Klausur März 2014 **HFD**

1 12

$U = \langle u \rangle$, $\quad l = \kappa \cdot \dfrac{dU/dy}{d^2U/dy^2}$, Annahme $\tau_w = \tau_{12}^R = \langle \rho u_1' u_2' \rangle$

a) $u_\tau = ?$

5

Ansatz:

$$\tau_{12}^R \overset{(1)}{=} \rho l^2 \left(\frac{d\langle u \rangle}{dy}\right)^2 = \rho \kappa^2 \frac{(d\langle u \rangle/dy)^4}{(d^2\langle u \rangle/dy^2)^2} \overset{(1)}{=} \rho u_\tau^2$$

weiter $\rho = \text{const}$, Annahme $d^2\langle u \rangle/dy^2 < 0$ hier!

$$\Rightarrow \quad u_\tau \overset{(1)}{=} -\kappa \frac{(d\langle u \rangle/dy)^2}{d^2\langle u \rangle/dy^2} \overset{(1)}{=} \boxed{\kappa \left[\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{d\langle u \rangle/dy}\right)\right]^{-1} = u_\tau}$$

b) Integration der DGL

7

$$\frac{\kappa}{u_\tau} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{d\langle u \rangle/dy}\right) \Rightarrow \frac{1}{d\langle u \rangle/dy} \overset{(1)}{=} \frac{\kappa \cdot y}{u_\tau} + \text{const}_1$$

RB $y = 0 \Rightarrow \dfrac{d\langle u \rangle}{dy} \to \infty \Rightarrow \overset{(1)}{\text{Const}_1} = 0$. Erneute Integration

$$\Rightarrow \frac{\langle u \rangle}{u_\tau} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\kappa} \ln y + \text{const}_2$$

RB bei $y = R$: $\langle u \rangle = u_c \overset{(1)}{\Rightarrow} \dfrac{u_c}{u_\tau} = \dfrac{1}{\kappa} \ln R + \text{const}_2$

Einsetzen $\Rightarrow \dfrac{u}{u_\tau} \overset{(1)}{=} \dfrac{u_c}{u_\tau} + \dfrac{1}{\kappa} \ln \dfrac{y}{R}$

$$\Rightarrow \frac{u - u_c}{u_\tau} \overset{(1)}{=} \log \frac{y}{R} \cdot \frac{\ln(10)}{\kappa} = \frac{2{,}302}{\kappa} \log \frac{y}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u - u_c}{u_\tau} \overset{(1)}{=} 5{,}75 \log y/R}$$

(2) 8

$D = 0{,}08\,m$ $\qquad \langle u\rangle(1cm) =: u$

$\langle u\rangle(3cm) = 1{,}3u$ (1)

$$\frac{\langle u\rangle}{u_\tau} = 5{,}75 \cdot \log_{10}(y/k) + 5{,}55 \quad (1)$$

oder $2{,}5 \ln(y/k) + 5{,}55$

Einheiten weggelassen, werden am Ende wieder hinzugefügt.

$$\Rightarrow 1cm: \quad \frac{u}{u_\tau} = 5{,}75 \cdot \log_{10}\frac{0{,}01}{k} + 5{,}55 \quad (1)$$

$$3cm: \quad \frac{1{,}3u}{u_\tau} = 5{,}75 \cdot \log_{10}\frac{0{,}03}{k} + 5{,}55 \quad (1)$$

$$\text{Teilen} \Rightarrow 1{,}3 = \frac{5{,}75 \cdot \log_{10}(0{,}03/k) + 5{,}55}{5{,}75 \cdot \log_{10}(0{,}01/k) + 5{,}55} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 7{,}475 \cdot \log_{10}(0{,}01/k) + 7{,}215 = 5{,}75 \cdot \log_{10}(0{,}03k) + 5{,}55$$

$$\Rightarrow 7{,}475 \cdot \log_{10} 0{,}01 - 7{,}475 \log_{10} k - 5{,}75 \log_{10} 0{,}03 + 5{,}75 \cdot \log_{10} k \quad (1)$$
$$= -1{,}665$$

