Musterlösung

Prof. Dr.-Ing. Holger Foysi
Lehrstuhl Strömungsmechanik

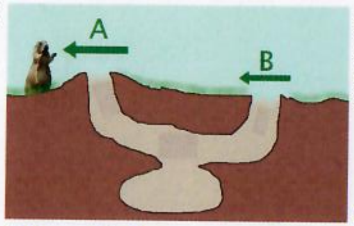
WS2016/17

Name:.. Vorname:.. Punkte:........

Matr.-Nr.: ....

KLAUSUR EFT - Teil Fluiddynamik - Fragenteil (15 Punkte)

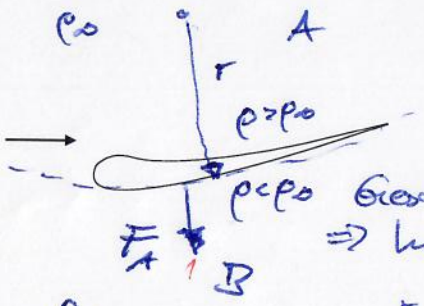
Bitte direkt auf die Angabe schreiben. Blatt evtl. wenden! Viel Glück

1) 

Präriehunde bauen ihren Unterschlupf derart, dass bei *einem* Ausgang ein Erdhaufen um diesen aufgebaut ist (A). Erklären Sie dieses Verhalten vor dem Hintergrund ausreichenden Sauerstoffzufuhrs in der Höhle. (2P)

Bernoulli gl. $\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho g z = \text{const}$ 1/2
⇒ Erdhügel bewirkt eine Beschleunigung der Strömung ⇒ 1/2 $v \uparrow$ ⇒ 1/2 $p \downarrow$
Damit bildet sich ein Druckgradient vom B → A aus ($\partial p/\partial s < 0$) 1/2 und sorgt für Luftströmung von B nach A.

2) Gegeben ist folgendes Profil, welches von links nach rechts umströmt wird. In welche Richtung wirkt die Kraft? Erklären Sie das mithilfe des in der Vorlesung besprochenen Kräftegleichgewichtes. (3.5P)



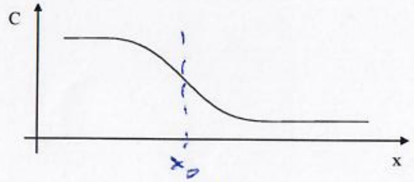
$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_0^2}{r}$ 1 r annähernd Krümmungsradius, v_0 Geschwindigkeit entlang Oberfläche
⇒ hier $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$ in Richtung r, p steigt bis Umgebungsdruck erreicht wird im Gebiet B 1.5 und steigt von p_0 an bis zur Oberfläche im Bereich A (Überdruck), in B Unterdruck auf Oberfläche
⇒ Kraft

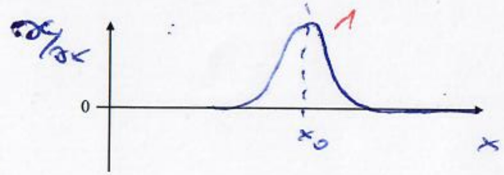
3) Erklären Sie die Begriffe hydrostatischer Druck, dynamischer Druck, Gesamtdruck, statischer Druck (Formeln angeben) (6P).

- 1 hydrostatisch (Druck aufgrund Gewicht des Fluids, keine Beschleunigung lokal) $\rho g h$ 1/2
- 1 dynamischer Anteil: $\frac{1}{2}\rho u^2$ 1/2 Bewegungsanteil, Trägheit d. Teilchens
- 1 statischer Druck p_0 (Aufgrund der Thermodynamik) z.B. $p = \rho R T$ 1/2
- 1 Gesamtdruck (Staudruck, Totaldruck) $p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2$ 1/2
  (Druck der sich einstellt wenn Strömung (isentrop) auf 0 abgebremst wird)

6/

4) Gegeben sei die folgende Konzentrationsverteilung C über x. Wie lautet das Fick'sche Gesetz? Nutzen Sie dieses um den zugehörigen Massenfluss rechts zu skizzieren.(2P)





$q_D = -D \nabla C$ 1

5) Wie ist die Reynoldszahl definiert und wie können wir diese interpretieren?(1.5P)

$Re = \frac{u \cdot L}{\nu}$ 1 Verhältnis Trägheits- zu Reibungskräften 1/2

Prof. Dr.-Ing. Holger Foysi
Lehrstuhl Strömungsmechanik

WS2016/17

Name:

Vorname:

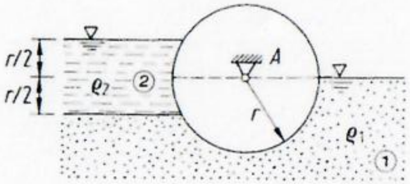
Matr.-Nr.:

