f. Dr.-Ing. Holger Foysi **WS2015/16**
rstuhl Strömungsmechanik

ie: .... Vorname: .... Punkte: ....
r.-Nr.: ....

MUSTERLÖSUNG

KLAUSUR EFT - Teil Fluiddynamik - Fragenteil (16 Punkte)

Bitte direkt auf die Angabe schreiben, Blatt evtl. wenden! Viel Glück

'elche Bedeutung haben die beiden Indizes im Spannungstensor eines Fluids? (2P)

τ_{ij} i: Fläche auf der Normale in Richtung i steht (1)

j: Richtung der Kraft (Spannung) auf diese Fläche (1)

Vie ist eine inkompressible Strömung definiert? Was ist der Unterschied zwischen einem ıpressiblen Fluid und einer inkompressiblen Strömung? (3P)

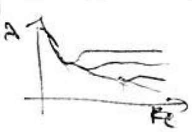
$\nabla \cdot \underline{u} = 0$ (1) bzw. $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ⇒ konstant entlang SL (1)

inkompr. Fluid:

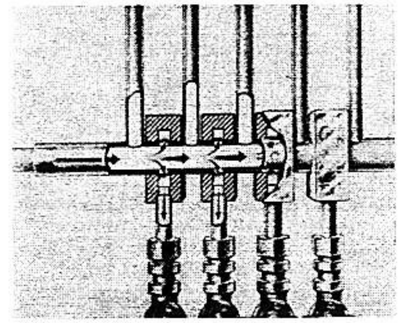
ρ = konst. überall (1)

e verhält sich die Rohrreibungszahl für hohe Reynoldszahlen und Sandkornrauigkeiten? (1P)

Die Rohrreibungszahl wird von der Reynoldszahl quasi unabhängig (1)



5) Wasser ströme reibungsfrei durch ein Rohr. Wasser kann an 4 Ventilen darunter entnommen werden (siehe Abbildung). Auf der Oberseite sind 4 Manometer-Röhren (oben offen) angebracht. Wie verändert sich der Wasserstand in den Röhren für geschlossene und für geöffnete Ventile? Kurze Begründung (5P)



geschlossen: Druckabfall für Durchfluss notwendig ⇒ Wasserstand sinkt (Verlust) (1)

falls reibungsfrei ⇒ keine Verluste, gleich, akzeptiere mit Begründung, Punkt, Strecke kein

offen: Volumenstrom sinkt (1)

~~Fluid im Hauptrohr konstant~~

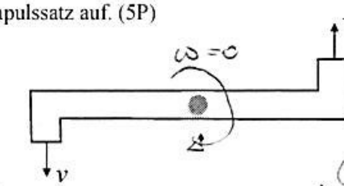
Geschwindigkeit sinkt ab

Bernoulli ⇒ Druck steigt (1)

⇒ Wasserstand steigt (1)

Begründung sollte da sein, nicht einfach raten

5) Betrachten Sie die *inkompressible, stationäre, reibungsfreie, homogene und zweidimensionale* Strömung durch einen Rasensprenger. Das Fluid dringt in der Mitte in die Arme der Länge *r* ein und fließt symmetrisch mit gleichem Massenstrom aus diesen mit Geschwindigkeit *v* wieder heraus (siehe Abb., Draufsicht). Die Drehung wird durch das Aufbringen eines Momentes M_H verhindert. Stellen Sie für diesen Fall (rechte Winkel überall) den Drehimpulssatz auf. (5P)



$2\rho \underline{u} \cdot \underline{n} A = \dot{m}$ (1)

tangential: $u_t = v$ (1)

rechte Winkel, d.h. $\underline{r} \times \underline{u} = + r u_t \cdot \underline{e}_z$ (1), $\vec{\omega} = 0$ (1)

$\Rightarrow \dot{m} \cdot r \cdot u_t$ (1) $\cdot \underline{e}_z = + |M_H| \underline{e}_z$ (1) $\Rightarrow \boxed{\dot{m} r u_t = |M_H|}$

$\oint \rho (\underline{u} \cdot \underline{n})(\underline{r} \times \underline{u})\, dA = \sum \underline{M}$

