1) 8

log. Gesetz: $\langle u\rangle^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + B$ (1)

$y^+ = y\underbrace{\frac{u_\tau}{\nu}}_{l_\nu}$ (1/2) $\quad \langle u\rangle^+ = \langle u\rangle / u_\tau$ (1/2)

$$\Rightarrow \frac{d\langle u\rangle}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{u_\tau}{\kappa}\ln\left(y\frac{u_\tau}{\nu}\right)+B\right) = \frac{u_\tau}{\kappa}\frac{d\ln\frac{y u_\tau}{\nu}}{dy}$$

$$= \frac{u_\tau}{\kappa}\frac{1}{y}$$ (1)

$$\Rightarrow \left.\frac{d\langle u\rangle}{dy}\right|_{y=\bar{y}} = \frac{u_\tau}{\kappa}\frac{1}{\bar{y}} = \frac{u_{bulk}}{\delta} \Rightarrow \frac{\bar{y}}{\delta} = \frac{u_\tau}{\kappa u_{bulk}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\lambda}{8}} \approx 0{,}86\sqrt{\lambda}$$ (1) (1/2) (1/2)

$$\Rightarrow \frac{\bar{y}}{l_\nu} = \frac{\delta}{l_\nu}\frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\lambda}{8}} = \frac{u_\tau\delta}{\nu}\frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\lambda}{8}} = \frac{Re_\tau}{\kappa}\sqrt{\frac{\lambda}{8}}$$ (1/2)

$$= \frac{u_\tau}{u_{bulk}}\frac{u_{bulk}\delta}{\nu}\frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\lambda}{8}} \overset{(*)}{=} \frac{Re}{2}\cdot\frac{1}{\kappa}\frac{\lambda}{8}$$ (1/2) (1/2)

↑ Durchmesser bezogen

$$\approx 0{,}15\; Re\cdot\lambda$$ (1/2)

(*) $\frac{u_\tau}{u_{bulk}} \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$

---

2) 4

$u_0 = c\cdot\frac{1}{x}$ (1) $\Rightarrow \frac{du_0}{dx} \overset{(1)}{=} -\frac{c}{x^2} \overset{(1)}{=} -\frac{u_0}{x}$

auch $\frac{c}{(x-x_0)}+B$ möglich, Struktur (1) zeigt $x_0 = 0,\ B = 0$ aufgrund des Ergebnisses.

3) Höchster Punkt bei etwa 2/3 δ ⇒ nicht in log.-Schicht. In der VL haben wir Abweichungen bei $y/\delta \approx 0{,}2$ und höher gesehen, so dass bei $>0{,}48$ Vorsicht geboten ist.

$$\frac{\langle u\rangle}{u_\tau} = \frac{1}{k}\ln\left(y_2 \frac{u_\tau}{\nu}\right) + B \Rightarrow \text{Differenz}$$

$$\langle u\rangle_2 - \langle u\rangle_1 = \frac{u_\tau}{k}\left(\ln\left(\frac{y_2 u_\tau}{\nu}\right) - \ln\left(\frac{y_1 u_\tau}{\nu}\right)\right)$$

$$= \frac{u_\tau}{k}\ln\left(y_2/y_1\right)$$

$$\Rightarrow u_\tau = \frac{\Delta u \cdot k}{\ln(y_2/y_1)} \overset{\text{einsetzen}}{=} 1{,}66\,m/s \quad (\nu = 1{,}5\cdot 10^{-5}\,m^2/s)$$

Check: (⇒ niedrigster Pkt 0,2δ) $y^+ = 243$ und damit $40 < y^+ <$

höchster Pkt: $y_3 = 2{,}05\,cm \rightarrow y_3^+ = 2269$

log. Gesetz:

$$\langle u\rangle_3 = u_\tau\left(\frac{\ln y_3^+}{k} + 5{,}1\right) = 39{,}75\,m/s$$

Korrektur zum Coles'schen Gesetz (law of the wake):

$$\left(40{,}1\,m/s - 39{,}75\,m/s\right)/1{,}66\,m/s = 0{,}21$$

$$\frac{2\Pi}{k}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) = 3{,}52\,\Pi \Rightarrow \Pi = \frac{0{,}21}{3{,}52} = 0{,}060$$

