Prof. Dr.-Ing. Holger Foysi
Lehrstuhl Strömungsmechanik

WS 2016/17

Name: ....

Vorname:.................................

Matr.-Nr.:.................................

Aufg.	Punkte
A	
B	
C	
Σ	

KLAUSUR HFD - Viel Erfolg!

A Rechenteil (21P)

1) Wir betrachten eine turbulente Rohrströmung in einem Rohr gekennzeichnet durch die Rauhigkeitshöhe k. Wir nehmen an, die mittlere Geschwindigkeit im logarithmischen Bereich variiere als $\langle u^+\rangle = 5.75\log_{10}(y/k) + 8.5$, mit y als der Koordinate von der Rohrwand ab gemessen. Die Reynoldszahl basierend auf Bulkgeschwindigkeit und Radius sei $3.537\cdot 10^5$.

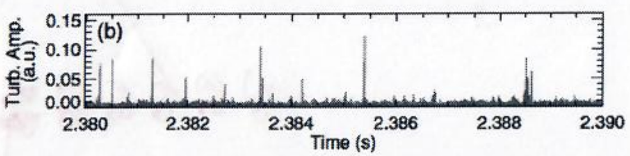
Bestimmen Sie die Schubspannungsgeschwindigkeit und die Reibungszahl λ *(es gibt zwei Wege)* unter Verwendung der obigen Formel, sowie die Wandschubspannung.
Geben Sie anschließend die turbulente Produktion unter der Annahme des Mischungswegmodells von Prandtl an (Formel). Was fällt an dem Ergebnis auf?

Gegeben: $k = 0.012mm$, $\nu = 0.018\cdot 10^{-4}$ m²/s (Wasser(=), $Re = 3.537\cdot 10^5$, $D = 400$mm. $\int x\cdot ln(x)dx = 0.5\cdot x^2\cdot(ln(x) - 0.5)$).

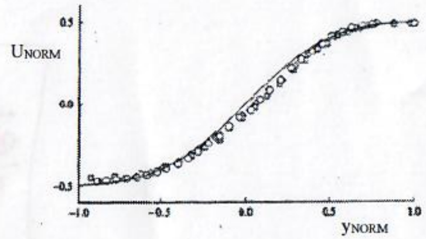
B Fragenteil (inkompressible Turbulenz) (45P)

2)

a) Wie ist die Stichprobenvarianz definiert (2P)?
b) Was bedeutet ein Konfidenzniveau von 95%? (2P)
c) Was ist der Unterschied zwischen Stichprobenmittelwert und Ensemblemittelwert? (3P)
d) Sie beobachten folgendes turbulentes Signal der quadrierten Dichtefluktuation. Welche Aussage können Sie treffen hinsichtlich Schiefe und Flachheit? (4P)



e) Skizzieren Sie ein typisches Energiespektrum als Funktion von k (Wellenlänge), normiert mit η, u'², für 3 unterschiedliche Reynoldszahlen. (4P)
f) Was ist Entrainment? (2P)
g) Wie sieht die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie exemplarisch aus? Geben Sie die Formel für einen der Terme an. Über welchen Term ist diese Gleichung mit der für die mittlere kinetische Energie verknüpft? (5P)
h) Skizzieren Sie nun drei Terme aus g) für eine Strömung nach Wahl. (4P)
i) Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsfluktuationen und Scherspannung in einem turbulenten Freistrahl über dem Radius, geeignet normiert. (5P)
j) Für eine turbulente Mischungsschicht sind normierte mittleren Geschwindigkeitsprofile quer zur Ausbreitungsrichtung an den Positionen x = 39cm, 49cm und 59cm gemessen worden (siehe Abb.). Was können Sie über das Verhalten der Mischungsschicht in diesem Bereich sagen? Haben Sie eine Idee, welche Normierung verwendet wurde?(4P)



k) Gegeben sei die 2D-Transportgleichung eines passiven Skalars in turbulenter Grenzschichtströmung:

$$\frac{\partial\langle\xi\rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\langle u\rangle\langle\xi\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(\langle v\rangle\langle\xi\rangle) - \frac{\nu}{Sc}\frac{\partial^2\langle\xi\rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(\langle v'\xi'\rangle) = 0$$

Die Strömung sei stationär, Änderungen in x-Richtung gering, die mittlere Strömung in Stromrichtung überwiege die normal zur Wand. Vereinfachen Sie die Gleichung zuerst und integrieren Sie die resultierende Gleichung von der Wand bis zu einem Punkt in der logarithmischen Schicht an dem der Reibungseinfluss *gering* ist und schätzen Sie so den turbulenten Skalarflußterm $\langle v'\xi'\rangle$ ab. (5P)
l) Was ist und wie entstehen Hufeisenwirbel? (5P)

C Statistikteil (21P)

3) Gegeben ist folgende Gleichung für den Transport einer vektoriellen Größe **v** in einer inkompressiblen turbulenten Strömung der Geschwindigkeit **u.** Die Größe **F(x,t)** ist ein veränderliches Kraftfeld, α ein skalarer Transportkoeffizient, ρ die Dichte.

