

KLAUSUR STRÖMUNGSLEHRE

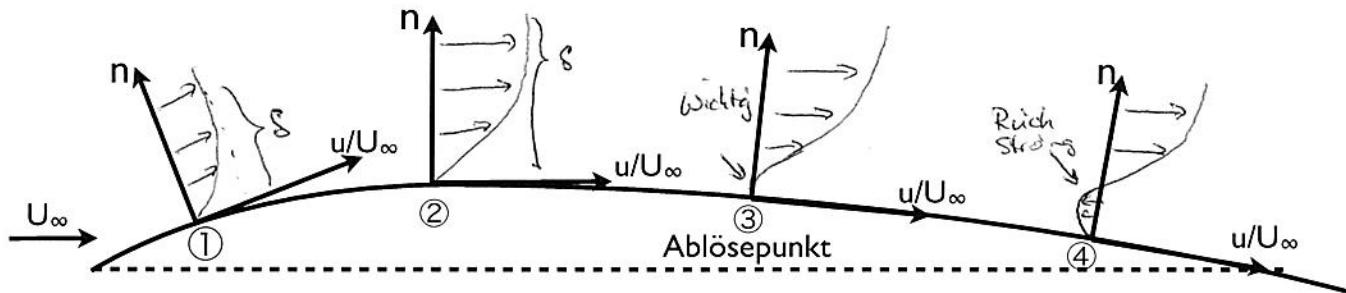
Fragenteil

Bitte direkt auf die Angabe schreiben!

- 1) Wie lautet die allgemeine Definition einer Stromlinie? (1P)

- Integralkurven des momentanen Geschwindigkeitsfeldes oder $\frac{dx}{ds} = u(x(s), t)$, oder Linien zu denen der Geschwindigkeitsvektor parallel ist.

- 2) Skizzieren Sie an den Positionen 1-4 das Geschwindigkeitsprofil jeweils in einem lokalen Koordinatensystem (4P).



Wie groß ist die Wandschubspannung am Ablösepunkt 3 und welches Vorzeichen besitzt sie am Punkt 4? (1P)

$$\tau_{Ablösung} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} |_{Wand} = 0$$

(4) negatives Vorzeichen

- 3) Wie hoch maximal kann man mit einem Strohhalm aus einem Gefäß Wasser saugen? Schätzen Sie ab (Rechnung! 3P).

$$\text{Diagramm eines Gefäßes mit Höhe } z_0 \text{ und Wasserspiegelhöhe } z. \quad p_0 = \rho g z + p_v \quad p_v \approx 0 \text{ für manuelle Höhe} \quad z \approx 10 \text{ m}$$

$$p_0 = \rho g z_0 \Leftrightarrow z = \frac{p_0 - p_v}{\rho g} \quad p_0 \approx 10^5 \text{ Pa} \quad z \approx 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

- 4) Das Kolmogorovsche Längenmaß (Einheit m) ist definiert als: $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$. ν ist die kinematische Viskosität und ϵ die Dissipationsrate. Leiten Sie diesen Zusammenhang kurz mittels des Buckingham PI-Theorems her (4P).

$$[\epsilon] = \text{m}^2/\text{s}^3 \quad [\nu] = \text{m}^2/\text{s} \quad [\eta] = \text{m}$$

$$\begin{array}{c|ccc} L & \eta & \nu & \epsilon \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ Z & 0 & -1 & -3 \end{array} \quad \Pi = \frac{\eta}{\nu^{3/4} \epsilon^{1/4}}$$

$$\Pi = \frac{\eta}{\nu^{3/4} \epsilon^{1/4}} = \frac{\eta}{(\nu \cdot \epsilon)^{1/4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta \propto \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}}$$

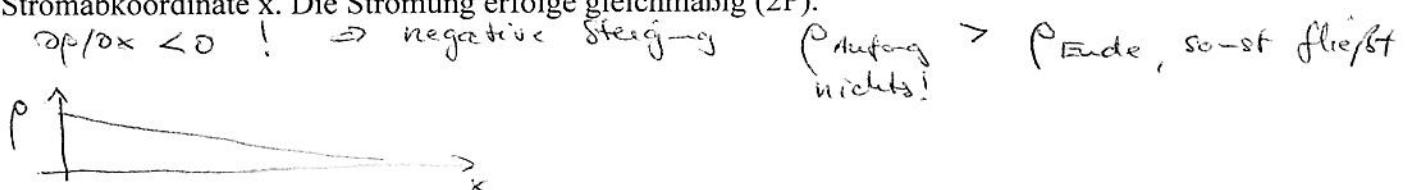
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 1 \\ -\alpha_1 - 3\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} -3\alpha_2 + \alpha_2 &= 1/2 \\ \Rightarrow \alpha_2 &= -1/4 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \alpha_1 = +3/4$$

