

Musterlösung Klausur Strömungslehre

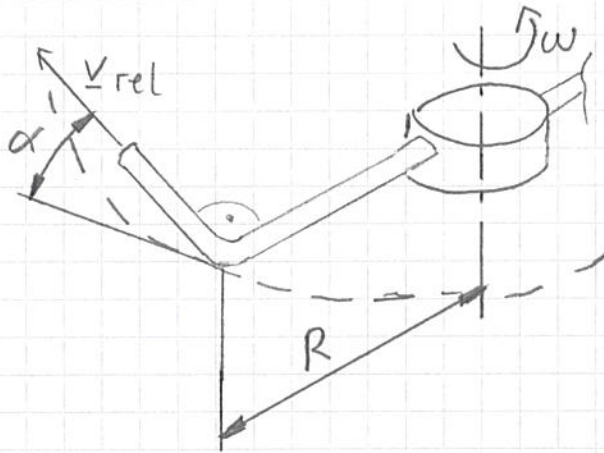
SoSe 2012

2. Termin

28.09.2012

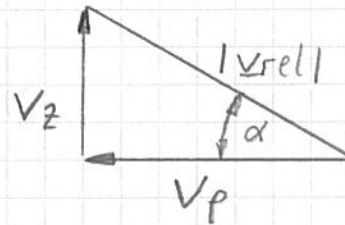
A1

a)



$$\alpha = 30^\circ$$

$$|\underline{v}_{rel}| = 17 \frac{m}{s}$$



Geschwindigkeitskomponenten:

- in Rotationsebene: $v_p = \cos \alpha \cdot |\underline{v}_{rel}| = \cos 30^\circ \cdot 17 \frac{m}{s}$
 $v_p = 14,7 \frac{m}{s}$

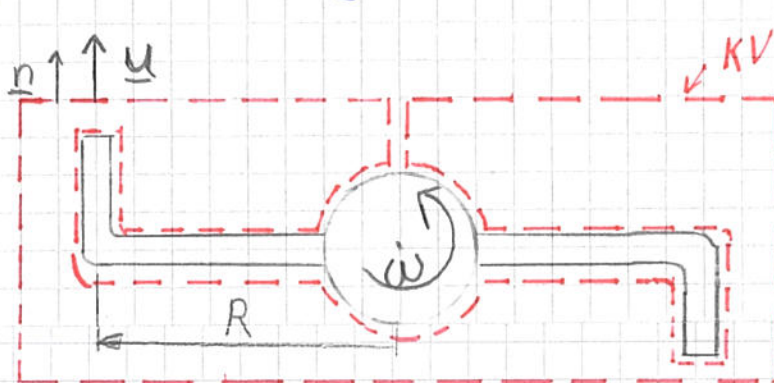
- senkrecht zur Rotationsebene: $v_z = \sin \alpha \cdot |\underline{v}_{rel}|$
 $v_z = \sin 30^\circ \cdot 17 \frac{m}{s} = 8,5 \frac{m}{s}$

- Massenstrom pro Arm: $\dot{m}_{Arm} = \frac{1}{2} \dot{V}_{ges} \cdot \rho$

$$\dot{m}_{Arm} = \frac{1}{2} \cdot 4,0 \frac{L}{min} \cdot \frac{1}{60} \frac{min}{s} \cdot \frac{1}{1000} \frac{m^3}{L} \cdot 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$\dot{m}_{Arm} = 0,033 \frac{kg}{s}$$

b)



KV (in Draufsicht)

Festlegung der positiven Drehrichtung in Rotationsrichtung!

- Kontrollvolumen bewegt sich mit dem Sprinkler, dann gilt folgende Drehimpulserhaltungsgleichung:

$$\int_{KV} \frac{\partial s(\underline{r} \times \underline{u})}{\partial t} dV + \int_{KF} (\underline{r} \times \underline{u}) s \underline{v} \cdot \underline{n} dA = \underline{\Sigma M}$$

= 0, da stationär

- Betrachtung Impulsmomente für den Austrittsquerschnitt:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R - v_p \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{(- Absolutgeschw., die ruhender Beobachter sieht.)}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_p \\ v_z \end{pmatrix} \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{r} \times \underline{u}) = \begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ R & 0 & 0 \\ 0 & \omega R - v_p & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R v_z \\ R(\omega R - v_p) \end{pmatrix}; \quad \underline{v} \cdot \underline{n} = v_p$$

am Eintrittsquerschnitt entsteht kein Impulsmoment, da dort $\underline{u}$ parallel zur z-Achse liegt.

