

Numerische Untersuchungen
diskreter dynamischer Systeme
im Rahmen der
PETROV-GALERKIN-Methode

Lehrstuhl für Technische Mechanik
Universität Kaiserslautern

Studienarbeit

Bearbeiter: cand. ing. Michael Groß
Betreuer: Dr.-Ing. Peter Betsch

Juli 1999

S02/99

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1 Das Zeitschrittverfahren	1
1.1 Die schwache Form	2
1.2 Diskretisierung der Zeit	4
1.3 Elementorientierte Betrachtung	5
1.4 PETROV-GALERKIN-Approximation	5
1.5 Lineare Zeitelemente	8
1.6 Stabilität des Zeitschrittverfahrens	9
2 Das Zweikörperproblem	13
2.1 Reduktion des Zweikörperproblems	14
2.2 Äquivalentes Einkörperproblem	16
2.2.1 Räumliches Einkörperproblem	16
2.2.2 Ebenes Einkörperproblem	18
2.3 Bahngleichung der reduzierten Masse	19
2.4 Analytisch integrierbare Potentiale	22
2.5 Potentiale für geschlossene Bahnen	24
2.6 Numerische Lösung in kartesischen Koordinaten	27
2.7 Numerische Lösung in Polarkoordinaten	32
2.8 Das KEPLER-Problem	37
2.8.1 Analytische Lösung	37
2.8.2 Numerische Beispielrechnungen	40
2.9 Das HOOKE-Potential	47
2.9.1 Analytische Lösung	47
2.9.2 Numerische Beispielrechnungen	50
2.10 Das lineare Potential	56
2.11 Das binomiale Potential	62

2.11.1	Numerische Beispielrechnung	62
2.11.2	Der DUFFING-Schwinger als Sonderfall	65
2.11.3	Phasenkurven des DUFFING-Schwingers	66
2.11.4	Numerische Berechnung der Phasenkurven	68
2.11.5	Schlußbemerkung zur numerischen Lösung	76
3	Das Doppelpendel	77
3.1	Lineares Doppelpendel	78
3.1.1	Analytische Lösung	80
3.1.2	Numerische Lösung	82
3.1.3	Beispielrechnung in absoluten Koordinaten	84
3.1.4	Beispielrechnung in relativen Koordinaten	96
3.2	Nichtlineares Doppelpendel	106
3.2.1	Beispielrechnung in absoluten Koordinaten	111
3.2.2	Beispielrechnung in relativen Koordinaten	118
3.2.3	Schlußbemerkungen zur numerischen Lösung	124
A	KEPLER-Problem	129
B	DUFFING-Schwinger	135
C	Nichtlineares Doppelpendel	143
C.1	Absolute Koordinaten	143
C.2	Relative Koordinaten	152
D	Aufgabenstellung	163
	Zusammenfassung	165

Einleitung

Thematik dieser Arbeit ist die Implementierung und Anwendung des, von P. BETSCH und P. STEINMANN [1] im Rahmen der PETROV-GALERKIN-Finite-Elemente-Methode entwickelten, Zeitschrittverfahrens zur numerischen Lösung von Bewegungsgleichungen diskreter dynamischer Systeme. Die Implementierung und Durchführung numerischer Beispielrechnungen erfolgte unter MATLAB 5.0 (siehe Anhang D).

Das GALERKIN-Verfahren ist ein Näherungsverfahren zur Lösung von Integralgleichungen und im allgemeinen partieller Differentialgleichungen mittels einer Bilinearform über geeigneten Funktionenräumen U (Ansatzfunktionsraum) und V (Testfunktionsraum). Im Gegensatz zur BUBNOV-GALERKIN-Methode, die identische Funktionenräume U und V verwendet, sind bei der PETROV-GALERKIN-Methode die Funktionenräume unterschiedlich [2].

Das Zeitschrittverfahren geht aus der Anwendung der PETROV-GALERKIN-Methode auf die kanonischen HAMILTONschen Gleichungen hervor, die Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen, und zählt zu den Zeitschritt-Algorithmen die vom Ansatz her Energie-erhaltend sind [1].

Die numerisch und zum Teil analytisch berechneten Beispiele beziehen sich auf zwei konservative, autonome Zwei-Massenpunktsysteme, die sich formal durch ihre Nebenbedingungen unterscheiden:

1. Als Beispiel eines Systems ohne jegliche Zwangsbedingungen wird das *Zweikörperproblem* untersucht, welches die Bewegung zweier Massenpunkte im Raum beschreibt. Dabei wirken keine äußeren Kräfte auf das System, sondern es besteht nur eine gegenseitige Einflußnahme der Massenpunkte.
2. Ein System mit holonomen Zwangsbedingungen repräsentiert hier das ebene *Doppelpendel* im Anzugsbereich der Schwerkraft in Erdnähe.

Bei dem Zweikörperproblem werden die Bahnkurven unterschiedlicher Potentiale V des konservativen Kraftfeldes ermittelt. Zum Teil geht einer numerischen Lösung der Bahnkurve eine analytische Lösung vorweg. Die numerischen Berechnungen werden überwiegend in kartesischen Koordinaten durchgeführt. Als Sonderfall des, hier so bezeichneten, binomialen Potentials geht der DUFFING-Schwinger hervor [3], dessen Phasenkurven analytisch und numerisch in Polarkoordinaten berechnet werden.

Die Behandlung des Doppelpendels reduziert sich letztendlich auf die Behandlung einer einfachen Konstellation. Die Bewegungsgleichungen werden unter Verwendung von Absolutwinkeln und Relativwinkeln aufgestellt. Für das linearisierte System erfolgt neben der numerischen Lösung auch eine analytische Lösung. Abschließend erfolgt ein Vergleich der numerischen Lösung mittels Absolutwinkel bzw. Relativwinkel hinsichtlich der Numerik.

Kapitel 1

Das Zeitschrittverfahren

Allgemein werden hier dynamische N -Massenpunktsysteme betrachtet, die k holonomen Zwangsbedingungen unterliegen [1]. Folglich besitzen die betrachteten Systeme $n = 3N - k$ Freiheitsgrade, die durch n generalisierte Koordinaten q_i ($i = 1, \dots, n$) beschrieben werden. Jede Koordinate q_i stellt eine Komponente eines Vektors \mathbf{q} in einem n -dimensionalen Konfigurationsraum dar.

Weiterhin soll das betrachtete System *konservativ* sein, d.h. die generalisierten Kräfte Q_i ergeben sich aus einem Potential $V = V(\mathbf{q}, t)$ das explizit von der Zeit abhängen kann:

$$\mathbf{Q} = -\partial_{\mathbf{q}}V \quad (1.1)$$

Die Funktion $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ mit den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$ sei die kinetische Energie des Systems.

Derartige Systeme werden üblicherweise im Rahmen der LAGRANGESchen Mechanik behandelt. Hier folgen aus der LAGRANGE-Funktion $L = T - V$ die LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt}(\partial_{\dot{\mathbf{q}}}L) - \partial_{\mathbf{q}}L = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

Die Bewegungsgleichungen (1.2) bilden ein System von n nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

1.1 Die schwache Form

Da die LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art Differentialgleichungen zweiter Ordnung liefern, sind sie aber für die Lösung mit dem GALERKIN-Verfahren schlecht geeignet. Dies zeigt die folgende Rechnung:

Der erste Schritt zur Lösung der Gln. (1.2) mit dem GALERKIN-Verfahren ist die Bildung einer Bilinearform [4, 5] im betrachteten Zeitbereich $I = [t_0, t_0 + T]$ mit der Testfunktion $\delta \mathbf{q}$:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \left(\frac{d}{dt} (\partial_{\dot{\mathbf{q}}} L) - \partial_{\mathbf{q}} L \right) \delta \mathbf{q} dt = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

Die Gl. (1.4) nennt man die *schwache Form* der Gl. (1.2).

Die Kontinuitätsanforderungen an die Lösungsfunktion und die Testfunktion sind in Gl. (1.4) unterschiedlich. Aus diesem Grund wird durch eine partielle Integration des ersten Termes von Gl. (1.4) eine symmetrische schwache Form herbeigeführt:

$$\left[\partial_{\dot{\mathbf{q}}} L \cdot \delta \mathbf{q} \right]_{t_0}^{t_0+T} - \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\partial_{\dot{\mathbf{q}}} L \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} + \partial_{\mathbf{q}} L \cdot \delta \mathbf{q} \right) dt = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

Die schwache Form in Gl. (1.5) stellt zwar gleiche Kontinuitätsanforderungen, enthält aber einen Randterm für $t = t_0 + T$. Da aber Bewegungsgleichungen keine Randwertprobleme darstellen, sondern lediglich Anfangswertprobleme ist diese schwache Form nicht sinnvoll.

Es gilt somit eine Form der Bewegungsgleichungen zu finden, die ohne partielle Integration gleiche Kontinuitätsanforderungen an die Lösungsfunktion und die Testfunktion stellt.

Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ist bekannt [2], daß jedes Differentialgleichungssystem beliebiger Ordnung durch die Einführung neuer Variablen auf ein äquivalentes Differentialgleichungssystem erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Ein solches Differentialgleichungssystem erster Ordnung erfordert keine partielle Integration.

Nach Gl. (1.2) bietet sich die Einführung einer Variablen \mathbf{p} an, mit der Definition:

$$\mathbf{p} := \partial_{\dot{\mathbf{q}}} L \quad (1.6)$$

Zu bemerken ist, daß in der LAGRANGESchen Mechanik so der generalisierte Impuls \mathbf{p} definiert ist [6, 7, 8].

Ferner wird vorausgesetzt, daß Gl. (1.6) nach der generalisierten Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}$ auflösbar ist. Somit kann der generalisierte Impuls \mathbf{p} als neue Variable eingeführt werden und ersetzt mit Gl. (1.6) die generalisierte Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}$.

$$\dot{\mathbf{p}} - \partial_{\mathbf{q}}L = 0 \quad (1.7)$$

Da aber die LAGRANGE-Funktion $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ noch von der generalisierten Geschwindigkeit abhängt, muß eine Variablentransformation durchgeführt werden. Eine Transformation einer Variablen $\dot{\mathbf{q}}$ in eine Variable \mathbf{p} nach der Definition in Gl. (1.6), kann allgemein, d.h. bei einer noch unbekanntem LAGRANGE-Funktion, mittels einer LEGENDRE-Transformation durchgeführt werden [6]. Danach entsteht eine neue Funktion $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (1.8)$$

Die entstandene Funktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ heißt HAMILTON-Funktion.

Die Äquivalenz der Variablensätze $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ und (\mathbf{q}, \mathbf{p}) fordert die Äquivalenz der totalen Differentiale beider Seiten der Gl. (1.8). Das totale Differential der linken Seite ist:

$$dH = \partial_{\mathbf{q}}H d\mathbf{q} + \partial_{\mathbf{p}}H d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (1.9)$$

Die rechte Seite von Gl. (1.8) führt unter Berücksichtigung von Gl. (1.6) auf das folgende totale Differential:

$$dH = -\partial_{\mathbf{q}}L d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (1.10)$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von Gl.(1.9) mit Gl. (1.10) ergibt:

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial_{\mathbf{p}}H \quad \text{und} \quad \partial_{\mathbf{q}}H = -\partial_{\mathbf{q}}L \quad (1.11)$$

sowie

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (1.12)$$

Nach Einsetzen der Gl. (1.7) in die Gln. (1.11) folgt:

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial_{\mathbf{p}}H \quad (1.13)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\partial_{\mathbf{q}}H \quad (1.14)$$

Die Gln. (1.13) und (1.14) nennt man wegen der formalen Einfachheit und Symmetrie *kanonische HAMILTONSche* Gleichungen [8]. Sie sind zu den LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art äquivalent und bilden demzufolge die gesuchten Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die HAMILTON-Funktion H und die kanonischen HAMILTONSchen Gleichungen bilden das Fundament der HAMILTONSchen Mechanik. Die HAMILTONSche Mechanik beschreibt ein System in einem $2n$ -dimensionalen *Phasenraum*, der von den $2n$ unabhängigen Koordinaten q_i, p_i ($i = 1, \dots, n$) aufgespannt wird [7].

Die schwachen Formen der kanonischen HAMILTONSchen Gleichungen sind:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} (\dot{\mathbf{q}} - \partial_{\mathbf{p}}H) \delta \mathbf{p} dt = 0 \quad \text{und} \quad (1.15)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} (\dot{\mathbf{p}} + \partial_{\mathbf{q}}H) \delta \mathbf{q} dt = 0 \quad (1.16)$$

Gleichsetzen der beiden schwachen Formen führt auf eine einzige schwache Form:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} ((\dot{\mathbf{q}} - \partial_{\mathbf{p}}H) \delta \mathbf{p} - (\dot{\mathbf{p}} + \partial_{\mathbf{q}}H) \delta \mathbf{q}) dt = 0 \quad (1.17)$$

Diese schwache Form ist durch die kanonischen HAMILTONSchen Gleichungen auf Anhieb symmetrisch und bietet gleiche Kontinuitätsanforderungen für die Testfunktionen und die Lösungsfunktionen.

1.2 Diskretisierung der Zeit

Nach der Erstellung der schwachen Form erfolgt die Unterteilung des Zeitintervalls $I = [t_0, t_0 + T]$ in eine Anzahl finiter Zeitelemente (siehe Abb. 1.1) der Länge $h_n = t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, \dots, N$) wobei $t_N \equiv t_0 + T$ ist [1]:

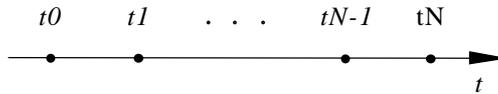


Abbildung 1.1: Diskretisierung der Zeit

$$\sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} ((\dot{\mathbf{q}} - \partial_{\mathbf{p}}H) \delta \mathbf{p} - (\dot{\mathbf{p}} + \partial_{\mathbf{q}}H) \delta \mathbf{q}) dt = 0 \quad (1.18)$$

1.3 Elementorientierte Betrachtung

Für die Finite-Elemente-Formulierung reicht die Betrachtung eines repräsentativen Elementes $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ aus [4]. Durch die Einführung einer umkehrbaren Koordinatentransformation $T_e : t \mapsto \alpha(t)$ wird das repräsentative Element auf ein *Masterelement* $\hat{I} = [0, 1]$ mit $k+1$ Knoten α_j ($j = 1, \dots, k+1$) abgebildet (siehe Abb. 1.2) [1]:

$$T_e : \alpha(t) = \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = \frac{t - t_{n-1}}{h_n} \quad (1.19)$$

mit $h_n := t_n - t_{n-1}$.

Diese Transformation bildet den ersten Knoten auf t_{n-1} und den letzten Knoten auf t_n ab:

$$\alpha(t_{n-1}) = \alpha_1 \quad \text{bzw.} \quad \alpha(t_n) = \alpha_{k+1} \quad (1.20)$$

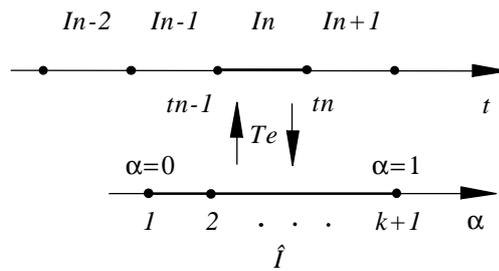


Abbildung 1.2: Masterelement des Zeitschrittverfahrens

1.4 PETROV-GALERKIN-Approximation

Im Rahmen der PETROV-GALERKIN-Methode werden für die Lösungsfunktionen und die Testfunktionen unterschiedliche Ansätze gewählt. Die Lösungsfunktionen $\mathbf{q}(t)$ und $\mathbf{p}(t)$ werden durch abschnittsweise glatte LAGRANGE-Polynome vom Grade k approximiert, die kontinuierlich über die Elementgrenzen verlaufen [1]:

$$\mathbf{q}^h(\alpha) = \sum_{i=1}^{k+1} M_i(\alpha) \mathbf{q}_i \quad (1.21)$$

$$\mathbf{p}^h(\alpha) = \sum_{i=1}^{k+1} M_i(\alpha) \mathbf{p}_i \quad (1.22)$$

mit $M_i(\alpha)$ als LAGRANGE-Formfunktionen des Masterelements \hat{I} vom Grade k mit folgender Form:

$$M_i(\alpha) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} \frac{\alpha - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}, \quad 1 \leq i \leq k+1 \quad (1.23)$$

Das Erfüllen der Interpolationsbedingung $M_i(\alpha_l) = \delta_{il}$, mit δ_{il} als dem KRONECKER-Delta, stellt die Interpolation über die Knotenwerte \mathbf{q}_i der generalisierten Koordinaten bzw. über die Knotenwerte \mathbf{p}_i des generalisierten Impulses sicher.

In der schwachen Form in Gl. (1.18) müssen die zeitlichen Ableitungen $\dot{\mathbf{q}}^h = d\mathbf{q}^h/dt$ und $\dot{\mathbf{p}}^h = d\mathbf{p}^h/dt$ eingesetzt werden. Diese ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^h(\alpha(t)) &= \frac{d\mathbf{q}^h(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \equiv (\mathbf{q}^h)'(\alpha) \frac{1}{h_n} \\ &= \frac{1}{h_n} \sum_{i=1}^{k+1} M_i'(\alpha) \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nach analoger Rechnung ergibt sich die zeitliche Ableitung des generalisierten Impulses:

$$\dot{\mathbf{p}}^h(\alpha(t)) = \frac{1}{h_n} \sum_{i=1}^{k+1} M_i'(\alpha) \mathbf{p}_i \quad (1.25)$$

Die Approximation der Testfunktionen $\delta\mathbf{q}(t)$ und $\delta\mathbf{p}(t)$ erfolgt durch LAGRANGE-Polynome vom Grad $k-1$ mit diskontinuierlichem Verlauf über die Elementgrenzen hinweg:

$$\delta\mathbf{q}^h(\alpha) = \sum_{i=1}^k \tilde{M}_i(\alpha) \delta\mathbf{q}_i \quad (1.26)$$

$$\delta\mathbf{p}^h(\alpha) = \sum_{i=1}^k \tilde{M}_i(\alpha) \delta\mathbf{p}_i \quad (1.27)$$

wobei die $\tilde{M}_i(\alpha)$ ebenfalls LAGRANGE-Formfunktionen sind, die aber aus LAGRANGE-Polynomen mit einem niedrigeren Grad $k-1$ bestehen.

Bemerkung 1.1 Die Approximationen $\delta \mathbf{q}^h(\alpha)$ und $\delta \mathbf{p}^h(\alpha)$ der Testfunktionen sind möglicherweise diskontinuierlich, da sie Sprünge bei t_n aufweisen können [1].

