Prof. Dr.-Ing. Holger Foysi
Lehrstuhl Strömungsmechanik

SS 2017

Name: ……………………………………

Vorname:…………………………………

Matr.-Nr.:…………………………………

Aufg.	Punkte
A	
B	
C	
Σ	

KLAUSUR HFD - Viel Erfolg!

A Rechenteil (21P)

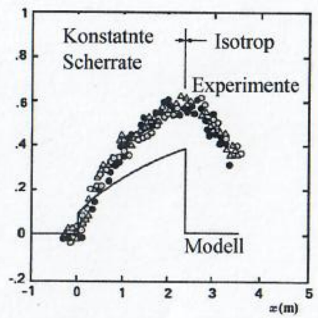
1) Wir betrachten eine turbulente Rohrströmung in einem glatten Rohr mit mittlerem Volumenstrom Q. Berechnen Sie die Reibungszahl, die Maximalgeschwindigkeit und die Wandschubspannung. Benutzen Sie hierzu die implizite Formel von Prandtl für die Berechnung der Reibungszahl. (11P)

   Gegeben: $Q = 2.27\ m^3/min$, $\nu = 0.0098 \cdot 10^{-4}\ m^2/s$ (Wasser), $D = 100mm$.
   Hinweis: Die Prandtl-Formel müssen Sie iterativ lösen. Nutzen Sie dazu Werte für die Reibungszahl im Interval [0.01, 0.1] um gerundet *grob* auf 5% Genauigkeit zu kommen

2) Gegeben sei eine turbulente ebene Grenzschicht. Die Geschwindigkeit folge dem 1/7-Gesetz. Leiten Sie mit Hilfe der von Kármánsche Integralbeziehung $\tau_w/(\rho U_B^2) = d\theta/dx$ (U_B Bulkgeschwindigkeit) eine Beziehung für die Grenzschichtdicke als Funktion der Lauflänge x und der Reynoldszahl Re_x her. Nutzen Sie dazu neben der Integralbeziehung auch die in der Vorlesung verwendete Formel für τ_w, die aus der Blasius'schen Widerstandsformel herrührte. (10P)

B Fragenteil (inkompressible Turbulenz) (44P)

3)
a) Welche Art Mittelwert würden Sie in einer Rohrströmung definieren (Formel+Begründung)? (3P)?
b) In welchem Zusammenhang stehen Varianz und Stichprobenvarianz? Wie viele Samples brauchen Sie, um die Stichprobenvarianz um den Faktor 10 zu verkleinern? (3P)
c) Skizzieren Sie den Verlauf der mittleren Geschwindigkeit auf der Achse eines Freistrahls. (2P)
d) Modelle und Isotrope Turbulenz
   a. Definieren Sie isotrope Turbulenz (2P)
   b. Sind Korrelationen und Mittelwerte in isotroper Turbulenz gleich 0? (2P)
   c. Betrachten wir das Verhalten des k-ε Modells. Erklären Sie zuerst das k-ε Modell (Grund, Ziel, Formeln) (7P),
   d. Nun nutzen wir das Modell für isotrope Turbulenz. Welche Vorhersage erwarten Sie für die Reynoldsspannungen? (3P)
   e. Wir schalten jetzt im Bereich x=0m eine Scherung mit mittlerer Scherrate $S = \partial\langle u\rangle/\partial y$ ein und entfernen diese wieder bei x=2.2m. Die nachfolgende Abbildung zeigt die Abweichung von der Isotropie nach dem Einschalten von S im Vergleich zu Experimenten. Was glauben Sie passiert nun im Gegensatz zur isotropen Turbulenz? Erklären Sie das Verhalten. (5P)



   f. Ihr Chef weiss, dass Sie studiert haben und erwartet von Ihnen, dass Sie ein Maß für die Abweichung von der Isotropie entwickeln. Machen Sie einen Vorschlag wie ein solches Maß (Variation zwischen 0 und 1) aussehen könnte. (4P)
   g. Wie könnten Sie im k-ε-Modell die Wirbelstärke abschätzen? (1P)

