

Prüfungsklausur Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

18. März 2017

Name:	
Matr.-Nr.:	
Note	

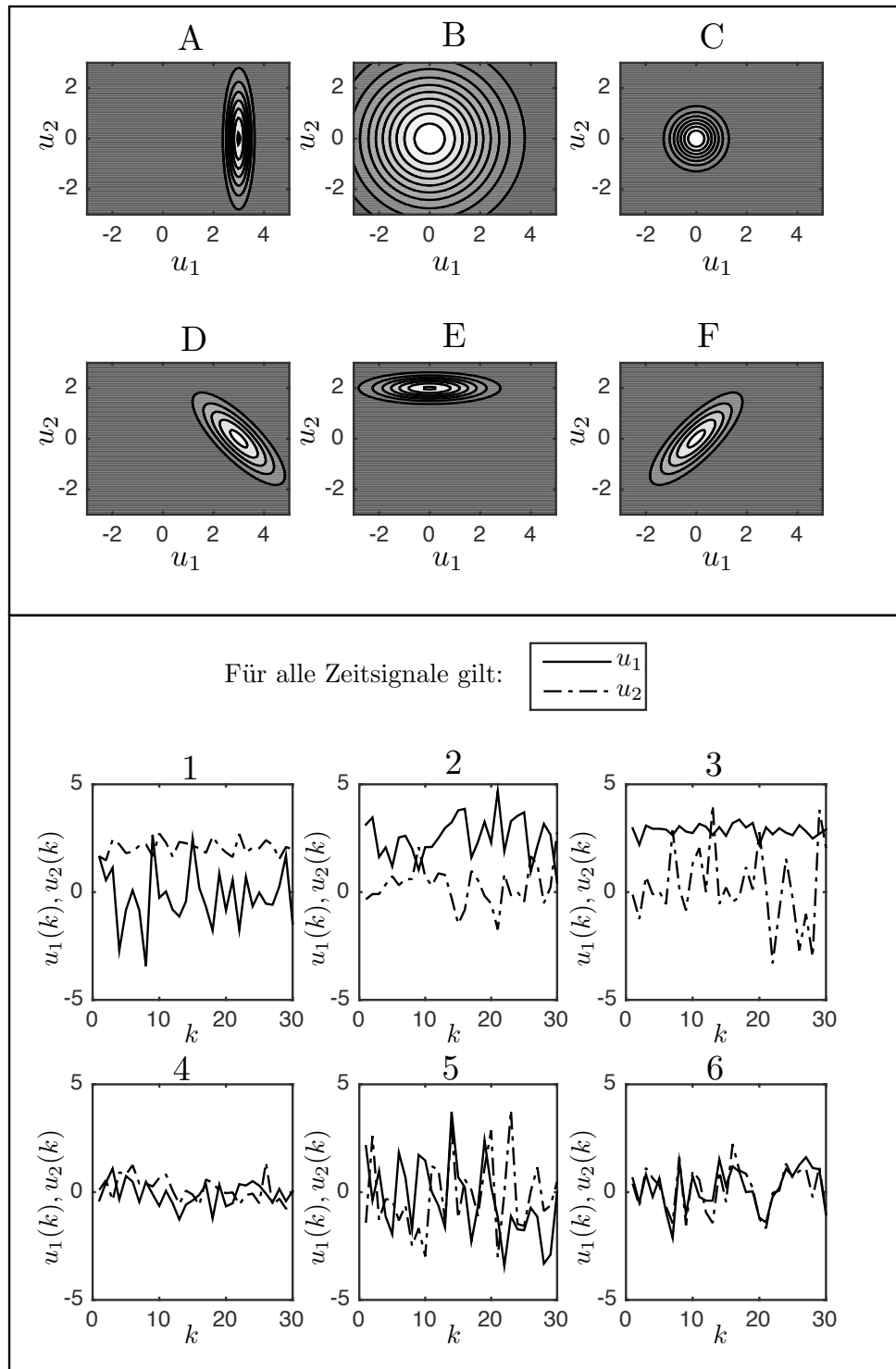
Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Gesamt
Soll:	8	12	18	10	12	60
Ist:						