Punkte:

KLAUSUR EFT - Teil Fluiddynamik - Aufgabenteil

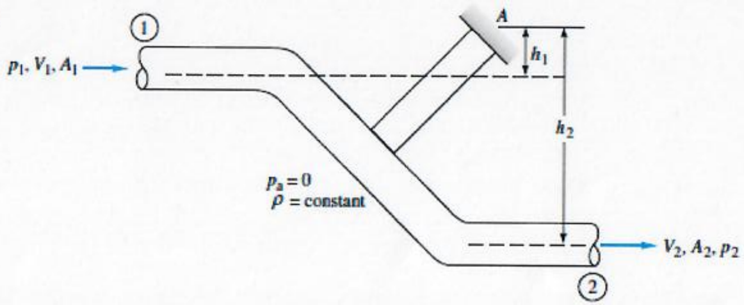
(Richtwert 50 min.)

Aufgabe 1 (12P)



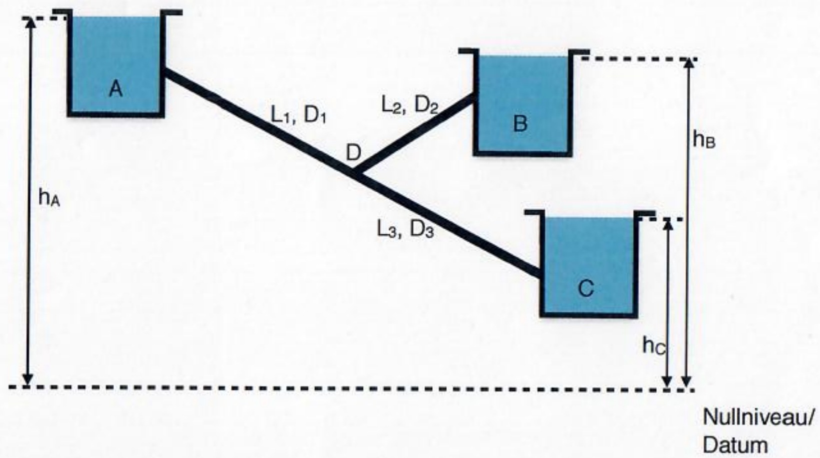
Gegeben sei ein Wehr, welches Flüssigkeiten der Dichten ρ_1 und ρ_2 trennt. Die Form des Wehrs ist die eines Zylinders mit Radius r und Länge l. Das Wehr sei verankert im Mittelpunkt, dort wirke eine Haltekraft **A**. Die Gewichtskraft des Wehrs sei G. Geben Sie die Dichte ρ_2 als Funktion von ρ_1 an sowie die Haltekraft in horizontaler und vertikaler Richtung, A_H bzw. A_V. *Gegeben*: ρ_1, ρ_2, G, p_0.

Aufgabe 2 (10P)



Gegeben Sei ein gebogenes Rohr welches über eine Stange an Punkt *A* befestigt sei. Die Strömung ist stationär, inkompressibel, homogen und reibungsfrei, der Umgebungsdruck werde zu Null gesetzt. Geg.: $h_1, h_2, p_1, p_2, V_1, V_2, A_1, A_2, \dot{m}$.
Welchem Moment T_A muss sich die Konfiguration in Punkt *A* widersetzen? Wie hängt das Ergebnis von der Form des Rohres ab? Wie verändert sich V_1 falls V_2 dagegen wie folgt variiert: $V_2(r) = V_0(1-(r/R)^2)$?

Aufgabe 3 (13P)



Eine Wasserversorgungsanlage verwendet drei Behälter A, B und C, verbunden durch Rohrleitungen L_1, L_2 und L_3 mit Durchmessern D_1, D_2 und D_3. Die Leitungen kreuzen sich in Punkt D.

Gegeben: $h_A, h_B, h_C, L_1, D_1, L_2, D_2, L_3, D_3, \lambda, g$

Gesucht ist die sogenannte Piezometerspiegelhöhe H_D am Punkt D:

$$H_D = \left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g}\right),$$

mit p_D Druck am Punkt D, Z_D Höhe des Punktes D über dem Nullniveau, *ρ Dichte*.

Stellen Sie Gleichungen für die Geschwindigkeiten V_2 sowie V_3 als Funktion von V_1 und der gegebenen Größen auf.
Leiten Sie außerdem eine Bestimmungsgleichung für V_1 ab (Lösung der Gleichung nicht erforderlich), so dass anschließend alle Größen für die Bestimmung von H_D vorliegen.