Musterlösung Klausur EFT - Teil Fluiddynamik - WS 2015/16

A1 ges.: $\dot{V}$ v_5 z_3 h_4

a) Dichte Hg: $\rho_{Hg} = \rho_{H_2O} \cdot 13{,}6 = 13.572{,}8\ \frac{kg}{m^3}$

Bernoulli-Gl.: $1 \to 2$

$$p_1 + \frac{\rho_K}{2} v_1^2 + \cancel{\rho g z_1} = p_2 + \frac{\rho_K}{2} v_2^2 + \cancel{\rho g z_2}$$

mit Konti. Gl.: $v_1 A_1 = v_2 A_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$

$$\to p_1 - p_2 = \frac{\rho_K}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{\rho_K}{2} v_1^2 \left(\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right)$$

Hydrostatik: $p_1 + \rho_K g(\cancel{x} + h_1) = p_2 + \cancel{\rho_K g x} + \rho_{Hg} g h_1$

$$p_1 - p_2 = g h_1 (\rho_{Hg} - \rho_K)$$

$$\longrightarrow g h_1 (\rho_{Hg} - \rho_K) = \frac{\rho_K}{2} v_1^2 \left(\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 g h_1 \left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_K} - 1\right)}{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1}} = 1{,}989\ \frac{m}{s}$$

$$\longrightarrow \dot{V} = v_1 A_1 = v_1 \frac{\pi}{4} D_1^2 = 0{,}0156\ \frac{m^3}{s}$$

$$\longrightarrow v_5 = v_1 \frac{A_1}{A_5} = v_1 \left(\frac{D_1}{D_5}\right)^2 = 7{,}956\ \frac{m}{s}$$

Bernoulli-Gl. Oberfl. $\to 5$: $\cancel{p_a} + \frac{\rho_K}{2}\underbrace{\cancel{v_0^2}}_{=0} + \rho_K g z_0 = \cancel{p_a} + \frac{\rho_K}{2} v_5^2 + \rho_K g z_3$

$$\rho_K g z_0 = \frac{\rho_K}{2} v_5^2 + \rho_K g z_3$$

$$\longrightarrow z_3 = z_0 - \frac{v_5^2}{2g} = 16{,}774\ m$$

Hydrostatik: $p_a + \rho_{Hg} h_4 g = p_4 + \rho_K g (h_4 + y)$

Bernoulli-Gl. $4 \to 5$: $p_4 + \frac{\rho_K}{2} v_4^2 = p_a + \frac{\rho_K}{2} v_5^2$

$v_4 = v_1$ da $D_1 = D_3 = D_4$

$$\rightarrow \quad \rho_K\, g\,(h_4 + y) - \rho_{Hg}\, g\, h_4 = \frac{\rho_K}{2}\left(v_1^2 - v_5^2\right)$$

$$h_4\,(\rho_K\, g - \rho_{Hg}\, g) = \frac{\rho_K}{2}\left(v_1^2 - v_5^2\right) - \rho_K\, g\, y$$

$$h_4 = \frac{\frac{1}{2g}\left(v_1^2 - v_5^2\right) - y}{1 - \frac{\rho_{Hg}}{\rho_K}} = 0{,}193\,m$$

b) ges.: h_4

$$Re_3 \approx \frac{v_3 \cdot D_3 \cdot \rho_K}{\mu_K} = \frac{\rho_K\, v_1\, D_1}{\mu_K} = 248.625 \approx 250.000 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{k_s}{D_3} = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{0{,}1}\,\frac{m}{m} = 2 \cdot 10^{-4} \;\rightarrow\; \text{Moody-Diagr.:}\; \lambda = 0{,}0165$$

v_1 und v_5 ändern sich:

Bernoulli Oberfl $\rightarrow$ 5:

$$\rho_K\, g\, z_0 = \frac{\rho_K}{2} v_5'^2 + \frac{\rho_K}{2} v_5'^2 \cdot \lambda \frac{L_3}{D_3} + \rho_K\, g\, z_3$$

$$v_5' = \sqrt{\frac{2g(z_0 - z_3)}{1 + \lambda \frac{L_3}{D_3}}} = 7{,}371\,\frac{m}{s}$$