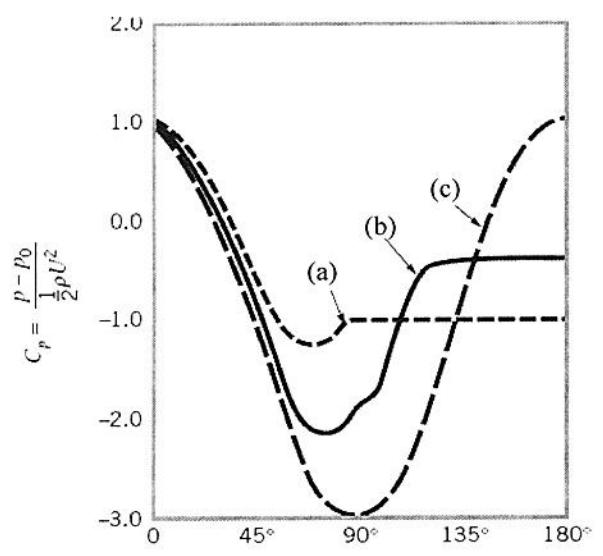
5) Wie verhält sich der Druck in wandnormaler Richtung in einer laminaren Grenzschicht? (1P)

Konstant in y -Richtung

6) Skizzieren Sie den Druckverlauf in der Mitte eines Rohres der Länge L als Funktion der Stromabkoordinate x . Die Strömung erfolge gleichmäßig (2P).



7) Folgendes Diagramm zeigt den Druckbeiwert einer Zylinderumströmung entlang der Oberfläche für eine reibungsbehaftete turbulente, eine laminare, sowie eine reibungsfreie Umströmung. Welche der Kurven gehört zu welcher Umströmung? Erklären Sie **stichpunktartig** den beobachteten Unterschied. (9P)



(a) laminar: Energie nahe Wand reicht nicht aus umstiegende Druck zu überwinden \Rightarrow Ablösung \Rightarrow niedrigerer Druck am hinteren Ende \Rightarrow großer Widerstand

(b) turbulent: auch hier erfolgt Ablösung, allerdings hat wandnahe Schicht mehr Energie zur Verfügung \Rightarrow Ablösung erfolgt später, Strömung kann längeres gegen θ anlaufen, kleineres Ablösgebiet \Rightarrow höherer Druck auf Rückseite \Rightarrow geringerer Widerstand

(c) reibungsfrei: symmetrisch, da keine Reibung

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

d'Alembertisches Paradoxon: kein Widerstand

8) Wie lautet die dimensionslose Form der idealen Gasgleichung? Referenzgrößen sind $p_\infty, u_\infty, T_\infty, R$ ist konstant. (3P)

$$\hat{p} = \frac{RT}{\gamma}$$

Referenzgr.: $S_\infty, u_\infty, T_\infty$, für Druck: $S u_\infty^2$

$$\Rightarrow \hat{p} (S u_\infty^2) = S_\infty T_\infty R S T$$

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{T_\infty R}{u_\infty^2} S T \Rightarrow \hat{p} = \frac{S}{\gamma} \frac{T_\infty R}{u_\infty^2} S T = \frac{C_0}{\gamma u_\infty^2} S T$$

