Prof. Holger Foysi, Lehrstuhl Strömungsmechanik

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

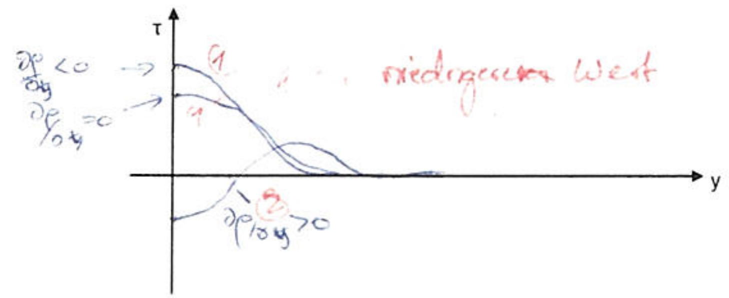
SS2016
Punkte:
(max. 25P)

KLAUSUR STRÖMUNGSLEHRE - FRAGENTEIL

Benutzte Formel bitte immer angeben! Knappe Antworten! Rückseite verwendbar. **Viel Erfolg!**

MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 1) Skizzieren Sie die Schubspannungsprofile in einer Grenzschichtströmung mit a) $\partial p/\partial y < 0$, b) $\partial p/\partial y = 0$, c) $\partial p/\partial y >> 0$.? (5P)



Aufgabe 2) Wie gehen wir bei der Herleitung der Bernoulli-Gleichung für stationäre, inkompressible (ρ=const), reibungsfreie Strömungen vor. Gegeben: $\partial \mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla(p/\rho) - \nabla(gz) + \nu\Delta\mathbf{u}$, $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = 0.5\,\nabla\mathbf{u}^2 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}$. (6P)

$\partial \underline{u}/\partial t = 0$ (stationär), $\nu\Delta\underline{u} = 0$ (reibungsfrei)

$\Rightarrow \nabla\left(\frac{u^2}{2} + p/\rho + gz\right) = \underline{\omega}\times\underline{u}$ (1)

Projektion auf Wegelement $\underline{ds} \parallel \underline{u}$ (Stromlinie), rechte Seite 0

$\Rightarrow d\underline{s}\cdot\nabla\left(\frac{u^2}{2} + p/\rho + gz\right) = 0$ (1)

$\Rightarrow \frac{u^2}{2} + p/\rho + gz = \text{const}$ entlang ds (Stromlinie)

Aufgabe 3) In einer Raffinerie strömt Öl durch eine horizontale Leitung, an deren Anfang der Druck p_0 herrscht, in ein Reservoir mit Druck p_R. Am Ende der Leitung ist ein Ventil angebracht, welches im Notfall in der Zeit T absperrt. In einem Modellversuch mit Wasser (Verkleinerungsmaßstab 1:10) wird während des Schließvorgangs vor dem Ventil der maximale Druck p'_{max} gemessen. Wie gross sind p'_0 und die Schließzeit *im Modellversuch*? ($p_0 = 1.5\cdot10^5$ N/m², $p_R = p_R' = 10^5$ N/m², $p'_{max} = 1.05\cdot10^5$ N/m², T=0.5s, ρ=880kg/m³, ρ'=1000kg/m³, μ = 10^{-1} Ns/m², μ'= 10^{-3} Ns/m²; Tipp: Kennzahlen nutzen!). (9P)

Eulerzahl $Eu = Eu'$ 1/2 Reynoldszahl $Re = Re'$ 1/2, 1/2 Def.

Strouhalzahl $St = St'$ 1/2

1/2 Def.

$\frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2}u^2} = \frac{\Delta p'}{\frac{\rho'}{2}u'^2} \Rightarrow \frac{p_0' - p_R}{p_0 - p_R} = \frac{\rho' u'^2}{\rho u^2} = \frac{\rho'}{\rho}\frac{Re\,\mu'/D'}{Re\,\mu^2/D}$ 1

$= \frac{\rho D^2 \mu'^2}{\rho' D'^2 \mu^2}$ 1, $D' = 1/10\,D$

einsetzen

$\Rightarrow p_0' - p_R = 440\ \text{N/m}^2$ 1/2

$St = f/(u/D) = \frac{D}{T\cdot u} \Rightarrow \frac{D}{Tu} = \frac{D'}{T'u'} \Rightarrow T' = T\frac{u}{u'}\frac{D'}{D}$ 1

