 u_1 u_2 A_1 A_2 + u_2^2 A_2^2 - u_2^2 A_2 A_3 - u_1^2 A_1 A_3 = \frac{p_2 - p_0}{\rho} A_3^2$$

$$u_1^2 (A_1^2 - A_1 A_3) + 2 u_1 u_2 A_1 A_2 + u_2^2 (A_2^2 - A_2 A_3) = \frac{p_2 - p_0}{\rho} A_3^2$$

$$u_1^2 + 2 u_1 u_2 \frac{A_1 A_2}{(A_1^2 - A_1 A_3)} + u_2^2 \frac{(A_2^2 - A_2 A_3)}{(A_1^2 - A_1 A_3)} = \frac{p_2 - p_0}{\rho} \cdot \frac{A_3^2}{(A_1^2 - A_1 A_3)}$$

$$u_1^2 + 2 u_1 u_2 \frac{A_2}{A_1 - A_3} + u_2^2 \frac{(A_2^2 - A_2 A_3)}{(A_1^2 - A_1 A_3)} = \frac{p_2 - p_0}{\rho} \cdot \frac{A_3^2}{(A_1^2 - A_1 A_3)}$$

umformung in vielen möglichen Wegen
durchführbar

quadratische Ergänzung:

$$u_1^2 + 2 u_1 u_2 \frac{A_2}{A_1 - A_3} + \frac{u_2^2 A_2^2}{(A_1 - A_3)^2} - \frac{u_2^2 A_2^2}{(A_1 - A_3)^2} + \frac{(A_2^2 - A_2 A_3)}{(A_1 - A_3)^2} \cdot u_2^2$$

$$= \frac{p_2 - p_0}{\rho} \cdot \frac{A_3^2}{(A_1^2 - A_1 A_3)}$$

$$\left(u_1 + u_2 \frac{A_2}{A_1 - A_3} \right)^2 = \frac{p_2 - p_0}{\rho} \cdot \frac{A_3^2}{(A_1^2 - A_1 A_3)} + u_2^2 \frac{A_2^2}{(A_1 - A_3)^2} - u_2^2 \frac{(A_2^2 - A_2 A_3)}{(A_1^2 - A_1 A_3)}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{p_2 - p_0}{\rho} \cdot \frac{A_3^2}{(A_1^2 - A_1 A_3)} + u_2^2 \frac{A_2^2}{(A_1 - A_3)^2} - u_2^2 \frac{(A_2^2 - A_2 A_3)}{(A_1^2 - A_1 A_3)} - u_2 \frac{A_2}{A_1 - A_3}}$$

mit $A_3 = A_1 + A_2$

$$u_1 = \sqrt{\frac{p_2 - p_0}{\rho} \cdot \frac{(A_1 + A_2)^2}{(-A_1 A_2)} + u_2^2 \frac{A_2^2}{(A_1 - A_1 A_2)^2} - u_2^2 \frac{(-A_1 A_2)}{(-A_1 A_2)} - u_2 \frac{A_2}{-A_2}}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{p_0 - p_2}{\rho} \cdot \frac{(A_1 + A_2)^2}{A_1 A_2}} + u_2$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{p_0 - p_2}{\rho} \cdot \frac{(A_1 + A_2)^2}{A_1 A_2}} + u_2 = u_2 \left(1 + \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{2 A_1 A_2}} \right)$$

$$u_1 = 20 \frac{m}{s} \left(1 + \frac{0.03 m^2}{\sqrt{2 \cdot 0.02 m^2}} \right) = 20 \frac{m}{s} (1 + 1.5) = 50 \frac{m}{s}$$

aus Kontl.-Gl. (siehe oben): $u_3 = \frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{A_3}$

$$u_3 = \frac{50 \frac{m}{s} \cdot 0.1 m^2 + 20 \frac{m}{s} \cdot 0.02 m^2}{0.1 + 0.02 m^2} = 30 \frac{m}{s}$$

(1) nur
Ergebnis
schon oben

c) Gebäldeleistung: $P = \Delta p_{\text{Gebälde}} Q_1$ (1)

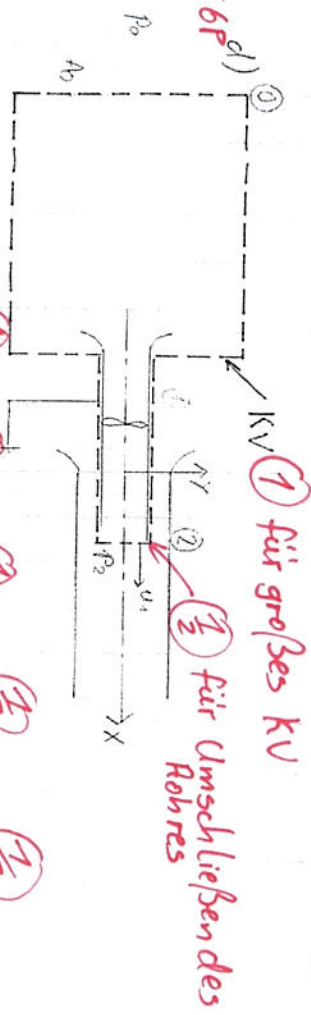
über Bernoulli-Gl. von weit vor Gebälde bis nach (2)