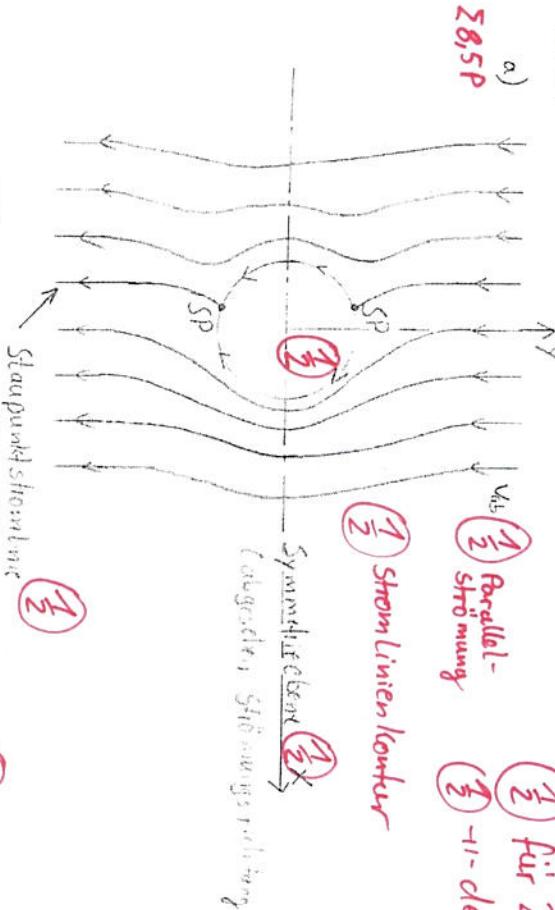
Total 28 Punkte

$$\Rightarrow \boxed{\hat{p} = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} S T}$$

Musterlösung Klausur Strömungslehre

SoSe 2012 1. Termin 20.07.2012

A 1 ≤ 28,5 P



$$F(z) = \frac{1}{2} V_{ab} \cdot \frac{1}{2} + i \cdot V_{ab} \cdot \frac{1}{2} + i \cdot \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z - \frac{iX}{2}} + (-i) \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z)$$

$\Gamma < 0$; da Drehung im Uhrzeigersinn nötig (auf Potentialwirbel bezogen)

b) $\psi = \Im(F(z))$

$$\begin{aligned} F(z) &= i \cdot V_{ab} \cdot (x + iy) + i \cdot \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iY}{x-iy} - \frac{i\Gamma}{2\pi} (\rho_m r + i\rho) \\ &= V_{ab} (ix - \gamma) + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{ix + Y}{x^2 + Y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} (i \rho_m r - \rho) \end{aligned}$$

~~Koeffizienten:~~

$$\psi = V_{ab} x + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + Y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r)$$

Kartesische Koordinaten:

$$\tau = (x^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \psi = V_{ab} x + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + Y^2} - \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(x^2 + Y^2)$$

$$\text{polare Koordinaten: mit } x = r \cdot \cos \varphi \quad x^2 + Y^2 = r^2$$

$$\psi = V_{ab} \cdot r \cdot \cos \varphi + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r)$$

Geschwindigkeitskomponenten:

$$w_\varphi = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = - (V_{ab} \cdot \cos \varphi + \frac{M}{2\pi} \cos \varphi \frac{1}{r^2} (-1) - \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{r})$$

$$w_r = - V_{ab} \cdot \cos \varphi + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \left(-V_{ab} \cdot r \cdot \sin \varphi - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} - 0 \right) \\ &= -V_{ab} \cdot \sin \varphi - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2} \end{aligned}$$

c) auf Heckauslegeroberfläche ist $w_r = 0$

$$\Rightarrow 0 = -V_{ab} \cdot \sin \varphi - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2} \quad | \cdot (-\sin \varphi)^{-1} \quad r = \frac{D}{2}$$

$$0 = +V_{ab} + \frac{M}{2\pi} \cdot \left(\frac{2}{D} \right)^2 = V_{ab} + \frac{2M}{\pi D^2}$$

d) - die Druckverteilung auf der Oberfläche des Heckauslegers bestimmt die resultierende Kraft

- die Druckverteilung ist symmetrisch zur x -Achse
- \Rightarrow keine Luftraft in y -Richtung $F_{Luft} = 0$

- resultierende Kraft in positiver x -Richtung

$$\text{Momentengleichgewicht: } N = F \cdot L \Rightarrow F = \frac{N}{L}$$

- für eine ebene, reibungsfreie Strömung lautet die Auftriebskraft an einem geschlossenen Körper gemäß der

Kutta-Zhukowski-Formel:
 $F_{Auftrieb} = S_{Aero} \cdot \Gamma$

- bei im Hubschrauber wirkt die Auftriebskraft (bzw. die resultierende Kraft) entlang der Strecke b des Heckauslegers

$$F = F_{Auftrieb} \cdot b = S_{Aero} \cdot \Gamma \cdot b$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{F}{S_{Aero} \cdot b} = \frac{N}{L \cdot S_{Aero} \cdot b}$$

e)

Bernoulli-Gl. von ∞ auf Körperkontur entlang Staudrucklinie

$$p_{\infty} + \frac{\rho}{2} v_{ab}^2 = p + \frac{\rho}{2} w_r^2$$

$$w_r^2 = w_r^2 + w_p^2; w_r = 0$$

$$\Rightarrow p_{\infty} + \frac{\rho}{2} v_{ab}^2 = p + \frac{\rho}{2} w_p^2 = \text{konst.}$$

