Prof. Holger Foysi, Lehrstuhl Strömungsmechanik **WS16/17**

Name: .... **Punkte:**

Vorname: .... (max. 26P)

Matr.-Nr.: ....

Musterlösung

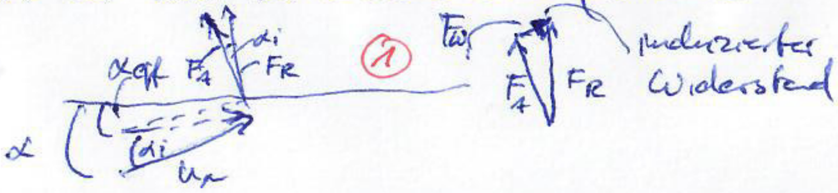
KLAUSUR STRÖMUNGSLEHRE - FRAGENTEIL

Benutzte Formel bitte immer angeben! Knappe Antworten! Rückseite verwendbar. **Viel Erfolg!**

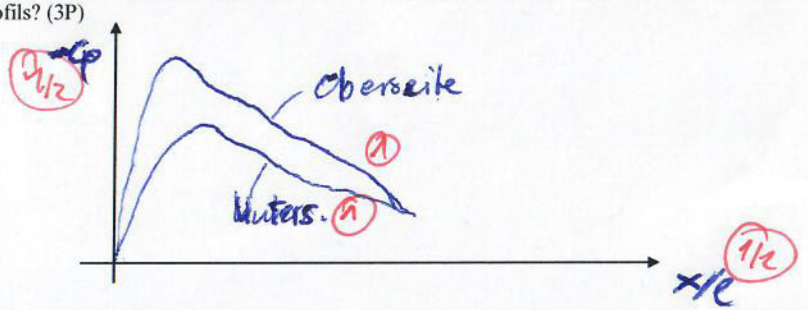
Aufgabe 1) Wie setzt sich der Widerstand bei Tragflügelprofilen zusammen? Erklären Sie die zusätzliche Komponente die bei einem dreidimensionalen, endlichen Tragflügel auftritt. (6P)

Reibungsabhängig (parasitär) + Auftriebsabhängiger Teil (dazu kommt noch Wellenwiderstand)

$C_d \approx C_{d,0} + k C_L^2$. Bei 3D-Flügel → induzierter Widerstand. Ablösung an Enden führt zu Flügelendwirbel ⇒ effektiver Anstellwinkel sinkt! → Führt zu zus. Widerstandskomponente



Aufgabe 2) Skizzieren Sie einen typischen Druckverlauf (potentialtheoretisch) auf Ober- *und* Unterseite eines Flügelprofils? (3P)



Aufgabe 3) Nennen und schreiben Sie die Elementarlösungen in einer Potentialströmung auf, die für die Umströmung eines Körpers mit Zirkulation notwendig sind. (3P)

$u_\infty z \quad + \quad \frac{\mu}{2\pi z} \quad + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$

Parallelstr. Dipolstr. Potentialwirbel

Aufgabe 6) Leiten Sie die Bernoulli-Gleichung für stationäre, inkompressible (ρ=const), reibungsfreie Strömungen ab. Gegeben: $\partial \mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla(p/\rho) - \nabla(gz) + \nu\Delta\mathbf{u}$, $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = \nabla \mathbf{u}^2/2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$. (6P)

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ (stationär) ⇒ $\vec{\nabla}\frac{\vec{u}^2}{2} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\nabla}\, p/\rho + \nabla(gz) = 0$

$\nu \Delta \vec{u} = 0$ (reibungsfrei)

⇒ $\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{u}^2}{2} + p/\rho + gz\right) = -\vec{\omega} \times \vec{u}$

Projektion auf $d\vec{s}$ liefert Richtungsableitung links

⇒ $d\vec{s} \cdot \vec{\nabla}(\dots) = (\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot d\vec{s}$

Wähle $d\vec{s} \parallel \vec{u}$ → Stromlinie ⇒ Spatprodukt = 0

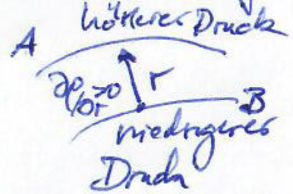
⇒ $\boxed{\frac{\vec{u}^2}{2} + p/\rho + gz = \text{const}}$

