Prof. Dr.-Ing. Holger Foysi
Lehrstuhl Strömungsmechanik

WS 2014/15

Name: ....

Vorname:...

Matr.-Nr.: ....

Aufg.	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

KLAUSUR HFD

Rechenteil (20P)

1) Betrachten Sie eine ebene Couette-Strömung ohne aufgeprägten Druckgradienten. Die Geschwindigkeit der Platten sei $\pm U_0$.
   a) Für den laminaren Fall gilt, dass die *gesamte* Schubspannung τ = const = τ_w ist. Zeigen Sie/argumentieren Sie möglichst einfach, dass dies auch für turbulente Strömungen der Fall ist. (3P)
   b) Wir führen nun zur Vereinfachung die turbulente Eddy-Viskosität ν_T ein und setzen für die Geschwindigkeit $\langle u\rangle/U_0 = \tan(\pi \cdot y/4 \cdot h)$. Berechnen Sie ν_T (Hinweis: Nutzen Sie a)). (5P)

2) Nehmen Sie das 1/7-Gesetz für turbulente Grenzschichten an. Berechnen Sie hiermit die Impulsverlust- und Verdrängungsdicke als Funktion der Grenzschichtdicke $\delta(x)$. (8P)

3) Eine dünne Platte der Länge $10m$ und Breite $2m$ wird mit einer Geschwindigkeit U von $10m/s$ durch Wasser gezogen. Wie groß ist das Verhältnis der Leistungen die man bräuchte um die Platte zu ziehen, falls angenommen wird die Strömung sei im einen Fall turbulent von Beginn an, im anderen Fall erfolge die Transition bei einer Reynoldszahl von 5×10^5 vom laminaren in den turbulenten Zustand?
   Für die Viskosität von Wasser setzen Sie $\mu = 9.81 \cdot 10^{-4}\, Ns/m^2$. (4P)

Fragenteil (inkompressible Turbulenz) (40P)

4)
   a) Nennen Sie drei Eigenschaften von Turbulenz und deren Konsequenzen. (6P)
   b) Erklären Sie die Reynoldsaufspaltung. Ist diese auch auf statistisch instationäre Strömungen anwendbar? (2P)
   c) Definieren Sie die Mittelwerte für folgende Situationen (Formel) (3P)
      a. Stationäre Strömung
      b. Homogen in x_1 und x_3 - Richtung
      c. Statistisch instationäre Strömung
   d) Schließungsproblem (9P)
      a. Was ist mit dem Schließungsproblem der Turbulenz im statistischen Fall gemeint? Welche Größen müssen geschlossen werden?
      b. Erklären Sie die Vorgehensweise eines Eingleichungsmodells (Formeln falls nötig, um die Definitionen der zu bestimmenden Größen auszudrücken)
   e) Kolmogorov (6P)
      a. Wie skaliert das Kolmogorovmaß zum integralen Längenmaß mit der Reynoldszahl? Leiten Sie diesen Zusammenhang her.
      b. Schätzen Sie das Kolmogorovmaß für eine turbulenten Freistrahl (Luft) ab. Die Geschwindigkeitsflukutationen (RMS) betragen etwa 15% der mittleren Geschwindigkeit des Freistrahls im Zentrum, $\langle u_c\rangle = 40m/s$. Der Durchmesser des Rohres sei 1cm.
   f) Skizzieren Sie den Verlauf der Gesamtspannung, der viskosen und turbulenten Spannungen für eine Grenzschicht in Wandeinheiten (Definition). (4P)
   g) Flachheit und Schiefe
      a. Wie sind Flachheit und Schiefe für bspw. das Temperatursignal definiert? Welche physikalischen Aussage können wir aus diesen Größen ableiten? (6P)
      b. Skizzieren Sie jeweils die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für ein Signal, dessen Flachheit den Wert einer Gaussfunktion übersteigt, für ein Signal mit positiver Schiefe und für ein gaussverteiltes Signal als Referenz (4P).