Die schwache Form wird, durch die Substitution $t \mapsto \alpha$ über die Koordinatentransformation T_e , auf das Masterelement \hat{I} bezogen und durch das Einsetzen der Approximationen $\dot{\mathbf{q}}^h(\alpha)$ und $\dot{\mathbf{p}}^h(\alpha)$ der Lösungsfunktionen bzw. $\delta \mathbf{q}^h(\alpha)$ und $\delta \mathbf{p}^h(\alpha)$ der Testfunktionen diskretisiert:

$$\begin{aligned} & h_n \int_0^1 \left(\dot{\mathbf{q}}^h(\alpha) - \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) \right) \delta \mathbf{p}^h(\alpha) \frac{d\alpha}{h_n} - \\ & - h_n \int_0^1 \left(\dot{\mathbf{p}}^h(\alpha) + \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) \right) \delta \mathbf{q}^h(\alpha) \frac{d\alpha}{h_n} = 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Dabei läßt sich durch die Form der Transformation T_e die Zeitschrittweite h_n kürzen:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\dot{\mathbf{q}}^h(\alpha) - \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) \right) \delta \mathbf{p}^h(\alpha) d\alpha - \\ & - \int_0^1 \left(\dot{\mathbf{p}}^h(\alpha) + \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) \right) \delta \mathbf{q}^h(\alpha) d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Die Ersetzung der Lösungsfunktionen $\mathbf{q}(t)$ und $\mathbf{p}(t)$ durch ihre Approximationspolynome $\mathbf{q}^h(\alpha)$ bzw. $\mathbf{p}^h(\alpha)$ in den partiellen Ableitungen der HAMILTON-Funktion H , führt in denselben auf eine alleinige Abhängigkeit von α . Einsetzen von Gl. (1.24) und Gl. (1.27) in die diskretisierte schwache Form der ersten kanonischen Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{1}{h_n} \sum_{i=1}^{k+1} M'_i(\alpha) \mathbf{q}_i - \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) \right) \sum_{j=1}^k \tilde{M}_j(\alpha) \delta \mathbf{p}_j d\alpha = 0 \\ & \sum_{j=1}^k \int_0^1 \left(\frac{\tilde{M}_j(\alpha)}{h_n} \sum_{i=1}^{k+1} M'_i(\alpha) \mathbf{q}_i - \tilde{M}_j(\alpha) \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) \right) \delta \mathbf{p}_j d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Nach Gl. (1.30) liegt es nahe die Formfunktionen $M'_i(\alpha)$ wie folgt zu definieren:

$$\left(\mathbf{q}^h \right)'(\alpha) = \sum_{i=1}^{k+1} M'_i(\alpha) \mathbf{q}_i =: \sum_{i=1}^k \tilde{M}_i(\alpha) \tilde{\mathbf{q}}_i \quad (1.31)$$

sowie

$$\left(\mathbf{p}^h \right)'(\alpha) = \sum_{i=1}^{k+1} M'_i(\alpha) \mathbf{p}_i =: \sum_{i=1}^k \tilde{M}_i(\alpha) \tilde{\mathbf{p}}_i \quad (1.32)$$

Mit Gl. (1.31) folgt aus Gl. (1.30):

$$\sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{h_n} \sum_{i=1}^k \int_0^1 \tilde{M}_i \tilde{M}_j d\alpha \tilde{\mathbf{q}}_i - \int_0^1 \tilde{M}_j \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) d\alpha \right) \delta \mathbf{p}_j = 0 \quad (1.33)$$

Da die Testfunktion $\delta \mathbf{p}$ beliebig sein soll, gilt das auch für ihre Knotenwerte $\delta \mathbf{p}_j$ und demzufolge müssen die Klammern verschwinden.

$$\sum_{i=1}^k \int_0^1 \tilde{M}_i \tilde{M}_j d\alpha \tilde{\mathbf{q}}_i - h_n \int_0^1 \tilde{M}_j \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \quad (1.34)$$

mit $j = 1, \dots, k$.

Dies ist die erste Gleichung des allgemeinen Zeitschrittverfahrens. Die zweite Gleichung folgt nach analoger Rechnung und Argumentierung aus der zweiten kanonischen Gleichung:

$$\sum_{i=1}^k \int_0^1 \tilde{M}_i \tilde{M}_j d\alpha \tilde{\mathbf{p}}_i + h_n \int_0^1 \tilde{M}_j \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \quad (1.35)$$

1.5 Lineare Zeitelemente

Der Fall $k = 1$ steht für lineare Formfunktionen M_i der Lösungsfunktionen und konstante Formfunktionen \tilde{M}_i der Testfunktionen [1]. Hier ist somit ein diskontinuierlicher Verlauf der Testfunktionen gegeben.

Nach Gl. (1.23) haben die M_i mit $i = 1, 2$ folgende Gestalt:

$$M_1(\alpha) = \frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{und} \quad M_2(\alpha) = \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (1.36)$$

Bei $k = 1$ besitzt das Masterelement zwei Knoten. Einen bei $\alpha = \alpha_1 \equiv 0$ und einen bei $\alpha = \alpha_2 \equiv 1$. Somit liegen die nachfolgenden Formfunktionen vor:

$$M_1(\alpha) = 1 - \alpha \quad (1.37)$$

$$M_2(\alpha) = \alpha \quad (1.38)$$

Demnach werden die generalisierten Koordinaten und der generalisierte Impuls wie folgt approximiert:

$$\mathbf{q}^h(\alpha) = \mathbf{q}_1 + \alpha (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \quad (1.39)$$

$$\mathbf{p}^h(\alpha) = \mathbf{p}_1 + \alpha (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \quad (1.40)$$

Nach Gl. (1.31) oder Gl. (1.32) ergeben sich die Formfunktionen \tilde{M}_i aus der Differentiation von Gl. (1.39) oder Gl. (1.40) nach α :

$$\left(\mathbf{q}^h\right)'(\alpha) \equiv \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 =: \tilde{M}_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad (1.41)$$

Ein Koeffizientenvergleich in Gl. (1.41) ergibt:

$$\tilde{M}_1 = 1 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 \quad (1.42)$$

Das allgemeine Zeitschrittverfahren hat somit nach den Gln. (1.42) für lineare Zeitelemente folgende Gestalt:

$$\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 - h_n \int_0^1 \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \quad (1.43)$$

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 + h_n \int_0^1 \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \quad (1.44)$$

1.6 Stabilität des Zeitschrittverfahrens

Um numerische Stabilität von Verfahren zur Berechnung dynamischer Systeme nachzuweisen, wird sich oft der Überprüfung eventueller Erhaltungsgrößen bedient [1]. Ein Beispiel ist die Energieerhaltung bei konservativen, autonomen Systemen.

Autonome dynamische Systeme charakterisieren sich durch eine fehlende explizite Zeitabhängigkeit in der LAGRANGE-Funktion, d.h. es gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (1.45)$$

Nach Gl. (1.12) folgt daraus, daß für autonome Systeme im Rahmen der HAMILTONSchen Mechanik die HAMILTON-Funktion $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ eine Erhaltungsgröße ist. Für das in Kapitel 1.4 vorgestellte Zeitschrittverfahren bedeutet das, daß eine numerische Stabilität bei der Berechnung autonomer Systeme an Hand der HAMILTON-Funktion nachgeprüft werden kann.

Weiterhin kann gezeigt werden, daß bei konservativen, autonomen Systemen die HAMILTON-Funktion H mit der Gesamtenergie E identisch ist [7]. Somit kann das Zeitschrittverfahren auch für solche Systeme über die HAMILTON-Funktion auf Stabilität untersucht werden.

Die folgende Rechnung beweist eine Erhaltung der HAMILTON-Funktion $H =$

$H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ autonomer Systeme, unabhängig von der Anzahl der Knoten [1]:
Eine Skalarmultiplikation von Gl. (1.34) mit $\tilde{\mathbf{p}}_j$ und Gl. (1.35) mit $\tilde{\mathbf{q}}_j$ ergibt:

$$\sum_{i=1}^k \int_0^1 \tilde{M}_i \tilde{M}_j d\alpha \tilde{\mathbf{q}}_i \cdot \tilde{\mathbf{p}}_j - h_n \int_0^1 \tilde{M}_j \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) d\alpha \cdot \tilde{\mathbf{p}}_j = 0 \quad (1.46)$$

$$\sum_{i=1}^k \int_0^1 \tilde{M}_i \tilde{M}_j d\alpha \tilde{\mathbf{p}}_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}_j + h_n \int_0^1 \tilde{M}_j \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) d\alpha \cdot \tilde{\mathbf{q}}_j = 0 \quad (1.47)$$

für $j = 1, \dots, k$.

Eine nachfolgende Summation über j führt auf:

$$\sum_{i,j=1}^k \int_0^1 \tilde{M}_i \tilde{M}_j d\alpha \tilde{\mathbf{q}}_i \cdot \tilde{\mathbf{p}}_j - h_n \sum_{j=1}^k \int_0^1 \tilde{M}_j \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) d\alpha \cdot \tilde{\mathbf{p}}_j = 0 \quad (1.48)$$

$$\sum_{i,j=1}^k \int_0^1 \tilde{M}_i \tilde{M}_j d\alpha \tilde{\mathbf{p}}_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}_j + h_n \sum_{j=1}^k \int_0^1 \tilde{M}_j \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) d\alpha \cdot \tilde{\mathbf{q}}_j = 0 \quad (1.49)$$

Durch die Kommutativität des Skalarprodukts ergibt eine Subtraktion der beiden Gln. (1.48) und (1.49):

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^k \tilde{M}_j \tilde{\mathbf{q}}_j \cdot \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) d\alpha + \int_0^1 \sum_{j=1}^k \tilde{M}_j \tilde{\mathbf{p}}_j \cdot \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) d\alpha = 0 \quad (1.50)$$

Eine Resubstitution der Formfunktionen \tilde{M}_j mit den Gln. (1.31) und (1.32) führt auf:

$$\int_0^1 \left(\partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) \cdot \frac{d\mathbf{q}^h(\alpha)}{d\alpha} + \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) \cdot \frac{d\mathbf{p}^h(\alpha)}{d\alpha} \right) d\alpha = 0 \quad (1.51)$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{dH(\alpha)}{d\alpha} &\equiv \frac{dH(\mathbf{q}^h(\alpha), \mathbf{p}^h(\alpha), \alpha)}{d\alpha} = \\ &= \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) \cdot \frac{d\mathbf{q}^h(\alpha)}{d\alpha} + \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) \cdot \frac{d\mathbf{p}^h(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (1.52)$$

folgt aus Gl. (1.51):

$$\int_0^1 \left(\frac{dH(\alpha)}{d\alpha} - \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha} \right) d\alpha = 0 \quad (1.53)$$

Nach der Anwendung des Hauptsatzes der Integralrechnung folgt:

$$\left[\frac{dH(\alpha)}{d\alpha} \right]_0^1 = \int_0^1 \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha \quad (1.54)$$

Die Resubstitution der lokalen Koordinate α durch die Zeit t ergibt:

$$H_n - H_{n-1} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (1.55)$$

Folglich bleibt die HAMILTON-Funktion H im autonomen Fall ($\partial H / \partial t = 0$) nach jedem Zeitschritt erhalten.

Kapitel 2

Das Zweikörperproblem

In diesem Kapitel ist die Aufgabe gestellt, die Bewegung zweier Massenpunkte m_1 und m_2 in einem euklidischen, drei-dimensionalen Raum \mathbf{E}^3 numerisch zu berechnen. Ferner enthält \mathbf{E}^3 das Inertialsystem (x_1, x_2, x_3) . Die Bewegung der Massen verläuft ohne Einflüsse von äußeren Kräften (siehe Abb. 2.1) [6, 7, 8]. Die numerische Lösung findet über das, im vorangegangenen Kapitel erläuterten, Zeitschrittverfahren statt, welches aus der HAMILTONSchen Mechanik hervorgeht.

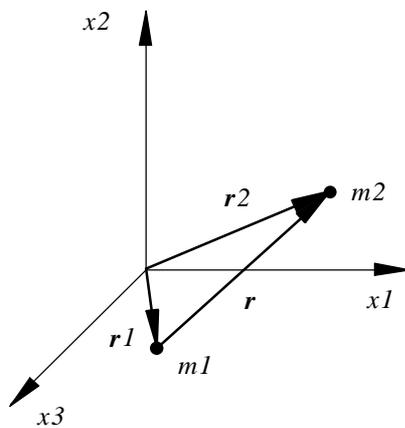


Abbildung 2.1: Zwei-Massenpunktsystem im \mathbf{E}^3

2.1 Reduktion des Zweikörperproblems

Ein System mit zwei Massenpunkten besitzt im \mathbf{E}^3 pro Massenpunkt drei Freiheitsgrade. Man würde also sechs Koordinaten benötigen, um dieses Problem in der ursprünglichen Form zu beschreiben. Es kann aber gezeigt werden, daß die Bewegung zweier Massenpunkte unter den vorherrschenden Bedingungen auf ein äquivalentes Problem reduziert werden kann [6, 7, 8], das mit zwei Koordinaten eindeutig beschrieben werden kann.

Im Rahmen der NEWTONschen Mechanik lauten die Bewegungsgleichungen für die beiden Massenpunkte m_1 und m_2 (siehe Abb. 2.1) wie folgt [6]:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} \quad (2.1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} \quad (2.2)$$

Dabei ist \mathbf{F}_{12} die Kraft die m_2 auf m_1 ausübt und \mathbf{F}_{21} die Kraft von m_1 auf m_2 . Nach dem dritten NEWTONschen Axiom über *actio* und *reactio* sind beide entgegengesetzt gleich, d.h. $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Folglich lauten die Bewegungsgleichungen [8]:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\mathbf{F} \quad (2.3)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F} \quad (2.4)$$

mit $\mathbf{F} := \mathbf{F}_{21}$ als ein Kraftfeld, das auf m_1 gerichtet ist.

Ein euklidischer Raum ist zugleich auch ein affiner Raum. Wendet man die Axiome eines affinen Raumes [9] auf den hier betrachteten euklidischen Raum \mathbf{E}^3 an, so kann das Kraftfeld \mathbf{F} zwischen den Massen nur vom Differenzvektor $\mathbf{r} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ und dessen ersten Zeitableitung abhängen. Allgemein ist auch eine explizite Zeitabhängigkeit möglich [8].

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) &= f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \mathbf{e}_r \\ &= f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned} \quad (2.5)$$

mit $r = \|\mathbf{r}\|_2$ dem Betrag von \mathbf{r} , und der skalarwertigen Funktion f die den Betrag der Kraft bzw. die Länge des Kraftvektors angibt.

Die Bewegungsgleichungen sind in den Koordinatenvektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 formuliert. Die Kraft \mathbf{F} hängt aber von \mathbf{r} ab. Somit ist die Einführung von \mathbf{r} als Koordinate sinnvoll. Dies läßt sich geschickt dadurch erreichen, in dem die Bewegung nicht auf den Koordinatenursprung bezogen wird, sondern auf

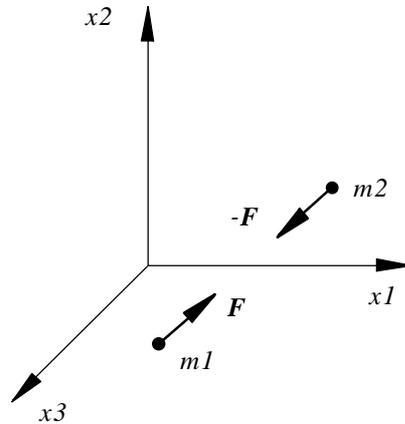


Abbildung 2.2: Gegenseitige Einflußnahme zweier Massenpunkte

den Schwerpunkt \mathbf{R} der beiden Massenpunkte. Der Schwerpunktvektor \mathbf{R} bei N Massenpunkten ist definiert durch [6, 7]:

$$\mathbf{R} := \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (2.6)$$

Werden die beiden Bewegungsgleichungen (2.3) und (2.4) addiert, führt das mit Gl. (2.6) auf:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

Aus der Subtraktion der mit $m_2(m_1 + m_2)^{-1}$ multiplizierten Gl. (2.3) von der mit $m_1(m_1 + m_2)^{-1}$ multiplizierten Gl. (2.4) folgt:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (2.8)$$

mit

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.9)$$

Die Absolutbewegung des Schwerpunktes \mathbf{R} ist nach Gl. (2.7) gleichförmig und von der Relativbewegung in Gl. (2.8) völlig entkoppelt. Die Relativbewegung entspricht der Bewegung einer sogenannten *reduzierten Masse* μ in einem festgehaltenen Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, wobei \mathbf{r} der Ortsvektor von μ im \mathbf{E}^3 ist [8].

Somit ist die Relativbewegung äquivalent zu einer Bewegung eines Massenpunktes der Masse μ in einem drei-dimensionalen euklidischen Raum \mathbf{E}^3 , auf dessen Ursprung ein Kraftfeld gerichtet ist. Die Betrachtung der entkoppelten Schwerpunktsbewegung ist nicht mehr notwendig [8].

2.2 Äquivalentes Einkörperproblem

2.2.1 Räumliches Einkörperproblem

Sei \mathbf{r} der Ortsvektor der reduzierten Masse μ in einem drei-dimensionalen euklidischen Raum \mathbf{E}^3 . Die Äquivalenz zum Zweikörperproblem fordert ein Kraftfeld \mathbf{F} das fest auf den Ursprung des \mathbf{E}^3 gerichtet ist. Allgemein bezeichnet man ein Kraftfeld \mathbf{F} , das immer auf einen bestimmten Punkt \mathbf{r}_0 eines euklidischen Raumes zeigt, als *Zentralkraftfeld*. Ein Zentralkraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, das fest auf den Ursprung gerichtet ist, kann nur die folgende Form besitzen [8]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.10)$$

mit $r = \|\mathbf{r}\|_2$.

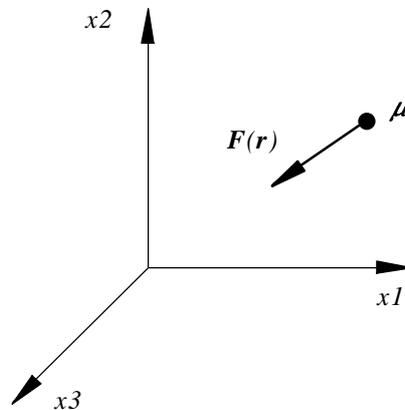


Abbildung 2.3: Zentralkraft im \mathbf{E}^3

Weiterhin sollen hier nur konservative Zentralkraftfelder interessieren. Es

existiert also eine Potentialfunktion V , aus dem das Zentralkraftfeld hervorgeht [8]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\partial_{\mathbf{r}}V \quad (2.11)$$

Nach einem Satz der Analysis ist die Existenz eines Potentials V eines Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ äquivalent mit [10]:

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Die Anwendung dieser Bedingung auf das Zentralkraftfeld in Gl. (2.10) ergibt:

$$\text{rot} \left(f(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{f(\mathbf{r})}{r} \text{rot } \mathbf{r} + \text{grad}_{\mathbf{r}} \left(\frac{f(\mathbf{r})}{r} \right) \times \mathbf{r} \quad (2.13)$$

Nach den Gesetzen der Tensorrechnung [11] gilt:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{r} &\equiv -\text{grad}_{\mathbf{r}} \mathbf{r} : \mathbf{E} = -\mathbf{I} : \mathbf{E} \\ &= \delta_{ij} e_{jik} \mathbf{e}_k \\ &= e_{iik} \mathbf{e}_k \\ &= 0 \cdot \mathbf{e}_k \\ \text{rot } \mathbf{r} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.14)$$

mit $\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ dem Einheitstensor und $\mathbf{E} = e_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ dem Permutationstensor.

Mit Gl. (2.14) verschwindet der erste Term von Gl. (2.13) und die Rotation der Zentralkraft wird genau dann Null, wenn der Ortsvektor \mathbf{r} zu $\text{grad}_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r})$ parallel ist. Daraus folgt, daß \mathbf{r} immer senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht. Folglich sind die Äquipotentialflächen kugelförmig. Die skalare Funktion f kann dann nicht mehr von der Richtung abhängen und hat somit die Form:

$$\mathbf{F}(r) = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.15)$$

Das zugehörige Potential V kann dann ebenfalls nur von r abhängen und es gilt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.16)$$

Es wurde hiermit bewiesen, daß der Betrag f eines Zentralkraftfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ nur vom Abstand r vom Ursprung des euklidischen Raumes abhängen kann, wenn es konservativ sein soll [8]. Die umgekehrte Richtung läßt sich einfacher

beweisen [6]: Die Arbeit A_{12} , die bei der Verschiebung eines Massenpunktes vom Punkt 1 zum Punkt 2 in einem konservativen Kraftfeld geleistet wird, ist wegunabhängig. Löst man im Falle eines Zentralkraftfeldes entsprechend der Form in Gl. (2.10) das Kurvenintegral der Arbeit A_{12} auf, so führt das zu einem bestimmten Integral, dessen Wert lediglich von den Abständen r_1 und r_2 der Punkte vom Ursprung abhängt:

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr \quad (2.17)$$

2.2.2 Ebenes Einkörperproblem

Bis hier wurde die Lösung eines räumlichen Zweikörperproblems auf die Lösung eines äquivalenten räumlichen Einkörperproblems reduziert. Damit wurde die Anzahl der Freiheitsgrade auf drei verringert. Die folgende Beweisführung zeigt, daß sich die Reduktion fortsetzen läßt [8].

