Musterlösung Klausur Strömungslehre WiSe 2015 / 2016

Total 31,5

A1

$2 v_1 A_1 = v_5 A_5$ (1) $\qquad v_1 = \frac{1}{2} v_5 \left(\frac{d_5}{d_1}\right)^2 = 0{,}6 \ \frac{m}{s}$ (0,5)

a)
Σ 5

$v_2 A_2 = 2 \cdot v_1 A_1$ (0,5) $\qquad v_2 = 2 \cdot v_1 \frac{A_1}{A_2} = 2 \cdot v_1 \cdot 1 = 1{,}2 \ \frac{m}{s}$ (0,5)

$v_3 A_3 = v_5 A_5$ (0,5) $\qquad v_3 = v_5 \left(\frac{d_5}{d_3}\right)^2 = 0{,}3 \ \frac{m}{s}$ (0,5)

(0,5) $Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu} = 3.333$ (1) turbulente Strömung

b)
Σ 7

$\zeta_{Di} = 0{,}2 \left(1 - \left(\frac{A_{vor}}{A_{nach}}\right)^2\right) = 0{,}2 \left(1 - \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4\right) = 0{,}1875$ (0,5) (0,5)

$p_V = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\zeta_E + \zeta_S + \lambda \frac{L_1}{d_1}\right) + \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(\zeta_M + \zeta_{Di} + \lambda \frac{L_2}{d_2}\right)$ (0,5) (0,5) (0,5) (0,5) (0,5) (0,5)

$+ \frac{\rho}{2} v_3^2 \left(2 \cdot \zeta_K + \lambda \frac{L_3 + L_4 + L_5}{d_3}\right)$ (0,5) (0,5)

mit $v_2 = 2 v_1$ (0,5) und $v_3 = 0{,}5 v_1$ (0,5)

$p_V = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\zeta_E + \zeta_S + \lambda \frac{L_1}{d_1} + 4\left(\zeta_M + \zeta_{Di} + \lambda \frac{L_2}{d_2}\right) + 0{,}25\left(2 \zeta_K + \lambda \frac{L_3 + L_4 + L_5}{d_3}\right)\right)$ (0,5)

$= \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(165{,}5 + 2 \cdot 16{,}3875 + \frac{1}{2} 40\right) = 43.389 \ Pa$ (0,5)

c) Bernoulli-Gl. 0 → 5:
Σ 6,5

$\cancel{p_0} + \underbrace{\frac{\rho}{2} v_0^2}_{=0} + \rho g H = \underbrace{\cancel{p_5}}_{= p_0} + \frac{\rho}{2} v_5^2 + \rho g (L_2 + L_3 - L_5) + p_V - \Delta p$ (4)

$\Delta p = \frac{\rho}{2} v_5^2 + p_V + \rho g (L_2 + L_3 - L_5 - H) = 571.869 \ Pa$ (0,5)

(1) (0,5)

$P = \frac{\Delta p \dot{V}}{\eta}$ (0,5) $= \frac{\Delta p}{\eta} \cdot \frac{\pi}{4} d_5^2 v_5 = 59{,}9 \ W \approx 60 \ W$

d)
Σ 4,5

$v_1^* = v_2^*$ (1) $= v_5^* \cdot \left(\frac{d_5}{d_1}\right)^2 = v_5^* \, 0{,}04$ (0,5)

$v_3^* = v_5^* \left(\frac{d_5}{d_3}\right)^2 = v_5^* \cdot 0{,}01$ (0,5)

$p_V^* = \frac{\rho}{2} v_5^{*2} \left(0{,}0016\left(\zeta_E + \zeta_S + \lambda \frac{L_1}{d_1} + \zeta_M + \zeta_{Di} + \lambda \frac{L_2}{d_2}\right)\right.$ (0,5)

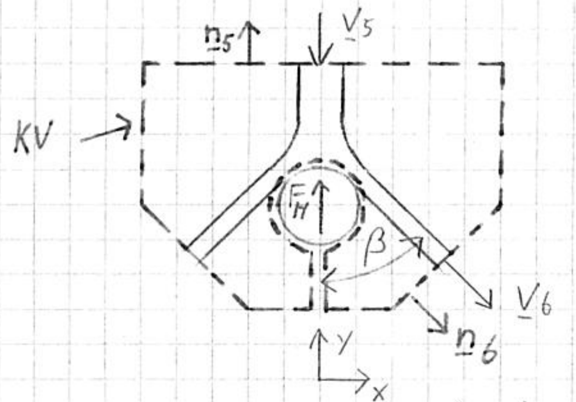
$\left. + 0{,}0001\left(2 \zeta_K + \lambda \frac{L_3 + L_4 + L_5}{d_3}\right)\right)$