$\frac{2{,}05}{3{,}2}$

oder $\frac{2\pi}{k}\left(3\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right)$

4a) Die Gleichung ist linear (1) in $\underline{\omega}$. Wirbel-Streck und Stauchterm (1) $(\underline{\omega}\cdot\nabla)\underline{u}$ (1) kann $\underline{\omega}$ erzeugen, $\frac{D}{Dt}\underline{\omega}$ entspricht Advektion entlang SL. (1)

4/

b) Isotrope Turbulenz. (1)

1/

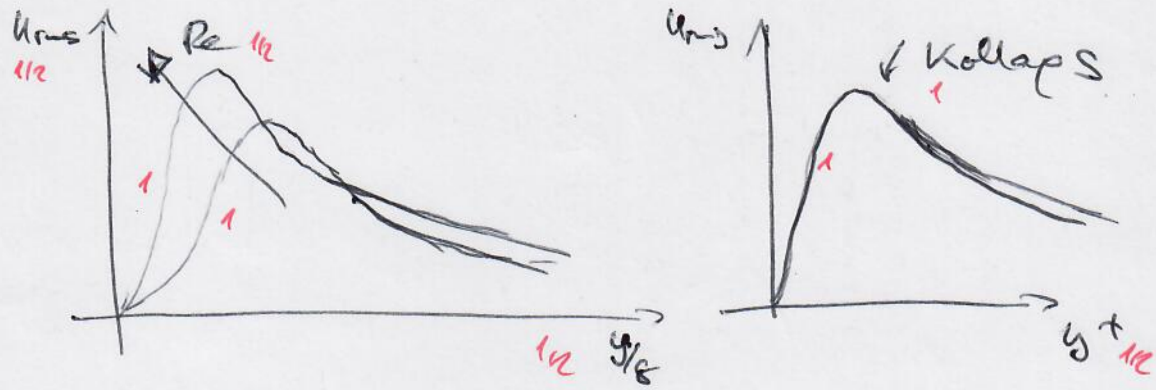
c) $\delta(t) = 0{,}37 \dfrac{x}{(u_e x/\nu)^{1/5}}$ (1) $\approx$ 786 m (30 m/s) (1)
979 m (10 m/s)

($x = 600$ km, $u_e \approx 30$ m/s (1/2), $\nu = 10^{-5}\,m^2/s$ (1/2))

3/

d)

6/



e) Wegen $\delta \sim x^{4/5}$ (1) $\Rightarrow$ auch δ_1 und $\delta_2 = \theta$ (1) skalieren mit $x^{4/5}$ (folgt z.B. aus $u/u_e = (y/\delta)^{1/n}$ (1) und Einsetzen dann $\delta_1/\delta \sim \frac{1}{1+n}$ und $\frac{\theta}{\delta} \sim \frac{n}{(1+n)(2+n)}$)

3/

f) Mittelung der Gleichungen führt aufgrund des nichtlinearen Terms (1/2) auf Terme für Korrelationen (1/2) der Form $\langle u_i' u_j' \rangle$. Für diese fehlen Transportgleichungen (1/2) $\Rightarrow$ weniger Gl. wie unbekannte. Gleichungen für Momente der Ordnung n liefern unbekannte Korrelationen der Ordnung n+1 (1/2) usw.

2/

g) Von 100 Stichproben Realisierungen zur Berechnung enthält das Intervall in 95/100 Fällen (gleich große Zufallsstichproben) den wahren MW. (1,5)

1/

Konfidenzintervall

$$\left[\langle u \rangle_s - z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma_u}{\sqrt{N}} \; ; \; \langle u \rangle_s + z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma_u}{\sqrt{N}} \right]$$

— Standardabw., bekannt (1/2) (1)

(1) ↑ — Anzahl samples (1/2)