Dauer der Klausur: 1 Stunde

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeitsverteilung

- a) Ordnen Sie den zweidimensionalen Normalverteilungen (oben) jeweils zwei Signale (unten) zu. Große Werte der Wahrscheinlichkeitsdichte sind hell, kleine Werte sind dunkel gekennzeichnet.
- b) Welche Eigenschaft haben zwei Signale, wenn deren zweidimensionale Normalverteilung exakt kreisförmige Höhenlinien besitzt?



Aufgabe 2: Zeitdiskretes System

Gegeben ist das zeitdiskrete System:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_2 z^{-2}}{1 + a_2 z^{-2}} \quad (1)$$

Die Abtastzeit des Systems liegt bei T_0 .

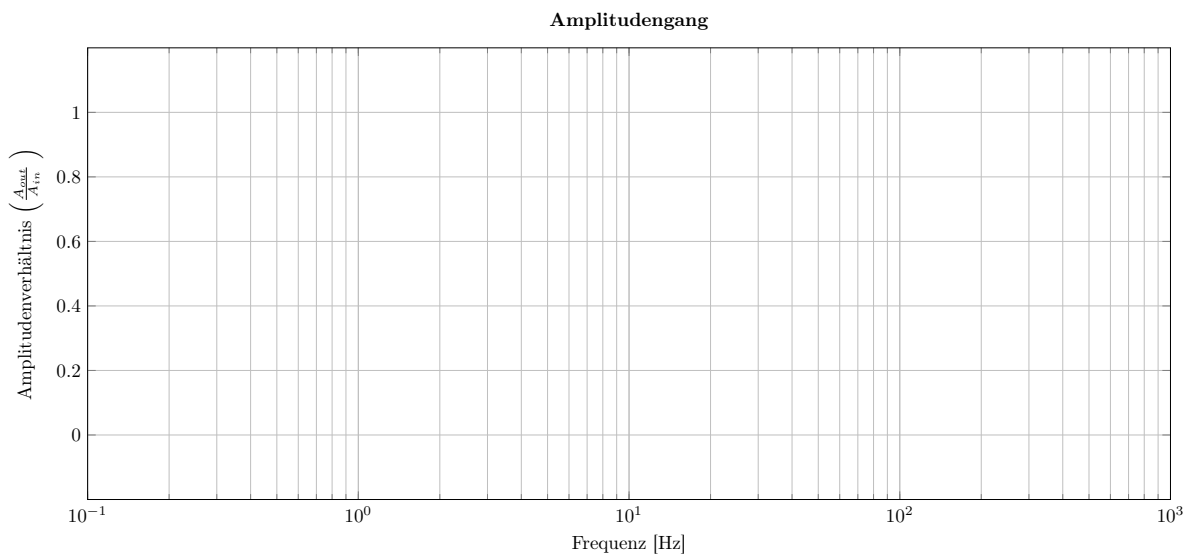
Hinweis: Nutzen Sie nur in den Aufgabenteilen c und g die folgenden Koeffizienten des Systems:

$$b_0 = 0 \quad ; \quad b_2 = -3 \quad ; \quad a_2 = -0.64. \quad (2)$$

- a) Zeichnen Sie das zugehörige Blockschaltbild für $G(z)$.
- b) Transformieren Sie die Übertragungsfunktion in den Zeitbereich.
- c) Berechnen Sie die Sprungantwort für $k = 0, 1, \dots, 4$ mit $y(k) = 0$ für $k < 0$ (mit Koeffizienten aus (2)). Runden Sie wenn nötig auf drei Nachkommastellen. Welche Besonderheit tritt hier auf (ein Satz)?
- d) Die Abtastzeit soll im Folgenden verändert werden. Hierzu wird $T_n = 2T_0$ gesetzt. Wie wird dieser Vorgang genannt?
- e) Welche Probleme können bei Vergrößerung der Abtastzeit auftreten?
- f) Wie lautet die neue Übertragungsfunktion $G_n(z)$ mit der doppelten Abtastzeit?
- g) Berechnen Sie die Sprungantwort für $k = 0, 1, \dots, 2$ mit $y(k) = 0$ für $k < 0$ (mit Koeffizienten aus (2)). Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil c mit einem Satz?