$\Rightarrow p$ ist minimal, wo $w_p^2 = \max$ ist! ①

A2 26,5 P

23P

a) Bernoulli:

$$p_0 = p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2$$

Kontur:

$$Q_2 = u_2 \cdot A_2 \Rightarrow u_2 = \frac{Q_2}{A_2}$$

$$\Rightarrow p_2 = p_0 - \frac{\rho}{2} u_2^2 = p_0 - \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q_2}{A_2} \right)^2$$

(Zahlenwerte (nicht gefragt): $u_2 = \frac{4 \cdot 10^3}{0,2 \text{ m}^2} = 20 \text{ m/s}$

$$p_2 = 100.000 \text{ Pa} - \frac{1,25 \text{ kg}}{2 \text{ m}^3} (20 \text{ m/s})^2 = 99.450 \text{ Pa}$$

$$w_p^2 = (-v_{ab} \cos \varphi + \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r})^2$$

$$\text{mit } r = \frac{D_2}{2} \text{ und } M = -v_{ab} \frac{\pi}{2} \frac{D^2}{D^2}$$

$$w_p^2 = (-v_{ab} \cos \varphi + \frac{-v_{ab} \frac{\pi}{2} D^2}{2\pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{(\frac{D}{2})^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2}{D})^2$$

$\Gamma < 0$ (siehe Teil a)) $\Rightarrow | -2v_{ab} \cos \varphi + \frac{\Gamma}{\pi D} |$ ist maximal, wenn $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

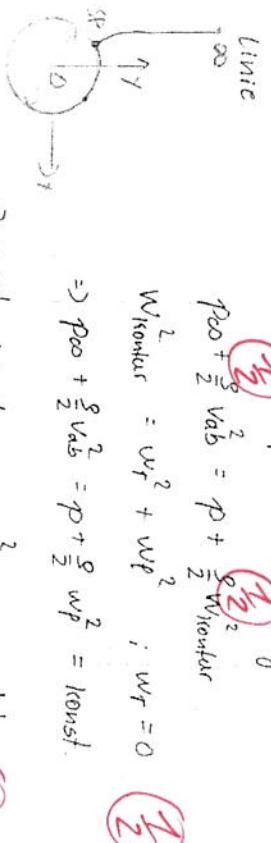
\Rightarrow Der Ort mit minder Geschwindigkeit / minimalem Drucks ist bei $r = D_2$ und $\varphi = 0$.

$$w_p \max = w_p (\varphi=0) = -2v_{ab} \cdot 1 + \frac{\Gamma}{\pi D} = -2v_{ab} + \frac{\Gamma}{\pi D}$$

$$p_{\max} = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} v_{ab}^2 - \frac{\rho}{2} w_{p,\max}^2$$

$$p_{\max} = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} (v_{ab}^2 - (-2v_{ab} + \frac{\Gamma}{\pi D})^2)$$

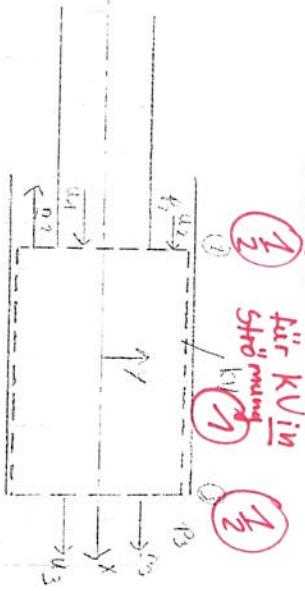
G



für Schnitt
an Stelle 2

für Schnitt
an Stelle 3

b)
Σ13P



Kräfte gleichgewichtet in x-Richtung

- Kontrollvolumen in Strömung: \Rightarrow keine Haltkraft; $F_x = 0$

$$g u_3^2 \frac{1}{2} - g u_2^2 \frac{1}{2} - g u_1^2 \frac{1}{2} = p_2 \cdot (A_1 + A_2) - p_0 A_3 \quad (1)$$

$$\text{Kondi. - Gl.: } u_3 A_3 = u_1 A_1 + u_2 A_2 \Rightarrow u_3 = \frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{A_3} \quad (1)$$