Bei einem Zentralkraftfeld mit festem Ursprung ist der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ eine Erhaltungsgröße der Bewegung, wenn der Anfang des Ortsvektors \mathbf{r} im Kraftzentrum liegt. Dabei ist $\mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}}$ der Impuls des Massenpunktes. Diese Aussage läßt sich durch eine vektorielle Multiplikation der Bewegungsgleichung (2.8) mit \mathbf{r} beweisen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L} &\equiv \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}}) = \mu (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) \\ &= \mu \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die rechte Seite der Gl. (2.18) verschwindet, weil das Zentralkraftfeld \mathbf{F} parallel zu \mathbf{r} verläuft.

Da somit der Drehimpuls \mathbf{L} während der Bewegung seine Richtung nicht ändert, bleibt seine Richtung zum Ortsvektor \mathbf{r} unverändert. Die Lage des Drehimpulses relativ zum Ortsvektor \mathbf{r} läßt sich mit einer Skalarmultiplikation der beiden bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{L} &\equiv \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = r_m (r_j p_k e_{ijk}) \delta_{mi} \\ &= r_i r_j p_k e_{ijk} \\ &= r_1 r_2 p_3 + r_3 r_1 p_2 + r_2 r_3 p_1 - \\ &\quad - r_2 r_1 p_3 - r_1 r_3 p_2 - r_3 r_2 p_1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nach Gl. (2.19) steht der Ortsvektor \mathbf{r} senkrecht auf dem konstanten Drehimpuls \mathbf{L} . Damit wird die Bewegung $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ des Massenpunktes mit der Masse μ in einer Ebene ausgeführt.

Die Lösung eines räumlichen Zweikörperproblems kann somit letztendlich auf die Lösung eines äquivalenten *ebenen* Einkörperproblems reduziert werden. Folglich wird das äquivalente Einkörperproblem mit zwei generalisierten Koordinaten beschrieben [6, 7, 8].

2.3 Bahngleichung der reduzierten Masse

In diesem Abschnitt wird das äquivalente ebene Einkörperproblem in den Polarkoordinaten r und ϕ analytisch behandelt. Ziel ist die Bestimmung der geometrischen Bahn $r = r(\phi)$ der Masse μ . Die Wahl polarer Koordinaten bietet sich aber auch generell an, weil das Potential $V(r)$ des Zentralkraftfeldes nach Gl. (2.16) nur von r abhängt [8]. Da ein konservatives Massenpunktsystem vorliegt, werden die Bewegungsgleichungen im Rahmen der LAGRANGESchen Mechanik aufgestellt.

Sei nun $\mathcal{E} := (\mathbf{x} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y \in \mathbf{E}^3 \mid x, y \in \mathbf{R})$ die Ebene in der sich der Massenpunkt mit der Masse μ , entsprechend Kapitel 2.2.2, bewegt. Dabei liegt der Ursprung des (x,y)-Koordinatensystems im Ursprung des \mathbf{E}^3 , und stellt ein ebenes Inertialsystem dar. Diese Ebene \mathcal{E} läßt sich direkt mit dem Drehimpuls \mathbf{L} und einem Anfangspunkt $\mathbf{r}_0 := \mathbf{r}(t = 0)$ in der Normalenform angeben:

$$\mathcal{E} : \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad (2.20)$$

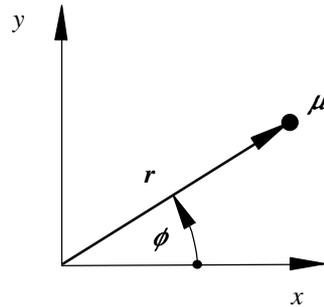
Die Bahn die der Massenpunkt in \mathcal{E} beschreibt, wird im folgenden über die polaren Koordinaten $r = \|\mathbf{r}\|_2$ und ϕ berechnet.

Die Bewegungsgleichungen folgen im Rahmen der LAGRANGESchen Mechanik aus der LAGRANGE-Funktion $L = T - V$. Diese hat in Polarkoordinaten die folgende Gestalt [8]:

$$L = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - V(r) \quad (2.21)$$

mit μ als reduzierte Masse.

Hier ist zu erkennen, daß die Koordinate ϕ nicht explizit in der LAGRANGE-Funktion L enthalten ist, sondern nur ihre zeitliche Ableitung $\dot{\phi}$. Somit ist ϕ *zyklisch* und ihr generalisierter Impuls p_ϕ ist aufgrund der LAGRANGESchen

Abbildung 2.4: Polarkoordinaten r und ϕ

Gleichungen 2. Art eine Erhaltungsgröße:

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} = \text{const.} \quad (2.22)$$

Der generalisierte Impuls p_ϕ ist nach Gl. (2.22) identisch mit dem Betrag $l = \|\mathbf{L}\|$ des Drehimpulses \mathbf{L} des Massenpunktes. Demzufolge ist l eine Konstante der Bewegung. Somit ersetzt die folgende Gleichung die Bewegungsgleichung bzgl. ϕ :

$$l = \mu r^2 \dot{\phi} \quad (2.23)$$

Bemerkung 2.1 *Eine Gleichung, die aus der Ausnutzung einer Erhaltungsgröße entsteht, wird auch als ein „erstes Integral“ der Bewegungsgleichungen bezeichnet. Diese Bezeichnung stützt sich auf die Tatsache, daß aus dieser Gleichung durch einmalige Integration die Lösung der Bewegungsgleichungen hervorgeht [7].*

Bei der ersten Koordinate ϕ verringerte die Verwendung eines ersten Integrals, die Anzahl der notwendigen Integrationen auf eine Integration. Aus diesem Grund ist es ratsam die zweite Koordinate r aus einem weiteren ersten Integral abzuleiten, und nicht aus den LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art. Für konservative, autonome Systeme stellt die Gesamtenergie $E = T + U$ eine Erhaltungsgröße dar [7, 8]. Daher wird E als zweiter Parameter eingeführt:

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) = \text{const.} \quad (2.24)$$

Eliminiert man $\dot{\phi}$ mit dem ersten Integral (2.23) in der Energie in Gl. (2.24), so folgt das zweite *erste Integral*:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)} \quad (2.25)$$

Bemerkung 2.2 *Das Vorzeichen von \dot{r} ist positiv bzw. negativ, wenn sich die Masse μ vom Ursprung des euklidischen Raumes wegbewegt bzw. auf ihn zu bewegt [8].*

Die ersten Integrale stellen Dgln. erster Ordnung dar. Somit entsteht bei der Integration jeweils eine Integrationskonstante, die jeweils aus einem bekannten Wert bestimmt werden. Die Integrationskonstante aus der Integration über r wird aus $r(t=0) =: r_0$ bestimmt. Die aus der Integration über ϕ entstandene Integrationskonstante ergibt sich aus $\phi(t=0) =: \phi_0$ [8]. Um nun die geometrischen Bahn $r = r(\phi)$ zu bestimmen werden die ersten Integrale wie folgt separiert:

$$dt = \mu \frac{r^2}{l} d\phi \quad (2.26)$$

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} \quad (2.27)$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen führt auf eine separierte Differentialgleichung mit einer Lösung $\phi = \phi(r)$.

$$\mu \frac{r^2}{l} d\phi = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} \quad (2.28)$$

Die Lösung erhält man durch Integration über ϕ bzw. r :

$$\phi(r) = \pm \frac{l}{\mu} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} + \phi_0 \quad (2.29)$$

Die Umkehrung der Funktion $\phi = \phi(r)$ ergibt die gesuchte Bahngleichung $r = r(\phi)$.

2.4 Analytisch integrierbare Potentiale

Um die Bahngleichung $r = r(\phi)$ aus Kapitel 2.3 analytisch bestimmen zu können, muß das Integral in Gl. (2.29) gelöst werden. Zweck dieses Kapitels ist die Separation betrachteter Potentiale in Potentiale die noch analytisch integrierbar sind und in Potentiale die eine numerische Lösung erfordern.

Physikalisch sinnvoll ist die Betrachtung solcher Potentiale $V(r)$, die durch eine Potenzreihe dargestellt, oder zumindest hinreichend genau angenähert werden können [7]:

$$V(r) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n r^{n+1} \quad (2.30)$$

mit den reellen Zahlen $a_n \in \mathbf{R}$.

Die Untersuchung einer solchen Potenzreihe als Potential reduziert sich auf die Betrachtung des folgenden Potentials:

$$V(r) = a r^{n+1} \quad (2.31)$$

mit $a \in \mathbf{R}$.

Dabei soll das Potential (2.31) bzgl. dem Parameter n auf analytische Integrierbarkeit hin überprüft werden.

Der erste Schritt ist die Umschreibung des Integrals in Gl. (2.29). Durch eine Substitution $r^{-1} \mapsto u$ der Integrationsvariablen r , läßt sich das Integral einfacher lösen:

$$\phi(u) = \phi_0 \mp \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu V(u)}{l^2} - u^2}} \quad (2.32)$$

Mit dem Potential (2.31) folgt aus Gl. (2.32):

$$\phi(u) = \phi_0 \mp \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu a}{l^2} u^{-n-1} - u^2}} \quad (2.33)$$

Das Integral in Gl. (2.33) ist von der Form

$$\int R(u, \sqrt{p(u)}) du \quad (2.34)$$

mit einer rationalen Funktion R und einem Polynom $p(u)$, das hier mindestens vom Grad zwei ist.

Für $n = -1, -2, -3$ ist $p(u) = \gamma u^2 + \beta u + \alpha$ ein Polynom zweiten Grades. Ein solches Integral heißt vom *Kreistyp* [2], wenn $p(u)$ keine zweifache Nullstelle besitzt. Integrale vom Kreistyp lassen sich durch Substitutionen lösen, bei denen trigonometrische Funktionen auftreten.

Bemerkung 2.3 *Der Fall $n = -1$, hat physikalisch eine geringe Bedeutung, da hier nach Gl. (2.31) ein konstantes Potential vorliegt und somit in der Ebene \mathcal{E} das Zentralkraftfeld \mathbf{F} identisch null ist. Dagegen ist der Fall $n = -2$ physikalisch besonders wertvoll, denn hier liegt das berühmte KEPLER-Potential vor [7].*

Bei $n = -4$ liegt ein kubisches Polynom $p(u) = \delta u^3 + \gamma u^2 + \beta u + \alpha$ vor. Besitzt $p(u)$ keine mehrfache Nullstelle, so handelt es sich um ein *elliptisches Integral*. Elliptische Integrale werden durch Substitutionen gelöst, in denen elliptische Funktionen verwendet werden. Elliptische Funktionen sind, im Gegensatz zu den periodischen trigonometrischen Funktionen, doppelperiodisch und besitzen zwei Frequenzen ν_1 und ν_2 [2].

Der Fall $n = -5$ führt ebenfalls zu einem elliptischen Integral, wenn in dem Polynom $p(u) = \varepsilon u^4 + \delta u^3 + \gamma u^2 + \beta u + \alpha$ vierten Grades keine mehrfachen Nullstellen vorkommen. Wie im Fall $n = -4$ führen Substitutionen mit elliptischen Funktionen zur Lösung [7].

Bei dem Fall $n = 0$ führt eine Erweiterung des Integrals in Gl. (2.33) mit u^ρ und $\rho = 1$ auf ein elliptisches Integral, wenn $p(u)$ keine mehrfachen Nullstellen enthält.

$$\phi(u) = \phi_0 \mp \int_{u_0}^u \frac{u^\rho du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} u^{2\rho} - \frac{2\mu a}{l^2} u^{-n-1+2\rho} - u^{2(\rho+1)}}} \quad (2.35)$$

Mit $\rho = 1$ und der Substitution $u^2 \mapsto w$ ergibt sich in Gl. (2.35) für $n = 1$ ein Integral vom Kreistyp:

$$\phi(w) = \phi_0 \mp \int_{w_0}^w \frac{dw}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} w - \frac{2\mu a}{l^2} w^{\frac{1-n}{2}} - w^2}} \quad (2.36)$$

Bemerkung 2.4 *Der Fall $n = 1$ führt auf das sogenannte HOOKE-Potential, das zum Beispiel das Potential der Federkraft einer linearen Spiralfeder ist.*

Für $n = -7$ und $\rho = 1$ ergibt sich aus Gl. (2.36) ein elliptisches Integral. Führt man in Gl. (2.36) noch eine Erweiterung mit w durch, so liegt für

$n = 3$ und $n = 5$ jeweils ein elliptisches Integral vor.

Hiermit sind die Möglichkeiten erschöpft, um maximal elliptische Integrale herzuleiten. Lösbare Integrale ergeben sich noch aus Gl. (2.35) für spezielle Paare (n, ρ) [7]. Im allgemeinen ist für die restlichen Exponenten eine numerische Lösung erforderlich.

2.5 Potentiale für geschlossene Bahnen

Eigenschaften der geometrischen Bahn $r = r(\phi)$ der Masse μ , lassen sich mit der Funktion $r(\phi)$ leicht bestimmen. Zum Beispiel ist eine notwendige, aber nicht hinreichende, Bedingung für eine geschlossene Bahn, daß die Funktion $r(\phi)$ periodisch sein muß, d.h. es gilt:

$$r(\phi) \equiv r(\phi + 2\pi) \quad (2.37)$$

Die Integration der Gl. (2.29) ist jedoch in den meisten Fällen entweder analytisch nur schwer oder gar nicht durchzuführen. In diesen Fällen lassen sich einige qualitative Aussagen über die radiale Bewegung der Masse μ mit Hilfe einer graphischen Methode treffen [7, 8].

Nach Gl. (2.24) ist das erste Integral bzgl. der Gesamtenergie E :

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) \quad (2.38)$$

Wird mit Gl.(2.23) $\dot{\phi}$ durch den Betrag l des Drehimpulses ersetzt, so folgt:

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (2.39)$$

In dieser Gleichung ist nur r eine Variable. Aus diesem Grund läßt sich die Radialbewegung, die vom Verlauf des Winkels nicht beeinflußt wird, als *ein-dimensionale* Bewegung eines Massenpunktes der Masse μ in einem sogenannten *effektiven Potential* $V'(r)$ mit

$$V'(r) := V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (2.40)$$

auffassen. Dabei stellt der Term $V_z(r) := l^2 (2\mu r^2)^{-1}$ das Potential der auf die Masse μ wirkenden Zentrifugalkraft dar [8]. Durch eine Diskussion des

Graphen der Funktion $V' = V'(r)$ können qualitative Informationen über die Radialbewegung gewonnen werden.

Am Beispiel des KEPLER-Potentials wird die Methode des effektiven Potentials demonstriert [7, 8]:

Bei der Gesamtenergie E_1 kommt der Massenpunkt aus dem Unendlichen ($r \rightarrow \infty$) nur bis auf $r = r'$ an das Kraftzentrum heran. Denn bei $r = r'$ ist $E_1 = V'$ und somit, nach Gl. (2.39) unter Berücksichtigung der Gl. (2.40), $\dot{r} = 0$. Also stoppt die Bewegung, d.h es liegt ein Umkehrpunkt vor. Danach bewegt sich der Massenpunkt wieder ins Unendliche. Es liegt also ein *offene* Bahn vor.

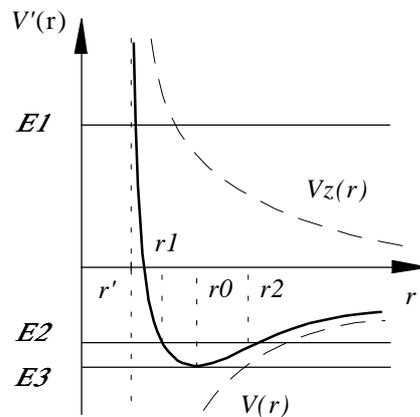


Abbildung 2.5: Effektives Potential $V'(r)$ des KEPLER-Potentials

Bewegt sich der Massenpunkt mit der Gesamtenergie E_2 , so erreicht das effektive Potential die Energie E_2 bei den Radien r_1 und r_2 . Es liegen also zwei Umkehrpunkte vor, zwischen denen der Massenpunkt hin und her läuft. Ob die Bahn geschlossen ist, läßt sich hier nicht erkennen. Nur, daß sie begrenzt, also nicht offen ist.

Die Gesamtenergie E_3 ist gleich dem Minimum des effektiven Potentials. Hier verschwindet die kinetische Energie der Radialbewegung ($\dot{r} = 0$). Der Massenpunkt bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius r_0 . Dieser ergibt sich aus der analytischen Minimum-Bedingung

$$\left[\frac{dV'(r)}{dr} \right]_{r=r_0} = 0 \quad (2.41)$$

von $V'(r)$, zu

$$r_0 = \frac{l^2}{\mu a} \quad (2.42)$$

mit der Konstanten a des Potentials $V(r)$.

Das Beispiel zeigt, daß die graphische Darstellung des effektiven Potentials $V'(r)$ die Radien r_1 und r_2 der Umkehrpunkte liefert. Mit Hilfe der Umkehrpunkte läßt sich nun klären, ob die Bahn innerhalb der Radien r_1 und r_2 geschlossen ist.

Nach Gl. (2.37) muß die Funktion $r(\phi)$ periodisch sein, damit eine geschlossene Bahn vorliegt. Wenn die Funktion $r(\phi)$ periodisch sein muß, dann trifft das auch auf deren Umkehrfunktion $\phi(r)$ zu, die sich aus Gl. (2.29) ergibt. Bei einer Bewegung des Massenpunktes von einem Umkehrpunkt zum anderen und wieder zurück, ändert sich der Winkel ϕ um den Wert:

$$\Delta\phi = 2 \frac{l}{\mu} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V'(r))}} \quad (2.43)$$

Wegen Gl. (2.37) ist $\phi(r)$ genau dann periodisch, wenn $\Delta\phi$ kommensurabel zu 2π ist [8], d.h. es gilt:

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{n_1}{n_2} \in \mathbf{Q} \quad (2.44)$$

mit den ganzen Zahlen n_1 und n_2 und \mathbf{Q} als Menge der rationalen Zahlen. In diesem Fall führt der Winkel ϕ , während der Radius n_2 Zyklen durchläuft, n_1 ganze Umläufe aus. Somit kehrt der Massenpunkt zur Ausgangsposition zurück und die Bahn schließt sich.

Wichtig bei dieser Methode ist, daß für die Fälle in denen das bestimmte Integral nicht analytisch lösbar ist, unter Umständen eine Quadratur schon ausreichen kann.

Nach einem Theorem von J. BERTRAND existieren nur zwei Potentiale, deren gesamte begrenzten Bahnen geschlossen sind [7]: Das KEPLER-Potential $V(r) = -kr^{-1}$ ($n = -2$) und das HOOKE-Potential $V(r) = kr^2$ ($n = 1$). Für alle andere Werte für n liegen Zentralkraftpotentiale vor, die im allgemeinen, d.h. mit Ausnahme spezieller Paare (E,1), zu offenen Bahnen führen [8]. In diesem Fall wird in unendlich langer Zeit das gesamte ringförmige Gebiet zwischen den Radien $r_2 > r_1$ und r_1 überstrichen.