Aufgabe 5)

Die Abbildung zeigt den Amazonas (Bild: T. Kopra/NASA) und dessen stark mäandernden Flussverlauf. Ohne menschlichen Einfluss wird ein Fluss immer "kurviger", aufgrund der Strömungsmechanik. Versuchen Sie das mittels einfacher Prinzipien aus der Vorlesung zu erklären. Betrachten Sie dazu erst die mittlere Strömung und dessen Druckverteilung. Daraus können Sie Rückschlüsse auf den Sedimenttransport im reibungsbehafteten Teil am Grund treffen. (8P)

Strömung in gekrümmter Oberfläche ⇒ $\frac{\rho v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}$

⇒ Anstieg des Druckes in Richtung r

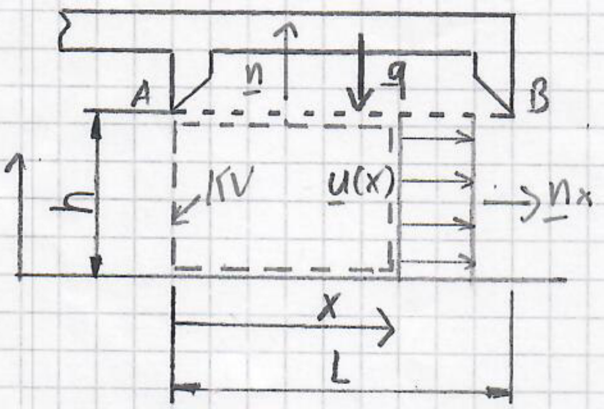


Damit ist am Ufer A der Druck höher als an B, dem inneren Ufer, Fluid fließt weiter stromab.

In Grundnähe wird die Geschwindigkeit aufgrund der Reibung (Haftbed.) geringer → geringere kin. Energie. Der Druckgradient führt damit zu einer in Richtung B gerichteten Strömung am Grund (Sekundärströmung). Sediment wird damit vom entfernten Ufer zum inneren Ufer B transportiert. Dies verstärkt sich mit der Zeit!

A 1

a)



$$\underline{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q \end{pmatrix} \qquad \underline{u}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{n}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{KF} \underline{u} \cdot \underline{n} \, dA = 0$$

$$-q \cdot x \cdot t + u(x)\, h \cdot t = 0 \quad (1/2) \quad (1/2)$$

$t \hat{=}$ Tiefe Spalt in Zeichenebene

$$u(x) = q \frac{x}{h} \quad (1/2)$$

b) Vereinfachen:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{=0} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\rho v \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\rho w \frac{\partial u}{\partial z}}_{=0} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\mu}_{=0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

stationär — homogen — 2dim — reibungsfrei

(2) (1/2 für jeden gestrichenen Term)

$$\longrightarrow \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Beschleunigung: materielle Ableitung: $\underline{a} = \frac{D\underline{u}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}}_{=0,\ \text{stationär}} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\underline{u}$ (1) (1/2)

$$\rightarrow a_y = 0 \qquad a_x = u(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} + u(x) \frac{\partial u(x)}{\partial y} \quad (1/2)$$

$$a_x = u(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{qx}{h} \cdot \frac{q}{h} = x \left(\frac{q}{h} \right)^2 \quad (1/2)$$

Druckgradient:

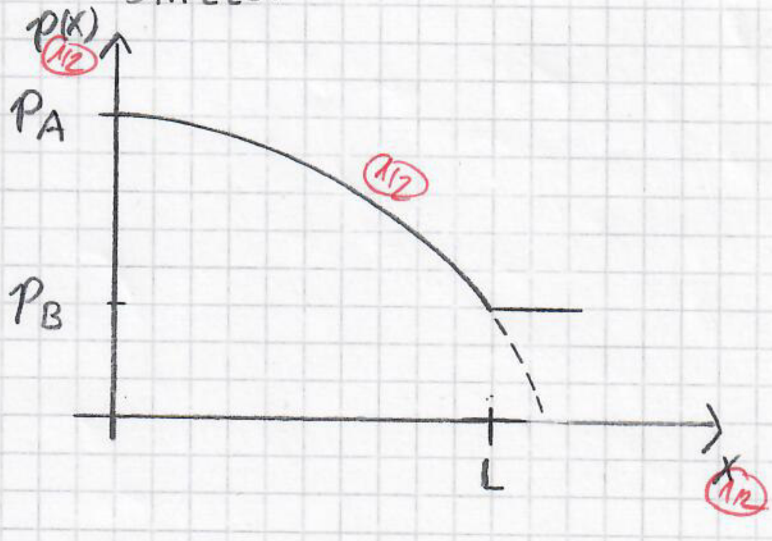
aus $-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \rho x \left(\frac{q}{h} \right)^2$ (1)