$p_V = \frac{\rho}{2} v_5^{*2} \cdot 0,295$ 0,5 — 1 für Bernoulli

Bernoulli-Gl. $0 \to 5$: $\rho g H = \frac{\rho}{2} v_5^{*2}(1+0,295)+\rho g(L_2+L_3-L_5)-\Delta p$

$$v_5^* = \sqrt{\frac{\rho g(H+L_5-L_3-L_2)+\Delta p}{\frac{\rho}{2}\cdot 1,295}} = 27,6\ \frac{m}{s} \quad 0,5$$

e)
Σ 8,5



$\underline{n}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,5 $\quad \underline{n}_6 = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ -\cos\beta \end{pmatrix}$ 0,5

$\underline{v}_5 = v_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 0,5 $\quad \underline{v}_6 = v_6 \begin{pmatrix} \sin\beta \\ -\cos\beta \end{pmatrix}$ 0,5

Kraft auf KV: $F_H = \begin{pmatrix} 0 \\ |F_K| \end{pmatrix}$ 0,5

Bernoulli-Gl. $5 \to 6$: $\cancel{p_5} + \frac{\rho}{2} v_5^2 + \cancel{\rho g z_5} = \cancel{p_6} + \frac{\rho}{2} v_6^2 + \cancel{\rho g z_6}$ — 1 Druck, 1 $\rho g z$, 0,5 $\frac{\rho}{2} v^2$

mit $p_5 = p_6 = p_0$; Keine Gewichtskraft $g = 0$; Keine Verzögerung d. Reibung

$\to v_5 = v_6 \quad \longrightarrow$ Konti. Gl.: $v_5 A_5 = 2 \cdot v_6 A_6 \qquad A_6 = \frac{1}{2} A_5$ 0,5

Impulssatz y-Richtung:

0,5 0,5 0,5 0,5

$$-\rho v_5 (0\cdot 0 + (-v_5)\cdot 1) A_5 + 2 \cdot \rho v_6 (-\cos\beta)(\sin^2\beta + (-\cos\beta)^2) A_6 = F_H$$

Kein Druckkräfte da überall $p = p_0$ 0,5

$$+\rho v_5^2 A_5 - \rho v_5^2 \cos\beta A_5 = |F_K|$$

$$\rho v_5^2 A_5 (1 - \cos\beta) = |F_K|$$

$$\beta = \arccos\left(-\frac{|F_K|}{\rho v_5^2 \frac{\pi}{4} d_5^2} + 1\right) = 44,2° \quad 0,5$$

Total: 16,5 Pkt

A2

a) $F_n(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(x + n\cdot a + iy) =$ 0,5

$\Sigma 4{,}5$

0,5 Polarform

$F_n(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\sqrt{(x+na)^2+y^2} \cdot e^{i \arctan\left(\frac{y}{x+na}\right)}\right)$ 0,5 0,5

$F_n(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left(i \frac{1}{2} \ln((x+na)^2+y^2) + i^2 \cdot \arctan\left(\frac{y}{x+na}\right)\right)$

$\psi_n = \operatorname{Im}(F_n(z)) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln((x+na)^2+y^2)$ 0,5

$u_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial y} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2y}{(x+na)^2+y^2}$ 0,5 0,5

$v_n = -\frac{\partial \psi_n}{\partial x} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2(x+na)}{(x+na)^2+y^2}$ 0,5 0,5

b) Prinzip: Superposition 0,5

$\Sigma 1{,}5$

$\psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \ln((x+na)^2+y^2)$ 1

c) $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{1}{2}\left[\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{2}\left[\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]\right)$

$\Sigma 3{,}5$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ innere Ableitung

$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\frac{1}{2}\left[\sinh\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \cdot \frac{2\pi}{a} - 0\right]}{\frac{1}{2}\left[\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]} = -\frac{\Gamma}{2a} \frac{\sinh\left(\frac{2\pi y}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}$ 0,5 Ergebnis

Ableitung ln 1

0,5 innere Abl.