[cm, statt Meter wäre einfacher]

$$\Rightarrow -6{,}19 - 1{,}725 \cdot \log_{10} k = -1{,}665$$

$$\Rightarrow \log_{10} k \approx -2{,}62 \quad (1) \qquad \Rightarrow k \approx 0{,}24\,cm \quad (1)$$

(3) a) Produktion, z.B. (0)

b) $k = \frac{\rho}{2} \langle u_i' u_i' \rangle$ (1) $\quad \left(\text{auch } \frac{\langle u_i' u_i' \rangle}{2} \text{ o.k.}\right) \qquad K = \frac{\rho}{2} \langle u_i \rangle \langle u_i \rangle$ (1)

c) $\ell = \int_0^\infty f(r)\,dr$ (1) $\qquad f$ Zweipunktkorrelation

Maß für (energiereichste) Wirbel (1) und das f. die größten Strukturen

(auch Maß für Ausdehnung des Bereichs, in dem die Geschwdk. korreliert sind)

3/2 – TKE

d) Bereich einer turbulenten Strömung (auch Wellenzahlenbereich) bei genügend hohen Reynoldszahlen, wo das Längenmaß durch ε und nicht durch ν bestimmt ist.

e) $$\varepsilon = 15\nu \overline{u'^2}/\lambda_g^2 \Rightarrow \sqrt{\overline{u'^2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{15\nu}}\,\lambda_g$$

(streng genommen für isotrope Turbulenz gültig)

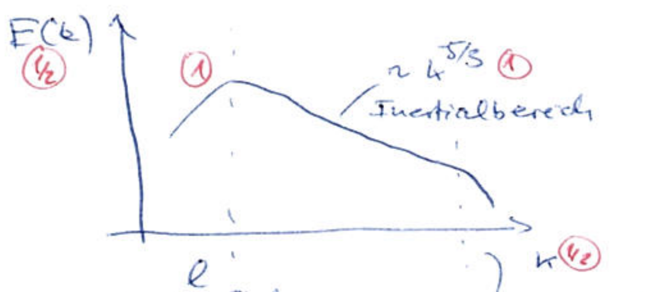
f) Strömung geht aufgrund von nicht mehr abzudämpfenden Störungen von laminaren in turbulenten Zustand über, über verschiedene Instabilitätsmechanismen.

Nein, Re_{krit} kann versch. sein.

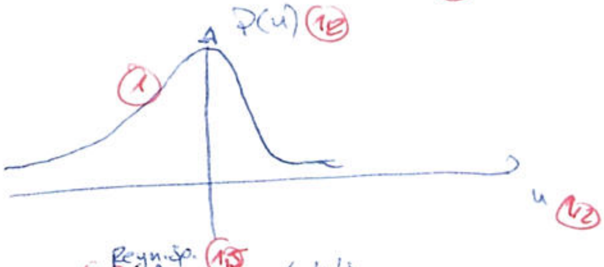
g) Instabilität an Grenzfläche zwischen horizontalen parallelen Schichten unterschiedlicher Geschwindigkeit und Dichte.

Ursache: destabilisierende Wirkung der Scherung (überwiegt stabilisierenden Einfluss der Stratifikation)

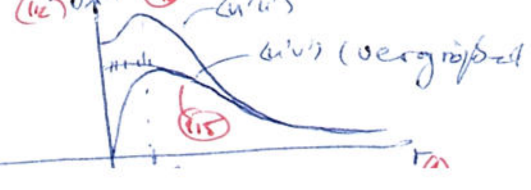
h)



i)