2.6 Numerische Lösung in kartesischen Koordinaten

Die numerische Lösung des äquivalenten Einkörperproblems über das Zeitschrittverfahren aus Kapitel 1.5 für lineare Elemente, erfolgt im Rahmen der HAMILTONschen Mechanik, die auf der HAMILTON-Funktion $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ aufbaut. Die generalisierten Koordinaten sollen die kartesischen Koordinaten q_1 und q_2 sein (siehe Abb. 2.6). Die numerische Lösung wird allgemein gehalten und auf keinem bestimmten Potential begründet.

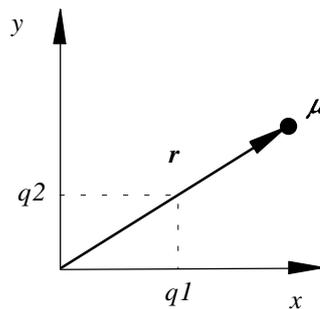


Abbildung 2.6: Kartesische Koordinaten q_1 und q_2

Da hier ein konservatives, autonomes Einkörpersystem vorliegt, ist die HAMILTON-Funktion H identisch mit der Gesamtenergie $E=T+V$ [7]:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + V(\mathbf{q}) \quad (2.45)$$

mit dem generalisierten Impuls \mathbf{p} und $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$ als Koordinatenvektor. Die kinetische Energie T ist allgemein:

$$T = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (2.46)$$

mit dem euklidischen Ortsvektor

$$\mathbf{r} = q_1 \mathbf{e}_x + q_2 \mathbf{e}_y \quad (2.47)$$

In Matrizendarstellung ergibt sich die kinetische Energie T zu:

$$T = \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{I} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.48)$$

mit \mathbf{I} als Einheitsmatrix.

Der generalisierte Impuls \mathbf{p} wird aus der LAGRANGE-Funktion $L = T - V$ abgeleitet [6, 7, 8]:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} \equiv \partial_{\dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \partial_{\dot{\mathbf{q}}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{\mu}{2} \partial_{\dot{\mathbf{q}}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{I} \dot{\mathbf{q}})\end{aligned}\quad (2.49)$$

Nach einer Rechenregel aus der Matrizenrechnung gilt [12]:

$$\partial_{\dot{\mathbf{q}}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{I} \dot{\mathbf{q}}) = 2 \mathbf{I} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.50)$$

Unter Berücksichtigung dieser Rechenregel folgt für den generalisierten Impuls \mathbf{p} :

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \frac{\mu}{2} (2 \mathbf{I} \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \mu \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}\quad (2.51)$$

Demnach ist der Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ der generalisierten Geschwindigkeiten:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\mu} \mathbf{p} \quad (2.52)$$

Nach dem Einsetzen von Gl. (2.52) in die kinetische Energie T nach Gl. (2.48) hat die HAMILTON-Funktion H die folgende Form:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}^T \mathbf{I} \mathbf{p} - V(\mathbf{q}) \quad (2.53)$$

Das Zeitschrittverfahren zur numerischen Lösung ist nach den Gln. (1.43) und (1.44) allgemein wie folgt:

$$\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 - h_n \int_0^1 \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 + h_n \int_0^1 \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \quad (2.55)$$

Das Zeitschrittverfahren benötigt somit die partiellen Ableitungen der HAMILTON-Funktion H . Die partielle Ableitung nach dem generalisierten Impuls \mathbf{p} folgt aus der Gl. (2.53) unter Berücksichtigung der Rechenregel in

Gl. (2.50):

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{p}}H &= \frac{1}{2\mu} \partial_{\mathbf{p}} (\mathbf{p}^T \mathbf{I} \mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{\mu} \mathbf{p}\end{aligned}\quad (2.56)$$

Die partielle Ableitung nach dem Koordinatenvektor \mathbf{q} ergibt sich aus der Gl. (2.53) mit Hilfe der Kettenregel der Differentiation zu:

$$\partial_{\mathbf{q}}H = \partial_{\mathbf{q}}V(\mathbf{q}) \equiv \frac{dV(r(\mathbf{q}))}{dr} \partial_{\mathbf{q}}r(\mathbf{q}) \quad (2.57)$$

Dabei ergibt die partielle Ableitung von r nach \mathbf{q} folgendes:

$$\partial_{\mathbf{q}}r(\mathbf{q}) = \frac{1}{r(\mathbf{q})} \mathbf{q} \quad (2.58)$$

wegen

$$r \equiv \|\mathbf{r}\|_2 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \quad (2.59)$$

Somit gilt für die partielle Ableitung der HAMILTON-Funktion nach dem Koordinatenvektor:

$$\partial_{\mathbf{q}}H = \frac{dV(r(\mathbf{q}))}{dr} \frac{1}{r(\mathbf{q})} \mathbf{q} \quad (2.60)$$

Um die Integration über α in Gl. (2.54) und Gl. (2.55) durchführen zu können, müssen der kontinuierliche generalisierte Impuls \mathbf{p} und der kontinuierliche Koordinatenvektor \mathbf{q} durch ihre diskreten Pendanten $\mathbf{p}^h(\alpha)$ und $\mathbf{q}^h(\alpha)$ ersetzt werden. Da die numerische Lösung auf keinem bestimmten Potential aufbaut, läßt sich die Integration analytisch nur in Gl. (2.54) durchführen:

$$\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 - \frac{h_n}{2\mu} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{0} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 + h_n \int_0^1 \frac{dV(r(\mathbf{q}^h(\alpha)))}{dr} \frac{1}{r(\mathbf{q}^h(\alpha))} \mathbf{q}^h(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \quad (2.62)$$

Einsetzen von Gl. (2.61) in Gl. (2.62) führt auf folgendes Gleichungssystem in dem Variablenvektor \mathbf{q}_2 :

$$\frac{2\mu}{h_n} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) - 2\mathbf{p}_1 + h_n \int_0^1 \frac{dV(r(\mathbf{q}^h(\alpha)))}{dr} \frac{1}{r(\mathbf{q}^h(\alpha))} \mathbf{q}^h(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \quad (2.63)$$

Dieses Gleichungssystem ist im allgemeinen nichtlinear in \mathbf{q}_2 , aufgrund des im allgemeinen nichtlinearen Potentials V . Zur iterativen Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems wurde das allgemeine NEWTON-RAPHSON-Verfahren [4, 13] mit einer Toleranz von 10^{-13} implementiert. Das zu lösende Residuum $\mathbf{R}(\mathbf{q}_2) = \mathbf{0}$ stellt das Gleichungssystem (2.63) dar. Die Tangente \mathbf{K}_T für das NEWTON-RAPHSON-Verfahren berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_T &= \partial_{\mathbf{q}_2} \mathbf{R}(\mathbf{q}_2) \\ &= \frac{2\mu}{h_n} \mathbf{I} + h_n \int_0^1 \partial_{\mathbf{q}_2} \partial_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}^h(\alpha)) d\alpha\end{aligned}\quad (2.64)$$

Die Ableitung nach dem Knotenvektor \mathbf{q}_2 im Integral läßt sich durch die Kettenregel der Differentiation aufspalten:

$$\partial_{\mathbf{q}_2} \partial_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}^h(\alpha)) = \partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q}^h(\alpha)) \partial_{\mathbf{q}_2} \mathbf{q}^h(\alpha)\quad (2.65)$$

Mit $\partial_{\mathbf{q}_2} \mathbf{q}^h = \alpha$ nach Gl. (1.39) folgt:

$$\partial_{\mathbf{q}_2} \partial_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}^h(\alpha)) = \partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q}^h(\alpha)) \alpha\quad (2.66)$$

Die zweifache Ableitung des Potentials nach \mathbf{q} ergibt unter Berücksichtigung von Gl. (2.57):

$$\partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q}) = \partial_{\mathbf{q}} \left(\frac{dV(r(\mathbf{q}))}{dr} \partial_{\mathbf{q}} r(\mathbf{q}) \right)\quad (2.67)$$

Mit Gl.(2.58) und der Produktregel für eine Differentiation eines Produktes aus einer skalarwertigen und einer vektorwertigen Funktion folgt [11]:

$$\partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q}) = \frac{dV(r(\mathbf{q}))}{dr} \partial_{\mathbf{q}}^2 r(\mathbf{q}) + \frac{1}{r(\mathbf{q})} \mathbf{q} \otimes \partial_{\mathbf{q}} \left(\frac{dV(r(\mathbf{q}))}{dr} \right)\quad (2.68)$$

mit \otimes als Symbol für das dyadische Produkt.

Eine weitere Vereinfachung wird durch die Benutzung der Kettenregel für die Differentiation der Klammer nach \mathbf{q} im letzten Term erzwungen:

$$\partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q}) = \frac{dV(r(\mathbf{q}))}{dr} \partial_{\mathbf{q}}^2 r(\mathbf{q}) + \frac{1}{r^2(\mathbf{q})} \frac{d^2V(r(\mathbf{q}))}{dr^2} \mathbf{q} \mathbf{q}^T\quad (2.69)$$

mit $\mathbf{q} \mathbf{q}^T$ als Matrixschreibweise des dyadischen Produktes $\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}$ [14].

Die Matrix $\partial_{\mathbf{q}}^2 r(\mathbf{q})$ folgt aus Gl. (2.58) durch eine weitere Ableitung nach

dem Koordinatenvektor \mathbf{q} :

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{q}}^2 r &= \partial_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{r(\mathbf{q})} \mathbf{q} \right) \\ &= \frac{1}{r(\mathbf{q})} \mathbf{I} + \mathbf{q} \otimes \partial_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{r(\mathbf{q})} \right) \\ &= \frac{1}{r(\mathbf{q})} \mathbf{I} - \frac{1}{r^3(\mathbf{q})} \mathbf{q} \mathbf{q}^T\end{aligned}\quad (2.70)$$

Dabei wurde in der mittleren Zeile die Kettenregel für die Differentiation nach \mathbf{q} benutzt. Somit besitzt letztendlich die Tangente \mathbf{K}_T die folgende Gestalt:

$$\mathbf{K}_T = \frac{2\mu}{h_n} \mathbf{I} + h_n \int_0^1 \left(\mathcal{T}_1(\mathbf{q}^h(\alpha)) \mathbf{I} + \mathcal{T}_2(\mathbf{q}^h(\alpha)) \mathbf{Q}(\mathbf{q}^h(\alpha)) \right) \alpha \, d\alpha \quad (2.71)$$

mit den skalarwertigen Funktionen

$$\mathcal{T}_1(\mathbf{q}) = \frac{1}{r(\mathbf{q})} \frac{dV(r(\mathbf{q}))}{dr} \quad (2.72)$$

$$\mathcal{T}_2(\mathbf{q}) = \frac{1}{r^2(\mathbf{q})} \left(\frac{d^2 V(r(\mathbf{q}))}{dr^2} - \frac{1}{r(\mathbf{q})} \frac{dV(r(\mathbf{q}))}{dr} \right) \quad (2.73)$$

und der Matrix

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} \mathbf{q}^T \quad (2.74)$$

Um die Implementierung der numerischen Lösung unabhängig von einem bestimmten Potential zu halten, wird die Integration im Residuum und in der Tangente durch eine Quadratur nach GAUSS ersetzt [4, 13]:

$$\frac{2\mu}{h_n} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) - 2 \mathbf{p}_1 + h_n \sum_{i=1}^{ngp} \frac{dV(r(\mathbf{q}^h(\alpha_i)))}{dr} \frac{1}{r(\mathbf{q}^h(\alpha_i))} \mathbf{q}^h(\alpha_i) w_i \approx \mathbf{0} \quad (2.75)$$

mit ngp als die Anzahl der GAUSS-Punkte und w_i als das Gewicht zum i -ten GAUSS-Punkt.

Der Fehler, der durch die Quadratur entsteht, ist auch mit linearen Formfunktionen bei genügend hoher Anzahl von GAUSS-Punkten vernachlässigbar klein [1].

$$\mathbf{K}_T \approx \frac{2\mu}{h_n} \mathbf{I} + h_n \sum_{i=1}^{ngp} \left(\mathcal{T}_1(\mathbf{q}^h(\alpha_i)) \mathbf{I} + \mathcal{T}_2(\mathbf{q}^h(\alpha_i)) \mathbf{Q}(\mathbf{q}^h(\alpha_i)) \right) \alpha_i w_i \quad (2.76)$$

2.7 Numerische Lösung in Polarkoordinaten

In diesem Kapitel wird eine zweite Form der numerischen Lösung des äquivalenten Einkörperproblems erörtert: Das Zeitschrittverfahren in Polarkoordinaten. Analog zu Kapitel 2.6 sei hier kein bestimmtes Potential V vorausgesetzt.

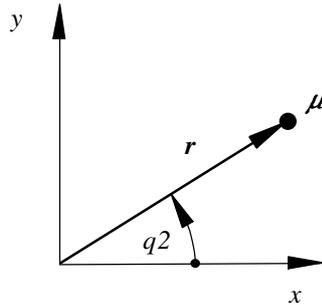


Abbildung 2.7: Polarkoordinaten $r = q_1$ und q_2

Die Gesamtenergie $E = T + V$ ist gleich der HAMILTON-Funktion $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ des betrachteten konservativen, autonomen Einkörpersystems [7]. Somit gilt für H :

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + V(\mathbf{q}) \quad (2.77)$$

mit \mathbf{p} als generalisierten Impuls und $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$ als Vektor der generalisierten Koordinaten.

Die kinetische Energie T der Masse μ im Zentralkraftfeld ist:

$$T = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (2.78)$$

mit

$$\mathbf{r} = q_1 (\cos q_2 \mathbf{e}_x + \sin q_2 \mathbf{e}_y) \quad (2.79)$$

als euklidischen Ortsvektor der Masse μ zum Koordinatenursprung. Die Energie T hat dann in Matrixschreibweise die folgende Form:

$$T = \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.80)$$

mit

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Bemerkung 2.5 Die Matrix \mathbf{M} heißt die Metrik der Polarkoordinaten [15].

Aus der LAGRANGE-Funktion $L = T - V$, wird der generalisierte Impuls \mathbf{p} wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \equiv \partial_{\dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \partial_{\dot{\mathbf{q}}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{\mu}{2} \partial_{\dot{\mathbf{q}}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Mit der Rechenregel aus Gl. (2.50)

$$\partial_{\dot{\mathbf{q}}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) = 2 \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.83)$$

folgt der generalisierte Impuls \mathbf{p} zu:

$$\mathbf{p} = \mu \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.84)$$

Eine Multiplikation der Gl. (2.84) mit der Inversen \mathbf{M}^{-1} der Matrix \mathbf{M} , ergibt den Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ der generalisierten Geschwindigkeiten:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\mu} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \quad (2.85)$$

Die Inverse \mathbf{M}^{-1} ergibt sich nach der folgenden Rechenregel für das Invertieren einer 2×2 -Matrix [10]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Demzufolge ergibt sich die Invertierung der Matrix \mathbf{M} aus Gl. (2.81) zu:

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_1^{-2} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Das Ersetzen von $\dot{\mathbf{q}}$ in der kinetischen Energie T mit Gl. (2.85) durch den generalisierten Impuls \mathbf{p} führt auf die HAMILTON-Funktion H :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + V(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2\mu} (\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p})^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) (\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p}) + V(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}^T (\mathbf{M}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})) \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) \quad (2.89)$$

wegen $\mathbf{M}^{-T} = \mathbf{M}^{-1}$, durch die Symmetrie der Matrix \mathbf{M} [2].

Die partiellen Ableitungen der HAMILTON-Funktion H für das Zeitschrittverfahren, können damit aus Gl. (2.89) berechnet werden. Die partielle Ableitung nach dem generalisierten Impuls \mathbf{p} ist nach Gl. (2.83) wie folgt:

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{p}}H &= \frac{1}{2\mu}\partial_{\mathbf{p}}\left(\mathbf{p}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}\right) \\ &= \frac{1}{\mu}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}\end{aligned}\quad (2.90)$$

Die partielle Ableitung der HAMILTON-Funktion nach dem Vektor \mathbf{q} der generalisierten Koordinaten ergibt:

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{q}}H &= \frac{1}{2\mu}\partial_{\mathbf{p}}\left(\mathbf{p}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}\right) + \partial_{\mathbf{q}}V \\ &= \frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T\frac{\partial}{\partial q_1}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T\frac{\partial}{\partial q_2}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} \end{bmatrix} + \partial_{\mathbf{q}}V \\ \partial_{\mathbf{q}}H &= \frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T\frac{\partial}{\partial q_1}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{p}^T\frac{\partial}{\partial q_2}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}\mathbf{p} + \partial_{\mathbf{q}}V\end{aligned}\quad (2.91)$$

Die Differentiation des Potentials läßt sich nach der Kettenregel wie folgt vereinfachen:

$$\partial_{\mathbf{q}}H = \frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T\frac{\partial}{\partial q_1}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{p}^T\frac{\partial}{\partial q_2}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}\mathbf{p} + \frac{dV(r(\mathbf{q}))}{dr}\partial_{\mathbf{q}}r(\mathbf{q})\quad (2.92)$$

mit

$$\partial_{\mathbf{q}}r(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (2.93)$$

Aus Gl. (2.81) läßt sich erkennen, daß die generalisierte Koordinate q_2 zyklisch ist und somit auch in der Inversen von \mathbf{M} in Gl. (2.87) nicht enthalten ist. Folglich ist die zweite Zeile der Matrix im ersten Term von Gl. (2.92) der Nullvektor:

$$\partial_{\mathbf{q}}H = \frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial q_1}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} + \frac{dV(r)}{dr}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (2.94)$$

Das Zeitschrittverfahren zur numerischen Lösung ist mit Gl. (2.90) und Gl. (2.94) nach Kapitel 1.5:

$$\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 - \frac{h_n}{\mu}\int_0^1\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}^h(\alpha))\mathbf{p}^h(\alpha)d\alpha = \mathbf{0}\quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 &+ \frac{h_n}{2\mu} \int_0^1 \begin{bmatrix} (\mathbf{p}^h(\alpha))^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}^h(\alpha)) \mathbf{p}^h(\alpha) d\alpha + \\ &+ h_n \int_0^1 \frac{dV(r(\mathbf{q}^h(\alpha)))}{dr} d\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Hierbei wurde die Ersetzung der kontinuierlichen Lösungsfunktionen \mathbf{q} und \mathbf{p} durch die diskreten Lösungsfunktionen $\mathbf{q}^h(\alpha)$ und $\mathbf{p}^h(\alpha)$ bereits vorgenommen.

Die generalisierte Koordinate $q_2 \equiv \phi$ ist nach Kapitel 2.3 zyklisch. Folglich ist der zugehörige generalisierte Impuls $p^{(2)} \equiv p_\phi$ nach Gl. (2.22) eine Erhaltungsgröße. Dies ist auch im vorliegenden Zeitschrittverfahren zu erkennen, denn die zweite Komponente der vektoriellen Gleichung (2.96) ergibt:

$$p_2^{(2)} - p_1^{(2)} = 0 \quad (2.97)$$

mit $\mathbf{p}_i := [p_i^{(1)}, p_i^{(2)}]^T$ als Matrixdarstellung des i -ten Knotenvektors und $\mathbf{p} := [p^{(1)}, p^{(2)}]^T$ als Matrixdarstellung des kontinuierlichen generalisierten Impulses \mathbf{p} .