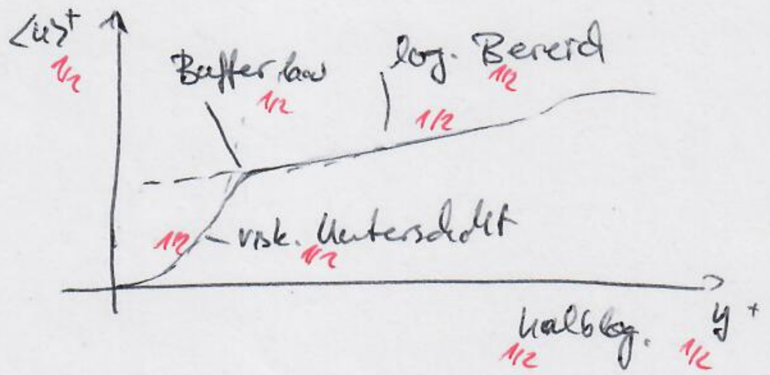
$z_{(1-\alpha/2)}$ – Quantil, $(1-\alpha/2)$% der Werte unterhalb dieser Grenze (1/2)

P-Wert: Wahrscheinlichkeit unter Voraussetzung dass die Nullhypothese gilt dass der beobachtete Wert der Teststatistik realisiert wird.
(Ablehnen von H0 falls $P < \alpha$)

Aufgabe $[50{,}988 ; 51{,}692]$ (1/2) (1/2) Konfidenzintervall
50 1/s nicht enthalten (1/2), nein (1/2).

H0 : $S = 50$ 1/s (1)

h)
4



i)
8

Integriere 2. Gleichung $\Rightarrow \frac{P}{\varsigma} + \langle v'^2 \rangle = \frac{P_0(x)}{\varsigma}$ (2) ($v' = 0$ an Wand) 1/2 Pkt

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P_0}{\partial x} \quad (1)$$

Integriere 1. Gleichung $\Rightarrow$ $0 = -\frac{y}{\varsigma}\frac{\partial P_0}{\partial x_0} - \overline{u'v'} + \nu \frac{d\langle u \rangle}{dy} - u_\tau^2$ (2)
je von Wand bis y

$\tau = \varsigma u_\tau^2$ (1) an Wand

bei $y = h$ $\langle u'v' \rangle = 0$ (1/2), $\partial \langle u \rangle / \partial y = 0$ (1/2)

$$\Rightarrow \frac{h}{\varsigma}\frac{dP_0}{dx} = -u_\tau^2 \; (1/2) \Rightarrow \boxed{\frac{dP_0}{dx} = -\frac{\tau_w}{h}} \; (1/2)$$

5 a) 4/

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \partial_j u_i = -\partial_i p/\rho + \nu \partial_j \tau_{ji} \qquad (1)$$

$u_j \partial_j u_i = \partial_j (u_i u_j)$ 1/2

da $\partial_j u_j = 0$ 1/2

b) 16/ Mittelung

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \partial_j \langle u_i u_j \rangle = -\partial_i \langle p/\rho \rangle + \nu \partial_j \langle \tau_{ji} \rangle$$

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u_i' u_j' \rangle \qquad (2)$$

Flukt.: Gleichung (1) − (2) 1

$\Rightarrow$ Aufspalten $u_i \to \langle u_i \rangle + u_i'$, $\tau_{ij} \to \langle \tau_{ij} \rangle + \tau_{ij}'$, $p \to \langle p \rangle + p'$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j' \langle u_i \rangle + \langle u_j \rangle u_i' + u_i' u_j' - \langle u_i' u_j' \rangle \right) = -\partial_i (p'/\rho) + \nu \partial_j \tau_{ij}'$$

~ symmetrisch ← gP

Transportgleichung:

$$\partial_t u_i' u_j' = u_j' \partial_t u_i' + u_i' \partial_t u_j' \quad 1$$

Index umbenennen 1

$$\Rightarrow \partial_t u_i' u_j' = u_j' \partial_t u_i' + u_i' \partial_t u_j' + u_j' \partial_k \left(u_k' \langle u_i \rangle + \langle u_k \rangle u_i' + u_i' u_k' - \langle u_i' u_k' \rangle \right)$$

1 für Index i

$$+ u_i' \partial_k \left(u_k' \langle u_j \rangle + \langle u_k \rangle u_j' + u_j' u_k' - \langle u_j' u_k' \rangle \right)$$

1 für Index j

multiplizieren

$$= -u_j' \partial_i p'/\rho - u_i' \partial_j p'/\rho + \nu u_j' \partial_k \tau_{ik}' + \nu u_i' \partial_k \tau_{jk}'$$

Alle Terme auf rechte Seite, außer Zeitterm

Mitteln

$$\partial_t \langle u_i' u_j' \rangle = \langle RHS \rangle \quad 1$$