k) Angenommen Sie sehen eine beliebige mittlere Transportgleichung. Können Sie daraus auf die zugehörige allgemeine Transportgleichung schließen? (2P)
l) Skizzieren Sie die Reynolds-Scherspannung in einer turbulenten Kanalströmung über dem ganzen Wandabstand und skizzieren Sie wie sich der Verlauf für steigende Reynoldszahlen ändert. Was glauben Sie passiert, wenn wir die selben Kurven nun für den wandnahen Bereich über Wandeinheiten (Formel) auftragen (Skizze)? (6P)
m) Skizzieren Sie die Totalspannung in einer Grenzschicht über dem Wandabstand für verschiedene Druckgradienten. (4P)

C Statistikteil (17P)

4) Gegeben ist folgende Gleichung für den Transport einer skalaren Größe ξ in einer inkompressiblen turbulenten Strömung der Geschwindigkeit **u.** Die Größe **T(x,t)** ist ein veränderliches Tensorfeld (Tensor zweiter Stufe), κ ein skalarer Transportkoeffizient, ρ die Dichte.

$$\rho\frac{\partial\xi}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\xi = \kappa\nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T})$$

a) Formulieren Sie die Gleichungen in Indexnotation, nutzen Sie auch die Inkompressibilitätsbedingung für den advektiven Term. (3P)
b) Nehmen Sie an, die Dichte sei nicht konstant. We sähe die konservative Formulierung aus (Herleitung)? (3P)
c) Seien nun κ und ρ konstant. Formulieren Sie nun daraus eine Transportgleichung für die Größe $\langle\xi'\xi'/2\rangle$ (bleiben Sie in Indexnotation wenn möglich, spalten Sie Korrelationen auf). (11P).

① A

11

$Q = 2{,}27\,m^3/min = 0{,}0379\,m^3/s$ 1/2

$\langle u\rangle_B = u_B = \frac{Q}{A} = 4{,}817\,m/s$ 1/2

$Re = \frac{u_B \cdot D}{\nu}$ 1 $= 4{,}915 \cdot 10^5$ 1/2 $> 10^5$

Prandtl: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log_{10}\left(Re\cdot\sqrt{\lambda}\right) - 0{,}8$ 1

$\downarrow$

$2\log_{10} Re + \log_{10} \sqrt{\lambda}$

$\underset{\text{umformen}}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \log_{10}\lambda = 10{,}583$ 1

Intervall $[0{,}01,\ 0{,}1]$

$\Rightarrow \lambda = 0{,}1 \qquad 4{,}16 \overset{!}{=} 10{,}583$ 1/2

$\lambda = 0{,}01 \qquad 12 \overset{!}{=} 10{,}583$ 1/2

$\boxed{\text{Schätzung } \lambda = 0{,}013} \Rightarrow 10{,}656 \overset{!}{=} 10{,}583$ 1/2

Fehler < 5%

$u_\tau = u_B\sqrt{\frac{\lambda}{8}}$ 1 $= 0{,}194\,m/s$ 1/2

$\langle u\rangle = u_\tau \cdot \left[5{,}75 \log_{10}\frac{u_\tau y}{\nu} + 5{,}55\right]$ 1 (1 Möglichkeit)

$y = R$ für Maximum 1/2 $y = 0{,}05\,m$

$\Rightarrow u_{max} = 5{,}528\,m/s$ 1/2

$\tau_w = \rho u_\tau^2$ 1 $\Rightarrow \tau_w = 37{,}63\,N/m^2$ 1/2

Lösung

Universität Siegen
Fakultät IV
Department Maschinenbau

Blatt Nr.: .... von .... Blättern

Name: ....

Matr.-Nr.: ....

Datum: ....