(1) $\sum 11$

Dichte: Drücke sind an Trennfläche gleich
$\Rightarrow$ $p_1 \overset{(1)}{=} p_2$ oder $\rho_1 g\, r/2 \overset{(1)}{=} \rho_2 g r \Rightarrow \boxed{\rho_2 = \rho_1/2}$ (1/2)

Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung
Druck steigt linear mit Tiefe auf Fläche (horizontal) ~~berechnet~~ berechnet man Kraft im Flächenschwerpunkt, oder, wegen der Linearität Mittelwert von Flächenendpunkt und Anfangspunkt. Deswegen gilt

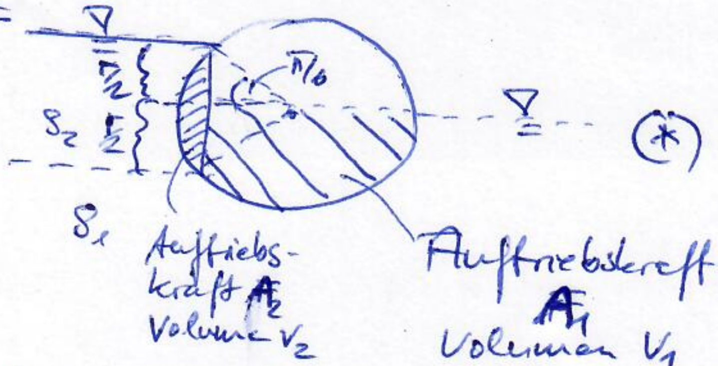
$$0 = \overset{(1/2)}{-A_H} + \rho_2 g \overset{(1)}{\frac{r}{2}} r \cdot l + \frac{1}{2}\overset{(1)}{(\rho_2 g r + \rho_1 g r)} \frac{r}{2} l - \overset{(1)}{\frac{1}{2}\rho_1 g r^2 l}$$

bezogen auf Datum des Fluids rechts

($F = p \cdot A$ nur benutzt)

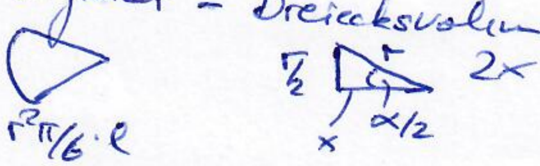
$$\Rightarrow \boxed{A_H = \frac{1}{8} \rho_1 g r^2 l} \quad (1/2)$$

Vertikal



Auftrieb: $\overset{(1)}{\rho g V}$
Kräftegleichgewicht:
(*) $A_1 + A_2 \overset{(1)}{-} G + A_V = 0$
$\Rightarrow \boxed{A_V = G - \frac{\pi}{2} \rho_1 g r^2 l}$ (1/2)

Volumen V_2: Kreissegment − Dreiecksvolumen



$\alpha/2 = \pi/6$
$x = r \cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2} r$

$V = r^2 \pi/6 \cdot l$

$$\left(\int_0^{\pi/3} \frac{r^2}{2}\, d\varphi = r^2 \pi/6 \right)$$

$$\Rightarrow V_2 = l\left(r^2 \pi/6 \overset{(1)}{-} 2\left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} r \cdot r/2\right)\right) = \overset{(1/2)}{r^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) l}$$

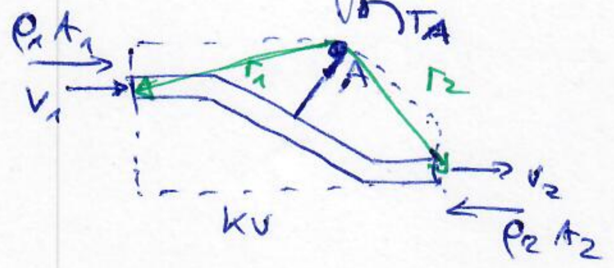
$$V_1 = \frac{1}{2}\pi r^2 l \overset{(1)}{-} \frac{1}{2} V_2 = \overset{(1/2)}{\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) r^2 \cdot l} \quad \text{Einsetzen in (*)}$$

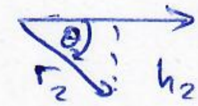
Aufgabe 2 (Σ 10)

$$\sum \vec{M} = \vec{T}_A + \vec{r}_1 \times (-p_1 A_1 \vec{n}_1) + \vec{r}_2 \times (-p_2 A_2 \vec{n}_2) \quad \text{1/2} \quad \text{1/2} \quad \text{1/2}$$

$$= \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \; (\dot{m}\;\text{raus}) + \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 \; (\dot{m}\;\text{rein}) \quad \text{1/2} \quad \text{1/2}$$

[$\oint \rho (\vec{r} \times \vec{v})\, \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO$ etc. können vereinfacht werden da homogen über Querschnitt $\dot{m} = \rho A u$ 1/2