Konti-Gl.: $\quad v_1' = v_5' \frac{A_5}{A_1} = v_5' \left(\frac{D_5}{D_1}\right)^2 = 1{,}843\,\frac{m}{s}$

mit Beziehung für h_4 aus Teil a):

$$h_4 = \frac{\frac{1}{2g}\left(v_1'^2 - v_5'^2\right) - y}{1 - \frac{\rho_{Hg}}{\rho_K}} = 0{,}166\,m$$

A2 a) ges.: $|\underline{F}|$ und Richtung von $\underline{F}$

$\dot{V} = 250 \, \frac{l}{s} = 0{,}25 \, \frac{m^3}{s}$ $\qquad p_1 = 0{,}15 \, \frac{N}{mm^2} = 150.000 \, Pa$

$D_1 = 2 R_1 = 0{,}3 \, m$ $\qquad D_2 = 0{,}15 \, m$

$v_1 = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi}{4} D_1^2} = 3{,}537 \, \frac{m}{s}$; $\quad v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = 14{,}148 \, \frac{m}{s}$

$W = V_{Kr} \cdot \rho \cdot g = 0{,}9 \, m^3 \cdot 998 \, \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81 \, \frac{m}{s^2} = 8811 \, N$

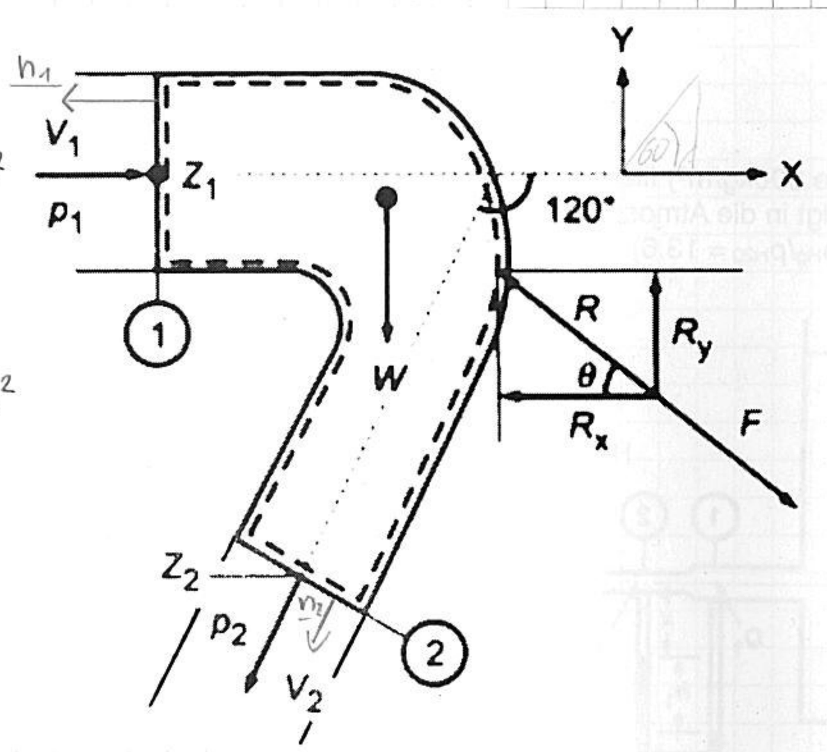
Bernoulli-Gl: 1→2

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \underbrace{\cancel{\rho g z_1}}_{=0} = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 - \rho g z_2$$

$$p_2 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) + p_1 + \rho g z_2 = 71.046 \, Pa$$

$A_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 = 0{,}0707 \, m^2$

$A_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2 = 0{,}0177 \, m^2$



$\underline{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{n}_2 = \begin{pmatrix} -\cos 60° \\ -\sin 60° \end{pmatrix}$

$\underline{V}_1 = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{V}_2 = v_2 \begin{pmatrix} -\cos 60° \\ -\sin 60° \end{pmatrix}$

Kraft auf KV:

$\underline{R} = \begin{pmatrix} -R_x \\ R_y \end{pmatrix}$

$\underline{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ -W \end{pmatrix}$