$$\int_{p_A}^{p(x)} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \int_{x=0}^{x} u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1/2)$$

$$p(x) - p_A = -\rho \left(\frac{q}{h} \right)^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^x \quad (1/2)$$

$$p(x) = p_A - \frac{\rho}{2} \left(\frac{q}{h} \right)^2 x^2 \quad (1/2)$$

Skizze:



Σ 10

A2

a) $\Sigma 4{,}0$

$$F(z) = u \cdot z + \frac{M}{2\pi z} = u(x+iy) + \frac{M}{2\pi} \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}$$ 1/2 1/2

$$= u(x+iy) + \frac{M}{2\pi} \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$ 1/2

$$\phi = Re(F(z)) = u x + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2}$$ 1/2

Aufgewertet
→ 15P → 18P

mit $x = r \cdot \cos\theta$ und $r^2 = x^2 + y^2$

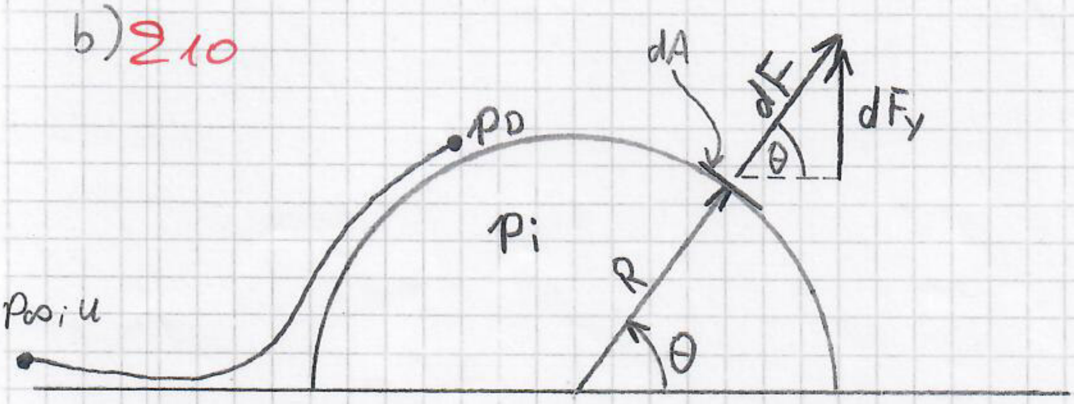
$$\phi = u \cdot r \cos\theta + \frac{M}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r}$$ 1/2 1/2

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = u \cos\theta - \frac{M}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^2}$$ 1/2

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -u \sin\theta - \frac{M}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r^2}$$ 1/2

~~Σ~~

b) $\Sigma 10$



$$dF_y = (p_i - p_D) \cdot \sin\theta \, dA = (p_i - p_D) \sin\theta \cdot L \cdot R \, d\theta$$ 1

Bernoulli ∞ → Dach

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} u^2 = p_D + \frac{\rho}{2}(v_r^2 + v_\theta^2) \quad \text{mit } v_r = 0 \text{ auf Dach}$$ 1/2

$$p_D = p_\infty + \frac{\rho}{2}(u^2 - v_\theta^2)$$ 1/2 1/2 1/2 1/2

M bestimmen, mit RB: $v_r(R) = 0$

$$0 = u \cos\theta - \frac{M}{2\pi} \frac{\cos\theta}{R^2} \rightarrow M = 2\pi R^2 u$$ 1/2 1/2

v_θ auf Dach : $v_\theta(R) = -u \sin\theta - \frac{2\pi R^2 u}{2\pi} \frac{\sin\theta}{R^2} = -2u \sin\theta$ 1/2