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = \alpha\mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{F})$$

a) Formulieren Sie die Gleichungen in Indexnotation, nutzen Sie auch die Inkompressibilitätsbedingung für den advektiven Term. (3.5P)
b) Nehmen Sie an, die Dichte sei nicht konstant. We sähe die konservative Formulierung aus (Herleitung)? (3.5P)
c) Seien nun α und ρ konstant. Formulieren Sie nun daraus eine Transportgleichung für die Größe $\langle v_i'v_i'/2\rangle$ (bleiben Sie in Indexnotation wenn möglich, spalten Sie Korrelationen auf). (14P).

Klausur HFD WS 2018/19

① Geg.: $\langle u^+ \rangle = 5{,}75 \cdot \log_{10}(y/k) + 8{,}5$, $Re_B = \frac{u_B \cdot R}{\nu} = 3{,}53$ 1

$u_B = \frac{Re_B \cdot \nu}{R} = 3{,}183\ m/s$ 1/2 (*)

2,5P

$u_B = \frac{1}{A}\int_0^R \langle u \rangle\, 2\pi r\, dr$ 1

$$\Rightarrow \frac{u_B}{u_\tau} = 5{,}75\,\frac{1}{\pi R^2}\int \log_{10}(y/k)\, 2\pi r\, dr + 8{,}5$$ 1

$\left(y = R - r\right.$ 1/2 ; $\frac{R-r}{k} =: \eta \quad d\eta = -\frac{dr}{k}$, $r = R - k\eta$)

$$= -\frac{5{,}75 \cdot 2}{R^2}\, k^2 \int_{R/k}^{0} \log_{10}(\eta) \cdot \left(\frac{R}{k} - \eta\right) d\eta + 8{,}5$$ 1

$$= 2 \cdot 5{,}75\,\frac{k}{R}\int_0^{R/k} \log_{10}(\eta)\, d\eta - 2\cdot 5{,}75\left(\frac{k}{R}\right)^2 \int_0^{R/k} \eta \log_{10}(\eta) + 8{,}5$$

$\left(\log_{10}(\,) \overset{1}{=} \frac{\ln(\,)}{\ln(10)}\right)$

$$= 2\cdot 5{,}75\,\frac{k}{R \ln(10)}\left(\eta \ln\eta - \eta\right)\Big|_0^{R/k}$$ 1

$$- 2 \cdot 5{,}75\left(\frac{k}{R}\right)^2 \frac{1}{\ln(10)}\,\frac{\eta^2}{2}\left(\ln\eta - \frac{1}{2}\right)\Big|_0^{R/k} + 8{,}5$$ 1

6,5P

$$= 5{,}75 \log_{10}\left(\frac{R}{k}\right) \underbrace{- \frac{2 \cdot 5{,}75}{\ln(10)} + \frac{5{,}75}{2\ln(10)} + 8{,}5}_{+4{,}75}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_B/u_\tau = 5{,}75 \cdot \log_{10}\frac{R}{k} + 4{,}75}$$ 1 $\overset{(*)}{\Rightarrow} u_\tau \overset{1}{=} \frac{u_B}{5{,}75 \log_{10}\frac{R}{k} + 4{,}75}$

10,5P

$= 0{,}11\ m/s$

Für λ : $\tau_w = \rho u_\tau^2$ aber ρ nicht gegeben (1)

1. Möglichkeit (3P) $\Rightarrow$ $\tau_w = \dfrac{\lambda \rho u_B^2}{8} = \rho u_\tau^2$ (1)

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{u_\tau}{u_B}\right)^2 \cdot 8 = \lambda} \quad (1/2) \qquad \lambda \approx 0{,}01 \ \text{(gerundet)} \quad (1/2)$$

2. Möglichkeit (3P)

3P

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10}\left(\frac{R}{k}\right) + 1{,}74 \quad = 0{,}01 \ \text{(gerundet)}$$

$\rho_w = 1000 \, kg/m^3 \Rightarrow \tau_w = 12{,}1 \, N/m^2$ (1/2)

Produktion: $P = -\rho \langle u'v' \rangle \dfrac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$ (1,5)

$$-\rho \langle u'v' \rangle \approx \rho l^2 \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}\right)^2 \quad (1{,}5) \qquad l \sim \kappa \cdot y$$

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = u_\tau \frac{5{,}75}{\ln(10)} \, \frac{k}{y} \cdot \frac{1}{k} \quad (1)$$

$$\Rightarrow P \approx \rho \kappa y^2 \frac{1}{y^3} \, (1) \, \frac{5{,}75}{\ln(10)} \sim \frac{1}{y} \quad (1)$$

7,5

hängt nicht von k ab (1) (bei sehr rauhen Rohren unwahrscheinlich!)