Werden die Gleichungen (2.95) und (2.96) nach den analytisch durchführbaren Integrationen komponentenweise hingeschrieben, so entsteht folgendes Gleichungssystem:

$$q_2^{(1)} - q_1^{(1)} - \frac{h_n}{2\mu} (p_1^{(1)} + p_2^{(1)}) = 0 \quad (2.98)$$

$$q_2^{(2)} - q_1^{(2)} - \frac{h_n}{\mu} \left(\frac{p_1^{(2)}}{q_1^{(1)} q_2^{(1)}} \right) = 0 \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} p_2^{(1)} - p_1^{(1)} - \frac{h_n}{\mu} \left(\frac{p_1^{(2)}}{q_1^{(1)} q_2^{(1)}} \right)^2 \frac{q_1^{(1)} + q_2^{(1)}}{2} + \\ + h_n \int_0^1 \frac{dV(r(\mathbf{q}^h(\alpha)))}{dr} d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$p_2^{(2)} - p_1^{(2)} = 0 \quad (2.101)$$

mit $\mathbf{q}_i := [q_i^{(1)}, q_i^{(2)}]^T$ als Matrixdarstellung des i -ten Knotenvektors.

Wird Gl. (2.98) in Gl. (2.100) eingesetzt, so entsteht im Falle eines nur vom Radius abhängigen Potentials eine nichtlineare skalare Gleichung mit lediglich dem Radius $q_2^{(1)}$ als Variable. Diese Gleichung muß iterativ gelöst werden, wozu das NEWTON-RAPHSON-Verfahren verwendet wird. Analog zu

den kartesischen Koordinaten wird eine Toleranz 10^{-13} angesetzt. Das Residuum $R(q_2^{(1)}) = 0$ lautet somit:

$$\begin{aligned} R(q_2^{(1)}) &= q_2^{(1)} - q_1^{(1)} - \frac{h_n}{\mu} p_1^{(1)} - \frac{q_1^{(1)} + q_2^{(1)}}{4} \left(\frac{h_n}{\mu} \frac{p_1^{(2)}}{q_1^{(1)} q_2^{(1)}} \right)^2 + \\ &+ \frac{h_n^2}{2\mu} \int_0^1 \frac{dV(r(\mathbf{q}^h(\alpha)))}{dr} d\alpha \end{aligned} \quad (2.102)$$

Da das Residuum $R(q_2^{(1)})$ eine skalare Funktion ist, ergibt sich die Tangente K_T ebenfalls zu einer skalaren Funktion:

$$\begin{aligned} K_T &= \frac{\partial R}{\partial q_2^{(1)}} \\ &= 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{h_n}{\mu} \frac{p_1^{(2)}}{q_1^{(1)} q_2^{(1)}} \right)^2 \left(2 \frac{q_1^{(1)}}{q_2^{(1)}} + 1 \right) + \\ &+ \frac{h_n^2}{2\mu} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial q_2^{(1)}} \frac{dV(r(\mathbf{q}^h(\alpha)))}{dr} d\alpha \end{aligned} \quad (2.103)$$

Die Anwendung der Kettenregel der Differentiation auf die partielle Ableitung im Integral in Gl. (2.103) führt auf:

$$\begin{aligned} K_T &= 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{h_n}{\mu} \frac{p_1^{(2)}}{q_1^{(1)} q_2^{(1)}} \right)^2 \left(2 \frac{q_1^{(1)}}{q_2^{(1)}} + 1 \right) + \\ &+ \frac{h_n^2}{2\mu} \int_0^1 \frac{d^2V(r(\mathbf{q}^h(\alpha)))}{dr^2} \alpha d\alpha \end{aligned} \quad (2.104)$$

mit

$$\frac{\partial q^{(1)h}}{\partial q_2^{(1)}} = \alpha \quad (2.105)$$

wobei $\mathbf{q}^h := [q^{(1)h}, q^{(2)h}]^T$ ist.

Damit die Implementierung der numerischen Lösung unabhängig vom verwendeten Zentralkraftpotential ist, wird die Integration der zweiten Ableitung des Potentials V numerisch durchgeführt. Eine Quadratur nach GAUSS mit genügend hoher Anzahl von GAUSS-Punkten, soll die Integration annähern [4, 13]:

$$\int_0^1 \frac{d^2V(r(\mathbf{q}^h(\alpha)))}{dr^2} \alpha d\alpha \approx \sum_{i=1}^{ngp} \frac{d^2V(r(\mathbf{q}^h(\alpha_i)))}{dr^2} \alpha_i w_i \quad (2.106)$$

wobei w_i das Gewicht zum i -ten GAUSS-Punkt ist und ngp die Anzahl der GAUSS-Punkte.

Analog wird mit der ersten Ableitung des Potentials V im Residuum (2.102) verfahren.

Die numerische Lösung in Polarkoordinaten hat somit gegenüber der Verwendung kartesischer Koordinaten den Vorteil, daß die Iteration ausschließlich in einer Variablen durchgeführt wird. Vorteilhaft bei der numerischen Lösung in kartesischen Koordinaten ist die Tatsache, daß eine Nichtlinearität nur das Potential V verursachen kann.

2.8 Das KEPLER-Problem

Das in der Himmelsmechanik wichtigste Zentralkraftpotential ist das KEPLER-Potential [8]:

$$V(r) = -\frac{k}{r} \quad (2.107)$$

mit $k > 0$.

Auf diesem Potential beruht das Gravitationsgesetz von NEWTON [8]. Das KEPLER-Potential aus Gl. (2.107) entspricht dem Fall $n = -2$ der analytisch integrierbaren Potentials aus Kapitel 2.4.

2.8.1 Analytische Lösung

Die Bahn $r = r(\phi)$ folgt direkt aus Gl. (2.33) unter Berücksichtigung des KEPLER-Potentials aus Gl. (2.107). Jedoch wird an dieser Stelle das Integral als ein unbestimmtes Integral geschrieben, damit die beiden Integrationskonstanten additiv sind und zu einer Integrationskonstanten ϕ' zusammengefaßt werden können [7, 8]:

$$\phi(u) = \phi' \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu k}{l^2}u - u^2}} \quad (2.108)$$

mit $u \equiv r^{-1}$.

Dabei ist die Konstante ϕ' nicht notwendigerweise identisch mit der Konstanten ϕ_0 bei $t = 0$. Die Integrationskonstante ϕ' wird aus einer Anfangsbedingung der Funktion $r(\phi)$ bestimmt.

In einer Integraltabelle findet man die folgende Auflösung eines Integrals vom Kreistyp:

$$\int \frac{du}{\sqrt{\gamma u^2 + \beta u + \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left(-\frac{2\gamma u + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\gamma\alpha}} \right) \quad (2.109)$$

für $\gamma < 0$ und $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

Mit

$$\gamma = -1, \quad \beta = \frac{2\mu k}{l^2}, \quad \alpha = \frac{2\mu E}{l^2} \quad (2.110)$$

sind diese Bedingungen erfüllt. Somit ergibt sich die Funktion $\phi(u)$ zu:

$$\phi(u) = \phi' \mp \arccos \frac{\frac{l^2 u}{\mu k} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2E l^2}{\mu k^2}}} \quad (2.111)$$

Nach einer Resubstitution der Variable u durch r^{-1} hat die Umkehrfunktion $r(\phi)$ die folgende Form:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi')} \quad (2.112)$$

mit

$$p := \frac{l^2}{\mu k} \quad (2.113)$$

$$\varepsilon := \sqrt{1 + 2E \frac{p}{k}} \quad (2.114)$$

Die Gl. (2.112) stellt einen Kegelschnitt dar, der mit einem Brennpunkt im Koordinatenursprung liegt. Die Konstante p wird der Halbparameter und ε die Exzentrizität der Bahn genannt. Der Winkel ϕ' kennzeichnet den Umkehrpunkt der Bahn, der dem Koordinatenursprung bzw. im Zweikörpersystem dem gemeinsamen Schwerpunkt am nächsten kommt. Diesen Punkt der Bahn nennt man das *Perihel*. Der Bahnpunkt, der bei einer begrenzten Bahn am weitesten vom Koordinatenursprung bzw. vom Schwerpunkt entfernt ist, wird als *Aphel* bezeichnet [7, 8].

Die Bahnen der Gl. (2.112) sind mathematisch nach der Exzentrizität ε zu unterscheiden. Da die Gesamtenergie E die einzige physikalische Größe ist die nur von der Exzentrizität abhängt, sind die Bahnen physikalisch auch nach der Gesamtenergie E unterscheidbar (siehe Tab. 2.1). Die Gesamtenergie E

darf wegen $k > 0$ einen minimalen Wert nicht unterschreiten. Sonst würde der Radikant von ε nicht größer-gleich null bleiben und somit die Exzentrizität imaginär werden. Nach der Exzentrizität ε bzw. der Gesamtenergie des Massenpunktes sind nun vier Bahnformen zu unterscheiden [7, 8]:

$\varepsilon > 1$	$E > 0$	Hyperbel
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	Parabel
$0 < \varepsilon < 1$	$E_0 < E < 0$	Ellipse
$\varepsilon = 0$	$E = E_0$	Kreis

Tabelle 2.1: Bahnen des KEPLER-Potentials

Ist die Gesamtenergie E des Massenpunktes genau $E = E_0$, so bewegt sich der Massenpunkt auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_0 um den Koordinatenursprung. Der Wert $E = E_0$ ist der angesprochene minimale Wert der Gesamtenergie.

$$E_0 = -\frac{k}{2p} \quad \text{und} \quad r_0 = p \quad (2.115)$$

Liegt die Gesamtenergie E des Massenpunktes im Bereich $E_0 < E < 0$, dann ist die Bahn eine Ellipse. Die Abstände r_{per} und r_{aph} des Perihels bzw. Aphels vom Koordinatenursprung betragen:

$$r_{per} = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad \text{und} \quad r_{aph} = \frac{p}{1 - \varepsilon} \quad (2.116)$$

Dies folgt aus Gl. (2.112) für $\phi = \phi'$ bzw. $\phi = \phi' + \pi$. Die große Halbachse a der Ellipsenbahn ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der Abstände aus den Gln. (2.116) zu:

$$a \equiv \frac{r_{per} + r_{aph}}{2} = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{k}{2E} \quad (2.117)$$

Bei $E = 0$ ist der Kegelschnitt eine Parabel mit einem Perihelabstand von

$$r_{per} = \frac{p}{2} \quad (2.118)$$

Besitzt der Massenpunkt eine Gesamtenergie $E > 0$, so ist dessen Bahn eine Hyperbel.

Bemerkung 2.6 Negative ε rufen die gleichen Bahnformen in der gleichen Reihenfolge von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon < -1$ hervor, nur daß die Bahnen um 180° in mathematisch-positivem Drehsinn gedreht sind, weil allgemein gilt [16]:

$$-\cos(\alpha) = \cos(180^\circ + \alpha) \quad (2.119)$$

2.8.2 Numerische Beispielrechnungen

Die numerische Lösung wird an Hand vier verschiedener Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ durchgeführt. Jede Anfangsbedingungen führt jeweils auf ein Beispiel der vier charakteristischen Bahnformen des KEPLER-Potentials. Die Vorgabe der Bahngeometrie liefert die Anfangswerte für Position und zugehörigen generalisierten Impuls. Hier ist die numerische Lösung mittels kartesischen Koordinaten verwendet worden.

Kreis Bei der Kreisbahn erfolgt die Spezifikation der Bahngeometrie lediglich durch Vorgabe des Radiuses r_0 . Nach den Gleichungen (2.115) ergibt sich direkt der Halbparameter p und somit aus dessen Definition der Betrag des Drehimpulses l :

$$l = \pm \sqrt{\mu k r_0} \quad (2.120)$$

Das Vorzeichen gibt die Drehrichtung des Massenpunktes auf der Kreisbahn bzgl. des mathematischen Drehsinnes an. Weiterhin folgt aus Gl. (2.115) die Gesamtenergie des Massenpunktes:

$$E_0 = -\frac{k}{2 r_0} \quad (2.121)$$

Mit der Gesamtenergie E und dem Drehimpulsbetrag l ist die Bewegung eindeutig vorgegeben. Man betrachte den Punkt P_0 auf der y -Achse mit

$$\mathbf{q}_0 \equiv [x_0, y_0]^T = [0, r_0]^T \quad (2.122)$$

Allgemein ergibt sich die Geschwindigkeit des Massenpunktes aus der zeitlichen Ableitung des Ortsvektors. Da die Bewegungsgleichungen in Kapitel 2.3 in Polarkoordinaten formuliert sind, wird an dieser Stelle der Ortsvektor auch in Polarkoordinaten gebildet. Nach Gl. (2.79) gilt dann:

$$\dot{\mathbf{r}} = r \dot{\phi} (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y) \quad (2.123)$$

Wird in Gl. (2.123) $\dot{\phi}$ durch das erste Integral (2.23) ersetzt, so ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ zu:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{l}{\mu r} (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y) \quad (2.124)$$

Für die numerische Lösung in kartesischen Koordinaten ist somit der Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ der generalisierten Geschwindigkeiten:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{l}{\mu r} \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

Der generalisierte Impuls \mathbf{p} ist dann nach Gl. (2.52):

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{l}{r} \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

Der betrachtete Punkt P_0 auf der y-Achse besitzt die Polarkoordinaten $(r, \phi) = (r_0, +90^\circ)$. Somit gelten folgende Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{q}_0 = [0, r_0]^T \quad (2.127)$$

$$\mathbf{p}_0 = \left[-\frac{l}{r_0}, 0\right]^T \quad (2.128)$$

Der generalisierte Impuls \mathbf{p}_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ muß also negativ sein, um eine Bewegung in mathematisch positiven Drehsinn zu verursachen und umgekehrt.

In Abb. 2.8 ist im oberen Rechnerschrieb die Kreisbahn der reduzierten Masse μ zu erkennen und im unteren Rechnerschrieb die Gesamtenergie $E = E(t)$ und das effektive Potential $V' = V'(r)$. Dabei haben die Zeit t für die Gesamtenergie E und der Radius r für das effektive Potential V' identische Skalenteilungen.

Die numerischen Berechnungen wurden mit fünf GAUSS-Punkten (int=5) und einer Zeitschrittweite $h_n \equiv dt = 0.1$ durchgeführt. Fünf GAUSS-Punkte entspricht der höchsten GAUSS-Punktezahl die implementiert wurde. Der Fehler ist hier schon vernachlässigbar klein [1]. Die gepunkteten Kurven stellen die numerischen Berechnungen aus dem Zeitschrittverfahren dar. Die durchgezogenen Kurven entsprechen der analytischen Lösung des KEPLER-Problems. Bei der hier gewählten Schrittweite dt sind die Punkte der numerischen Lösung so dicht, daß die analytische Lösung nicht mehr zu erkennen

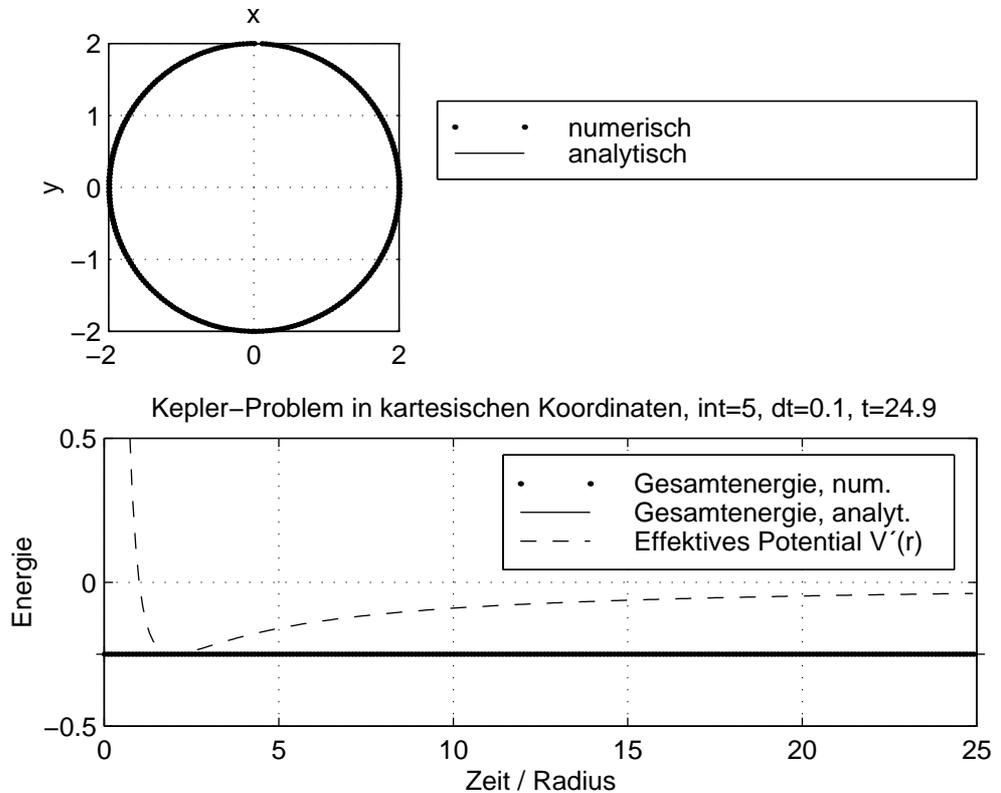


Abbildung 2.8: Kreisbahn des KEPLER-Potentials bei $\mu = 2$, $k = 1$

ist. Die Kurve des effektiven Potentials $V'(r)$ wird ebenfalls numerisch berechnet und durch eine gestrichelte Kurve angezeigt.

Der vorgegebene Radius ist $r_0 = 2$. Dies entspricht einer Gesamtenergie der Masse $\mu = 2$ von $E = -0.25$ bei $k = 1$. Die Energieerhaltung des Systems wird durch die konstante Energie verifiziert. Der Betrag des Drehimpulses ist positiv gewählt worden, so daß die reduzierte Masse μ die Bahn gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Da bei einer Kreisbahn das Minimum des effektiven Potentials vorliegt, berührt in der Abb. 2.8 die Gesamtenergie E bei $r_0 = 2$ das effektive Potential im tiefsten Punkt.

Ellipse Die elliptische Bahn muß durch zwei Parameter festgelegt werden.

Dazu eignen sich die Radien r_{per} und r_{aph} des Perihels und des Aphels. Die Bestimmung des Betrages l des Drehimpulses und der Gesamtenergie E aus diesen beiden Radien kann auf zwei Wegen erfolgen: 1. Mit den mathematischen Beziehungen (2.116) und den Definitionen des Halbparameters p und der Exzentrizität ε und 2. aus physikalischen Betrachtungen, über die Methode des effektiven Potentials V' . Um eine weitere Anwendung der Methode des effektiven Potentials zu demonstrieren wird der zweite Weg gegangen.