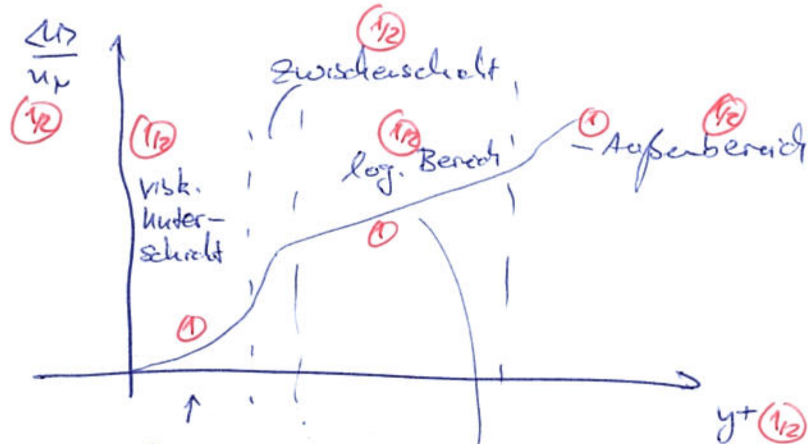


j)



Maximum nicht bei $r=0$, da die Produktion bei r^* maximal ist und hier Flu generiert.

l)



$\frac{\langle u\rangle}{u_\tau} \approx y^+$ (1) $\qquad \frac{\langle u\rangle}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + B$ (1)

m)

Modell zur Bestimmung der Größe ν_T (und l_m) (1) mittels Gleichung für die TKE k (1) und Dissipationsrate ε (1). Zwei Gleichungen $(k, \varepsilon) \Rightarrow$ Zweigleichungsmodell

Bsp.: k-ε-Modell

Vorgehensweise: • Löse Gleichungen + Gl. für (1) $k + \varepsilon$

• $\nu_t = c_\mu k^2/\varepsilon$ (1)

• $l_m = k^{3/2}/\varepsilon$ (1)

} Reynoldsspannung τ_{ij}^R

oder (1) wegfür

$\Rightarrow l_m$ nicht mehr nötig, da eindeutig bestimmt!

$\rightarrow \langle u\rangle, \langle p\rangle, k, \varepsilon$ aus Gleichungen (1)

4 a) 5

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u_j \partial_j T = \kappa \partial_j^2 T \quad (1,5)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \partial_j u_i = -\partial_i p + \mu \partial_j^2 u_i \quad (2)$$

(1/2) Konti $\Rightarrow \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} +$ (1) $\partial_j(\rho u_j T) = \kappa \partial_j^2 T$ (konservativ)

b) 15

$$\rho \frac{\partial \langle T\rangle}{\partial t} + \rho \partial_j \langle u_j\rangle\langle T\rangle = \kappa \partial_j^2 \langle T\rangle - \rho \partial_j \langle u_j' T'\rangle \quad (3)$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial T'}{\partial t} + \rho \partial_j \left(\langle u_j\rangle T' + u_j'\langle T\rangle + u_j' T' - \langle u_j' T'\rangle \right) = \kappa \partial_j^2 T'$$

(1) (3)

(1 Gleichung gefordert, 2. braucht man in a) sowieso.

ähnlich:

5/

① $$\varrho\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \varrho\,\partial_j\left(\langle u_j\rangle u_i' + u_j'\langle u_i\rangle + u_j'u_i' - \langle u_j'u_i'\rangle\right) = -\partial_i p' + \mu\,\partial_j^2 u_i$$

⑦ Gl. + Aufspalten + Abziehen

c) $\partial_t \langle u_i'T'\rangle = ?$

5/

$$\partial_t(u_i'T') \overset{①}{=} u_i'\,\partial_t T' + T'\,\partial_t u_i'$$

einsetzen ⇒

$$\partial_t(u_i'T') \overset{③}{=} -u_i'\,\partial_j\left(\langle u_j\rangle T' + u_j'\langle T\rangle + u_j'T' - \langle u_j'T'\rangle\right) + u_i'\frac{k}{\varrho}\partial_j^2$$

$$- T'\,\partial_j\left(\langle u_j\rangle u_i' + u_j'\langle u_i\rangle + u_j'u_i' - \langle u_j'u_i'\rangle\right)$$

$$-\frac{1}{\varrho}T'\,\partial_i p' + \frac{\mu}{\varrho}T'\,\partial_j^2 u_i'$$

$=: \mathrm{RHS}$

Mitteln

$\Rightarrow\ \partial_t\langle u_i'T'\rangle \overset{①}{=} \langle \mathrm{RHS}\rangle$ (mehr Vereinfachungen sind nicht verlangt)