Statistikteil (20P)

5) Gegeben sind folgende Gleichungen in turbulenter Strömung (ρ, κ, μ konstant):

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T\right) = \kappa\Delta T \qquad \rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u}$$

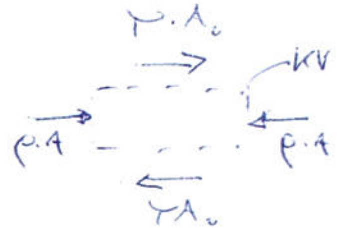
   a) Formulieren Sie die Gleichungen in Indexnotation. (3.5P)
   b) Formulieren Sie nun daraus eine Transportgleichung für $\langle u_i' T'\rangle$. Nutzen Sie die Inkompressibilitätsbedingung für den Advektionsterm. (16.5P).

Viel Erfolg!

HiFD Musterlösung 2014/15

① a) 3

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ bei KV



Drücke negativ gleich an Endflächen (1)
⇒ Tangentialkräfte auch negativ gleich (1)

$\Leftrightarrow$ τ unabhängig von y, obwohl $u = u(y)$ (1)
Kann man f. beliebiges KV erweitern: τ = constant!

b) 5

$\frac{\langle u \rangle}{u_0} = \tan(\pi y / 4h)$ $\qquad \tau_w = \rho \nu \, d\langle u \rangle / dy \big|_{y=h}$ (1)

Gesamtspannung = const = τ_w

$$\Leftrightarrow \quad \rho \nu \frac{d\langle u \rangle}{dy}\Big|_{y=h} = \rho \cdot (\nu + \nu_T) \frac{d\langle u \rangle}{dy}$$

(1/2) (1) (1/2) (1)

Einsetzen von $\langle u \rangle$ und differenzieren

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} = -\frac{1}{\cos \pi y/4h} \cdot \frac{\pi}{4h} \quad (1/2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_T = \nu \left[2 \cos^2 \left(\frac{\pi y}{4h} \right) - 1 \right]} \quad (1/2)$$

② $\frac{\langle u \rangle}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{1/7}$ (1)

$$\delta_1 = \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \left(y/\delta \right)^{1/7} \right) dy = \ldots = \frac{1}{8} \delta(x)$$

(2) (1) (1/2)

Rechnung (Integral korrekt)

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] dy = \ldots = \frac{7}{72} \delta(x)$$

(2) (1) (1/2)

(3)

4/ $c_D = \frac{0{,}455}{(\log Re_L)^{2{,}58}}$ (1) und $\frac{0{,}455}{(\log Re_L)^{2{,}58}} - \frac{1610}{Re_L}$ (1)

Verhältnis bedeutet, $\frac{1}{2} \varrho u^2 \cdot u \cdot 2 \cdot A$ fällt weg (1,5P)

$Re_L = \frac{\varrho u \cdot L}{\mu} = 1{,}02 \cdot 10^8$ (1)

Verhältnis $V = \frac{1}{1 - \frac{1610}{Re_L} / \left(\frac{0{,}455}{(\log Re_L)^{2{,}58}}\right)} =$

$V = \underline{\underline{1{,}01}}$ (1)

(4a) 6/ Nichtlinear (1) – Sensitivität bzgl. Anfangsbedingung (1)

Rotationsbehaftet (1) – dominiert durch Wirbel unterschiedlicher Größe (breites Spektrum an Längen und Zeitskalen). (1)

instationär + dreidimensional (1) – Wirbel-Streck-Stauch-mechanismus, breites Spektrum an Zeitskalen der fluktuierende Größen, selbst wenn die mittl. Strömung instationär ist. (1)

b) Aufspaltung in MW (1/2) + Fluktuation

$u = \langle u \rangle + u'$ (1/2)

