$\boxed{\Sigma 10P}$ HFD 2016 $\boxed{\text{MUSTERLÖSUNG}}$ S1

(1) $\langle u\rangle(r=0) = 2\,m/s \qquad \langle u\rangle(r=100mm) = 1{,}6\,m/s$

$y = R - r$

(1) $$\frac{u_{max} - \langle u\rangle}{u_\tau} = 5{,}75 \log_{10}(R/y)$$ (2)

$\left[\frac{1}{\kappa}\ln(\,) = \frac{1}{\kappa}\frac{\log_{10}(\,)}{\log_{10}(e)} \approx 2{,}5 \cdot 2{,}3 \log_{10}(\,) = 5{,}75 \log_{10}(\,) \right]$

(oder $\frac{\langle u\rangle}{u_\tau} - \frac{u_{max}}{u_\tau} = 2{,}5 \ln y/R$)

Im Skript ist zusätzlich der Term „1" noch vorhanden (aus „älterer" Literatur, ist auch o.k.

(2) $$\frac{\langle u\rangle - u_B}{u_\tau} = 5{,}75 \cdot \log_{10}(y/R) + 3{,}75$$

(3) $\Rightarrow \boxed{u_{max} - u_B = 3{,}75 \cdot u_\tau}$ (1)

In (1) u_{max} (bei $r=0$) (1) einsetzen, sowie $1{,}6\,m/s$ bei $y = R - 0{,}1m \Rightarrow \boxed{u_\tau = 0{,}1458\,m/s}$ (1/2) (bzw. $0{,}1074\,\frac{m}{s}$ falls ohne „-1")

in (3) $\Rightarrow \boxed{u_B = 1{,}4533\,m/s}$ (1/2) $\Rightarrow \boxed{Q = u_B \cdot A = u_B \cdot D^2\pi/4 = 0{,}10\cancel{27}\,m^3/s}$ (1) (1/2)

(2) erhalten wir aus (1) nach Integration über den Querschnitt

$$\underbrace{\frac{1}{A}\frac{1}{u_\tau}\int \langle u\rangle\,dA}_{u_B} - \frac{u_{max}}{u_\tau} = \frac{2{,}5}{A}\int_0^R \ln\frac{(R-r)}{R}\,2\pi r\,dr$$ (1) (1)

$$(r/R := \eta \;,\; A = \pi R^2) \quad = 2{,}5 \cdot 2 \int_0^1 \ln(1-\eta)\,2\pi\eta\,d\eta$$

$$((1-\eta) := \xi \;,\; d\xi = -d\eta) = 5 \cdot (-1)\int_1^0 \ln\xi \cdot (1-\xi)\,d\xi$$

(1)

$$= +5\int_0^1 \ln\xi\,d\xi - 5\int_0^1 \xi\ln\xi\,d\xi$$

Falls (3) auswendig: 4,5P direkt oben.

$$= 5 \cdot \left[\xi\ln\xi \Big|_0^1 - \xi\Big|_0^1 - \frac{\xi^2}{2}\left(\ln\xi - \frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 \right.$$

(2) $\geq 8P$ | S2

$$p_L \pi R^2 - p_R \pi R^2 + \overline{\tau}\, 2\pi R'\, \underset{\sim}{dz} = 0$$ ①

$$\Rightarrow \overline{\tau} = -\frac{\Delta p}{\ell} \frac{R'}{2}$$

R' Integrationsgrenze bzw. Rand des Kontrollvolumens, $R' = r$ irgendwo im Gebiet, $R' = R$ an Wand

$$\overset{R'=R}{\Rightarrow} \tau_w = -\frac{\Delta p}{\ell} R/2 = \rho u_\tau^2$$ ① ①

$$\Rightarrow -\Delta p = 2 \rho u_\tau^2 \ell/R$$

$$-\Delta p = \rho \lambda \cdot \frac{u_B^2}{2} \frac{\ell}{D}$$ ① (Strömungslehre)

$$= \rho \lambda \ell u_B^2 / 4R$$

Gleichsetzen: $\boxed{\lambda = 8 \frac{u_\tau^2}{u_B^2}}$ ①

Gleichsetzen mit Angabe:

$$\frac{8 u_\tau^2}{u_B^2} \overset{①}{=} 0{,}2655 \left(\frac{u_B R}{\nu}\right)^{-1/4} = 0{,}2655 \left(\frac{\nu}{u_\tau R}\right)^{1/4} \left(\frac{u_\tau}{u_B}\right)^{1/4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_B}{u_\tau}\right)^{7/4} = 30{,}13 \left(\frac{u_\tau R}{\nu}\right)^{1/4} \Rightarrow \frac{u_B}{u_\tau} \approx 7 \cdot Re_\tau^{1/7}$$ ①

