PAMM · Proc. Appl. Math. Mech. 5, 409–410 (2005) / **DOI** 10.1002/pamm.200510181

Ein Vergleich numerischer Methoden zur Beschreibung von Kontaktvorgängen

Christian Hesch[*1] und **Peter Betsch**

Lehrstuhl für Numerische Mechanik, Institut für Mechanik und Regelungstechnik, Universität Siegen, Paul-Bonatz-Str. 9-11, 57068 Siegen

Die am häufigsten zum Einsatz kommende Methode zur Beschreibung eines Kontaktvorgangs ist das sog. NTS- (node-to-segment-) Element (vgl. [3]). Die NTS-Methode bewirkt eine punktweise Erfüllung der Kontaktbedingung.
Demgegenüber steht die Mortar Methode (vgl. [1]), die eine variationell konsistente Beschreibung des Kontaktvorgangs ermöglicht.

1 Einleitung

Die Formulierung des Kontaktvorgangs zweier Körper erfolgt mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\delta W = \delta W_{\text{int}}^{(i)} - \delta W_{\text{ext}}^{(i)} - \delta W_c = 0$$

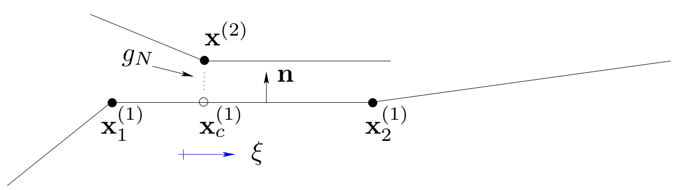
Hiebei steht i für die verschiedenen Körper. Der Dynamik-Term $W_{\text{dyn}}^{(i)}$ wurde weggelassen, so dass hier ein statischer Fall beschrieben wird. Die Terme $\delta W_{\text{int}}^{(i)}$ und $\delta W_{\text{ext}}^{(i)}$ sind die bekannten Anteile der inneren und äußeren Kräfte. Im Rahmen einer nichtlinearen materiellen Formulierung ergibt sich:

$$\delta W_{\text{int}}^{(i)} = \int\limits_{\Omega^i} \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\eta} : \mathbf{P} dV, \quad \delta W_{\text{ext}}^{(i)} = \int\limits_{\Omega^i} \boldsymbol{\eta} \rho_0 \mathbf{b} dV + \int\limits_{\Gamma_\sigma^i} \boldsymbol{\eta} \mathbf{T} \mathrm{d}\Gamma$$

Hinzu kommt der Term δW_c, der die infolge Kontakt vorliegenden Zwangsbedingungen erfasst. Es entsteht ein gemischtes System aus dem Verschiebungsfeld und dem Feld der Lagrangeschen Multiplikatoren, die als eigenständige Freiheitsgrade in das System eingefügt werden. Im Folgenden soll nun die Variationsformulierung von δW_c für das NTS-Element sowie für das Mortar-Element hergeleitet werden.

2 NTS-Element

Grundlage der NTS-Formulierung ist die Forderung, dass kein Knotenpunkt der Oberfläche eines in Kontakt tretenden Körpers (Slave-Seite) die Oberfläche des anderen Körpers (Master-Seite) durchdringen darf. Dazu wird der Abstand der Knotenpunkte der Slave-Seite zur Master-Oberfläche bestimmt:



$$\mathbf{x}_c^{(1)}(\xi) = (1-\xi)\mathbf{x}_1^{(1)} + \xi \mathbf{x}_2^{(1)}, \quad g_N = [\mathbf{x}^{(2)} - (1-\xi)\mathbf{x}_1^{(1)} - \xi \mathbf{x}_2^{(1)}] \cdot \mathbf{n}$$

Bei Anwendung Lagrangescher Multiplikatoren wird dieser Abstand als Zwangsbedingung aufgefasst:

$$\delta W_c = \delta \int\limits_{\Gamma_c} (\lambda_N g_N) \mathrm{d}\Gamma$$

3 Mortar-Element

Um eine variationell konsistente Beschreibung über die Kontaktoberfläche zu erhalten, wird für einen beliebigen Ort $\mathbf{x}^2$ auf einer der Oberflächen und dessen zugehörigem Punkt $\mathbf{x}^1$ auf der ihr gegenüberliegenden Oberfläche die Zwangsbedingung

* e-mail: hesch@imr.mb.uni-siegen.de, Phone: +49 (271) 740-2101, Fax: +49 (271) 740-2436, Web: http://www.mb.uni-siegen.de/nm/

wie folgt formuliert:

$$\delta W_c = \delta \Big\{ \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}) \, \mathrm{d}\Gamma \Big\}$$