- Betrachtung Summe aller sonstigen Momente am KV:

- keine Momente durch Volumenkräfte

- um KV liegt Umgebungsdruck an $\Rightarrow$ keine Momente infolge von Druckdifferenzen

- Reibmoment um z-Achse entgegen Drehrichtung M_R

$\Rightarrow$ Impulsmomentengleichung um die z-Achse:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ Arme}}}{2} \cdot \int_{KF} R(\omega R - v_p) \cdot \underbrace{v_p \cdot s dA}_{\substack{\uparrow \\ \dot{m}_{\text{Arm}}}} = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{entgegen pos. Drehrichtung}}}{-} M_R$$

$$\Rightarrow 2 \cdot R(\omega R - v_p) \cdot \dot{m}_{\text{Arm}} = -M_R$$

$$\omega = \left(- \frac{M_R}{2 \cdot \dot{m}_{\text{Arm}} \cdot R} + v_p \right) \cdot \frac{1}{R} = \left(- \frac{0,18 \text{ Nm}}{2 \cdot 0,033 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 0,2 \text{ m}} + 14,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \cdot \frac{1}{0,2 \text{ m}}$$

$$\omega = 5,32 \frac{1}{\text{s}}$$

c) Sprinkler festgehalten $\Rightarrow \omega = 0$

Impulsmomentengleichgewicht um z-Achse:

$$2 \int_{KF} R(-v_p) + (v_p) \cdot S dA = -M_{\text{Halte}} - M_R$$

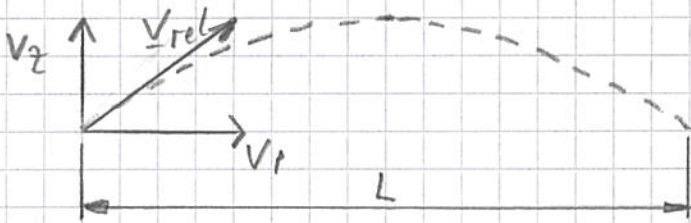
Haltemoment muss entgegen der pos. Drehrichtung wirken!

$$-2Rv_p \dot{m}_{\text{Arm}} = -M_{\text{Halte}} - M_R$$

$$M_{\text{Halte}} = -M_R + 2Rv_p \dot{m}_{\text{Arm}} = -0,18 \text{ Nm} + 2 \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 14,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,033 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$M_{\text{Halte}} = 0,014 \text{ Nm}$$

d) Berechnung der Strahllänge L unter Vernachlässigung des Luftwiderstands:



Berechnung der Strahllänge L analog zu einer Wurfparabel:

auf jedes Fluidelement wirkende Beschleunigung: $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt} = -g$

$$v_z = -g t + c_1$$

~~Strahlende~~ für $t=0$ (Austritt aus Sprinkler) ist ~~$v_z = |v_{\text{rel}}| \cdot \sin \alpha$~~

$$v_z = |v_{\text{rel}}| \cdot \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad c_1 = |v_{\text{rel}}| \cdot \sin \alpha$$

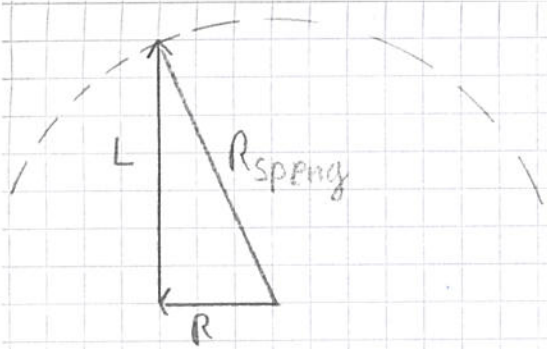
$$v_z = -g \cdot t + |v_{\text{rel}}| \cdot \sin \alpha$$