Aufgabe 3: Filter**Hinweise: Aufgabenteil c) ist komplett unabhängig lösbar!**

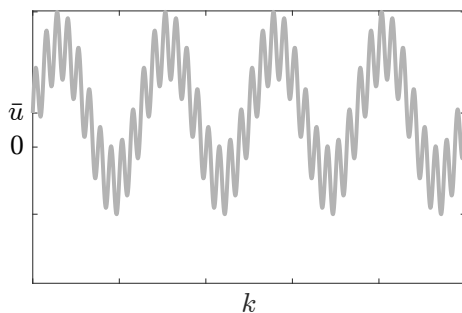
- a) Es sollen zwei Filter G_{BS} und G_{BP} miteinander verglichen werden. Bei G_{BS} handelt es sich um ein Band-Stopp Filter, bei G_{BP} um ein Band-Pass Filter. Die Grenzfrequenzen des ersten Filters G_{BS} sind $f_{BS1} = 10$ Hz und $f_{BS2} = 50$ Hz. $f_{BP1} = 20$ Hz und $f_{BP2} = 60$ Hz sind die entsprechenden Grenzfrequenzen des zweiten Filters G_{BP} . Zeichnen Sie die **idealisierten** Amplitudengänge der beiden Filter G_{BS} und G_{BP} in das unten stehende Diagramm und kennzeichnen Sie, welcher Amplitudengang zu Filter G_{BS} und welcher zu Filter G_{BP} gehört.



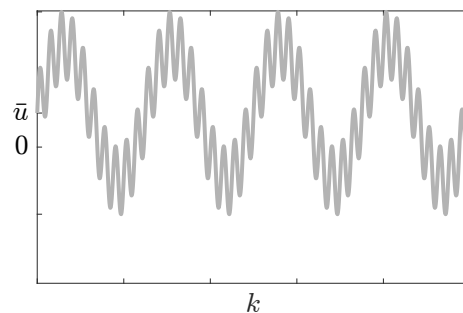
- b) Nun soll das Signal

$$u(k) = \sin(2\pi \cdot 4\text{Hz } kT_0) + 0.5 \sin(2\pi \cdot 40\text{Hz } kT_0) + \bar{u}$$

mit den idealisierten Filtern G_{BS} und G_{BP} gefiltert werden. Zeichnen Sie die gefilterten Signale $y_{BS}(k)$ und $y_{BP}(k)$ *qualitativ*. Nutzen Sie dazu unten stehende Bilder. Gehen Sie davon aus, dass die Filter eingeschwungen sind. \bar{u} kennzeichnet den Mittelwert des Signals $u(k)$. Die Abtastfrequenz beträgt $f_0 = 1000$ Hz.



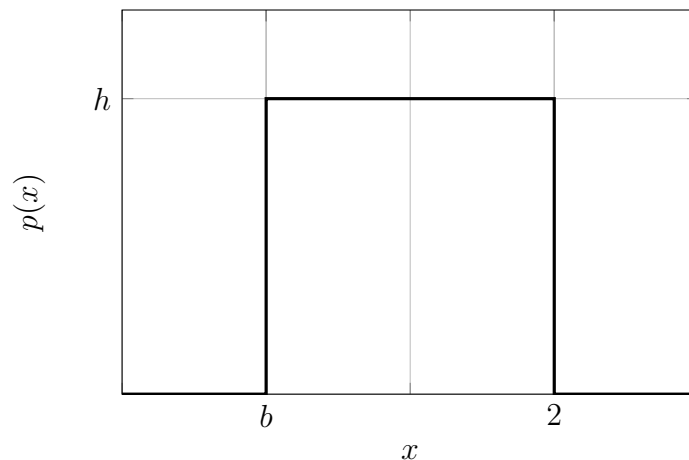
(a) $y_{BS}(k)$ nach Filterung von $u(k)$ mit G_{BS} .