Aus Abb. 2.5 erkennt man, daß bei einer Ellipse die Kurve des effektiven Potentials V' zwei Schnittpunkte mit der Gesamtenergie $E = E_2$ aufweist. Die Schnittpunkte sind bei den Radien $r = r_1 \equiv r_{per}$ und $r = r_2 \equiv r_{aph}$. Folglich liegt bei r_{per} und bei r_{aph} das gleiche effektive Potential vor:

$$\begin{aligned} V'(r_{per}) \equiv -\frac{k}{r_{per}} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r_{per}^2} &= -\frac{k}{r_{aph}} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r_{aph}^2} \equiv V'(r_{aph}) \\ l &= \pm \sqrt{2 k \mu \frac{r_{per} r_{aph}}{r_{per} + r_{aph}}} \end{aligned} \quad (2.129)$$

Weiterhin folgt, daß die Gesamtenergie E der elliptischen Bahn gleich dem effektiven Potential $V'(r_{per}, r_{aph})$ ist. Mit Gl. (2.129) folgt:

$$\begin{aligned} E = V'(r_{per}, r_{aph}) &\equiv -\frac{k}{r_{per}} + k \frac{r_{aph}}{r_{per} (r_{per} + r_{aph})} \\ &= -\frac{k}{r_{per} + r_{aph}} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Legt man den Anfangspunkt P_0 auf die x-Achse, so herrschen nach Gl. (2.126) folgende Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{q}_0 = [r_{per}, 0]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_0 = \left[0, \frac{l}{r_{per}}\right]^T \quad (2.131)$$

In Abb. 2.9 ist eine elliptische Bahn mit $r_{per} = 1$ und $r_{aph} = 3$ dargestellt. Die Gesamtenergie der reduzierten Masse ist auf dieser Bahn $E = -0.25$ bei $k = 1$. Der Betrag l des Drehimpulses wurde wieder positiv angesetzt. Im unteren Rechnerscrib sind die Schnittpunkte des effektiven Potentials mit der Gesamtenergie bei den Radien $r = r_{per}$ und $r = r_{aph}$ zu erkennen. Charakteristisch für das KEPLER-Potential ist die Lage des Ursprungs des x-y-Koordinatensystems in einem Brennpunkt der Ellipse [6, 7, 8].

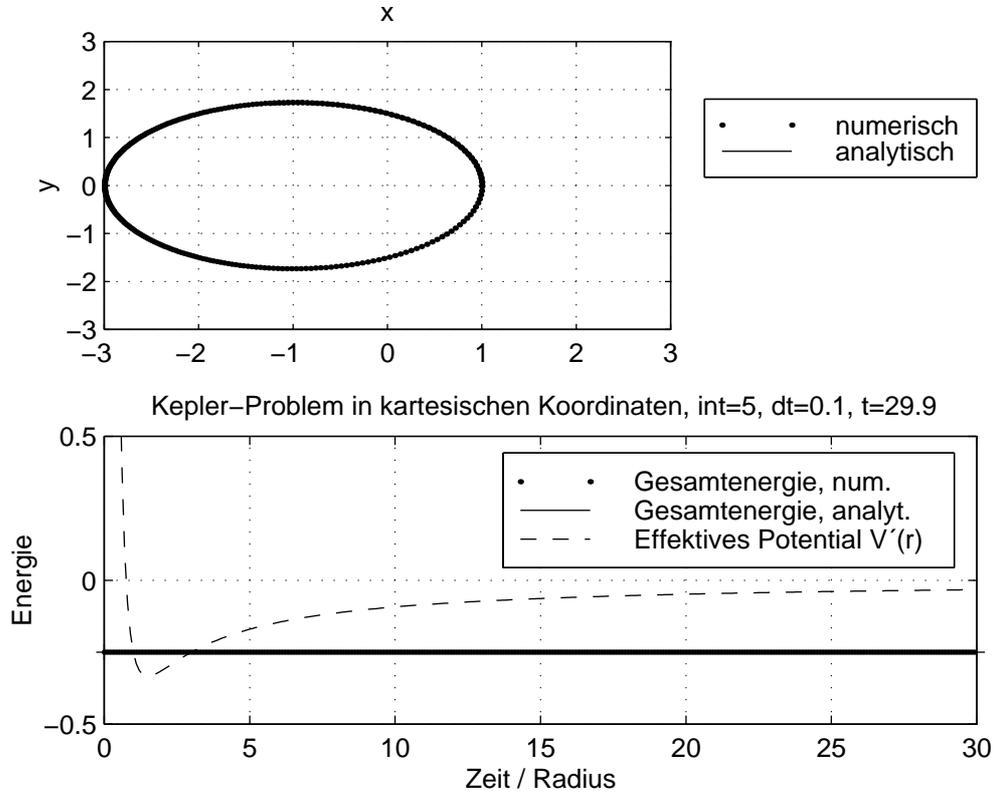


Abbildung 2.9: Elliptische Bahn des KEPLER-Potentials bei $\mu = 2$, $k = 1$

Parabel Nach Tab. 2.1 liegt eine parabolische Bahn vor, wenn die Gesamtenergie E verschwindet. Die Abb. 2.10 zeigt eine solche Parabelbahn, die mit $r_{per} = 2$ beginnt. Als Anfangsbedingungen werden die Gln. (2.131) verwendet. Dazu muß noch der Drehimpulsbetrag l berechnet werden. Nach der Methode des effektiven Potentials gilt für das Perihel dieser Parabel:

$$E = V'(r_{per}) \equiv -\frac{k}{r_{per}} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r_{per}^2} = 0 \quad (2.132)$$

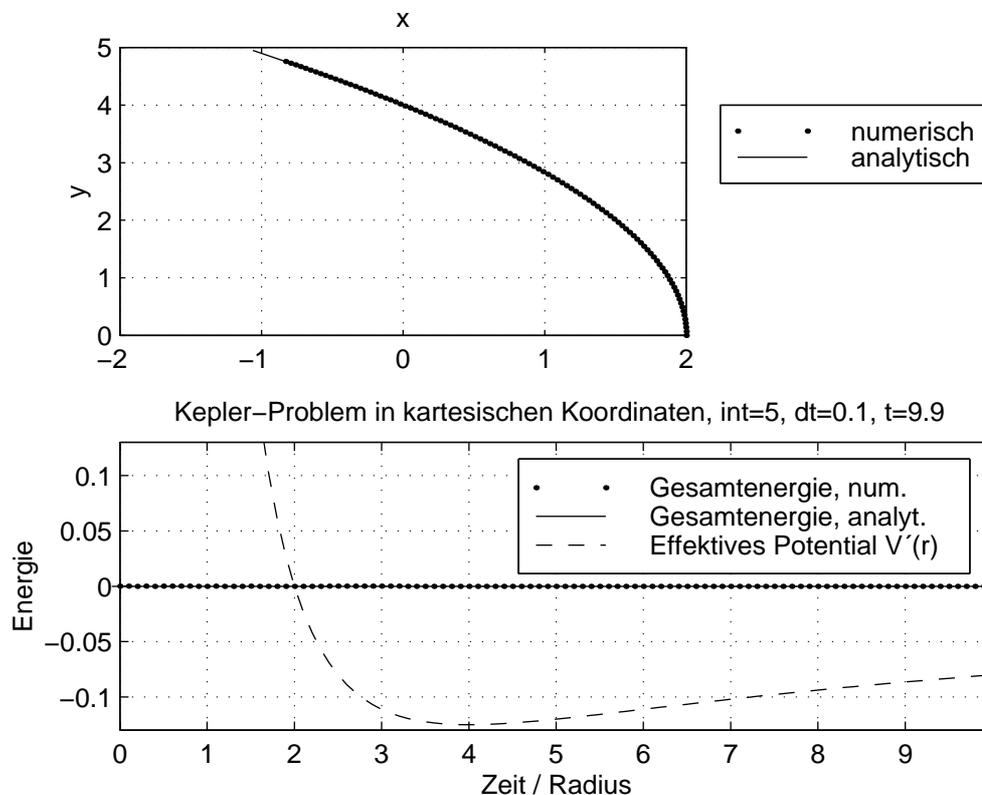


Abbildung 2.10: Parabolische Bahn des KEPLER-Potentials bei $\mu = 2$, $k = 1$

Aus Gl. (2.132) leitet sich die Gl. (2.118) und der notwendige Betrag des Drehimpulses ab:

$$l = \pm \sqrt{2 \mu k r_{per}} \quad (2.133)$$

In Abb. 2.10 wurde der Betrag des Drehimpulses positiv gewählt. Deshalb verläßt der Massenpunkt das Perihel im mathematisch-positiven Drehsinn.

Bemerkung 2.7 Die analytische Bahnkurve und die numerische Bahnkurve enden in Abb. 2.10 nicht an der gleichen Stelle, da die numerische Lösung in kartesischen Koordinaten den Graph $(x(t), y(t))$ mit der Zeit t als Kurvenparameter liefert und die analytische Bahnkurve den Graph $(x(r(\phi)), y(r(\phi)))$

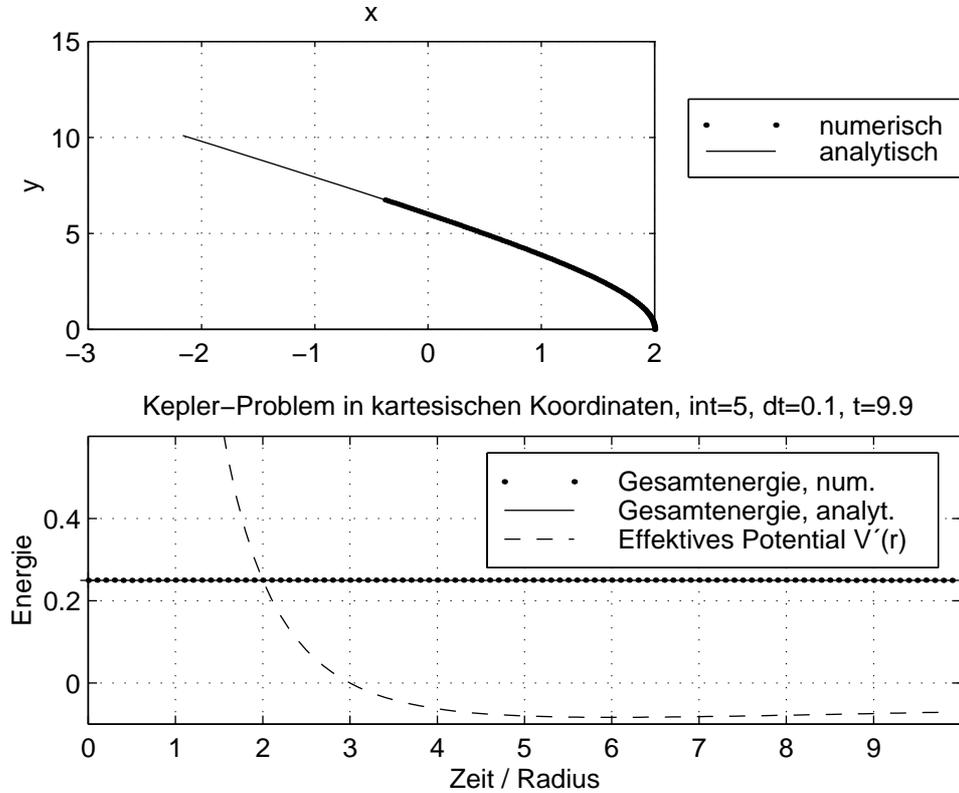


Abbildung 2.11: Hyperbel als Bahn des KEPLER-Potentials bei $\mu = 2$, $k = 1$

mit dem Winkel ϕ als Kurvenparameter darstellt.

Hyperbel Eine hyperbolische Bahn liegt nach Tab. 2.1 nur bei einer Gesamtenergie $E > 0$ vor, d.h das effektive Potential V' muß bei Vorgabe von r_{per} folgende Bedingung erfüllen:

$$E = V'(r_{per}) \equiv -\frac{k}{r_{per}} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r_{per}^2} > 0 \quad (2.134)$$

Mit Gl. (2.134) ist der Betrag des Drehimpulses so zu wählen, daß gilt:

$$|l| > \sqrt{2 \mu k r_{per}} \quad (2.135)$$

In Abb. 2.11 ist der Betrag des Drehimpulses wie folgt:

$$l = \sqrt{3 \mu k r_{per}} \quad (2.136)$$

Der Betrag l des Drehimpulses ist somit positiv. Folglich wird das Perihel im mathematisch-positiven Drehsinn verlassen. Die Gesamtenergie E des Massenpunktes berechnet sich mit Gl. (2.136) zu:

$$E = V'(r_{per}) \equiv \frac{k}{2 r_{per}} \quad (2.137)$$

Als Anfangsbedingungen dienen in Abb. 2.11 die Gln. (2.131) für die Vorgabe des Perihels.

Bei der hyperbolischen Bahn in Abb. 2.11 ist ein Perihelabstand von $r_{per} = 2$ vorgegeben. Mit einer reduzierten Masse $\mu = 2$ und einem Potentialfaktor $k = 1$ ist die Gesamtenergie $E = 0.25$. Entsprechend Bemerkung 2.7 enden die analytische und die numerische Bahnkurve nicht an der gleichen Stelle. Im unteren Rechnerscrib ist der Schnittpunkt des effektiven Potentials mit der Gesamtenergie bei $r = r_{per}$ zu erkennen.

2.9 Das HOOKE-Potential

Als Modell für die Bewegung eines Massenpunktes in einem Zentralkraftfeld, dessen Potential das HOOKE-Potential V mit

$$V(r) = -\frac{1}{2} k r^2 \quad (2.138)$$

ist, kann ein Massenpunkt dienen, der an einer linearen Spiralfeder reibungsfrei im Ursprung des (x,y)-Koordinatensystems gelagert ist und sich mit einer konstanten Kreisfrequenz $\omega = \dot{\phi} = const.$ um die Lagerung dreht (siehe Abb. 2.12). Dabei wirken auf den Massenpunkt keine anderen Kräfte. Die Potentialkonstante k entspricht dabei der Steifigkeit der Spiralfeder. In Kapitel 2.4 wurde festgestellt, daß das HOOKE-Potential in Gl. (2.138) dem analytisch integrierbaren Fall $n = 1$ entspricht.

2.9.1 Analytische Lösung

Mit Gl. (2.138) ergibt sich die Bahn $r = r(\phi)$ direkt aus der Lösung des Integrals in Gl. (2.36). Die Integration wird hier allerdings unbestimmt vorgenommen, damit zwei additive Integrationskonstanten vorliegen die zu einer

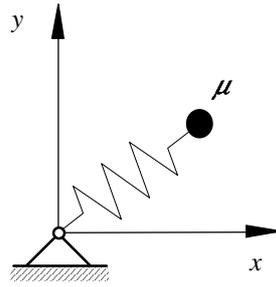


Abbildung 2.12: Feder-Modell für das HOOKE-Potential

Integrationskonstanten ϕ' zusammengefaßt werden können:

$$\phi(w) = \phi' \mp \frac{1}{2} \int \frac{dw}{\sqrt{\frac{\mu k}{l^2} + \frac{2\mu E}{l^2} w - w^2}} \quad (2.139)$$

mit $w \equiv r^{-2}$.

Der Wert der Konstanten ϕ' ist nicht notwendigerweise identisch mit dem Winkel ϕ_0 bei $t = 0$.

Somit wird bestätigt, daß das HOOKE-Potential ein Integral vom Kreistyp liefert. Allgemein gilt für ein Integral vom Kreistyp die folgende Auflösung

$$\int \frac{dw}{\sqrt{\gamma w^2 + \beta w + \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left(-\frac{2\gamma w + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\gamma\alpha}} \right) \quad (2.140)$$

wenn $\gamma < 0$ und $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ ist.

Mit den Koeffizienten

$$\gamma = -1, \quad \beta = \frac{2\mu E}{l^2}, \quad \alpha = \frac{\mu k}{l^2} \quad (2.141)$$

sind diese notwendigen Bedingungen erfüllt. Somit ergibt sich die Funktion $\phi(w)$ zu:

$$\phi(w) = \phi' \mp \frac{1}{2} \arccos \frac{\frac{l^2 w}{\mu E} - 1}{\sqrt{1 + \frac{k l^2}{\mu E^2}}} \quad (2.142)$$

Die Umkehrung der Funktion $w = w(\phi)$ ergibt nach der Resubstitution von $w \equiv r^{-2}$ die Bahnkurve $r = r(\phi)$. Diese nimmt folgende Gestalt an:

$$r(\phi) = \sqrt{\frac{p}{1 + \varepsilon \cos(2\phi - \phi'')}} \quad (2.143)$$

mit

$$p := \frac{l^2}{\mu E} \quad (2.144)$$

$$\varepsilon := \sqrt{1 + k \frac{p}{E}} \quad (2.145)$$

und $\phi'' := 2\phi'$ als Winkel der das Perihel angibt.

Die unterschiedlichen Bahnen in Gl. (2.143) hängen mathematisch nur von der Exzentrizität ε ab. Im Gegensatz zum KEPLER-Potential hängt bei dem HOOKE-Potential sowohl die Exzentrizität ε als auch der Halbparameter p von der Gesamtenergie E ab. Aus diesem Grund sind die Bahnen physikalisch nach der Potentialkonstanten k zu unterscheiden. Analog zur Bedingung an die Gesamtenergie des KEPLER-Potential darf beim HOOKE-Potential die Potentialkonstante k den Wert k_0 nicht unterschreiten, damit der Radikant der Exzentrizität ε nicht negativ wird.

Bemerkung 2.8 *Die notwendige Unterscheidung nach der Potentialkonstanten k , legalisiert auch das Modell in Abb. 2.12. Denn k entspricht in diesem Modell der Federsteifigkeit.*

Es sind vier Bahnformen möglich (siehe Tab. 2.2):

$\varepsilon > 1$	$k > 0$	Hyperbel
$\varepsilon = 1$	$k = 0$	Gerade
$0 < \varepsilon < 1$	$k_0 < k < 0$	Ellipse
$\varepsilon = 0$	$k = k_0$	Kreis

Tabelle 2.2: Bahnen des HOOKE-Potentials

Bei einer Potentialkonstanten $k = k_0$ bewegt sich die reduzierte Masse μ auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_0 um den Ursprung des Koordinatensystems.

$$k_0 = -\frac{E}{p} \quad \text{und} \quad r_0 = \sqrt{p} \quad (2.146)$$

Wird die Potentialkonstante k aus dem Bereich $k_0 < k < 0$ gewählt, so hat die Bahn die Form einer Ellipse, deren Mitte im Koordinatenursprung liegt.

Der Abstand des Perihels bzw. Aphels folgt aus Gl. (2.143) für $2\phi = \phi''$ bzw. $2\phi = \phi'' + 2\pi$ zu:

$$r_{per} = \sqrt{\frac{p}{1+\varepsilon}} \quad \text{und} \quad r_{aph} = \sqrt{\frac{p}{1-\varepsilon}} \quad (2.147)$$

Eine verschwindende Potentialkonstante $k = 0$ verursacht eine Gerade als Bahnkurve des Massenpunktes. Dabei ist der kürzeste Abstand zwischen Koordinatenursprung und Gerade der Perihelabstand r_{per} mit

$$r_{per} = \sqrt{\frac{p}{2}} \quad (2.148)$$

Eine Potentialkonstante $k > 0$ hat eine hyperbolische Bahn zur Folge.

Bemerkung 2.9 Die Bemerkung 2.6 über negative ε trifft auch hier zu. Negative ε rufen die gleichen Bahnformen in der gleichen Reihenfolge hervor, nur um 180° in mathematisch-positivem Drehsinn gedreht.

2.9.2 Numerische Beispielrechnungen

Eine numerische Lösung des Zweikörperproblems mit dem HOOKE-Potential wird an vier Anfangsbedingungen für den Zeitpunkt $t = 0$ demonstriert. Jede der Anfangsbedingungen führt auf eine bestimmte Bahnform der vier möglichen Bahnen des HOOKE-Potentials. Die Anfangsbedingungen folgen aus der Vorgabe geometrischer Kennwerte der jeweiligen Bahn. Die numerische Lösung erfolgt unter Verwendung kartesischer Koordinaten.