Stoffgesetz

$$g \left(\frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{A_3} \right)^2 - g u_2^2 A_2 - g u_1^2 A_1 = (p_2 - p_0) A_3 \quad 1 \cdot \frac{A_3^3}{g}$$

$$(u_1 A_1 + u_2 A_2)^2 - g u_2^2 A_2 A_3 - u_1^2 A_1 A_3 = \frac{(p_2 - p_0)}{g} A_3^2$$

$$u_1^2 A_1^2 + 2 u_1 u_2 A_1 A_2 + u_2^2 A_2^2 - u_2^2 A_2 A_3 - u_1^2 A_1 A_3 = \frac{p_2 - p_0}{g} A_3^2$$

$$u_1^2 (A_1^2 - A_1 A_3) + 2 u_1 u_2 A_1 A_2 + u_2^2 (A_2^2 - A_2 A_3) = \frac{p_2 - p_0}{g} A_3^2$$

$$u_1^2 + 2 u_1 u_2 \frac{A_1 A_2}{(A_1^2 - A_1 A_3)} + u_2^2 \frac{(A_2^2 - A_2 A_3)}{(A_1^2 - A_1 A_3)} = \frac{p_2 - p_0}{g} \cdot \frac{A_3^2}{(A_1^2 - A_1 A_3)}$$

quadratische Ergänzung:

$$u_1^2 + 2 u_1 \cdot u_2 \frac{A_1^2}{A_1 - A_3} + \frac{u_2^2 A_2^2}{(A_1 - A_3)^2} - \frac{u_2^2 A_2^2}{(A_1 - A_3)^2} + \frac{(A_2^2 - A_2 A_3) \cdot u_2}{(A_1 - A_3)^2} \cdot u_2 = \frac{p_2 - p_0}{g} \cdot \frac{A_3^2}{(A_1^2 - A_1 A_3)}$$

$$\left(u_1 + u_2 \frac{A_2}{A_1 - A_3} \right)^2 = \frac{p_2 - p_0}{g} \cdot \frac{A_3^2}{(A_1^2 - A_1 A_3)} + u_2^2 \frac{A_2^2}{(A_1 - A_3)^2} - u_2^2 \frac{(A_2^2 - A_2 A_3)}{(A_1^2 - A_1 A_3)}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{p_2 - p_0}{g} \cdot \frac{A_3^2}{(A_1^2 - A_1 A_3)} + u_2^2 \frac{A_2^2}{(A_1 - A_3)^2} - u_2^2 \frac{(A_2^2 - A_2 A_3)}{(A_1 - A_3)^2}} - u_2 \frac{A_2}{A_1 - A_3}$$

$$\text{mit } A_3 = A_1 + A_2$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{p_2 - p_0}{g} \cdot \frac{(A_1 + A_2)^2}{(-A_1 A_2)} + u_2^2 \frac{A_2^2}{(A_1 - A_1 - A_2)^2} - u_2^2 \frac{(-A_1 A_2)}{(-A_1 A_2)} - u_2 \frac{A_2}{-A_2}}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{p_2 - p_0}{g} \cdot \frac{(A_1 + A_2)^2}{A_1 A_2} + u_2^2 \frac{A_2^2}{A_1 A_2}}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{p_2 - p_0}{g} \cdot \frac{(A_1 + A_2)^2}{A_1 A_2} + u_2^2} = u_2 \left(1 + \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{2} A_1 A_2} \right)$$

$$u_1 = 20 \frac{m}{s} \left(1 + \sqrt{\frac{0,13 m^2}{2 \cdot 0,02 m^4}} \right) = 20 \frac{m}{s} (1 + 1,15) = 50 \frac{m}{s}$$

$$\text{aus Kondi.-Gl. (siehe oben): } u_3 = \frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{A_3}$$

$$u_3 = \frac{50 \frac{m}{s} \cdot 0,1 m^2 + 20 \frac{m}{s} \cdot 0,2 m^2}{(0,1 + 0,2) m^2} = 30 \frac{m}{s}$$

Gleichung s
schon oben

$\frac{1}{2}$ nur
Ergebnis

c) Gebläseleistung: $P = \Delta p_{\text{Gebläse}} Q_1$

über Bernoulli-Gl. von weit vor Gebläse bis nach ②

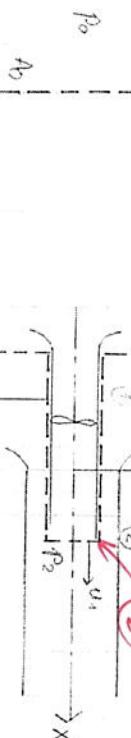
$$p_0 = \frac{\rho}{2} u_1^2 + p_2 \rightarrow \Delta p_{\text{Gebläse}}$$