Über die einzelnen Elemente wird mithilfe geeigneter Ansatzfunktionen interpoliert (vgl. [4]):

$$\boldsymbol{\lambda}^h = \sum_{A=1}^{n} N_A^{(1)}(\xi^{(1)}) \boldsymbol{\lambda}_A, \quad \mathbf{x}^{(1)^h} = \sum_{B=1}^{n} N_B^{(1)}(\xi^{(1)}) \mathbf{x}_B^{(1)}, \quad \mathbf{x}^{(2)^h} = \sum_{C=1}^{n} N_C^{(2)}(\xi^{(2)}) \mathbf{x}_C^{(2)}$$

Beide approximierten Oberflächen werden mittels einer Linear-Transformation auf ein gemeinsames Gebiet $\boldsymbol{\eta}$ abgebildet. In diesem Gebiet $\boldsymbol{\eta}$ wird dann die Gauss-Integration ausgeführt:

$$\xi^{(i)} = \frac{1}{2}(1 - \eta_g)\xi_a^{(i)} + \frac{1}{2}(1 + \eta_g)\xi_b^{(i)}$$

Damit kann die diskrete Form des Kontakt-Residuals aufgestellt werden (vgl. [2]):

$$\delta W_c = \delta \Big\{ \sum_{A,B,C} \boldsymbol{\lambda}_A [n_{AB}^{(1)} \mathbf{x}_B^{(1)} - n_{AC}^{(2)} \mathbf{x}_C^{(2)}] \Big\}$$

mit

$$n_{AB}^{(1)} = \int_{\Gamma_c} N_A^{(1)}(\xi^{(1)}(\eta)) N_B^{(1)}(\xi^{(1)}(\eta)) \, \mathrm{d}\Gamma, \quad n_{AC}^{(2)} = \int_{\Gamma_c} N_A^{(1)}(\xi^{(1)}(\eta)) N_C^{(2)}(\xi^{(2)}(\eta)) \, \mathrm{d}\Gamma$$

4 Beispiel

Ein nichtlineares, elastisches Seil wird mit einer Druckbelastung so weit aufgeblasen bis es in Kontakt mit einem weichen Kissen kommt. Während des Kontaktvorgangs ist nach jedem Lastschritt eine vollständige Rekonfiguration der Mortar-Segmente notwendig. Die Formulierung erfolgt mit Lagrangeschen Multiplikatoren, um die exakte Erfüllung der Zwangsbedingungen zu gewährleisten.

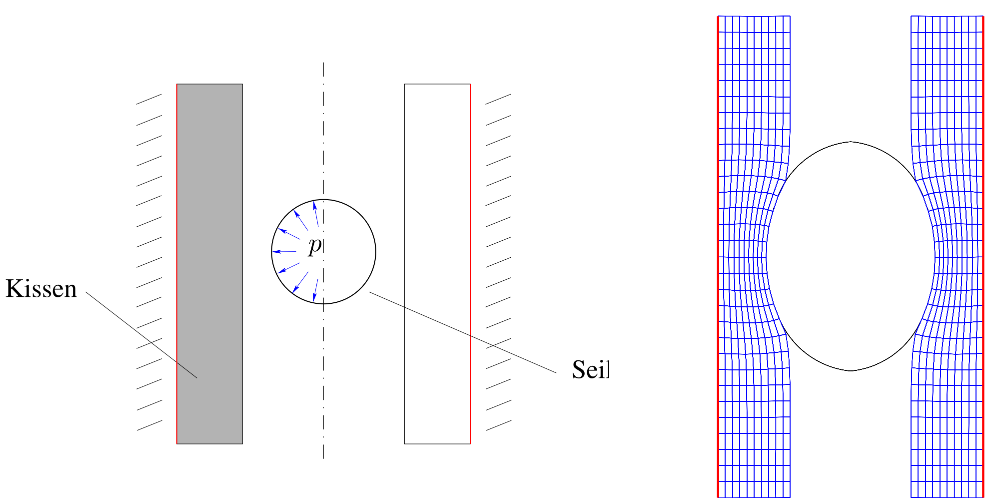


Abb. 1 links: Darstellung der Ausgangskonfiguration, rechts: diskretes Modell, deformierte Konfiguration

Literatur

[1] McDevitt and Laursen, A mortar-finite element formulation for frictional contact problems: Int. J. Numer. Meth. Engng **48**, 1525–1547 (2000).

[2] Puso and Laursen, A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics: Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **193**, 601–629 (2004).

[3] Wriggers, Computational Contact Mechanics: John Wiley & Sons, LTD (2002)

[4] Yang & Laursen and Meng, Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding: Int. J. Numer. Meth. Engng **62**, 1183–1225 (2005).