$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\frac{1}{2}\left[0 + \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \frac{2\pi}{a}\right]}{\frac{1}{2}\left[\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]} = \frac{\Gamma}{2a} \frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}$ 0,5 Ergebnis

d) $|y| >> a$

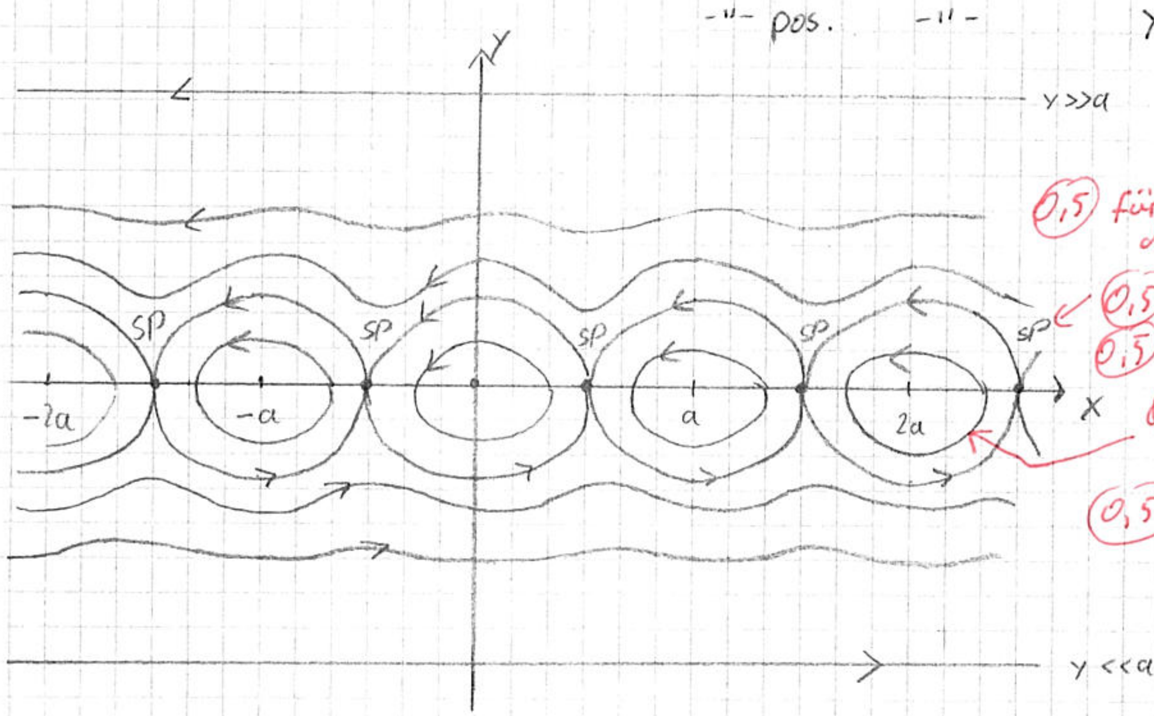
$\Sigma 6$

$u = -\frac{\Gamma}{2a} \frac{\infty}{\pm\infty \mp 1} \rightarrow u = -\frac{\Gamma}{2a}$ für $y >> a$ 0,5 0,5

$u = \frac{\Gamma}{2a}$ für $y << a$ 0,5

$v = \frac{\Gamma}{2a} \frac{\pm 1}{\pm\infty \mp 1} \rightarrow v = 0$ 0,5 0,5 entspricht horizontaler Parallelströmung in neg. x-Richtung für $y >> a$ (0,5)

-"- pos. -"- $y << a$



(0,5)

(0,5) für Wellenform der Stromlinien

(0,5) Staupunkt

(0,5) Position d. SP

(0,5) innerer Wirbel

(0,5) Richtungspfeile

e) $$v\left(x = n\frac{a}{2},\ y=0\right) = \frac{\Gamma}{2a}\ \frac{\sin\left(\frac{2\pi n\cdot a}{2a}\right)}{\cdots} = \frac{\Gamma}{2\pi}\ \frac{\sin(\pi n)}{\cdots} = 0$$ (0,5)

$\Sigma 3$

$$L(s) = \oint_s \underline{u}\, d\underline{s}$$ (0,5)

Integration über senkrechte Abschnitte der Kurve K heben sich gegenseitig auf, wegen Periodizität. (0,5)

$$\rightarrow L = \int_{s=-\frac{a}{2}}^{-\frac{3}{2}a} u\, ds + \int_{-\frac{3}{2}a}^{-\frac{a}{2}} u\, ds = -\frac{\Gamma}{2a}\, s\Big|_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{3}{2}a} + \frac{\Gamma}{2a}\, s\Big|_{-\frac{3}{2}a}^{-\frac{a}{2}}$$ (0,5) (0,5)

$$L = -\frac{\Gamma}{2a}\cdot a\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Gamma}{2a}\cdot a\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) = \Gamma$$ (0,5)