$$\Delta p_{\text{Gebläse}} = p_0 - p_2 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = \frac{\rho}{2} (u_2^2 + u_1^2)$$

$$\Rightarrow P = \frac{\rho}{2} (u_2^2 + u_1^2) \cdot Q_1 = \frac{\rho}{2} (u_1^2 + u_1^2) \cdot v_1 \cdot A_1$$

$$P = \frac{1,125}{2} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ((20 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + (50 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2) \cdot 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,7 \text{ m}^2 = 9062,5 \text{ W}$$

z 6 P^{d)} KV ① für großes KV



② für Umschließendes Rohres

$$\text{Impulsatz 2: } S_{A_1} \frac{u_1}{A_1} - S_{A_2} \frac{u_2}{A_2} = F_H + p_0 A_0 - p_2 A_1 - (A_0 - A_1) p_0$$

KV wird so groß gewählt, dass keine Bereinigung durch die Stoffströmung auftritt und dass die Luft nur durch die Fläche A_0 eintritt

$$u_0 \ll u_1 \Rightarrow u_0 \approx 0$$

$$\Rightarrow S_{A_1} \frac{u_1}{A_1} F_H + A_1 (\underline{p_0 - p_2}) = F_H + A_1 \frac{\rho}{2} u_2^2$$

$$F_H = \rho \cdot A_1 (u_1^2 - \frac{u_2^2}{2}) = 1,125 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,7 \text{ m}^2 ((50 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - (10 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2)$$

$$F_H = 300 \text{ N}$$

② für Einsetzen der Druckdifferenz

A3 a) z 28,5 P

$$\frac{p_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (1)$$

① c

$$\text{aus Ma-Tabelle für } M_a = 2 \text{ gilt: } \frac{p_{a1}}{p_0} = 0,7248;$$

② za

$$\Rightarrow p_{a1} = p_0 \cdot 0,7248 = 12.4780 \text{ Pa}$$

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M_a} \left[\frac{1 + \frac{\gamma}{2} (\gamma - 1) M_a^2}{\frac{1}{2} (\gamma + 1)} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (2)$$

$$\text{aus Ma-Tabelle für } M_{a2} = 2 \text{ gilt: } \frac{A_{a2}}{A_*} = 1,688$$

②

$$(2)$$

$$\text{Fall 2: } p_{a2} = \frac{p_{a1}}{4} \Rightarrow \frac{p_{a2}}{p_0} = \frac{p_{a1}}{4 \cdot p_0} = \frac{0,1749}{4} = 0,04373 \text{ (2)}$$

$$\text{mit obiger Formel (bzw. Ma-Tabelle)} \quad M_{a2} \approx 2,89$$

②

①

Flächenverhältnis:

$$\frac{A_2^*}{A_*} = \frac{A_a}{A_{a*}} \cdot \frac{A_2}{A_a} = 1,688 \cdot \frac{1}{3,813} = 0,4427 \quad (2)$$

$$\text{b) } \frac{A_a}{A_{a*}} = 2,5$$

z 5,5 P

$$\frac{A_a}{A_{a*}} = 2,5$$

Indices:
VS vor Stoß
nS = nach Stoß



Druck vor Stoß mit Gl. (1) bzw.

$$\text{für } M_{a1} = 2,44 \text{ aus Ma-Tabelle} \quad \frac{p_{a1}}{p_{a0}} = 0,06426$$

Druckänderung über Stoß mit Gleichung

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (\text{Ma}_1^2 - 1) \quad (3)$$

aus Ma-Tabelle für $\text{Ma}_{\text{aus}} = 2,44$

$$\frac{P_{\text{ns}}}{P_{\text{vs}}} = 6,779$$

①

$$P_{\text{ns}} = \frac{P_{\text{ns}}}{P_{\text{vs}}} \cdot P_{\text{vs}} = 6,779 \cdot 0,06426 \cdot 100.000 \text{ Pa}$$
$$P_{\text{ns}} = 43.562 \text{ Pa}$$

②

z3P^c) Soll eine Düse angepasst sein, d.h. dass keine Stoßere

auftritt, so ist einer gewünschten Ma-Zahl am Austritt ein exaktes Flächenverhältnis $\frac{A_x}{A_E}$ zugewiesen.

Folglich ist die gewünschte Konfiguration, unabhängig vom herrschenden Außendruck p_a ~~oder~~ bzw. dem Druckverhältnis p_a/p_0 , nicht möglich!

① für Erkenntnis der Unmöglichkeit dieser Konfiguration

② für Begründung