A

2

10

$$u/u_B = (y/\delta)^{1/7} \quad (1)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho u_B^2} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \frac{u}{u_B}\left(1 - \frac{u}{u_B}\right) dy \quad (1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \left(\frac{y^{1/7}}{\delta^{1/7}} \ (1/2) - \frac{y^{2/7}}{\delta^{2/7}} \ (1/2) \right) dy = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y^{1/7+1}}{(\frac{1}{7}+1)\delta^{1/7}} - \frac{y^{2/7+1}}{(\frac{2}{7}+1)\delta^{2/7}} \right]_0^\delta \quad (1)$$

$$= \frac{7}{72} \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (1)$$

$$\tau_w = 0{,}0225 \rho u_B^2 \left(\frac{\mu}{\rho u_B \delta} \right)^{1/4} \quad (1)$$

Gleichsetzen $\Rightarrow \frac{7}{72} \rho u^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0{,}0225 \left(\frac{\mu}{\rho u \delta} \right)^{1/4}$ (1)

$$\Rightarrow \delta^{1/4} d\delta = 0{,}2314 \left(\frac{\mu}{\rho u} \right)^{1/4} dx \quad (1/2)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} \delta^{5/4} = 0{,}2314 \left(\frac{\mu}{\rho u} \right)^{1/4} x + C \quad (1)$$

C aus $\delta = 0$ für $x = 0 \Rightarrow C = 0$ (1/2)

$$\Rightarrow \delta = 0{,}37 \left(\frac{\mu}{\rho u} \right)^{1/5} (1/2) \cdot x^{4/5} = \frac{0{,}37 x}{Re_x^{1/5}} \quad (1/2)$$

③ a) Statistisch homogen in azimuth. Richtung und, falls voll entwickelt in Strömungsrichtung z + zeitl. statistisch stationär

$\Rightarrow \frac{1}{T}\frac{1}{L}\frac{1}{2\pi}\iiint f \, dz\, d\theta\, dt = \langle f\rangle(r)$ (Funktion des Radius alleine)

b) $\sigma_N^2 = \frac{\sigma_u^2}{N}$ Einfach, 10. Standardabweichung benötigte 100 samples.

c)

d) a. Statistik ist rotationsinvariant $\Rightarrow \langle u_i\rangle = 0$ (statistisch homogen) bzw. reflektionsinvariant.

b. Nicht unbedingt. $\langle u_i\rangle = 0$, $\langle a'b'\rangle$ sind i. A. von Null verschieden, wie auch MW von thermodynamischen Größen.

c. Schließungsproblem bei Reynoldsmittelung $-\rho\langle u'v'\rangle = \rho\nu_T \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}$ als Beispiel, um Korrelationen durch bekannte Größen auszudrücken.

ν_T muss bestimmt werden $\nu_T \sim l\cdot u$, bzw. ein Längenmaß + ein Geschwindigkeitsmaß. Das k-ε Modell löst phänomenologische Gleichungen für die Dissipation ε bzw. turb. kinetische Energie k, daraus bekommt man u ($\sim\sqrt{k}$) und l ($\sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$) $\Rightarrow \nu_T \sim k^2/\varepsilon$. Danach können die gemittelten Gleichungen gelöst werden, um ~~[illegible]~~ $\langle u\rangle$, $\langle p\rangle$ etc zu bestimmen.

d. Keine mittlere Scherung $\Rightarrow \langle u'v'\rangle \propto \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}$ ist Null. $\Rightarrow$ Produktion ist Null, nur Umverteilung bzw. Dissipation bleiben $\Rightarrow$ Abklingen der isotropen Turbulenz aufgr. Dissipation. k, ε sind berechenbar durch auch Normalspannungen.

a) 3

$$\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} + \rho u_j \partial_j \xi = \kappa \partial_i \partial_j T_{ij}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial t} + \partial_j(\xi u_j) = \underbrace{\frac{\kappa}{\rho}}_{D} \partial_i \partial_j T_{ij}$$

b) 3 Konti $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$ bzw. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j (\rho u_j) = 0$

Addition zur Gl. in a), multipl. mit ξ

$$\Rightarrow \underbrace{\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\partial_t(\rho \xi)} + \underbrace{\rho u_j \partial_j \xi + \xi \partial_j (\rho u_j)}_{\partial_j (\rho u_j \xi)} = RHS$$

c) 11 bzw. $\frac{\partial \langle \xi \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \xi u_j \rangle = \frac{\kappa}{\rho} \partial_i \partial_j \langle T_{ij} \rangle$