(b) $y_{BP}(k)$ nach Filterung von $u(k)$ mit G_{BP} .

c) Im folgenden sind Eigenschaften aufgelistet, die auf IIR (Infinite Impulse Response) und/oder FIR (Finite Impulse Response) Filter zutreffen können. Das heißt eine Eigenschaft kann entweder einem oder beiden Filtertypen zugeordnet werden. Ordnen Sie die Eigenschaften den korrekten Filtertypen zu.

- Typischerweise geringe Ordnung
- Ein Integrator kann realisiert werden
- Kann nicht instabil werden
- Ein äquivalentes zeit-kontinuierliches System existiert
- Die Steilheit des Amplitudengangs im Übergangsbereich steigt mit steigender Filterordnung

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsdichte (10 Punkte)

- Benennen Sie die dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.
- Welche Höhe h hat die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, wenn die Konstante b gegeben ist? (Es gilt: $b < 2$.)
- Berechnen Sie den Erwartungswert der dargestellten Dichtefunktion in Abhängigkeit von der Konstanten b .
- Berechnen Sie die Varianz der dargestellten Dichtefunktion für $b = 1$. *Hinweis: Für eine Dichtefunktion $p(x)$ lautet die Formel für die Varianz der Zufallsvariablen:*

$$\text{var}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \text{E}\{x\})^2 p(x) dx$$

Aufgabe 5: Eigenschaften diskreter System (12 Punkte)

Die folgenden Übertragungsfunktionen im z -Bereich sind gegeben:

$$G_1 = \frac{z^2 - \frac{1}{4}}{z - \frac{1}{2}}$$

$$G_2 = \frac{1}{z^{-1} - \frac{1}{4}}$$

$$G_3 = \frac{1 - 0.2z}{z - 0.2}$$

$$G_4 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$G_5 = z^{-5} + z^{-3}$$

$$G_6 = \frac{1 + z + z^2}{2 + z}$$

Markieren Sie zutreffende Eigenschaften in der Tabelle.

Übertragungsfunktion	FIR System	stabil	kausal	linear	Allpass
G_1					
G_2					
G_3					
G_4					
G_5					
G_6					

Für jede Übertragungsfunktion können 2 Punkte erreicht werden. Je falschem oder fehlendem Kreuz wird 1 Punkt abgezogen und es können keine negativen Punkte in jeder Zeile erreicht werden.

Lösungen:

Aufgabe 1: **Wahrscheinlichkeitsverteilung (8 Punkte)**

a) Folgende Zuordnung gilt:

Verteilung:	A	B	C	D	E	F
Signale:	3	5	4	2	1	6

6

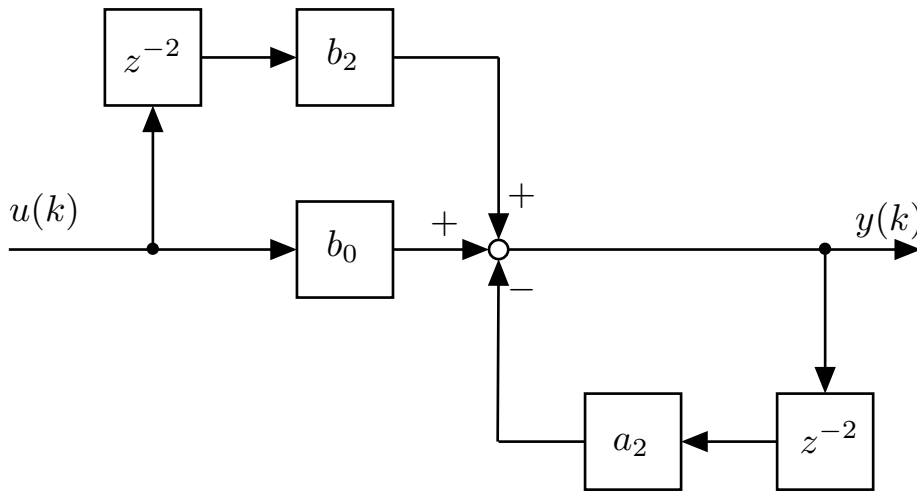
b) Die Wahrscheinlichkeiten sind unabhängig voneinander, daher sind die Signale zueinander unkorreliert $\rho_{u_1, u_2} = 0$