$$\text{im Scheitelpunkt ist } v_z = 0 \Rightarrow t_{\text{steig}} = \frac{|v_{\text{rel}}| \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$\Rightarrow L = 2 \cdot t_{\text{steig}} (v_p - \omega R) = 2 \cdot \frac{|v_{\text{rel}}| \cdot \sin \alpha}{g} \cdot (|v_{\text{rel}}| \cos \alpha - \omega R)$$

$$L = 2 \cdot \frac{17 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{5}{10} \cdot \sin 30^\circ}{\frac{5}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \left(17 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 30^\circ - 5,32 \frac{1}{\text{s}} \cdot 0,2 \text{ m} \right)$$

$$L = 73,77 \text{ m} //$$



$$A_{\text{spreng}} = \pi \cdot R_{\text{spreng}}^2$$

$$= \pi \cdot (R^2 + L^2) = 1694 \text{ m}^2$$

A2

a) $\frac{dp}{dz} = -\rho_F \cdot g$

b) Rand bed.: $r = R_1 \Rightarrow u_z(R_1) = u_0$; $r = R_2 \Rightarrow u_z(R_2) = 0$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tau u_r}{\partial r} = 0$$

$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial u_r}{\partial t} = 0$

Integration: $\tau \cdot u_r = c$ für $r = R_2$ ist $u_r = 0$

$\Rightarrow R_2 \cdot 0 = c \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow \tau \cdot u_r = 0 \Rightarrow u_r = 0$

c) $\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u_z u_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u_z u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau \rho u_z u_r}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial z} + V_z$

$\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial \rho u_z u_r}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial \rho u_z u_r}{\partial r} = 0$ $\frac{\partial \tau \rho u_z u_r}{\partial r} = 0$ $u_r = 0$

stationär Größen nur von r abhängig

$$V_z = \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau \tau_{zr}}{\partial r} - \rho_F \cdot g$$

$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} = 0$

$\Rightarrow 0 = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau \tau_{zr}}{\partial r} - \rho_F \cdot g = \rho_F g + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau \tau_{zr}}{\partial r} - \rho_F g$

$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial (\tau \tau_{zr})}{\partial r}$

$0 = \tau_{zr} + \tau \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r}$

d)

~~Stress~~

$$0 = \frac{\partial(\tau T_{zr})}{\partial r} \quad \text{mit} \quad T_{zr} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$0 = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\tau \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad | : \mu$$

1. Integration:

$$C_1 = \tau \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

2. Integration:

$$\frac{C_1}{\tau} = \frac{\partial u_z}{\partial r} \Rightarrow C_2 + C_1 \cdot \ln(r) = u_z$$

mit Randbedingungen:

$$r = R_2 \Rightarrow u_z = 0$$

$$r = R_1 \Rightarrow u_z = u_0$$

$$0 = C_2 + C_1 \cdot \ln(R_2) \quad (1)$$

$$u_0 = C_2 + C_1 \cdot \ln(R_1) \quad (2)$$

(1) in (2) einsetzen

$$u_0 = -C_1 \ln(R_2) + C_1 \ln(R_1) = C_1 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{u_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \quad (3)$$

(3) in (1)

$$C_2 = -C_1 \ln(R_2) = -\frac{u_0 \cdot \ln(R_2)}{\ln(R_1) - \ln(R_2)}$$

Gleichung Schubspannung:

$$T_{zr} = \mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} = \mu \cdot \frac{C_1}{r} = \mu \cdot \frac{u_0}{r \cdot \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

Gleichung Geschwindigkeit:

$$u_z = C_1 \ln(r) + C_2 = \frac{u_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \cdot \ln(r) - \frac{u_0 \cdot \ln(R_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

$$u_z = \frac{u_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \left(\ln(r) - \ln(R_2) \right) = \frac{u_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)$$

e) Radienverhältnis $x = \frac{R_1}{R_2}$

$\tau_{zr} = \mu \frac{U_0}{r \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$ soll an Stiftwand minimal sein