$\langle \xi u_j \rangle \downarrow \langle \xi' u_j' \rangle + \langle \xi \rangle \langle u_j \rangle$

$$\Rightarrow \frac{\partial \langle \xi \rangle}{\partial t} = -\partial_j \langle \xi' u_j' \rangle - \partial_j \langle \xi \rangle \langle u_j \rangle + \frac{\kappa}{\rho} \partial_i \partial_j \langle T_{ij} \rangle$$

Abziehen von Originalgl. + Aufspalten ($\xi = \xi' + \langle \xi \rangle$, $T = T' + \langle T \rangle$, $u_j = u_j' + \langle u_j \rangle$)

$$\Rightarrow \partial \xi' / \partial t = -\partial_j \left(\xi' u_j' - \langle \xi' u_j' \rangle + \xi' \langle u_j \rangle + \langle \xi \rangle u_j' \right) + \frac{\kappa}{\rho} \partial_i \partial_j T_{ij}' = RHS'$$

Produktregel $\partial \xi'^2 / \partial t = 2 \xi' \partial \xi' / \partial t \Rightarrow \frac{\partial \xi'^2/2}{\partial t} = \xi' RHS'$

Mittelwert $\Rightarrow \partial \langle \xi'^2/2 \rangle / \partial t = \langle \xi' RHS' \rangle$

e) 5 Durch S wird eine Scherrate aufgeprägt, damit wird $\langle u'v'\rangle \sim \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} = S$ jetzt 1 von Null verschieden sein.
$\Rightarrow$ Produktion steigt, 1 v' und w' werden wachsen und $\langle u'^2\rangle \neq \langle v'^2\rangle \neq \langle w'^2\rangle$ eine 1 Konsequenz sein.
Das k-ε Modell kann die Abweichung von der Isotropie nur anfangs wiedergeben, unterschätzt die Anisotropie jedoch. 1/2 Nach Setzen von S = 0 wird schlagartig keine Scherspannung mehr 1/2 produziert, damit ist die Turbulenz nach k-ε Modell wieder 1/2 isotrop.
In der Realität dauert es, bis sich die Korrelationen wieder auflösen. 1/2

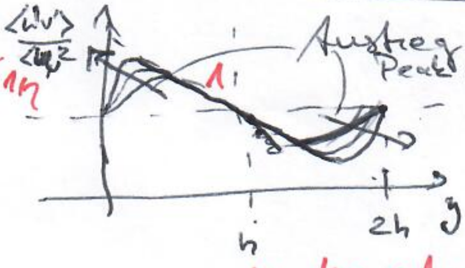
f) 4 Abweichung von $\langle u'^2\rangle = 1 \langle v'^2\rangle = \langle w'^2\rangle$ messen
z.B. durch $\frac{\langle v'^2\rangle - 1 \langle w'^2\rangle}{\langle v'^2\rangle + \langle w'^2\rangle}$ 1 (wichtig, quadratisch usw.)

oder $b_{ij} = \frac{\overbrace{\tau_{ij}^R}^{} - \frac{2}{3}\overbrace{k}^{\text{TKE}}\,\delta_{ij}}{2k}$
Reynoldsspannung

g) 1 $\omega \sim \varepsilon / k$

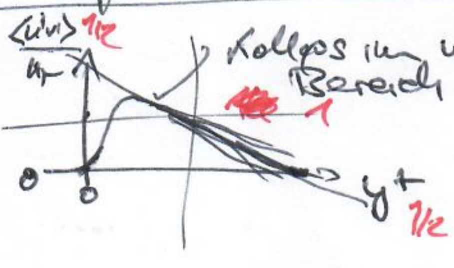
4) 2 Nein. 1 Der Mittelungsprozess könnte einzelne Terme eliminieren, z.B. ein zeitl. period. Forcing.

l) 6 1



1/2 für schiefsymmetrisch

$\ell^+ = \frac{\nu}{u_\tau}$ 1
$y^+ = y/\ell^+$



m) 4