A3

a) $\Sigma 4$

$$\rho_\infty = \frac{p_\infty}{T_\infty R} = 0{,}757 \ \mathrm{kg/m^3} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}35$$

0,5 0,5 0,5

$$Ma_\infty = \frac{u_\infty}{c_\infty} = \frac{u_\infty}{\sqrt{\gamma R T_\infty}} = 1{,}56$$

0,5 0,5 0,5

$$T_{0\infty} = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_\infty^2\right) = 379{,}3\,K$$

0,5 0,5

b) $\Sigma 7$

$$\frac{p_2}{p_\infty} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(Ma_\infty^2 \sin^2\sigma - 1\right) = 1{,}4919$$

0,5 0,5

$$p_2 = 1{,}4919 \cdot p_\infty = 0{,}895 \ \mathrm{bar}$$

0,5

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\frac{\gamma Ma_\infty^2 \sin^2\sigma + 1}{Ma_\infty^2 \sin^2\sigma}\left(Ma_\infty^2 \sin^2\sigma - 1\right) = 1{,}11125$$

0,5 0,5

$$T_2 = 1{,}11125 \cdot T_1 = 295{,}6\,K$$

0,5

$$\rho_2 = \frac{p_2}{T_2 R} = 1{,}016 \ \mathrm{kg/m^3}$$

0,5 0,5

$$Ma_2^2 \cdot \sin^2(\sigma - \vartheta) = \frac{(\gamma-1) Ma_\infty^2 \sin^2\sigma + 2}{2\gamma Ma_\infty^2 \sin^2\sigma + 1 - \gamma} = 0{,}71304$$

0,5 0,5 0,5

$$Ma_2 = 1{,}26$$

0,5

$$v_2 = Ma_2 \cdot c_2 = Ma_2 \sqrt{\gamma R T_2} = 435 \ \mathrm{m/s}$$

0,5 0,5

c) $\Sigma 4$

$$p_4 = p_2 \cdot \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(Ma_2^2 - 1\right)\right) = 1{,}5 \ \mathrm{bar}$$

0,5 0,5

$$T_4 = T_2 \cdot \left(1 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\frac{\gamma Ma_2^2 + 1}{Ma_2^2}\left(Ma_2^2 - 1\right)\right) = 339{,}2\,K$$

0,5 0,5

$$\rho_4 = \frac{p_4}{R T_4} = 1{,}484 \ \mathrm{kg/m^3}$$

0,5 0,5

$$v_4 = v_2 \left(\frac{(\gamma+1) Ma_2^2}{(\gamma-1) Ma_1^2 + 2}\right)^{-1} = 298 \ \mathrm{m/s}$$

0,5 0,5

d) $\Sigma\, 5{,}5$

$$p_{0\infty} = p_\infty \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_\infty^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 2{,}36 \text{ bar} \quad 0{,}5$$

$p_{04} = p_{05}$ 0,5 $\qquad Ma_4 = \dfrac{v_4}{\sqrt{\gamma R T_4}} = 0{,}807$ 0,5 Erg.

$$p_{05} = p_4 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_4^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 2{,}27 \text{ bar} \quad 0{,}5$$

$$\frac{\Delta p_0}{p_{0\infty}} = \frac{p_{0\infty} - p_{05}}{p_{0\infty}} = 0{,}038 = 3{,}8\,\% \quad 0{,}5 \quad 0{,}5$$

der Totaldruckverlust über einen geraden Stoß ist immer größer (1)
als über einen schrägen Stoß. Strömungszustand in ③ ist dann
gleich ∞

$$\frac{p_{05}'}{p_{0\infty}} = \left(\frac{(\gamma+1)\,Ma_\infty^2}{2+(\gamma-1)\,Ma_\infty^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma Ma_\infty^2 - (\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0{,}907 \quad 0{,}5$$

$p_{05}' = 2{,}14 \text{ bar} < p_{05} = 2{,}27$ bar $\rightarrow$ Totaldruckverlust steigt 0,5