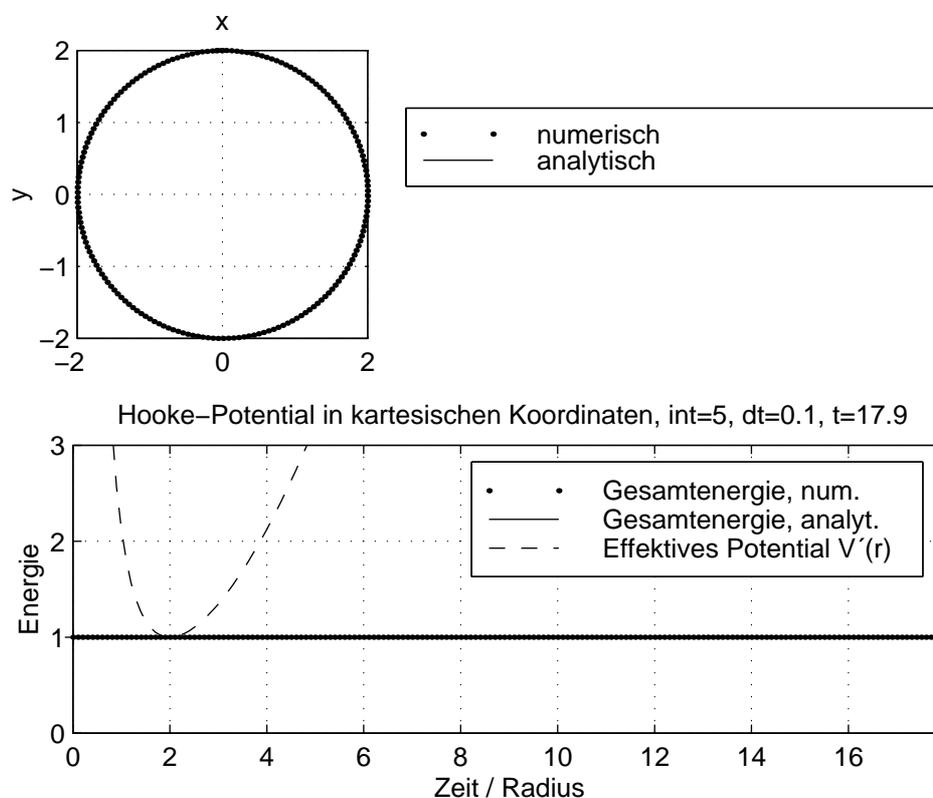
Kreis Bei einer Kreisbahn läßt sich nur der Radius r_0 vorgegeben. Damit ist nach Gl. (2.146) der Halbparameter p bestimmt. Aus der Definition des Halbparameters in Gl. (2.144) läßt sich der Drehimpulsbetrag l bestimmen:

$$l = \pm r_0 \sqrt{\mu E} \quad (2.149)$$

Ein positives Vorzeichen bedeutet einen Bahnumlauf in mathematisch positivem Drehsinn bzw. ein negatives einen umgekehrten Umlauf des Massepunktes. Die Potentialkonstante k_0 einer Kreisbahn folgt aus Gl. (2.146):

$$k_0 = -\frac{E}{r_0^2} \quad (2.150)$$

Mit dem Betrag des Drehimpulses und der notwendigen Potentialkonstante sind die Anfangsbedingungen der Gln. (2.127) und (2.128) für die Kreisbahn

Abbildung 2.13: Kreisbahn des HOOKE-Potentials bei $\mu = 2$, $E = 1$

bestimmt.

In der Abb. 2.13 ist eine Kreisbahn des Massepunktes im HOOKE-Potential mit einer Potentialkonstanten $k_0 = -0.25$ dargestellt. Der Bahnlauf ist im mathematisch positiven Drehsinn gewählt ($l > 0$). Im unteren Rechner-schrieb ist der Verlauf des effektiven Potentials $V'(r)$ und die Gesamtenergie E des HOOKE-Potentials wiedergegeben. Den Verlauf von V' von links bis zum Minimum bei $r \equiv r_0 = 2$ bestimmt das Potential der auf die Masse μ wirkenden Zentrifugalkraft (siehe Gl.(2.40)). Im Verlauf ab $r = r_0$ dominiert das HOOKE-Potential $V(r)$. Die konstante Gesamtenergie E verifiziert die Energieerhaltung $E = T + V = \text{const.}$

Ellipse Für die Spezifikation einer Ellipse sind zwei geometrische Parameter notwendig. Dazu werden analog zum KEPLER-Potential der Perihelabstand r_{per} und der Aphelabstand r_{aph} benutzt. Der Betrag l des Drehimpulses wird mit Hilfe der Methode des effektiven Potentials bestimmt. Da bei r_{per} und r_{aph} das gleiche effektive Potential herrscht (siehe Abb. 2.14), läßt sich durch eine Gleichsetzung von $V'(r_{per})$ und $V'(r_{aph})$ der Drehimpulsbetrag bestimmen:

$$V'(r_{per}) \equiv -\frac{1}{2} k r_{per}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r_{per}^2} = -\frac{1}{2} k r_{aph}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r_{aph}^2} \equiv V'(r_{aph})$$

$$l = \pm r_{per} r_{aph} \sqrt{-\mu k} \quad (2.151)$$

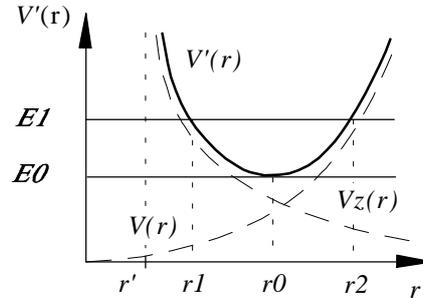


Abbildung 2.14: Effektives Potential $V'(r)$ des HOOKE-Potentials

Mittels des effektiven Potentials und der Gesamtenergie E mit

$$E = V'(r_{per}, r_{aph}) \equiv -\frac{1}{2} k (r_{per}^2 + r_{aph}^2) \quad (2.152)$$

ergibt sich die notwendige Potentialkonstante k zu

$$k = -\frac{2E}{r_{per}^2 + r_{aph}^2} \quad (2.153)$$

Die Anfangsbedingungen für die elliptische Bahn sind die Gln. (2.131) aus Kapitel 2.8. Diese sind mit Gl. (2.151) und Gl. (2.153) bis auf die Gesamtenergie E und die reduzierte Masse μ eindeutig bestimmt.

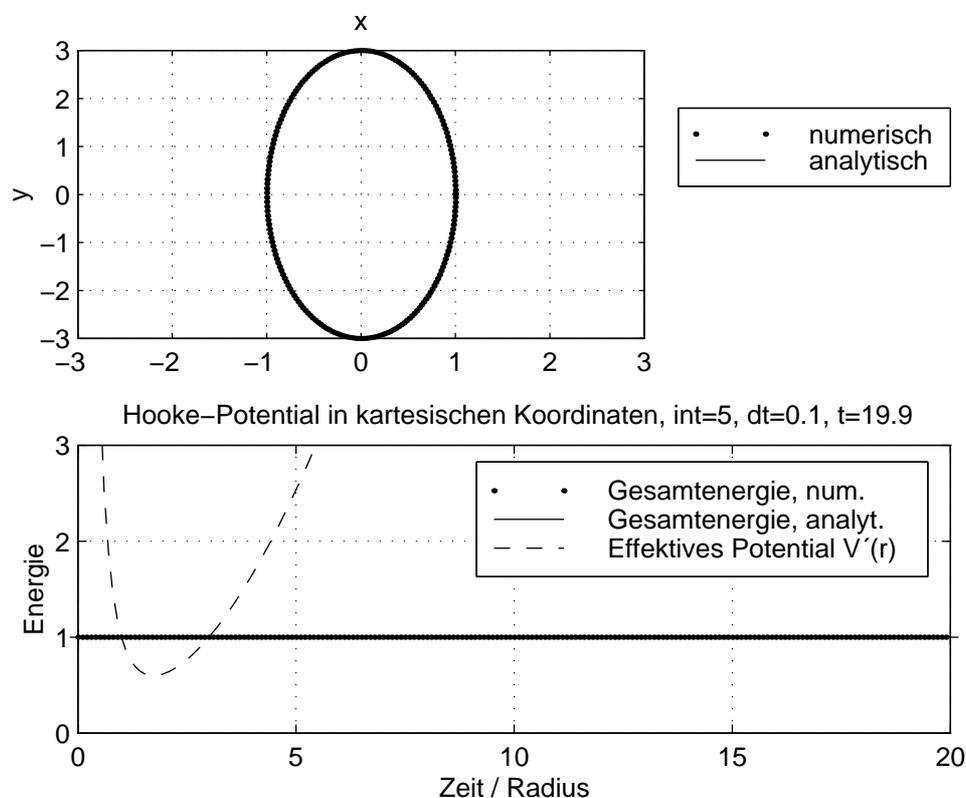


Abbildung 2.15: Elliptische Bahn des HOOKE-Potentials bei $\mu = 2$, $E = 1$

Der obere Rechnerscrib in Abb. 2.15 zeigt eine ellipsoide konzentrische Bahn mit dem Perihelabstand $r_{per} = 1$ und einem Aphelabstand $r_{aph} = 3$. Der Betrag des Drehimpulses ist positiv, d.h es findet ein Bahnnumlauf gegen den Uhrzeigersinn statt. Das effektive Potential des HOOKE-Potentials im unteren Rechnerscrib besitzt wieder den für das HOOKE-Potential typischen parabelförmigen Verlauf, jedoch sind hier die zwei Schnittpunkte mit der Gesamtenergie E bei r_{per} und r_{aph} zusehen.

Gerade Der Fall $k = 0$ ist eigentlich ein zusätzlich enthaltener Trivialfall. Hier verschwindet das HOOKE-Potential V und somit die Zentralkraft $f(r)$. Dies führt bei einer Vorgabe der Gesamtenergie E , die dann allein aus der

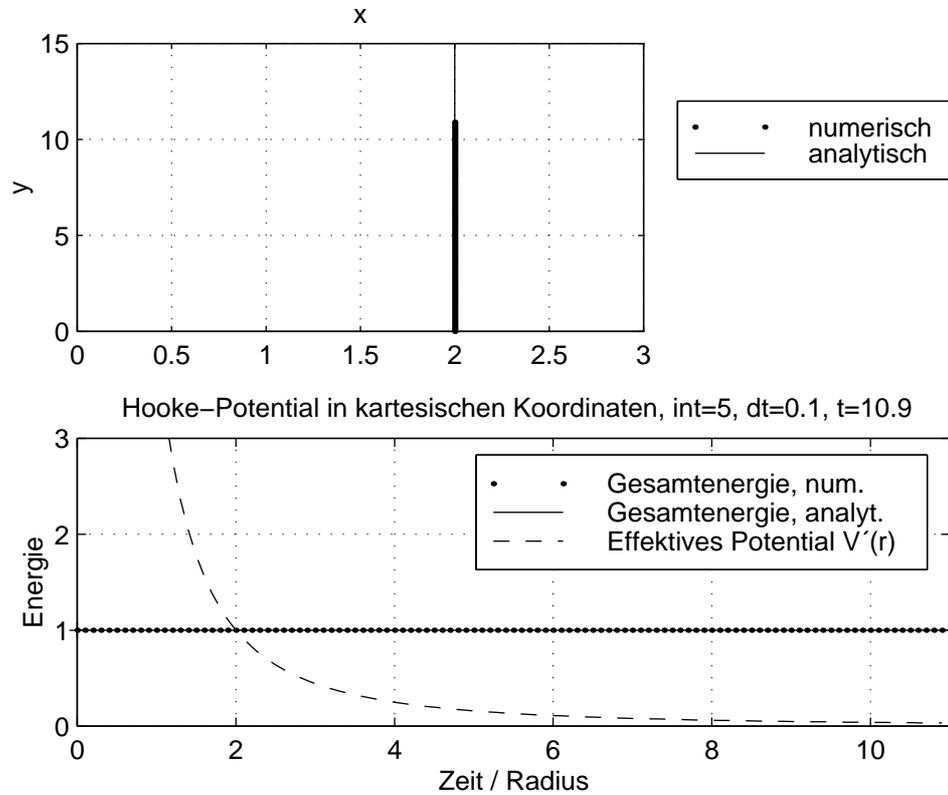


Abbildung 2.16: Geradlinige Bahn des HOOKE-Potentials bei $\mu = 2$, $E = 1$

kinetischen Energie T besteht, zum direkten Entfernen vom Zentralkraftzentrum ins Unendliche. Das effektive Potential V' schneidet die Gesamtenergie E nur in einem Punkt, und zwar im Perihel. Der Perihelabstand r_{per} wird hier vorgegeben. Er beträgt nach Gl. (2.148)

$$r_{per} = \sqrt{\frac{p}{2}} \quad (2.154)$$

Aus der Definition des Halbparameters p in Gl. (2.144) lässt sich dann der Drehimpulsbetrag l für die Anfangsbedingungen errechnen:

$$l = \pm r_{per} \sqrt{2 \mu E} \quad (2.155)$$

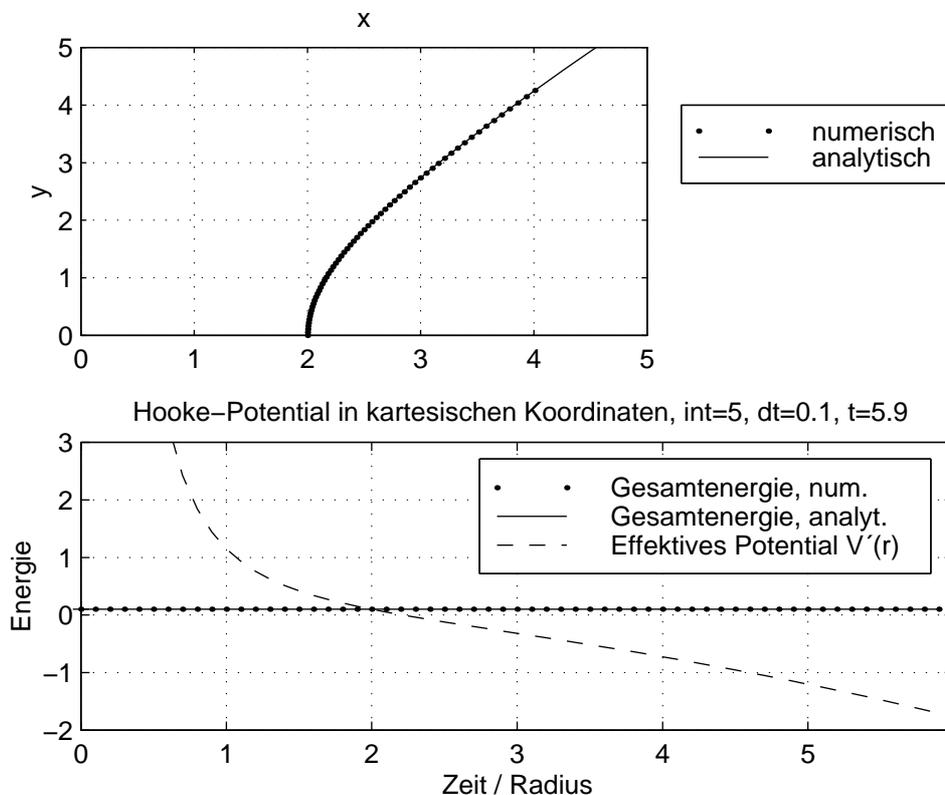


Abbildung 2.17: Hyperbel des HOOKE-Potentials bei $\mu = 2$, $E = 0.1$, $k = 0.1$

Mit dem Drehimpulsbetrag l und dem Perihelabstand r_{per} sind die verwendeten Anfangsbedingungen in den Gln. (2.131) feststehend.

Die Abb. 2.16 zeigt oben die Fluchtbahn eines Massenpunktes mit der Gesamtenergie $E = T = 1$. Die fehlende Zentralkraft verursacht keine Ablenkung des Massenpunktes von der vorgegebenen Bewegungsrichtung ($l > 0$). Der Abstand vom vermeintlichen Zentralkraftzentrum ist $r_{per} = 2$. Das effektive Potential $V'(r)$ im unteren Rechnerscrib besteht nur aus dem Potential der Zentrifugalkraft des Massenpunktes. Deshalb ist ein hyperbolischer Verlauf von V' zu sehen.

Hyperbel Für $k > 0$ öffnet sich die Parabel des HOOKE-Potentials nach

unten (siehe Abb. 2.17). Somit besteht nur ein Schnittpunkt der Gesamtenergie E mit dem effektiven Potential V' (siehe Gl. (2.156)). Resultat ist eine hyperbolische Bahn des Massenpunktes.

$$E = V'(r_{per}) \equiv -\frac{1}{2} k r_{per}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r_{per}^2} \quad (2.156)$$

Bemerkung 2.10 *Im Feder-Modell in Abb. 2.12 würde dies einer vorge-spannten Feder entsprechen, die eine unendliche Dehnung zuläßt.*

Der Betrag l des Drehimpulses wird dann aus der Gleichheit der Gesamtenergie E und dem effektiven Potential $V'(r_{per})$ im Perihel ermittelt. Aus einer äquivalenten Umstellung der Gl. (2.156) nach l folgt:

$$l = \pm r_{per} \sqrt{\mu (2 E + k r_{per}^2)} \quad (2.157)$$

Bei nur einer geometrischen Bedingung (r_{per}) ist der Wert der Gesamtenergie E frei wählbar. E darf nur den Wert $V(r_{per})$ nicht unterschreiten, sonst wäre der Drehimpulsbetrag l imaginär.

In Abb. 2.17 sind die Gln. (2.131) die Anfangsbedingungen für eine Hyperbel mit einer geometrischen Vorgabe des Perihelabstandes $r_{per} = 2$. Die Asymptote der hyperbolischen Bahn des HOOKE-Potentials hat trotz positivem Drehimpulsbetrag $l > 0$ eine positive Steigung. Im Gegensatz zur negativen Steigung der Asymptote des KEPLER-Potentials. Dieser Bahnverlauf entspricht der Vorstellung einer unendlich-weichen Feder im Federmodell, denn bei einer solchen Feder würde eine konstante Rotation mit der Kreisfrequenz ω lediglich ein Aufwickeln des Federdrahtes auf die Drehachse bedeuten.

2.10 Das lineare Potential

Als Beispiel eines Zentralkraftpotentials, dessen gesamten begrenzten Bahnen nicht geschlossen sind, wird das lineare Potential $V(r)$ mit

$$V(r) = k r \quad (2.158)$$

verwendet.

Ein lineares Potential ist bei der entfernungsunabhängigen Schwerkraft in Erdnähe zu finden [8]. In Kapitel 2.4 entspricht das lineare Potential dem

Fall $n = 0$, der analytisch auf ein elliptisches Integral führt.

Auf die analytische Lösung wird hier aber nicht eingegangen. Die numerische Lösung wird an Hand des Zeitschrittverfahrens in kartesischen Koordinaten durchgeführt. Dabei wird die Untersuchung auf unterschiedliche Bahntypen am effektiven Potential $V'(r)$ dieser Zentralkraftbewegung vollzogen. Somit werden die Bahntypen an Hand der Gesamtenergie E unterschieden.