1/2 Def.

wieder Re

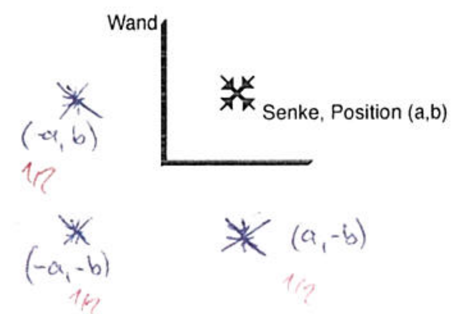
$\Rightarrow T' = 0{,}5\,7s$ 1/2

Aufgabe 4) In Baseballspielen in San Francisco und in Wyoming werden Luftdichten von 1.2 kg/m³ und 0.9 kg/m³ gemessen. Wie verhalten sich die entsprechenden Luftwiderstandskräfte? (2P)

$F = C_D\cdot\frac{1}{2}\rho u^2\cdot A$ (1) $\quad \frac{F_{SF}}{F_W} = \frac{\rho_{SF}}{\rho_W}$ (1), C_D, u, A ändert sich nicht

(1P auch falls in Worten)

Aufgabe 5) Eine potentialtheoretische Modellierung sieht eine Senke innerhalb einer Ecke vor (siehe Abbildung). Skizzieren Sie die Anordnung von Senken und/oder Quellen die hierfür notwendig sind und geben Sie die Formeln für das komplexe Potential an. (3P)



$F(z) = \frac{E}{2\pi}\ln z$, $E < 0$ (1/2 SP)

hier $\frac{E}{2\pi}\Big[\ln(z-(a+ib))$ (1/2 SP)

$+\ln(z-(-a+ib))$ 1/2

$+\ln(z-(-a-ib))$ 1/2

$+\ln(z-(a-ib))\Big]$ 1/2

A1 gesamt : 20 Pkt.

A1

a) Auftrieb : $F_A = A \cdot L \cdot \varsigma g$ 1

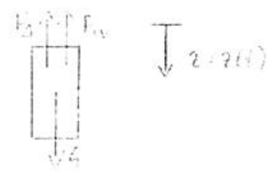
Widerstand : $F_W = c_W \frac{\varsigma}{2} u^2 \cdot A$ 1

$\Sigma 9{,}5$

Gewicht : $G = m_P(t) \cdot g$ 1

mit Stirnfläche XBT: $A = \frac{\pi}{4} D^2$ 0,5

$A = 0{,}0028\ m^2$



Kräftebilanz : $\frac{d}{dt}(m_P u) = G - F_A - F_W$ 1 (Impuls)

$\frac{dm_P}{dt} u + m_P \frac{du}{dt} = G - F_A - F_W$ 1 Produktr.

mit $\frac{dm_P}{dt} = \frac{dm_P}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dm_P}{dz} u$ 0,5

$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = u \frac{du}{dz}$ 0,5

Kettenr.

$\rightarrow \frac{dm_P}{dz} u^2 + m_P u \frac{du}{dz} = (m_P - \frac{dm_P}{dz} \cdot z) g - AL\varsigma g - c_W \frac{\varsigma}{2} u^2 A$ 0,5

Anfangsbedingung : $z = 0$ ges.: $u_0 = u(z=0)$ 1

freier Fall : $m_P g H = \frac{1}{2}(u(z=0))^2 m_P$ 1

$u_0 = u(z=0) = \sqrt{2gH} = 7{,}67\ m/s$ 0,5

b) nun gilt $\frac{dm_P}{dz} = 0$

$\Sigma 9{,}5$

0,5

$\rightarrow$ DGL: $m_P u \frac{du}{dz} = m_P g - AL\varsigma g - c_W \frac{\varsigma}{2} u^2 A \quad | \cdot \frac{1}{m_P}$

$u \frac{du}{dz} = \underbrace{g - \frac{AL\varsigma g}{m_P}}_{=a} - \underbrace{\frac{\varsigma c_W A}{2 m_P}}_{=b} \cdot u^2$ 1 Zusammenfassen