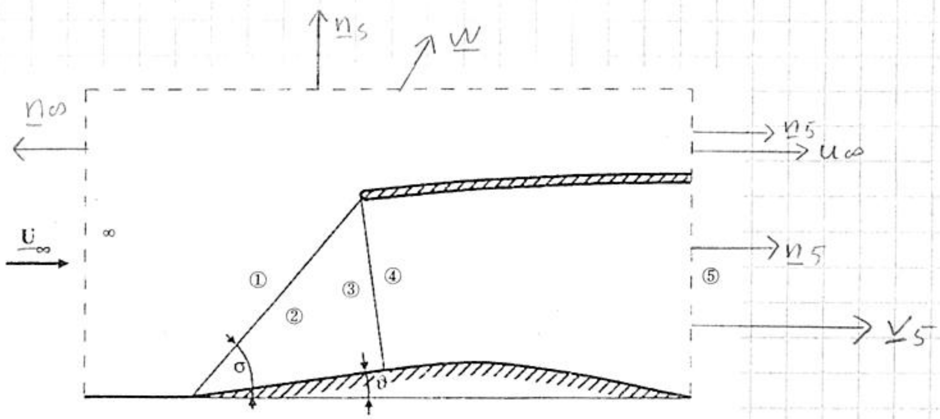
e) Bonus: $\Sigma\, 13$

$\underline{n}_\infty = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{n}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{n}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{w} = \begin{pmatrix} u_\infty \\ w_s \end{pmatrix}$



Massenerhaltung: $\int \rho \underline{u} \cdot \underline{n}\, dA = 0$

$$- u_\infty \rho_\infty A_\infty + u_\infty \rho_\infty (A_\infty - A_5) + v_5 \rho_5 A_5 + \int \rho_\infty \underline{w} \cdot \underline{n}_s\, dA = 0 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5$$

mit $\int \rho_\infty \underline{w} \cdot \underline{n}_s\, dA = \rho_\infty \int w_s\, dA = \rho_\infty Q_s$ (1)

$$- u_\infty \rho_\infty A_5 + v_5 \rho_5 A_5 + \rho_\infty Q_s = 0$$

$$\rho_\infty Q_s = u_\infty \rho_\infty A_5 - v_5 \rho_5 A_5 \quad (1)$$

0,5

Impulssatz x-Richtung:

0,5 0,5 0,5 1 0,5 0,5

$$-\varrho_\infty u_\infty^2 \cancel{A_\infty} + \varrho_\infty u_\infty^2 (\cancel{A_\infty} - A_5) + \varrho_5 v_5^2 A_5 + \varrho_\infty Q_s u_\infty = F_H + A_5(p_\infty - p_5) \quad ②$$

mit: $\varrho_\infty \int_{A_s} \underline{w}\,(\underline{w} \cdot \underline{n}_s)\, dA_s = \varrho_\infty \int_{A_s} \begin{pmatrix} u_\infty \\ w_s \end{pmatrix} w_s \, dA$

① in ②

$$-\varrho_\infty u_\infty^2 A_5 + \varrho_5 v_5^2 A_5 + u_\infty (u_\infty \varrho_\infty A_5 - v_5 \varrho_5 A_5) = F_H + A_5(p_\infty - p_5)$$

$$\varrho_5 v_5^2 A_5 - \varrho_5 u_\infty v_5 A_5 = F_H + (p_\infty - p_5) A_5$$

mit $F_H = -F_M$ 0,5

1 Rechnerei

$$\varrho_5 v_5 A_5 (v_5 - u_\infty) = -F_M + (p_\infty - p_5) A_5$$

$$\Rightarrow c_F = \frac{F_M}{q_\infty \cdot A_5} = \frac{F_M}{\frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty^2 A_5} = \frac{(p_\infty - p_5) - \varrho_5 v_5 (v_5 - u_\infty)}{\frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty^2} \quad 0{,}5$$

1

mit $v_5 = 100 \frac{m}{s}$ $\rightarrow$ p_5 ϱ_5 bestimmen

$c_p = R + c_v = R + \frac{c_p}{\gamma} \Rightarrow c_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} = 1149 \frac{J}{kg\,K}$ 0,5

Energieerhaltung: $c_p T_{0\infty} = c_p T_5 + \frac{1}{2} v_5^2$ 0,5

$T_5 = T_{0\infty} - \frac{1}{2 c_p} v_5^2 = 375\,K$ 0,5

$\frac{p_5}{p_4} = \left(\frac{\varrho_5}{\varrho_4}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T_5}{T_4}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ $\quad \varrho_5 = \varrho_4 \left(\frac{T_5}{T_4}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1{,}977 \, kg/m^3$ 0,5

$p_5 = p_4 \cdot \left(\frac{T_5}{T_4}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 2{,}21$ bar 0,5

$c_F = -0{,}812 < 0 \rightarrow$ Schubkraft

0,5