$\Rightarrow r = R_1 \Rightarrow r = x \cdot R_2$

$\tau_{zr} = \frac{\mu U_0}{R_2} \cdot \frac{1}{x \ln(x)}$

gesucht Minimalwert von τ_{zr} abhängig von x :

$0 = \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial x} = \frac{\mu U_0}{R_2} \cdot \left(\frac{(-1)}{x^2} \cdot \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{x} \cdot \frac{(-1)}{(\ln(x))^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 \right)$

$0 = \frac{\mu U_0}{R_2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2 \ln(x)} - \frac{1}{x^2 (\ln(x))^2} \right) \quad | \cdot \frac{(-x^2) R_2}{\mu U_0}$

$0 = \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{(\ln(x))^2} \quad | \cdot (\ln(x))^2$

$0 = \ln(x) + 1$

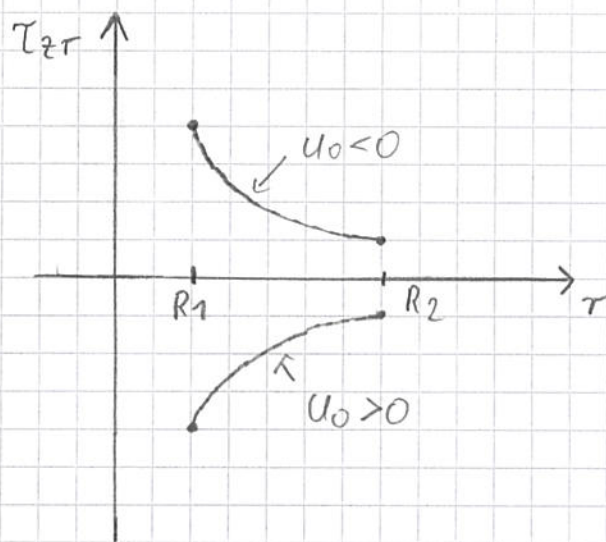
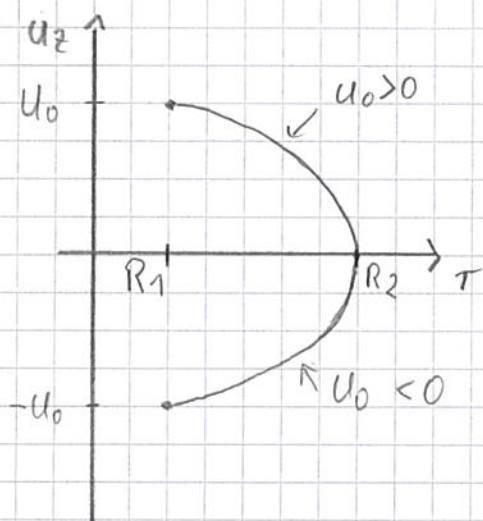
$x = e^{-1} \Rightarrow x = \frac{R_1}{R_2} = e^{-1} \approx 0,368$

f) $u_z(r) = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)$

$\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) < 0$ $\ln\left(\frac{r}{R_2}\right) \leq 0$

$\tau_{zr} = \frac{\mu}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \cdot U_0 \cdot \frac{1}{r}$

$\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) < 0$ $\frac{1}{r} > 0$



A3

$$a) \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

aus Ma-Zahl-tabelle für $Ma_1=3$ ist $\frac{p_0}{p_1} = 36,7377$
 $\Rightarrow p_0 = p_1 \cdot 36,7377 = 7,3475 \text{ bar}$

$$b) \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2$$

aus Ma-Zahl-tabelle für $Ma_1=3$ ist $\frac{T_0}{T} = (0,3571)^{-1} = 2,8$
 $\Rightarrow T_0 = T \cdot 2,8 = 607,6 \text{ K} \approx 608 \text{ K}$

$$c) \rho_0 = \frac{p_0}{R T_0} = \frac{7,3475 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 608 \text{ K}} = 4,211 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