$a = 8{,}99\ m/s^2 \qquad b = 0{,}112\ 1/m$ 0,5 Berechnen

$\rightarrow u \frac{du}{dz} = a - bu^2 \qquad | \cdot dz \qquad | \cdot (a - bu^2)^{-1}$

$\frac{u}{a - bu^2} du = dz$ 0,5 Trennung

Integration:

$\int_{u_0}^{u} \frac{u}{a - bu^2} du = \int_0^z dz$ 1 0,5 Integrati

$\ln(a - bu^2) \cdot (-\frac{1}{2b}) \Big|_{u_0}^{u} = z \Big|_0^z$ 0,5 Grenzen

$-\frac{1}{2b}\left(\ln(a - bu^2) - \ln(a - bu_0^2)\right) = -\frac{1}{2b} \ln\left(\frac{a - bu^2}{a - bu_0^2}\right) = z$

mit $a - bu_0^2 = \text{const.} = K = 2{,}4\ m^2/s^2$

$\rightarrow \ln\left(\frac{a - bu^2}{K}\right) = -2bz \qquad | e \qquad | \cdot K$ 1

$a - bu^2 = e^{-2bz} \cdot K$

$\rightarrow u = \sqrt{\frac{a - e^{-2bz} \cdot K}{b}}$ 1

Endgeschwindigkeit $z \to \infty$, d.h. $e^{-2bz} \to 0$ 1

$u_{end} = \sqrt{\frac{a}{b}} = 8{,}96\ m/s$ 0,5

z für 99% u_{end}

$0{,}99\, u_{end} = \sqrt{\frac{a - e^{-2bz} K}{b}} \qquad |^2$ 1

$-(0{,}99\, u_{end})^2 b + a = e^{-2bz} \qquad | \ln$

0,5

$z = \ln(a - b(0{,}99\, u_{end})^2) \cdot (-\frac{1}{2b}) = 7{,}72\ m$

c) Rechnung nimmt ς = konst. an. In der Realität ist

$\Sigma 1$

ς abhängig von : 1.) Salzgehalt 0,5

2.) Wassertemperatur 0,5

A2 gesamt: 15 Pkt

A2

a) 1 für KV

Σ 7,5

$\underline{n}_3 = -\binom{1}{0}$ $\quad \underline{n}_4 = \binom{1}{0}$

$\underline{w}_5 = \binom{-w_5}{0}$ $\quad \underline{w}_3 = \binom{w_3}{0}$

keine Druckkräfte, nur x-Richtung

0,5 0,5

• a KV fest $\underline{w}_3 = \underline{w}_2$

0,5 0,5 0,5 0,5

$-\rho w_2^2 A_2 = F_H = -F$

0,5

$F = \rho w_2^2 A_2 = \rho w_2^2 \cdot \frac{\pi}{4} D_2^2 = 2 \cdot 481 \frac{N}{m^2} \cdot \frac{\pi}{4}(0{,}15\,m)^2$

$F = 17{,}35\,N$ 0,5

• b relativ bewegtes KV $\underline{w}_3 = \underline{w}_2 - \underline{w}_5$

$-\rho(w_2 + w_5)^2 A_2 = -F$ 1

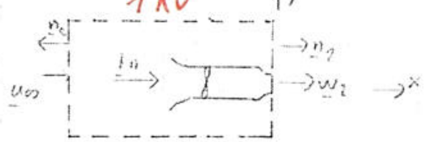
mit $w_2 = \sqrt{\frac{A_2 \cdot 2}{\rho}}$ 0,5 $= 29{,}48 \frac{m}{s}$ 0,5

0,5

$F = 1{,}13 \frac{kg}{m^3} \left(10 \frac{m}{s} + 29{,}48 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4}(0{,}15\,m)^2 = 31{,}12\,N$

b) 1 KV

Σ 7,5 • a



$\underline{u}_\infty \approx \underline{0}$ da KV groß

$\underline{w}_2 = \binom{w_2}{0}$ $\quad \underline{n}_2 = \binom{1}{0}$

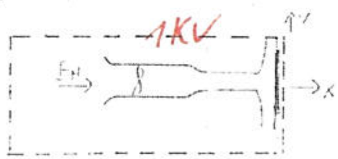
keine Druckkräfte, nur x-Richt.