Normalkraft:

$$F_y = \int_{A_0} dF_y = \int_{\theta=0}^{\pi} (p_i - \underset{p_\infty}{\underset{\parallel}{p_0}})\, L \cdot R \cdot \sin\theta \, d\theta = -LR\frac{\rho}{2}\int_0^{\pi}(u^2 - v_\theta^2)\sin\theta\, d\theta$$

1/2 1/2

$$F_y = -LR\frac{\rho}{2}\int_0^{\pi}(u^2 - 4u^2\sin^2\theta)\sin\theta\, d\theta = -LR\frac{\rho}{2}u^2\int_0^{\pi}(\sin\theta - 4\sin^3\theta)\, d\theta$$

1/2

$$F_y = -LR\frac{\rho}{2}u^2\left[-\cos\theta + 4\cos\theta - \frac{4}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}$$

1/2 1/2

$$F_y = -LR\frac{\rho}{2}u^2\left[3\cos\theta - \frac{4}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} \qquad = -\frac{18}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$F_y = -LR\frac{\rho}{2}u^2\left(\overset{-3}{3\cos\pi} - \overset{+\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\cos^3\pi} - \overset{-3}{3\cos 0} + \overset{+\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\cos^3 0}\right) = +\frac{\rho}{2}u^2 LR\left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$F_y = \cancel{3}\,\rho u^2 LR \quad \frac{10}{3}\rho u^2 LR$$

1/2

mit $p_\infty = 720\ \text{mm Hg} \cdot \frac{1{,}013\ \text{bar}}{760\ \text{mmHg}} = 0{,}95968 \approx 96.000\ \text{Pa}$ 1/2

$$\rightarrow \rho = \frac{p_\infty}{RT} = \frac{96.000\ \text{Pa}}{287\ \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot (273{,}15 + 5)\ \text{K}} = 1{,}2\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$ 1/2

$$u = 100\ \text{km/h} \cdot \frac{1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 27{,}\bar{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$ 1/2

165,735 MN

$$\Longrightarrow F_y = 300\ \text{kN}$$ 1/2

c) Annahme reibungs- u. drehungsfreier Strömung ist nicht plausibel. 1/2

22

- reale Strömung ist hoch turbulent (Sturm) 1/2
- —"— ist reibungsbehaftet → Grenzschicht auf Dach 1/2
- dadurch Strömungsablösung im Bereich der Dachmitte 1/2
- —"— Nachlauf an windabgewandter Dachhälfte
- auf windzugewandter Dachhälfte kann Theorie in grober Näherung angewendet werden

d) 22

Drehung um Winkel α:

Multiplikation der komplexen Variable z mit 1 $e^{-i\alpha}$

oder Multiplikation des komplexen Potentials der Parallelströmung mit $e^{-i\alpha}$ und des Dipols mit $e^{i\alpha}$

Der Boden, auf dem die Hütte steht wird durch eine Stromlinie dargestellt.

Bei Drehung des Potentials aus a) um $90°$ würde die „Boden-Stromlinie" mitgedreht. 1 Das Stromfeld wäre dann nicht identisch mit einer von oben vertikal angeströmten Hütte

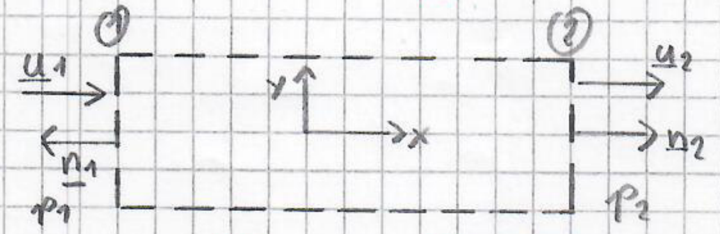
A3

a) $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \qquad A_1 = A_2 = A$ 1/2 1/2

Σ 13

$\rho_2 = \rho_1 \frac{u_1}{u_2} = 0{,}3\ \mathrm{kg/m^3}$ 1/2

N.R.: $\rho_1 = \frac{p_1}{R\,T_1} = 1{,}46\ \mathrm{kg/m^3}$ 1/2 1/2 → 2,5



$-\rho_1 u_1^2 A + \rho_2 u_2^2 A = p_1 A - p_2 A$ (keine weiteren Kräfte) 1/2 1/2