$u_B/u_{max} = 1{,}25$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u_{max}}{u_\tau} \approx 8{,}75 \cdot Re_\tau^{1/7}}$$ ①

---

(3) a) Nicht ① unbedingt. Eine einfache Scherströmung besitzt bereits $\omega \neq 0$ ① ($\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{u}$)

b) Nachlaufströmung, Grenzschicht, Freistrahl je ①P

c) δ_z sei die Dicke der Unterschicht $\Rightarrow \delta_z^+ = \delta_z \frac{u_\tau}{\nu} \overset{①}{\approx} 5-10$ sagen wir 10; $\delta/x \sim ① \left(\frac{u_B x}{\nu}\right)^{-1/5}$, u_B hier Geschwindk. am Rand

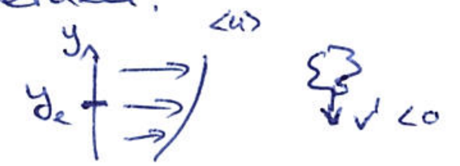
[illegible]

$= u_\tau^{9/10} \cdot x^{-1/10} \, \nu^{1/10}$ 1

$\Rightarrow \boxed{\delta_2 \approx \frac{10\,\nu}{u_\tau} \sim u^{-9/10} \cdot x^{1/10} \, \nu^{9/10}}$ 1

d) Wegen 1 Schließungsproblematik: in den Gleichungen findet man immer Korrelationen, für die wiederum neue Transportgleichungen 1 benötigt werden. Kaskade an Gleichungen. Hier: Tripelkorrelationen treten auf. 1

e) Skript S. 69. Schließungsannahme für $\rho\langle u'v'\rangle$ indem diese Korrelation durch mittl. Größen ausgedrückt werden. 1



Auslenkung eines FE um y_e durch $v' \lessgtr 0$ nach unten/oben, von $y_e \pm l \to y$ 1

$\langle u\rangle_e \approx \langle u\rangle \pm l \underbrace{\frac{\partial \langle u\rangle}{\partial y}}$ 1

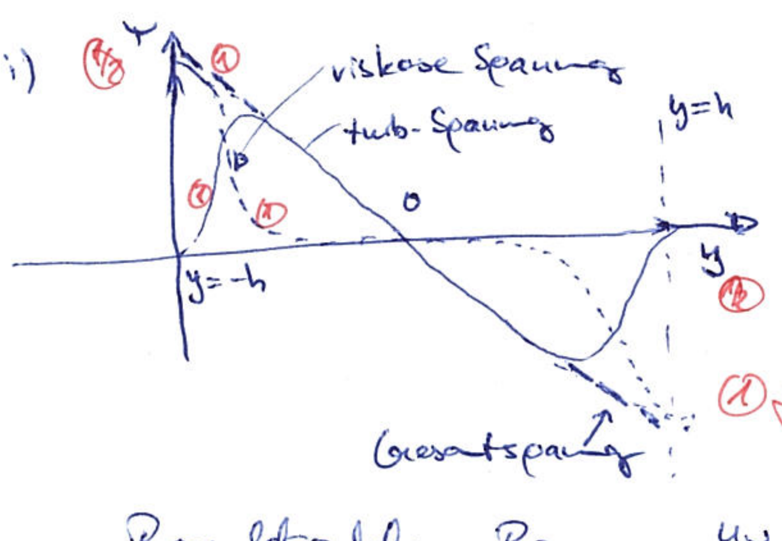
Interpretierbar als Fluktuation v'

Außerdem $|u'| \approx |v'|$ 1/2

$\Rightarrow -\rho\langle u'v'\rangle \approx \rho\, l^2 \left|\frac{d\langle u\rangle}{dy}\right| \frac{d\langle u\rangle}{dy} =: \mu_t \frac{d\langle u\rangle}{dy}$ 1/2 1/2

Vorzeichen, desh. $|\,|$ 1/2

f) i)



ii) Peaks wandern zur Wand hin 1, falls mit „+" Einheiten normiert, bleiben Peaks der Scherspannung am gleiche Ort! 1