0,5 0,5

0,5 p_a 0,5 0,5 0,5

$\rightarrow F_H = +\rho w_2^2 \cdot A_2 = +17{,}35\,N$

• b



da $\underline{u}_\infty \approx \underline{0}$ keine Flüsse 0,5
in x-Richtung, in y- bzw.
Umfangsrichtung heben sich Kräfte auf. 0,5

$\rightarrow F_H = 0$ 0,5

Wird das KV ins Gebläse gelegt ist F_H in a u. b nicht gleich groß, da dann die Einströmgeschw. bei D_1 nicht vernachlässigbar und durch Ansaugvorgang $p_1 \neq p_a$ ist. 1

A3 gesamt: 18 Pkt + 9,5 Bonus

A3

0,5 0,5

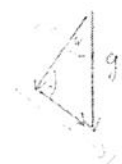
a) Randbed.: $u(y=0) = 0$ $\quad \tau(y=h) = 0$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Σ 5

Bew.-gleichung in x-Richtung:

$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=0} + u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{v}_{=0} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0} + \nu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g \sin\alpha$ 1x

$\rightarrow 0 = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \sin\alpha$ 0,5



b) Integration:

Σ 6,5

$\int \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = -\int \frac{1}{\nu} g \sin\alpha \, dy$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\nu} g \sin\alpha \, y + C_1$ 1

$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = -\frac{1}{\nu} g \sin\alpha \int y \, dy + \int C_1 \, dy$

$u(y) = -\frac{1}{2\nu} g \sin\alpha \, y^2 + C_1 y + C_2$ 1

mit RB $u(y=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$ 0,5

$\rightarrow u(y) = -\frac{1}{2\nu} g \sin\alpha \, y^2 + C_1 y$

Newtonscher Schubspannungsansatz: $\tau(y) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ 1

und mit RB $\tau(y=h) = 0$

$\tau = \mu\left(-\frac{1}{\nu} g \sin\alpha \, y + C_1\right) = -\rho g \sin\alpha \cdot y + C_1 \mu$

$\tau(y=h) \stackrel{!}{=} 0 = -\rho g \sin\alpha \cdot h + C_1 \mu$

$\rightarrow C_1 = \frac{1}{\nu} g \sin\alpha \cdot h$ 1

$\Rightarrow u(y) = -\frac{1}{2\nu} g \sin\alpha \, y^2 + \frac{1}{\nu} g \sin\alpha \, h y$

$= \frac{1}{\nu} g \sin\alpha \left(h y - \frac{y^2}{2}\right)$ 1

-4

$\tau(y) = -\rho g \sin\alpha\, y + \mu \frac{1}{\nu} g \sin\alpha \cdot h = \rho g \sin\alpha\,(h-y)$ 1

c) $\frac{Q}{b} = \int_0^h u(y)\,dy = \frac{1}{\nu} g \sin\alpha \left(h\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^h$ 1

Σ5

$= \frac{g}{3\nu} \sin\alpha\, h^3$ 0,5

u_{max} aus $\frac{\partial u}{\partial y} \overset{!}{=} 0$ 1

$0 = -\frac{1}{\nu} g \sin\alpha \cdot y + \frac{1}{\nu} g \sin\alpha \cdot h \quad \rightarrow y = h$ 0,5

$u_{max} = u(y=h) = \frac{1}{\nu} g \sin\alpha \left(h^2 - \frac{h^2}{2}\right) = \frac{g}{2\nu} \sin\alpha\, h^2$ 0,5

$\bar{u}$ aus Mittelwertsatz: $\bar{u} \cdot h = \frac{Q}{b}$ 1

$\bar{u} = \frac{Q}{bh} = \frac{g}{3\nu} \sin\alpha \cdot h^2$ 0,5

d) $\frac{F_R}{b} = \int_0^L \tau(y=0)\,dL = \tau(y=0) \cdot L$ 1

Σ1,5

$= L \cdot \rho g \sin\alpha (h-0) = L h \rho g \sin\alpha$ 0,5

e) Bonus:

Zahlenwerte Q/b in m^2/s für $\alpha = 60°$

$\nu \backslash h$		4 mm	5 mm	6 mm
ν_I	$2{,}5 \cdot 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$	0,007	0,014	0,024
ν_{II}	$3 \cdot 10^{-5}$ ...	0,0058	0,012	0,02
ν_{III}	$4 \cdot 10^{-5}$ -"-	0,0044	0,009	0,015