$\dot{m}(u_2 - u_1) = A(p_1 - p_2)$ 1/2 1/2 1/2 1/2

$u_2 = \frac{A(p_1 - p_2)}{\dot{m}} + u_1 = \frac{(p_1 - p_2)}{\rho_1 u_1} + u_1 = 540\ \mathrm{m/s}$ 1/2 1/2

$T_2 = \frac{p_2}{R\,\rho_2} = 801\ \mathrm{K}$ 1/2

$c_2 = \sqrt{\gamma R T_2} = 567\ \mathrm{m/s}$ 1/2 1/2 $\qquad Ma_2 = \frac{u_2}{c_2} = 0{,}95$ 1/2 1/2

$T_{0_2} = T_2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_2^2\right) = 946\ \mathrm{K}$ 1/2 1/2

$p_{0_2} = p_2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 123.333\ \mathrm{Pa}$ 1/2 1/2

N.R.:

$c_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = 364\ \frac{m}{s}$ 1/2 $\qquad Ma_1 = \frac{u_1}{c_1} = 0{,}3$ 1/2

$p_{0_1} = p_1\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 146.891\ \mathrm{Pa}$ 1/2 1/2

b) Spez. Totalenthalpie $\quad h_0 = h + \frac{u^2}{2}$ 1/2

Σ 5

-"- Enthalpie $\quad h = c_p T$ 1/2

$h_{0_2} = h_{0_1} + q = h_{0_1} + \frac{\delta Q}{\delta m}$

1/2 1/2 1,5 1/2

$$\frac{\delta Q}{\delta m} = c_p T_2 + \frac{1}{2} u_2^2 - c_p T_1 - \frac{1}{2} u_1^2 = c_p (T_2 - T_1) \underset{1/2}{+} \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2)$$

$$= \underset{1/2}{612.870} \frac{J}{kg}$$

c) $\cancel{\Sigma 4}$

$$\Delta s = \underset{1/2}{s_2 - s_1} = \cancel{s_{ref}} + \underset{1/2}{c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_{ref}}\right)} - \underset{1/2}{R \ln\left(\frac{p_2}{p_{ref}}\right)}$$

$$- \cancel{s_{ref}} - \underset{1/2}{c_p \ln\left(\frac{T_1}{T_{ref}}\right)} + \underset{1/2}{R \ln\left(\frac{p_1}{p_{ref}}\right)}$$

$$= c_p \left(\ln\left(\frac{T_2}{T_{ref}}\right) - \ln\left(\frac{T_1}{T_{ref}}\right) \right) - R \left(\ln\left(\frac{p_2}{p_{ref}}\right) - \ln\left(\frac{p_1}{p_{ref}}\right) \right)$$

$$= c_p \ln\left(\frac{T_2}{\cancel{T_{ref}}} \cdot \frac{\cancel{T_{ref}}}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{\cancel{p_{ref}}} \cdot \frac{\cancel{p_{ref}}}{p_1}\right)$$

$$= \underset{1/2}{c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)} - \underset{1/2}{R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} = \underset{1/2}{1090} \frac{J}{kg\,K}$$

Aufgabe 4

1)

a) Σ 8

$\mu_{cv} = \mu_0 - \dot{m} t$ entweder

$\dot{m} = 90 \, kg/s$
V_e Exit velocity
u Schlittengeschwdk.

⇒ 4,5 insgesamt

oder $-\oint \underbrace{\rho u \cdot n \, dA}_{\dot{m}} = \frac{d}{dt} \underbrace{\int \rho \, dV}_{\mu_{cv}}$ (1/2)

$\frac{d\mu_{cv}}{dt}$ (1/2) $= -\dot{m}$

$$\boxed{\mu_{cv} - \mu_0 = -\dot{m} t \Rightarrow \mu_{cv} = \mu_0 - \dot{m} t}$$ (1/2)

$t < t_{burn}$, dann Leer

$$F_s - \int_{KV} a_r \rho \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho u \, dV + \oint_{KF} u \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA$$ (1/2)

gleichf. Beschl. ⇒ $a_r = \frac{du}{dt}$ kann aus Integral (1/2)

$$\Rightarrow -F_D - a_r \mu_{cv} = -V_e \{+\dot{m}\} = -V_e \dot{m}$$ (1/2) (1/2) (1)