Ja, falls $\langle u \rangle$ Ensemble-MW, z.B. (1)

c) a. $\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt = \langle u\rangle$ (1)

b. $\frac{1}{L_1 L_3}\int_0^{L_1}\int_0^{L_3} u(x_1,x_2,x_3,t)\,dx_1\,dx_3$ (1)

c. $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u^{(n)}(\underline{x},t)$ (1/2) $u^{(n)}$ unabh. Realisierungen (1/2)

d) a. Mittelung der NS-Gleichungen liefert die Reynolds-spannungen (1) $\langle u_i' u_j'\rangle$. Zu viele Unbekannte, zu wenig Gleichungen (1) Modelle nötig
2

b. Drücke Unbekannte durch MW aus (Gradientenansatz)
7 $\langle u_i u_j'\rangle \approx$ (1) $- \rho\nu_t \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t}$, Ansatz, (allgemeines möglich)

$\nu_t = l \cdot V_t$ (1/2) (Längenmaß - Geschwindigkeitsmaß)

$V_t = C \cdot k^{1/2} \cdot l$ (1/2), mit k TKE (*)

$\Rightarrow$ 1) Spezifiziere $l = l_m$ (Mischungsweglänge) (1)

2) Löse Transportgleichung für k (1)

3) Berechne ν_t mittels (*) (1)

4) Bestimme daraus $\langle u_i' u_j'\rangle$ (1)

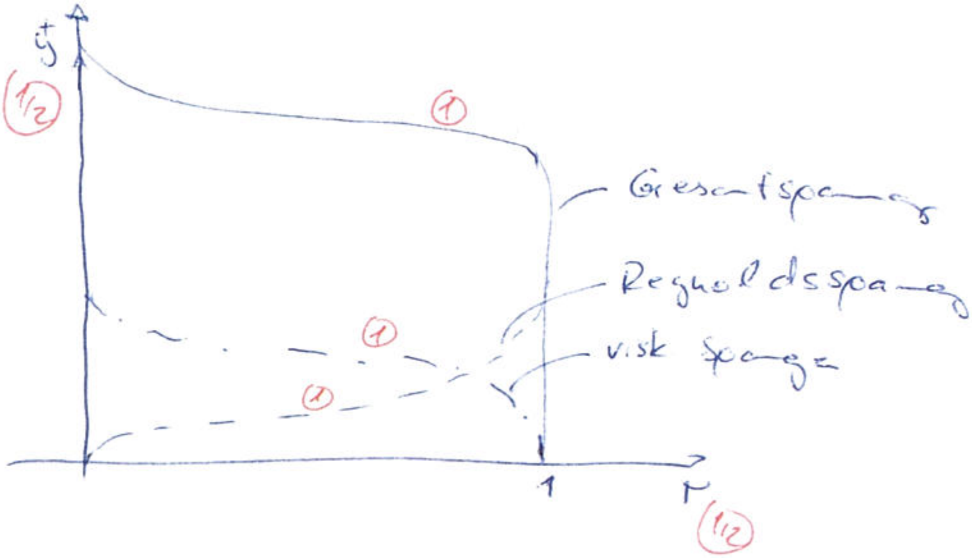
5) Löse RANS-Gleichungen (1)

e) a. $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$ (1) $\Rightarrow \frac{\eta}{l} = \frac{(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}}{k^{3/2}/\varepsilon} = \frac{l^{1/4}\,\nu^{3/4}/u^{3/4}}{l}$ (1) $= \underline{Re_l^{-3/4}}$ (1)
6

b. $\eta \approx \left(\frac{\nu^3}{\left[(0{,}15 \cdot 40\,\mathrm{m/s})^3/0{,}01\,\mathrm{m}\right]}\right)^{1/4}$ (1) (1) $= \underline{2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}}$ (1)

$\nu \approx 1{,}5\cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$

f)