9 x 0,5

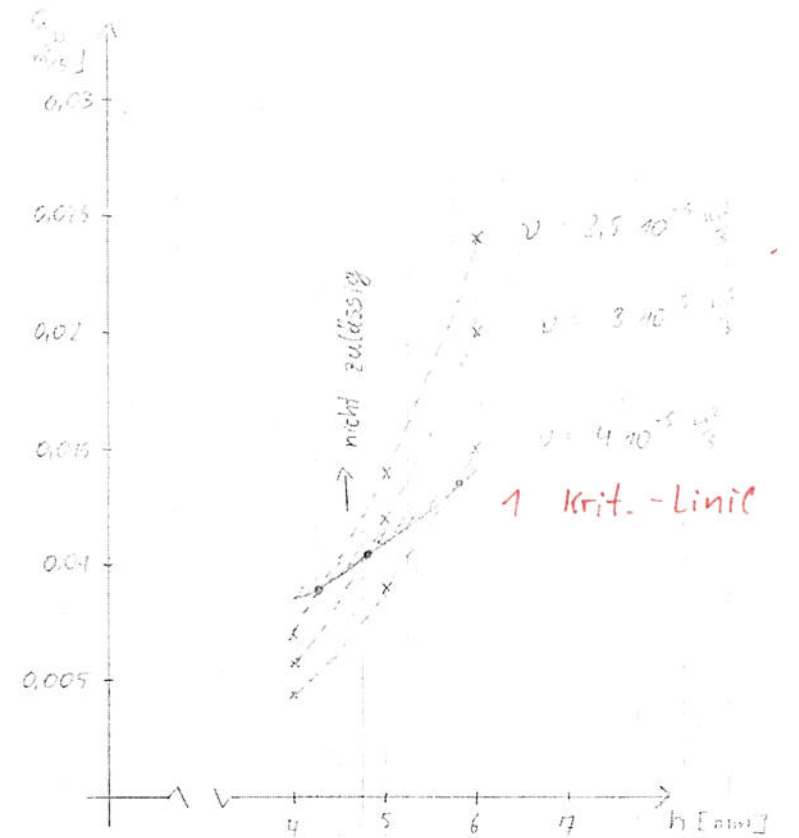
$Re_{krit} = \frac{\bar{u}\, h}{\nu}$ 1 mit $\bar{u} = \frac{g h^2 \sin\alpha}{3\nu}$

$Re_{krit} = \frac{g h^3 \sin\alpha}{3\nu^2} \quad \rightarrow \quad h = \sqrt[3]{\frac{Re_{krit} \cdot 3\nu^2}{g \sin\alpha}}$ 0,5

für $Re_{krit} = 350$ und ν_I $h = 4{,}26$ mm, ν_{II} $h = 4{,}8$ mm; ν_{III} $h = 5{,}35$ mm 0,5

Diagramm:

0,5



0,5

44 gesamt: 23,5 Pkt.

A4

a) Σ 6,5

$R = c_p - c_v$ 0,5 $\quad \gamma = c_p / c_v \rightarrow c_v = c_p/\gamma$ 0,5

$R = c_p\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = 819 \frac{J}{kgK}\left(1 - \frac{1}{1{,}3}\right) = 189 \frac{J}{kgK}$ 0,5

$\frac{p_0}{p_e} = \left(\frac{T_0}{T_e}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ 0,5 $\rightarrow p_0 = p_e\left(\frac{T_0}{T_e}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 6{,}75\,bar\left(\frac{273{,}15K + 20K}{283K}\right)^{\frac{1{,}3}{0{,}3}} = 7{,}86\,bar$ 0,5

$\rho_0 = \frac{p_0}{R\,T_0} = \frac{786.000 Pa}{189 \frac{J}{kgK} \cdot 293{,}15K} = 14{,}19\, kg/m^3$ 0,5 0,5

0,5 $c_p T_0 + \frac{1}{2}\underbrace{w_0^2}_{=0} = c_p T_e + \frac{1}{2} w_e^2 \longrightarrow w_e = (2 c_p (T_0 - T_e))^{\frac{1}{2}}$ 0,5