$F_D = k \cdot u$ (1/2)

$$\Rightarrow a_r = \frac{du}{dt} = \frac{V_e \dot{m} - k u}{\mu_{cv}} \quad t < t_{burn} \quad (*)$$ (1/2) (1/2)

Anfangsbeschleunigung:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} \overset{u=0}{=} \frac{V_e \dot{m}}{\mu_{cv}} = 33{,}75 \, m/s^2$$ (1/2) (1/2)

Wann ist Treibstoff zu Ende? $\frac{\mu_{Treibstoff}}{\dot{m}} = t_{burn}$ (1/2)

$= 11{,}1 \, s$ (1/2)

Σ 4 b) Geschwdk. bei $t = 15 s$ in zwei Teile (1/2) (a) $0 \to 11{,}1 s$
(b) $11{,}1 s \to 15 s$

für (a) Formel (*)

(b) $$\frac{du}{dt} = -\frac{k u}{\mu_0 - \mu_{fuel}}$$

da Masse konst (1/2) $(\mu_0 - \mu_{fuel})$ und $V_e = 0$ (1/2)

(a) $$\frac{du'}{\dot m v_e - k u'} \overset{(1/2)}{=} \frac{dt'}{M_0 - \dot m t'} \Rightarrow -\frac{1}{k}\ln(\dot m v_e - k u')\Big|_0^u$$ (1/2)

$$= -\frac{1}{\dot m}\ln(M_0 - \dot m t')\Big|_0^t$$ (1/2)

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\ln\left(\frac{\dot m v_e - k u}{\dot m v_e}\right) \overset{(1/2)}{=} \frac{1}{\dot m}\ln\left(\frac{M_0 - \dot m t}{M_0}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{ku}{\dot m v_e} \overset{(1/2)}{=} \left(1 - \frac{\dot m t}{M_0}\right)^{k/\dot m} \Rightarrow \boxed{u \overset{(1/2)}{=} \frac{\dot m v_e}{k}\left[1 - \left(1 - \frac{\dot m t}{M_0}\right)^{k/\dot m}\right]} \quad (**)$$

$t = 11{,}1\,s$ $\Rightarrow \boxed{u = 384\ m/s}$ (1/2)

Version (b) $t > t_{burn}$

$$\frac{du'}{-ku'} = \frac{dt'}{M_0 - M_{fuel}} \Rightarrow -\frac{1}{k}\ln u'\Big|_{u_{bo}}^{u} \overset{(1/2)}{=} \frac{t'}{M_0 - M_{fuel}}\Big|_{t_{burn}}^{t}$$ (1/2)

$$\Rightarrow \boxed{u = u_{bo}\cdot e^{-\frac{k(t - t_{bo})}{M_0 - M_{fuel}}}}$$ (1/2)

u_{bo}: burn out, nachdem alles verbraucht ist

$t = 15\,s$ $\Rightarrow \boxed{u = 348\ m/s}$ (1/2)

---

c)

Σ 3 Maximalbeschleunigung: $a = \frac{du}{dt}$ (Gleichung (**))

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{\dot m v_e}{k}\left(-\frac{\dot m}{M_0}\right)\left(1 - \frac{\dot m t}{M_0}\right)^{\left(\frac{k}{\dot m} - 1\right)}\cdot\left(\frac{k}{\dot m}\right) =$$ (1/2)

$$= \frac{\dot m v_e}{M_0}\left(1 - \frac{\dot m t}{M_0}\right)^{\frac{k}{\dot m} - 1}$$

$$\frac{da}{dt} \overset{!}{=} 0 \overset{(1/2)}{=} \frac{\dot m v_e}{M_0}\left(\frac{k}{\dot m} - 1\right)\left(1 - \frac{\dot m t}{M_0}\right)^{\frac{k}{\dot m} - 2}\left(-\frac{\dot m}{M_0}\right)$$ (1/2)

$$\Leftrightarrow \frac{\dot m t}{M_0} = 1 \Leftrightarrow t \overset{(1/2)}{=} \frac{M_0}{\dot m} > t_{burn}$$

$\Rightarrow t_{burn}$ stellt Punkt größter Beschleunigung

einsetzen (1/2) das $a_{max} = 35{,}4\ m/s^2$ (1/2)