Impulssatz:

$$\rho \int_{A_1} \underline{v}_1 (\underline{v}_1 \cdot \underline{n}_1) \, dA_1 + \rho \int_{A_2} \underline{v}_2 (\underline{v}_2 \cdot \underline{n}_2) \, dA_2 = -\int_{A_1} p_1 \underline{n}_1 \, dA_1 - \int p_2 \underline{n}_2 \, dA_2 + \underline{R} + \underline{W}$$

x-Richtung

$$-\rho v_1^2 A_1 - \rho v_2^2 \cos 60° A_2 = p_1 A_1 + p_2 \cos 60° A_2 - R_x$$

$$R_x = \rho \dot{V} (v_1 + v_2 \cos 60^\circ) + p_1 A_1 + p_2 A_2 \cos 60^\circ$$

$$R_x = 998 \tfrac{kg}{m^3} \cdot 0{,}25 \tfrac{m^3}{s} (3{,}537 \tfrac{m}{s} + 14{,}148 \tfrac{m}{s} \cos 60^\circ) + 150.000 \,Pa \cdot 0{,}0707 m^2$$
$$+ 71.046 \,Pa \cdot 0{,}0177 m^2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$R_x = 13.881 \,N$$

y-Richtung:

$$0 - \rho v_2^2 \sin 60^\circ A_2 = 0 + p_2 \sin 60^\circ A_2 + R_y - W$$

$$R_y = W - \rho \dot{V} v_2 \sin 60^\circ - p_2 \sin 60^\circ A_2$$

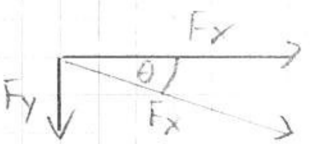
$$R_y = 8811 \,N - 998 \tfrac{kg}{m^3} \cdot 0{,}25 \tfrac{m^3}{s} \cdot 14{,}148 \tfrac{m}{s} \cdot \sin 60^\circ$$
$$- 71.046 \,Pa \cdot 0{,}0177 m^2 \cdot \sin 60^\circ$$

$$R_y = 4665 \,N$$

$$\Rightarrow \quad \underline{R} = \begin{pmatrix} -13.881 \,N \\ 4665 \,N \end{pmatrix}$$

Kraft auf Bewandung: $\underline{F} = -\underline{R} = \begin{pmatrix} 13.881 \,N \\ -4.665 \,N \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \quad |\underline{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 14.644 \,N$$

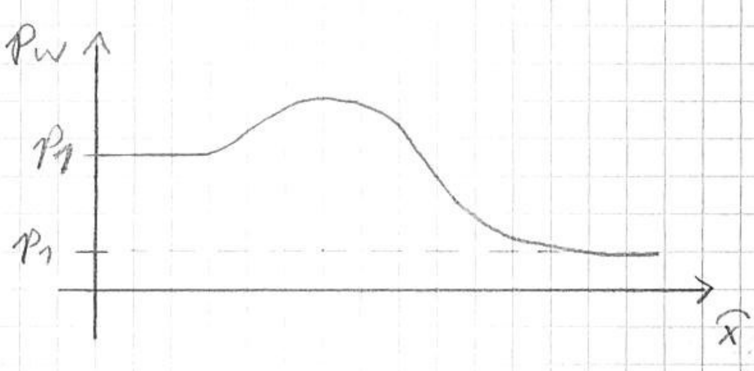


$$\theta = \arctan \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = 18{,}6^\circ$$

b)

ges.:

P_{wand}



c)

- Lineare Durchmesserreduktion verringert Krümmervolumen
  ↳ Gewichtskraft des Wassers im Krümmer sinkt
- Kräfte infolge des Druckes auf und des Impulsflusses durch Einlass / Auslass bleiben gleich, da diese Querschnitte unverändert

$\Longrightarrow$ F_x bleibt gleich $\qquad$ F_y wird kleiner

d) ges.: $\dot{V}$

$$u(r) = u_1 \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right) \qquad \text{mit } u_1 = 4\,\frac{m}{s}$$

$$\dot{V} = \int_{A_1} u_1 \, dA_1 = \int_{A_1} u_1 \left(1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right) dA_1$$

$$= 2\pi u_1 \int_{r=0}^{r=R_1} \left(1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2 r \, dr = 2\pi u_1 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R_1^2}\right)\Bigg|_0^{R_1}$$

$$\dot{V} = 2\pi u_1 \frac{R_1^2}{4} = \frac{\pi}{2} u_1 R_1^2 = 0{,}141\,\frac{m^3}{s}$$

$\Rightarrow$ $\dot{V}$ sinkt