2

Aufgabe 2: Zeitdiskretes System (14 Punkte)

a) Blockschaltbild des Originalsystems:

3



b) Transformieren Sie die Übertragungsfunktion in den Zeitbereich.

$$U(z) (b_0 + b_2 z^{-2}) = Y(z) (1 + a_2 z^{-2}) \quad \bullet \text{---} \circ \quad b_0 u(k) + b_2 u(k-2) = y(k) + a_2 y(k-2) \quad (3)$$

$$\Rightarrow y(k) = b_0 u(k) + b_2 u(k-2) - a_2 y(k-2) \quad (4)$$

1

c) Berechnen Sie die Sprungantwort für $k = 0, 1, \dots, 6$. Welche Besonderheit tritt hier auf?

$$k = 0 \quad y(0) = b_0 \underbrace{\sigma(0)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(-2)}_{=0} - a_2 \underbrace{y(-2)}_{=0} \quad (5)$$

$$y(0) = b_0 \quad (6)$$

$$y(0) = 0 \quad (7)$$

$$k = 1 \quad y(1) = b_0 \underbrace{\sigma(1)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(-1)}_{=0} - a_2 \underbrace{y(-1)}_{=0} \quad (8)$$

$$y(1) = b_0 \quad (9)$$

$$y(1) = 0 \quad (10)$$

$$k = 2 \quad y(2) = b_0 \underbrace{\sigma(2)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(0)}_{=1} - a_2 \underbrace{y(0)}_{=b_0} \quad (11)$$

$$y(2) = b_0 + b_2 - a_2 b_0 \quad (12)$$

$$y(2) = 0 + (-3) - (-0.64) \cdot 0 = -3 \quad (13)$$

$$k = 3 \quad y(3) = b_0 \underbrace{\sigma(3)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(1)}_{=1} - a_2 \underbrace{y(1)}_{=b_0} \quad (14)$$

$$y(3) = b_0 + b_2 - a_2 b_0 \quad (15)$$

$$y(3) = 0 + (-3) - (-0.64) \cdot 0 = -3 \quad (16)$$

$$k = 4 \quad y(4) = b_0 \underbrace{\sigma(4)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(2)}_{=1} - a_2 \underbrace{y(2)}_{=b_0+b_2-a_2b_0} \quad (17)$$

$$y(4) = b_0 + b_2 - a_2 (b_0 + b_2 - a_2 b_0) \quad (18)$$

$$y(4) = 0 + (-3) - (-0.64) (0 + (-3) - (-0.64) \cdot 0) = -4.92 \quad (19)$$

Es fällt auf, dass die Sprungantwort des Systems jeweils für zwei Zeitschritte konstant bleibt und dann erst wieder springt. 2

- d) Die Abtastzeit soll im Folgenden verändert werden. Hierzu wird $T_n = 2T_0$ gesetzt. Wie wird dieser Vorgang genannt?

Downsampling 1

- e) Welche Probleme können bei der Vergrößerung der Abtastzeit auftreten?

Durch Downsampling wird die Abtastfrequenz verringert, dadurch kann Aliasing entstehen. 1

- f) Wie lautet die neue Übertragungsfunktion $G_n(z)$ mit der doppelten Abtastzeit?