1 für Antisymmetrie

Reynoldszahl: $Re_\tau = u_\tau \cdot h$

h) i) PDF(u): Wahrscheinlichkeit pro Einheitslänge im Ereignisraum

$$P(V \le u < V+dV) = PDF(u)\,dV$$

(oder $PDF_u(V) = \frac{dF(V)}{dV}$, $F(V) = CDF$)

ii) Neben den „normalen“ Schwankungen treten plötzliche starke Schwankungen („bursts“) auf, PDF hat hohe Flachheit, größer als 3 i.A. im Vergleich zur Normalverteilung.

iii) Schiefe $S = \frac{\langle (u-\langle u\rangle)^3\rangle}{\sigma_u^3}$ Flachheit $\frac{\langle (u-\langle u\rangle)^4\rangle}{\sigma_u^4}$

oder für Geschwindigkeitsfluktuationen u'

$$S = \frac{\langle u'^3\rangle}{\langle u'^2\rangle^{3/2}}, \quad F = \frac{\langle u'^4\rangle}{\langle u'^2\rangle^2}$$

iv) PDF sollte möglichst ähnlich sein, Hohe Flachheit, bzw. Schiefe deutet auf Probleme in der Strömung hin (Unebenheiten, Kanten, Gitterdefekte etc.)
PDF_1 (höhere Schiefe) und PDF_4 (Flachheit) zeigen Abweichungen von der Normalverteilung, sollte überprüft werden.

Negative Schiefe)

v) $$T = \frac{\sqrt{\langle u'^2\rangle + \langle v'^2\rangle + \langle w'^2\rangle}}{\langle u\rangle}$$ z.B. ⟨⟩ Zeitmittelwert

Unterschiedlich an verschiedenen Positionen!

vi) Turbulenz wird schwächer entlang Achse ⇒ Anscheinend jeweils 1em 85

4a) $\Sigma 4{,}5$ $\frac{\partial A_{ij}}{\partial t}$ [1/2] $+ \partial_k (u_k A_{ij})$ [1/2] $= \partial_j b_i$ [1/2] $+ \nu \partial_k C_{kij}$ [1/2 C_{kij}]

1/2 b_i und ∂_j 1/2 A_{ij}

($\partial_j b_j$ und $\partial_k C_{ijk}$ ist auch o.k. hier)

$$\partial_k u_k = 0 \quad (1)$$

4,5

b) Σ 11P.

(A) $\partial_t \langle A_{ij} \rangle + \partial_k \left(\langle u_k \rangle \langle A_{ij} \rangle + \langle u_k' A_{ij}' \rangle \right) = \partial_j \langle b_i \rangle + \nu \partial_k \langle C_{kij} \rangle$

1/2   1/2 + 1 (Korrel.)   1/2   1/2

→ Teil 3

Aufspalten der Gl. in 4a) (1)

(B) $\partial_t \left[\langle\, \rangle + (\,)' \right] + \partial_k \left[\langle u_k \rangle \langle A_{ij} \rangle + u_k' \langle A_{ij} \rangle + \langle u_k \rangle A_{ij}' + u_k' A_{ij}' \right] = \partial_j \left(\langle b_i \rangle + b_i' \right) + \nu \partial_k \left(\langle C_{kij} \rangle + C_{kij}' \right)$

→ Teil 3,5

Differenz (B) − (A)

$$\partial_t A_{ij}' + \partial_k \left[u_k' \langle A_{ij} \rangle + \langle u_k \rangle A_{ij}' + u_k' A_{ij}' - \langle u_k' A_{ij}' \rangle \right] = \partial_j b_i' + \nu \partial_k C_{kij}'$$

→ Teil 3,5

c) $\Sigma 4{,}5$ z.B. Korrelation $\langle ab \rangle$ (1) $= \langle a(x,t)\, a(x) \rangle$ oder $\langle a_i(x_j + r_j, t+t')\, b_j(x, t) \rangle$

1) Transportgleichung (1/2) für a_i bzw. b_i

also $\partial_t a = \ldots$ (1) und $\partial_t b = \ldots$ (evtl. Flussfunktion bestimmen)

2) $\partial_t ab = a \partial_t b + b \partial_t a$ (1) (Produktregel)

3) Mittelwert (1)

Σ 20P