3

(2) a) $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum \left(u^{(i)} - \langle u \rangle_s\right)^2$ 2

b) Der exakte Mittelwert befindet sich bei ~~[illegible]~~ ~~[illegible] innerhalb des Konfidenzbereichs~~ 95 von 100 gleich großen Zufallsstichproben im Konfidenzintervall

2

c) Ensemble: $u^{(i)}$ sind aus unabhängigen Realisierungen 1

Stichprobe $u^{(i)}$ 1 aus einer Realisierung

$\langle u \rangle = \frac{\sum_i u^{(i)}}{N}$ 1

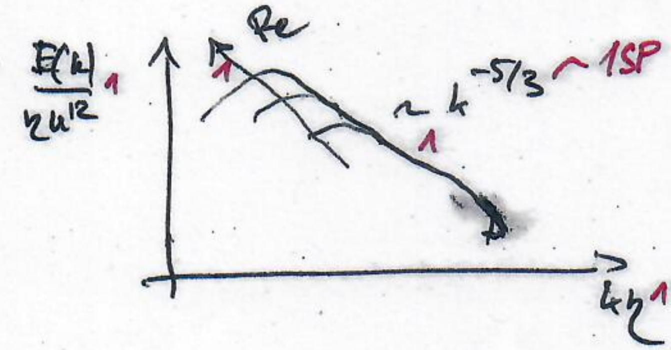
3

d) Stark intermittentes 1 Signal (Bursts). Flachheit sehr sehr groß 1. Da quadriertes Signal: keine direkte Aussage über Schiefe 1. Starke Abweichung von Gauß-Verteilung in den Extremwerten 1.

4

e)

4



f) Am Rande von Scherschichten wird durch Wirbel Fluid aus dem Aussenbereich in den turbulenten Bereich hineingezogen und vermischt

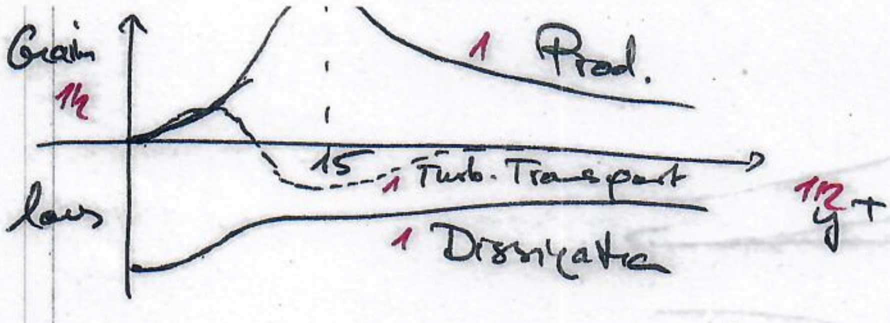
2

g) $\frac{\partial k}{\partial t}$ 1/2 + Transport 1/2 = Produktion 1/2 + Dissipation 1/2

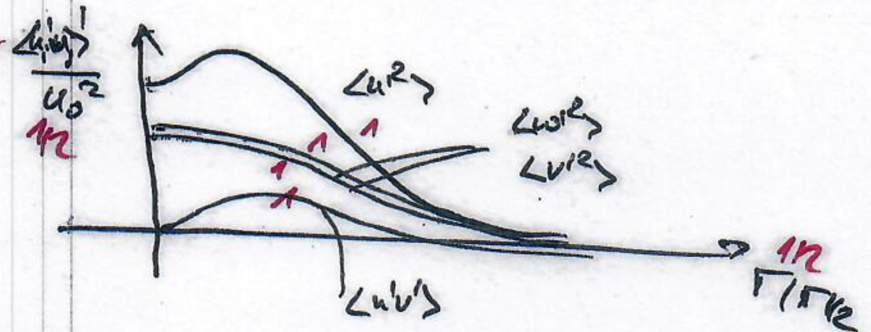
5

$$P = -\rho \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$$ 1

P 1 verknüpft die k-Gleichung mit der ⟨K⟩-Gleichung, aber entgegengesetzten Vorzeichen. Transfer von mittl. KE 1 in TKE!

h) 

z.B. Kanalströmung

i) 

j) Selbstähnliches Verhalten (Geschwdk.profile fallen übereinander)
y mit der Aufweitung (z.B. Impulsverlustdicke)
U mit der mittleren Geschwdk. oder Differenz