$p_0 = \frac{\rho}{2} u_1^2 + p_2 - \Delta p_{\text{Gebälde}}$

$\Delta p_{\text{Gebälde}} = p_0 - p_2 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = \frac{\rho}{2} (u_2^2 + u_1^2)$ (1/2 für Einsetzen der Druckdifferenz)

$\Rightarrow P = \frac{\rho}{2} (u_2^2 + u_1^2) \cdot Q_1 = \frac{\rho}{2} (u_2^2 + u_1^2) \cdot u_1 \cdot A_1$ (1/2)

$P = \frac{1125}{2} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ((20 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + (50 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2) \cdot 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,1 \text{ m}^2 = 3062,5 \text{ W}$ (1/2)



Impulsatz: $\rho u_1 A_1 - \rho u_0 A_0 = F_H + p_0 A_0 - p_2 A_1 - (A_0 - A_1) p_0$ (1/2)

KV wird so groß gewählt, dass keine Beeinflussung durch die Spaltströmung auftritt und dass die Luft nur durch die Fläche A_0 eintritt

$u_0 \ll u_1 \Rightarrow u_0 \approx 0$

$\Rightarrow \rho u_1^2 A_1^2 F_H + A_1 (p_0 - p_2) = F_H + A_1 \frac{\rho}{2} u_2^2$ (1/2)

$F_H = \rho \cdot A_1 (u_1^2 - \frac{u_2^2}{2}) = 1,25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,1 \text{ m}^2 ((50 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - (20 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2)$ (1/2)

$F_H = 300 \text{ N}$

(1) Ergebnis

A3 2177P 28,5P

Fall 1: $\frac{p_0}{p} = (1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ (1)

aus Ma-Tabelle für $Ma_1 = 2$ gilt: $\frac{p_0}{p} = 0,1278$

$\Rightarrow p_2 = p_0 \cdot 0,1278 = 12.780 \text{ Pa}$

$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left[\frac{1 + \frac{\gamma}{2} (\gamma-1) Ma^2}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$ (2)

aus Ma-Tabelle für $Ma_1 = 2$ gilt: $\frac{A_2}{A_1^*} = 1,688$ (1/2)

Fall 2: $p_{a2} = \frac{p_{a1}}{4} \Rightarrow \frac{p_{a2}}{p_0} = \frac{p_{a1}}{4 p_0} = \frac{0,1278}{4} = 0,03195$ (1/2)

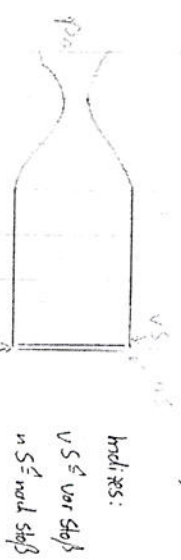
mit obiger Formelbau. Ma-Tabelle $Ma_2 = 2,89$ (1)

$\frac{A_2}{A_2^*} = 3,813$ (1)

Flächenverhältnis:

$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{A_0}{A_1^*} \cdot \frac{A_2^*}{A_0} = 1,688 \cdot \frac{1}{3,813} = 0,4427$ (1)

b) $\frac{A_2}{A_1} = 2,5$ 25,5P



Ma_{a2} wird berechnet über Gl. (2) bzw. Tabelle für $\frac{A}{A^*} = 2,5$

$\Rightarrow Ma_{a2} = 2,44$

Druck vor Stoß mit Gl. (1) bzw.

für $Ma_{a2} = 2,44$ aus Ma-Tabelle $\frac{p_{a2}}{p_{a1}} = 0,06426$

Druckänderung über Stoß mit Gleichung

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (Ma_1^2 - 1) \quad (3)$$

aus γ -Tabelle für $Ma_{0.5} = 2,44$ $\frac{P_{0.5}}{P_{0.5}} = 6,7799$

$$P_{0.5} = \frac{P_{0.5}}{P_{0.5}} \cdot P_{0.5} = 6,7799 \cdot 0,06426 \cdot 100.000 \text{ Pa}$$
$$P_{0.5} = 43.562 \text{ Pa}$$

c) Soll eine Düse angepasst sein, d.h. dass keine Stöße auftreten, so ist einer gewünschten Ma -Zahl am Austritt ein exaktes Flächenverhältnis $\frac{A_E}{A^*}$ zugeordnet.

Folglich ist die gewünschte Konfiguration, unabhängig vom herrschenden Außendruck p_a ~~oder der~~ bzw. dem Druckverhältnis p_a/p_0 , nicht möglich!

① für Erkenntnis der Unmöglichkeit dieser Konfiguration

② für Begründung