$h_2 = r_2 \sin\Theta_2$ 1/2

$h_1 = r_1 \sin\Theta_1$ 1/2

$\vec{r}_2 \times \vec{v}_2$, $\vec{r}_1 \times \vec{v}_1$, $\vec{r}_2 \times \vec{n}_2$ zeigen in selbe Richtung wie $\vec{T}_A$, $\vec{r}_1 \times \vec{n}_1$ entgegengesetzt

$$\Rightarrow \quad T_A + p_1 A_1 h_1 - p_2 A_2 h_2 = \dot{m}\,(h_2 v_2 - h_1 v_1) \quad \text{1/2} \quad \text{1/2} \quad \text{1/2} \quad \text{1/2} \quad \text{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad T_A = h_2 (p_2 A_2 + \dot{m} v_2) - h_1 (p_1 A_1 + \dot{m} v_1)$$

Eine Änderung der Form ändert nichts am Ergebnis, nur die Ein- und Austrittsebene spielt eine Rolle 1

Falls $v_2 = v_0 \left(1 - (r/R)^2\right)$

$$\Rightarrow \text{Konti}: \quad \dot{m} = \oint \rho v_2\, dO = v_0 \rho \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] 2\pi r\, dr \quad \text{1/2} \quad \text{1/2}$$

$$= 2\pi v_0 \rho \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{R^2}\frac{R^4}{4}\right) = \rho\pi v_0 R^2/2 \quad \text{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \rho v_1 \pi R^2 = \rho \pi v_0 R^2/2 \Rightarrow \boxed{v_1 = v_0/2} \quad \text{1/2} \quad \text{1/2}$$

Aufgabe 3

Bernoulli von $A \to D$ (durch ρg geteilt)

i) 2 $$h_A = \underbrace{\left(h_D + \frac{p_D}{\rho g}\right)}_{H_D} + \frac{\lambda L_1}{2 D_1 g} v_1^2$$

$D \to B$

ii) 2 $$\underbrace{\left(h_D + \frac{p_D}{\rho g}\right)}_{H_D} = h_B + \frac{\lambda L_2 v_2^2}{D_2\, 2g}$$

$D \to C$

iii) 2 $$\underbrace{\left(h_D + \frac{p_D}{\rho g}\right)}_{H_D} = h_C + \frac{\lambda L_3 v_3^2}{D_3 \cdot 2 \cdot g}$$

i+ii):

$$\underbrace{\frac{(h_A - h_B)2g}{\lambda}}_{\alpha} = \frac{L_1}{D_1}v_1^2 + \frac{L_2}{D_2}v_2^2 \quad 1$$

i+iii)

$$\underbrace{(h_A - h_C)\frac{2g}{\lambda}}_{\beta} = \frac{L_1}{D_1}v_1^2 + \frac{L_3}{D_3}v_3^2 \quad 1$$

$$\sqrt{\frac{D_2}{L_2}\left(\alpha - \frac{L_1}{D_1}v_1^2\right)} = v_2 \quad (*) \quad 1/2$$

Konti: $Q_1 = Q_2 + Q_3 \Rightarrow \frac{D_1^2\pi}{4}v_1 = \frac{D_2^2\pi}{4}v_2 + \frac{D_3^2\pi}{4}v_3$ 1,5

aus i+iii):

$$\sqrt{\frac{D_3}{L_3}\left(\beta - \frac{L_1}{D_1}v_1^2\right)} = v_3 \quad (**) \quad 1/2$$

$v_2 + v_3$ in Konti

1 $$D_1^2 v_1 = D_2^2\sqrt{\frac{D_2}{L_2}\left(\alpha - \frac{L_1}{D_1}v_1^2\right)} + D_3^2\sqrt{\frac{D_3}{L_3}\left(\beta - \frac{L_1}{D_1}v_1^2\right)}$$

$$\Rightarrow D_1^4 v_1^2 = D_2^4 \frac{D_2}{L_2}\left(\alpha - \frac{L_1}{D_1}v_1^2\right) + D_3^4\frac{D_3}{L_3}\left(\beta - \frac{L_1}{D_1}v_1^2\right) \quad 1/2$$
$$+ 2D_2^2 D_3^2\sqrt{\frac{D_2 D_3}{L_2 L_3}\left(\alpha - \frac{L_1}{D_1}v_1^2\right)\left(\beta - \frac{L_1}{D_1}v_1^2\right)}$$

Hieraus kann man v_1 bestimmen

$\rightsquigarrow$ v_2, v_3 aus (*), (**)

$\rightsquigarrow$ H_D aus i), ii) oder iii)

Σ 12