$w_e = \left(2 \cdot 819 \frac{J}{kgK} (293{,}15K - 283K)\right)^{\frac{1}{2}} = 128{,}9\, m/s$ 0,5

$Ma_e = \frac{w_e}{c_e} = \frac{w_e}{\sqrt{\gamma R T_e}} = \frac{128{,}9\, m/s}{\sqrt{1{,}3 \cdot 189 \frac{J}{kgK} \cdot 283K}} = 0{,}489$ 0,5 0,5 0,5

b) Σ 5,5

$\rho^* = \rho_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 14{,}19\, kg/m^3 \left(\frac{2}{2{,}3}\right)^{\frac{1}{0{,}3}} = 8{,}91\, kg/m^3$ 0,5 0,5

$T^* = T_0 \frac{2}{\gamma+1} = 293{,}15K \frac{2}{2{,}3} = 254{,}9\,K$ 0,5 0,5

$w^* = c^* = \sqrt{\gamma R T^*} = 250{,}3\, m/s$ 0,5 0,5

angepasste Düse $\quad p_a = p_\infty$ 0,5

$\frac{p_a}{p_0} = \left(\frac{T_a}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ 0,5 $\rightarrow T_a = T_0\left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ 0,5

$T_a = 293{,}15K \cdot \left(\frac{0{,}915\,bar}{7{,}86\,bar}\right)^{\frac{0{,}3}{1{,}3}} = 178{,}5K = -94{,}7\,°C$ 0,5 Bonus °C

$Ma_a = \sqrt{\left(\frac{T_0}{T_a} - 1\right)\frac{2}{\gamma-1}} = \sqrt{\left(\frac{293{,}15K}{178{,}5K} - 1\right)\frac{2}{0{,}3}} = 2{,}07$ 0,5 0,5

c) Σ 4,5

Bei Kondensation gilt $\rho_K = \rho_B$ mit $T_B = -78°C = 195{,}15$

also ist $\rho_K = \frac{p_B}{R\,T_B} = \frac{100.000 Pa}{189 \frac{J}{kgK}\, 195{,}15K} = 2{,}711\, kg/m^3$ 0,5 0,5

Machzahl Ma_K bei Kondensation in Abhängigkeit d. Ruhedichte im Löscher:

$Ma_K = \sqrt{\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho_K}\right)^{\gamma-1} - 1\right]\frac{2}{\gamma-1}} = 2{,}07$ 0,5 0,5

Bei Ma_K vorliegende Temperatur:

$T_K = T_0\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_K^2\right)^{-1} = 178{,}4K = -94{,}8°C < -78°C$ 0,5 0,5 0,5 Bonus

$\longrightarrow$ Kondensation findet statt 0,5

$\frac{A_K}{A^*} = \frac{1}{Ma_K}\left(\frac{1 + 0{,}5(\gamma-1)Ma_K^2}{0{,}5(\gamma+1)}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1{,}895$ 0,5

$\frac{A^*}{A_K} = 1{,}895^{-1} = 0{,}528$ 0,5

d) Σ 2,5

$\dot m = \rho^* \cdot w^* A^* \rightarrow A^* = \frac{\dot m}{\rho^* w^*} = 0{,}00269\, m^2$ 0,5 0,5

$\frac{A_a}{A^*} = \frac{1}{Ma_a}\left(\frac{1 + 0{,}5(\gamma-1)Ma_a^2}{0{,}5(\gamma+1)}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1{,}895$ 0,5 0,5

$\longrightarrow A_a = A^* \cdot 1{,}895 = 0{,}0051\, m^2$ 0,5

e) Σ 4,5

Prandtl-Relation: $w_1 \cdot w_2 = c^{*2}$

$\rightarrow w_2 = \frac{c^{*2}}{w_1} = \frac{(250{,}3\, m/s)^2}{300\, m/s} = 208{,}8\, m/s$ 0,5

$c_p T_0 = c_p T_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \longrightarrow T_1 = T_0 - \frac{w_1^2}{2 c_p} = 239{,}2\,K$ 0,5 0,5

$Ma_1 = \frac{w_1}{\sqrt{\gamma R T_1}} = 1{,}24$ 0,5 0,5

$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(Ma_1^2 - 1\right) = 1{,}66$ 0,5 0,5