Durch Verdopplung der Abtastzeit $T_n = 2T_0$ ergibt sich

$$z = e^{sT_0} \quad (20)$$

$$z_n = e^{sT_{0,n}} \quad (21)$$

$$z_n = e^{s2T_0} \quad (22)$$

$$\Rightarrow z_n = z^2 \quad (23)$$

$$\Rightarrow z_n^{\frac{1}{2}} = z \quad (24)$$

$$(25)$$

Für die Übertragungsfunktion folgt:

$$G_n(z_n) = \frac{b_0 + b_2 z_n^{\frac{1}{2} \cdot (-2)}}{1 + a_2 z_n^{\frac{1}{2} \cdot (-2)}} \quad (26)$$

$$G_n(z_n) = \frac{b_0 + b_2 z_n^{-1}}{1 + a_2 z_n^{-1}} \quad (27)$$

2

- g) Berechnen Sie die Sprungantwort von $G_n(z)$ für $k = 0, 1, \dots, 2$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil c) mit einem Satz?

$$U(z) (b_0 + b_2 z^{-1}) = Y(z) (1 + a_2 z^{-1}) \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad b_0 u(k) + b_2 u(k-1) = y(k) + a_2 y(k-1) \quad (28)$$

$$\Rightarrow y(k) = b_0 u(k) + b_2 u(k-1) - a_2 y(k-1) \quad (29)$$

$$k = 0 \quad y(0) = b_0 \underbrace{\sigma(0)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(-1)}_{=0} - a_2 \underbrace{y(-1)}_{=0} \quad (30)$$

$$y(0) = b_0 \quad (31)$$

$$y(0) = 0 \quad (32)$$

$$k = 1 \quad y(1) = b_0 \underbrace{\sigma(1)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(0)}_{=1} - a_2 \underbrace{y(0)}_{=b_0} \quad (33)$$

$$y(1) = b_0 + b_2 - a_2 b_0 \quad (34)$$

$$y(1) = 0 + (-3) - (-0.25) \cdot 0 = -3 \quad (35)$$

$$k = 2 \quad y(2) = b_0 \underbrace{\sigma(2)}_{=1} + b_2 \underbrace{\sigma(1)}_{=1} - a_2 \underbrace{y(1)}_{=b_2 - a_2 b_0} \quad (36)$$

$$y(2) = b_0 + b_2 - a_2 (b_0 + b_2 - a_2 b_0) \quad (37)$$

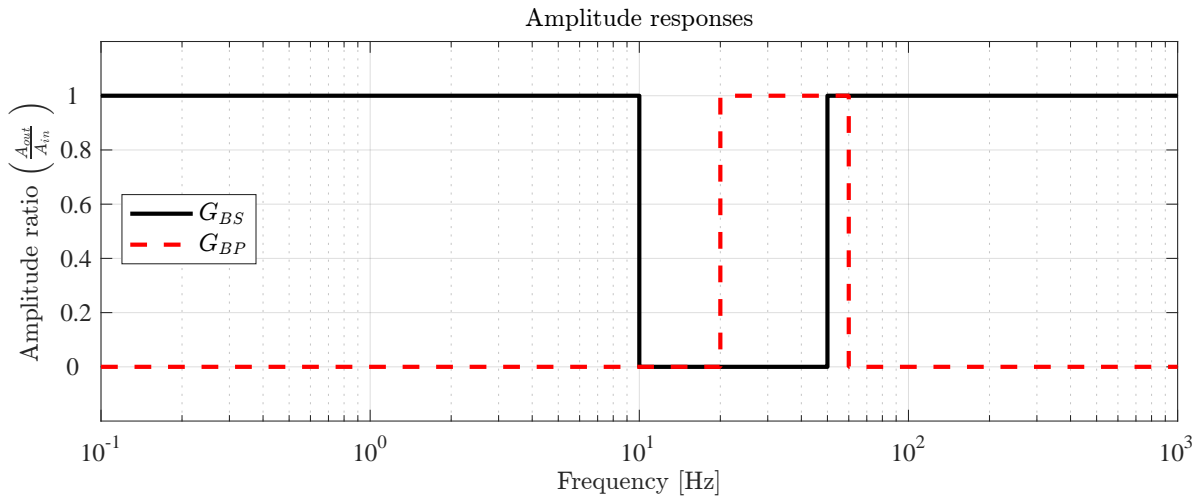
$$y(2) = 0 + (-3) - (-0.64) (0 + (-3) - (-0.64) \cdot 0) = -4.92 \quad (38)$$