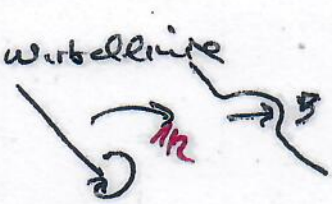
k)
$\frac{\partial\langle\xi\rangle}{\partial t} \approx 0$ (stationär), $\frac{\partial}{\partial x}\langle\,\rangle \approx 0$ (Angabe)
$\langle v\rangle \approx 0$ $\langle v\rangle$ klein

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\langle v'\xi'\rangle = \frac{\nu}{Sc}\frac{\partial^2\langle\xi\rangle}{\partial y^2} \rightarrow \langle v'\xi'\rangle = \frac{\nu}{Sc}\frac{\partial\langle\xi\rangle}{\partial y} - \frac{\nu}{Sc}\frac{\partial\langle\xi\rangle}{\partial y}\Big|_{wand}$$

$y \gg 1$, so daß visk. Anteil verschwindet

$$\Longrightarrow \boxed{\langle v'\xi'\rangle \sim -\frac{\nu}{Sc}\frac{\partial\langle\xi\rangle}{\partial y}\Big|_{wand}}$$

l) Wirbelstrukturen werden gestört
Aufstellen des Wirbels da jeder Fuss auf der entgegengesetzten Seite eine Geschwindigkeit nach $y>0$ induziert. Scherung durch schnellere Strömung darüber zieht die Wirbel in die Länge. Prozess wdh. sich.



(3) $\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\,\underline{v}\right) = \alpha\,\underline{v}\,(\nabla\cdot\underline{F})$

a) 3
$$\rho\left(\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{1/2} + \underbrace{u_j\,\partial_j\,v_i}_{\partial_j(u_j v_i)\ 1}\right) = \alpha\,\underset{1/2}{v_i}\,\underset{1/2}{(\partial_j F_j)}$$

b) 3,5
Addition der Konti-Gl. $\overset{1/2}{v_i}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j)\right) = 0$ für Multipl. 1

Produktregel 1 $\frac{\partial \rho v_i}{\partial t}_{1/2} + \frac{\partial(\rho u_j v_i)}{\partial x_j}_{1/2} = \alpha v_i\,\partial_j F_j$

14 c)
1 $v_i = \langle v_i\rangle + v_i'$, $u_i = \langle u_i\rangle + u_i'$, $F_i = \langle F_i\rangle + F_i'$

Mitteln:
(*) $$\frac{\partial\langle v_i\rangle}{\partial t}_{1/2} + \frac{\partial\langle v_i\rangle\langle u_j\rangle}{\partial x_j}_{1/2} = \frac{\alpha}{\rho}\langle v_i\rangle\,\partial_j\langle F_j\rangle_{1/2}$$
$$- \overset{1/2}{\frac{\partial\langle v_i' u_j'\rangle}{\partial x_j}} + \overset{1/2}{\frac{\alpha}{\rho}\langle v_i'\,\partial_j F_j'\rangle}$$

4,5P

$2\times$ $\langle\alpha\beta\rangle = \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle + \langle\alpha'\beta'\rangle$ gemerkt. 1

Aufspaltung + Differenz mit (*) 1

$$\frac{\partial v_i'}{\partial t}_{1/2} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\underset{1/2}{u_j'\langle v_i\rangle} + \underset{1/2}{\langle u_j\rangle v_i'} + \underset{1/2}{u_j' v_i'} - \underset{1/2}{\langle v_i' u_j'\rangle}\Big)$$
$$= \frac{\alpha}{\rho}\Big[\underset{1/2}{\langle v_i\rangle\,\partial_j F_j'} + \underset{1/2}{v_i'\langle\partial_j F_j\rangle} + \underset{1/2}{v_i'\,\partial_j F_j'} - \underset{1/2}{\langle v_i'\,\partial_j F_j'\rangle}\Big]$$

5,5P

Transportgleichung: a) Produktregel $\frac{\partial\, v_i' v_i'}{\partial t} \overset{1}{=} 2 v_i'\,\frac{\partial v_i'}{\partial t}$

b) Mitteln 1

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\partial_t\left(\frac{v_i'^2}{2}\right) + \langle v_i' u_j'\rangle\,\partial_j\langle v_i\rangle + \langle u_j\rangle\,\partial_j\left\langle\frac{v_i'^2}{2}\right\rangle + \langle v_i'\,\partial_j u_j' v_i'\rangle\\ &= \frac{\alpha}{\rho}\left(\langle v_i\rangle\langle v_i'\,\partial_j F_j'\rangle + \langle v_i'^2\rangle\langle\partial_j F_j\rangle + \langle v_i'^2\,\partial_j F_j'\rangle\right)\end{aligned}}$$ 2

4P