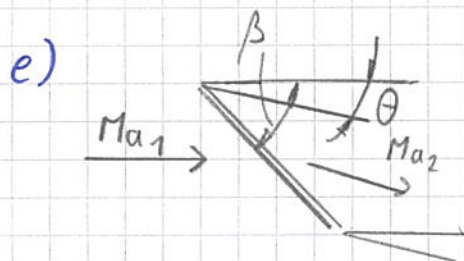
$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{20.000 \text{ Pa}}{287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 217 \text{ K}} = 0,321 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$d) \dot{m} = \rho_1 u_1 \cdot A = \rho_1 u_1 \cdot h_1 \cdot b$$

$$\text{mit } Ma_1 = \frac{u_1}{c_1} \Rightarrow u_1 = Ma_1 \cdot c_1 = Ma_1 \cdot \sqrt{\gamma \cdot R T_1}$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{\dot{m}}{b \cdot \rho_1 \cdot Ma_1 \cdot \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_1}} = \frac{6 \text{ kg/s}}{0,1 \text{ m} \cdot 0,321 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3 \cdot \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 217 \text{ K}}}$$

$$h_1 = 0,211 \text{ m}$$

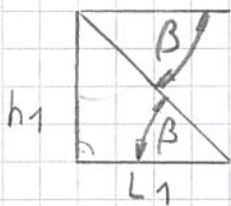


Stoßwinkel β abhängig von Ma_1 und Ablenkwinkel θ
 aus Diagramm ablesen

Gleichung:

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{Ma_1^2 \sin^2 \beta - 1}{Ma_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2}$$

$$\beta \approx 44^\circ$$



$$\tan \beta = \frac{h_1}{L_1}$$

$$L_1 = \frac{h_1}{\tan \beta} = \frac{0,211 \text{ m}}{\tan 44^\circ} = 0,218 \text{ m}$$

f) Berechne zunächst p_2 u. Ma_2

Normalenkomponent der Ma-Zahl vor schrägem Stoß:

$$Ma_{n1} = Ma_1 \cdot \sin \beta = 3 \cdot \sin 44^\circ = 2,084$$

Stoßbeziehung für statische Drücke:
$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (Ma_{n1}^2 - 1)$$

mit Normalenkomponente der Ma-Zahl

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (Ma_{n1}^2 - 1) = 4,9$$

(alternativ aus Ma-Zahl(tabelle) bestimmbar)

$$\Rightarrow p_2 = p_1 \cdot 4,9 = 0,98 \text{ bar}$$

Stoß bez. für Ma-Zahl:
$$Ma_2^2 = \frac{(\gamma-1)Ma_{n1}^2 + 2}{2\gamma Ma_{n1}^2 + 1 - \gamma}$$

mit Normalenkomponenten der Ma-Zahlen

$$Ma_{n2}^2 = \frac{(\gamma-1)Ma_{n1}^2 + 2}{2\gamma Ma_{n1}^2 + 1 - \gamma} = 0,3178$$

$$Ma_{n2} = 0,5637 \quad (\text{alternativ mit Ma-Tabelle bestimmen})$$

$$Ma_2 = \frac{Ma_{n2}}{\sin(\beta-\theta)} = \frac{0,5637}{\sin(19^\circ)} = 1,7314$$

Stoß von (2) nach (3) ist gerader Stoß

Stoßbeziehung für stat. Druck:
$$\frac{p_3}{p_2} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (Ma_2^2 - 1)$$

mit $Ma_2 = 1,7314 \Rightarrow \frac{p_3}{p_2} = 3,331$

$$\Rightarrow p_3 = p_2 \cdot 3,331 = 3,2644 \text{ bar}$$

Stoßbeziehung für Ma-Zahl: $Ma_2^2 = \frac{(\gamma-1)Ma_1^2 + 2}{2\gamma Ma_1^2 + 1 - \gamma}$

mit $Ma_2 = 1,7314 \Rightarrow Ma_3^m = 0,633$

g) bestimme p_{03}

mit $\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

mit $Ma_3 = 0,633$ $\frac{p_{03}}{p_3} = 1,3097$

$\Rightarrow p_{03} = p_3 \cdot 1,3097 = 4,2754 \text{ bar}$

Totaldruckverlust:

$$\begin{aligned}\Delta p_0 &= p_0 - p_{03} = 7,3475 \text{ bar} - 4,2754 \text{ bar} \\ &= 3,0721 \text{ bar}\end{aligned}$$