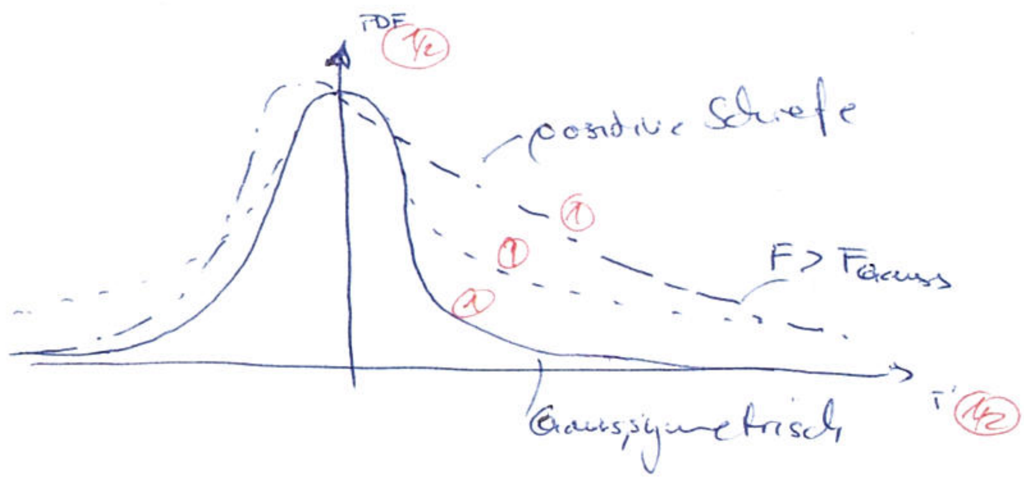


g) a. 6/ $F = \dfrac{\langle T'^4 \rangle}{\langle T'^2 \rangle^2}$ (1) $\qquad S = \dfrac{\langle T'^3 \rangle}{\langle T'^2 \rangle^{3/2}}$ (1)

F: Intermittentes Verhalten (2) (höhere Tails), Aussage über Extremwerte

S: Überwiegen im Mittel (2) positive oder negative Werte d. Fluktuation

b. 4/



5a) 3,5/

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \partial_j T \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \quad (1{,}5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_j \partial_j) u_i \right) = - \partial_i p + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2)$$

b) 16,5/ $u_j \partial_j u_i \rightarrow \partial_j (u_i u_j)$ (1) $\qquad u_j \partial_j T \rightarrow \partial_j (u_j T)$ (1)

$\langle u_i u_j \rangle \rightarrow \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u_i' u_j' \rangle$ (2)

(5)

$$\rho c_p \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_j \rangle \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) = \kappa \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial x_j^2} - \rho c_p \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_j} \quad (1,5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \rho \frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} \right) = - \partial_i \langle p \rangle + \mu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} - \rho \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_j} \quad (2)$$

Differenz von Ausgangsgleichung und Aufspaltung

2

$$\Rightarrow \rho c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} \right) = \underbrace{- \rho c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j' \langle T \rangle + \langle u_j \rangle T' + u_j' T' - \langle u_j' T' \rangle \right) + \kappa \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2}}_{RHS_T} \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial u_i'}{\partial t} = \underbrace{- \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j' \langle u_i \rangle + \langle u_j \rangle u_i' + u_j' u_i' - \langle u_i' u_j' \rangle \right) - \partial_i p' + \mu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}}_{RHS_u} \quad (3,5)$$

$$\frac{\partial T' u_i'}{\partial t} = T' \frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_i' \frac{\partial T'}{\partial t} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T' u_i'}{\partial t} = \frac{1}{\rho c_p} RHS_T \cdot u_i' + \frac{1}{\rho} RHS_u \cdot T' \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \langle T' u_i' \rangle}{\partial t} = \frac{1}{\rho c_p} \langle RHS_T \cdot u_i' \rangle + \frac{1}{\rho} \langle RHS_u \cdot T' \rangle$$

(1/2)