Es fällt auf, dass die Sprungantwort des Systems jeweils für zwei Zeitschritte konstant bleibt und dann erst wieder springt.

2

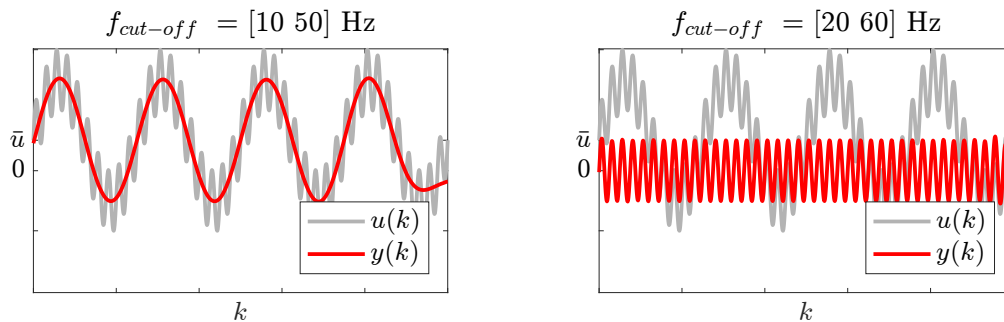
Aufgabe 3: Filter

a)



6

b)



(a) Sketch the output $y(k)$ qualitatively, if this sine wave is sent through filter G_{BS} .

(b) Sketch the output $y(k)$ qualitatively, if this sine wave is sent through filter G_{BP} .

6

- c)
- Typischerweise geringe Ordnung \rightarrow IIR
 - Ein Integrator kann realisiert werden \rightarrow IIR
 - Kann nicht instabil werden \rightarrow FIR
 - Ein äquivalentes zeit-kontinuierliches System existiert \rightarrow IIR
 - Die Steilheit des Amplitudengangs im Übergangsbereich steigt mit steigender Filterordnung \rightarrow IIR and FIR

6

 $\sum 18$

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsdichte

a) Gleichverteilung

1

b) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (39)$$

daher gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = h \cdot (2 - b) = 1 \quad (40)$$

und damit

$$h = \frac{1}{2 - b} \quad (41)$$

2

c) Der Erwartungswert einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion berechnet sich zu

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = \int_b^2 xh dx = h \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_b^2 = \frac{1}{2} \frac{4 - b^2}{2 - b} = \frac{2 + b}{2} \quad (42)$$

3

d) Für $b = 1$ gilt $h = 1$ und $E\{x\} = \frac{3}{2}$. Die Varianz berechnet sich dann als

$$\text{var}\{x\} = \int_1^2 (x - E\{x\})^2 h dx = h \int_1^2 x^2 - 2xE\{x\} + E\{x\}^2 dx \quad (43)$$

$$= h \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 E\{x\} + x E\{x\}^2 \right]_1^2 \quad (44)$$

$$= h \left[\frac{1}{3} x^2 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{9}{4} x \right]_1^2 \quad (45)$$

$$= \frac{1}{3} 7 - \frac{3}{2} 3 + \frac{9}{4} \quad (46)$$

$$= \frac{1}{12} \quad (47)$$

4

 $\Sigma 10$

Aufgabe 5: Eigenschaften diskreter System

Übertragungsfunktion	FIR System	stabil	kausal	linear	Allpass
G_1	x	x		x	
G_2			x	x	
G_3		x		x	x
G_4		x	x	x	
G_5	x	x	x	x	
G_6				x	

 $\sum 12$