Das effektive Potential $V'(r)$ besitzt mit einem linearen Potential folgende Form (siehe auch Abb. 2.18):

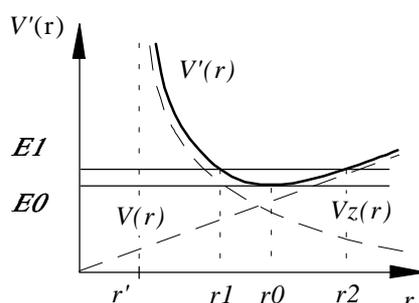


Abbildung 2.18: Effektives Potential $V'(r)$ des linearen Potentials

$$V'(r) = k r + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} \quad (2.159)$$

Bei $E = E_0 \equiv V'_{min}$ liegt für $k > 0$ ein Minimum des effektiven Potentials vor. Dies führt analog zu den bisherig bearbeiteten Potentials zu einer *Kreisbahn*. Der zugehörige Radius r_0 ergibt sich aus der analytischen Bedingung für ein Minimum einer skalarwertigen Skalarfunktion:

$$\left[\frac{dV'(r)}{dr} \right]_{r=r_0} = 0 \quad (2.160)$$

Aus dieser Gleichung ist der Radius r_0 der Kreisbahn:

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{l^2}{k \mu}} \quad (2.161)$$

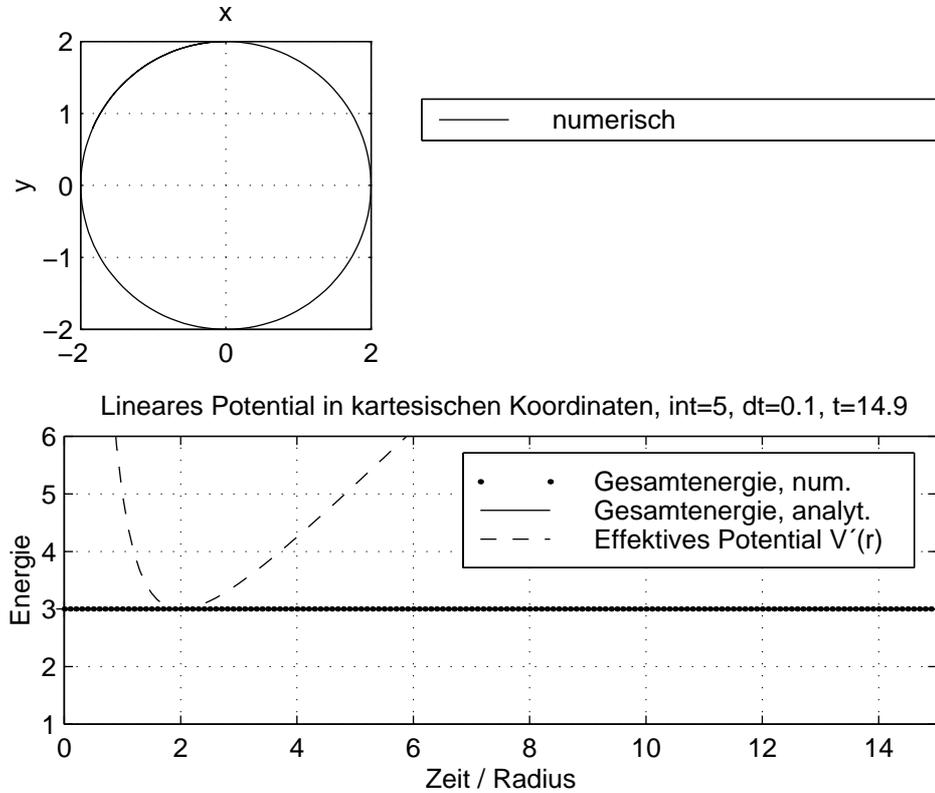


Abbildung 2.19: Kreisbahn des linearen Potentials bei $\mu = 2$, $k = 1$

bzw. der Drehimpulsbetrag l berechenbar:

$$l = \pm \sqrt{k \mu r_0^3} \quad (2.162)$$

Die Gesamtenergie E_0 der Kreisbahn ergibt sich mit der Gl. (2.159) und der Gl. (2.161) zu:

$$E_0 \equiv V'(r_0) = \frac{3}{2} k r_0 \quad (2.163)$$

Als Anfangsbedingungen wurden die Gln. (2.127) und (2.128) implementiert. In Abb. 2.19 ist im oberen Rechnerschrieb die numerisch berechnete Kreis-

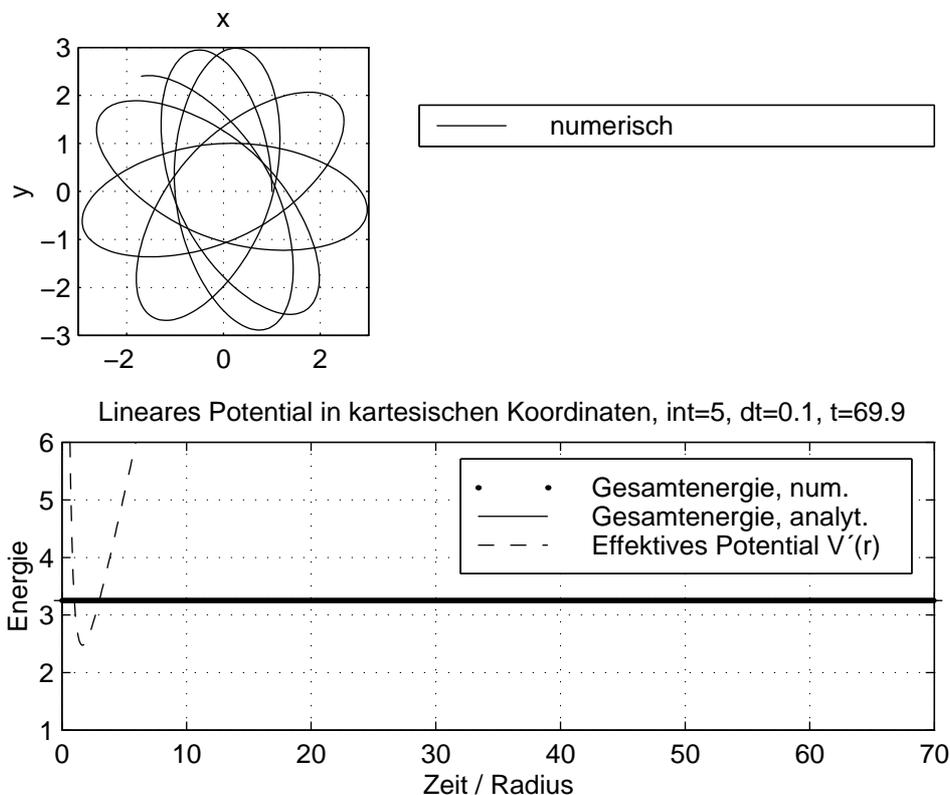


Abbildung 2.20: Begrenzte Bahn des linearen Potentials bei $\mu = 2$, $k = 1$

bahn mit dem Radius $r_0 = 2$ der reduzierten Masse $\mu = 2$ dargestellt. Darunter ist die Gesamtenergie $E = E_0$ über der Zeit t und das effektive Potential $V'(r)$ über dem Radius r aufgetragen. Das Minimum des effektiven Potentials liegt erwartungsgemäß bei $r = r_0$. Mit der Potentialkonstanten $k = 1$ beträgt die Gesamtenergie $E_0 = 3$.

Für die Gesamtenergie $E > E_0$ und einer positiven Potentialkonstanten $k > 0$ liegen zwei Schnittpunkte der Gesamtenergie mit dem effektiven Potential $V'(r)$ vor. Die Bahn besitzt somit ein Perihel und ein Aphel, und ist demzufolge begrenzt. Nach Kapitel 2.5 ist aber bekannt, daß die Bahn offen sein muß.

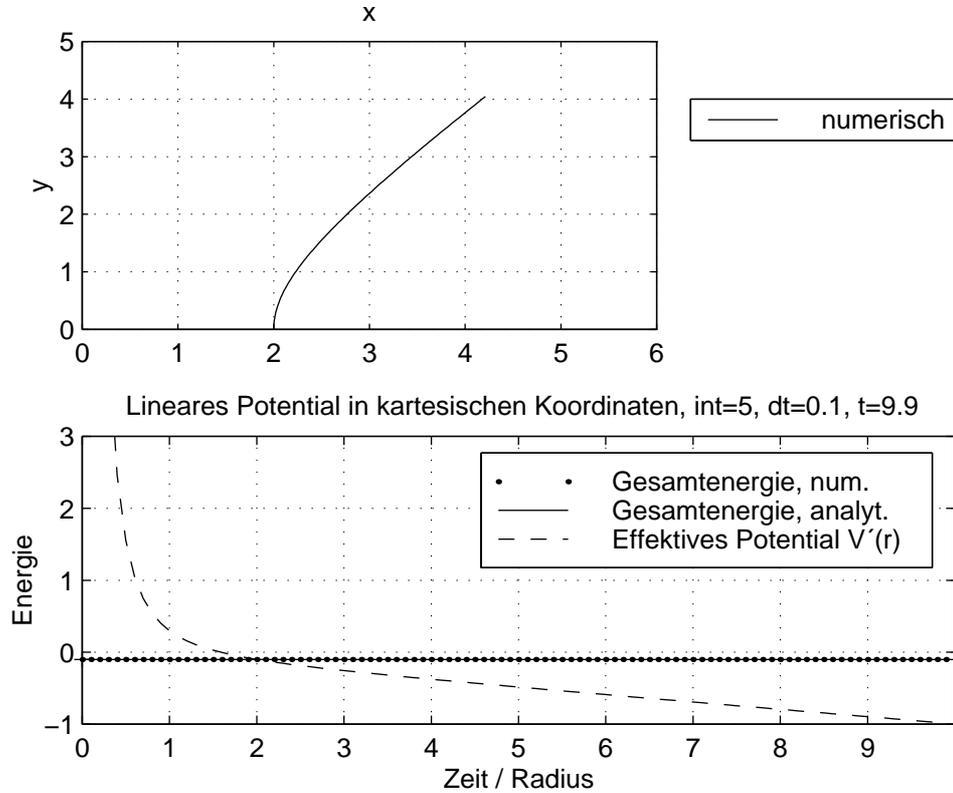


Abbildung 2.21: Hyperbel des linearen Potentials bei $\mu = 2$, $E = -0.1 = k$

Den Betrag l des Drehimpulses lässt sich aus der Gleichheit des effektiven Potentials $V'(r_{per})$ im Perihel und $V'(r_{aph})$ im Aphel ableiten:

$$l = \pm r_{per} r_{aph} \sqrt{\frac{2 \mu k}{r_{per} + r_{aph}}} \quad (2.164)$$

Die Gesamtenergie E ist identisch mit der Energie in einem der Schnittpunkte des Graphen des effektiven Potentials:

$$E \equiv V'(r_{per}, r_{aph}) = k (r_{per} + r_{aph}) - \frac{r_{per} r_{aph}}{r_{per} + r_{aph}} \quad (2.165)$$

Mit dem Betrag l des Drehimpulses sind die Anfangsbedingungen nach den Gln. (2.131) bestimmt.

Die Abb. 2.20 zeigt ein Beispiel einer begrenzten Bahn. Es handelt sich um einen Verlauf innerhalb eines Kreisringes deren innerer Kreis den Radius $r_{per} = 1$ und deren äußerer Kreis den Radius $r_{aph} = 3$ besitzt. Da die Bahn offen ist, wird der Kreisring für $t \rightarrow \infty$ vollkommen überstrichen sein [8]. Der untere Rechnerscrib zeigt die konstante Gesamtenergie $E = 3.25$ und das effektive Potential $V'(r)$.

Der Fall einer negativen Potentialkonstante $k < 0$ läßt nur einen Schnittpunkt der Gesamtenergie mit dem effektiven Potential $V'(r)$ zu. Die offene Bahn ist somit unbegrenzt und besitzt lediglich ein Perihel.

$$E = V'(r_{per}) \equiv k r_{per} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r_{per}^2} \quad (2.166)$$

Der Betrag l des Drehimpulses läßt sich durch eine Äquivalenzumformung von Gl. (2.166) bestimmen:

$$l = \pm r_{per} \sqrt{2 \mu (E - k r_{per})} \quad (2.167)$$

Da nur der Perihelabstand vorgegeben wird, ist die Gesamtenergie E wählbar. Damit aber der Betrag l des Drehimpulses nicht imaginär wird, muß $E \geq V(r_{per})$ sein. Der Drehimpulsbetrag l aus Gl. (2.167) bestimmt nun die Anfangsbedingungen aus den Gln. (2.131).

Nach Abb. 2.21 scheint die unbegrenzte Bahn einen hyperbolischen Verlauf zu haben, da ein schnelles Anschmiegen an eine Asymptote erfolgt. Im unteren Rechnerscrib ist erkennbar, daß der Verlauf des effektiven Potentials für alle möglichen Gesamtenergien E nur einen Schnittpunkt zuläßt.

Auf den Trivialfall $k = 0$ wird in diesem Kapitel verzichtet. Der Verlauf ist identisch zu dem beim HOOKE-Potential, d.h. eine Gerade.

$E \geq V(r_{per})$	$k < 0$	Hyperbel
$E > 0$	$k = 0$	Gerade
$E > E_0$	$k > 0$	begrenzte Bahn
$E = E_0$	$k > 0$	Kreis

Tabelle 2.3: Bahnen des linearen Potentials

2.11 Das binomiale Potential

Unter dem binomialen Potential soll das folgende Potential vierter Ordnung verstanden werden:

$$V(r) = \frac{1}{2} k (r^2 - \lambda)^2 \quad (2.168)$$

Es stellt ein Beispiel eines Potentials der in Gl. (2.30) angesetzten Form dar. Das binomiale Potential $V(r)$ steht für eine Zentralkraft $f(r)$, die der Federkraft einer progressiven Feder entspricht, mit der Potentialkonstanten k als Federsteifigkeit. Somit läßt sich für die Bewegung eines Massenpunktes in diesem Zentralkraftfeld ein Federmodell entwerfen, das dem des HOOKE-Potentials ähnelt.

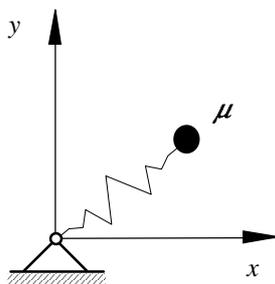


Abbildung 2.22: Feder-Modell für das binomiale Potential

Die auf Zug und Druck progressiv reagierende Spiralfeder [17] ist reibungsfrei im Ursprung des (x,y)-Koordinatensystems gelagert und dreht sich mit einer konstanten Kreisfrequenz $\omega = \dot{\phi} = \text{const.}$ Dabei wirken keine äußeren Kräfte auf den Massenpunkt ein.

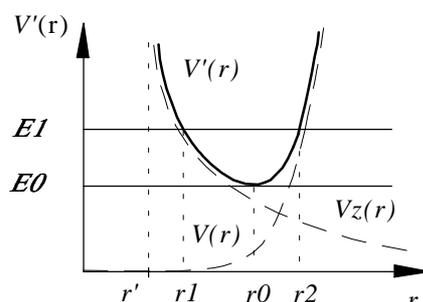
2.11.1 Numerische Beispielrechnung

Die numerische Berechnung der Bahnen des binomialen Potentials erfolgt mit dem Zeitschrittverfahren auf Basis kartesischer Koordinaten.

Aus der graphischen Darstellung des effektiven Potentials $V'(r)$ mit

$$V'(r) = \frac{1}{2} k (r^2 - \lambda)^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} \quad (2.169)$$

in Abb. 2.23 ist erkennbar, daß der Verlauf des binomialen Potentials die gleichen charakteristischen Merkmale aufweist wie das lineare Potential. Folglich

Abbildung 2.23: Effektives Potential $V'(r)$ des binomialen Potentials

können keine anderen Bahntypen als beim linearen Potential erwartet werden. Aus diesem Grund wird nur der Fall der begrenzten Bahn untersucht.

$E \geq V(r_{per})$	$k < 0$	Hyperbel
$E > 0$	$k = 0$	Gerade
$E > E_0$	$k > 0$	begrenzte Bahn
$E = E_0$	$k > 0$	Kreis

Tabelle 2.4: Bahnen des binomialen Potentials

Bei $E > E_0 \equiv V'_{min}$ und $k > 0$ treten zwei Schnittpunkte der Gesamtenergie E mit dem effektiven Potential V' auf. Somit ist das effektive Potential an diesen beiden Schnittpunkten gleich. Die Radien dieser Schnittpunkte sind der Perihelabstand bzw. Aphelabstand der offenen Bahn.

$$\begin{aligned}
 V'(r_{per}) &\equiv \frac{1}{2} k (r_{per}^2 - \lambda)^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r_{per}^2} = \\
 &= \frac{1}{2} k (r_{aph}^2 - \lambda)^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r_{aph}^2} = V'(r_{aph})
 \end{aligned} \tag{2.170}$$

Aus Gl. (2.170) folgt durch Äquivalenzumformungen der Betrag l des Drehimpulses:

$$l = \pm r_{per} r_{aph} \sqrt{\mu k (r_{per}^2 + r_{aph}^2 - 2\lambda)} \tag{2.171}$$

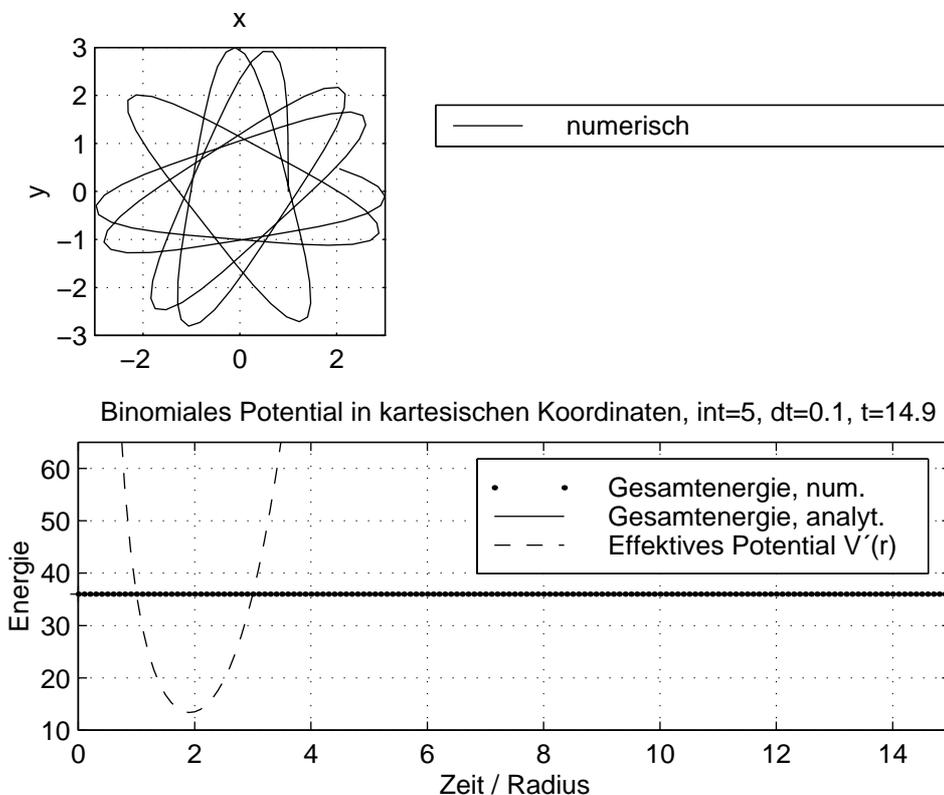


Abbildung 2.24: Begrenzte Bahn des binom. Potentials ($\mu = 2$, $k = 1 = \lambda$)

Damit der Drehimpulsbetrag l reell bleibt muß der Parameter λ folgende Bedingung erfüllen:

$$\lambda \leq \frac{r_{per}^2 + r_{aph}^2}{2} \quad (2.172)$$

Die Gesamtenergie E die der Massenpunkt auf dieser begrenzten Bahn besitzt ist gleich dem effektiven Potential an einem der Schnittpunkte:

$$E = V'(r_{per}) \equiv \frac{k}{2} \left(r_{per}^4 + r_{aph}^4 - 2\lambda (r_{per}^2 + r_{aph}^2) + r_{per}^2 r_{aph}^2 + \lambda^2 \right) \quad (2.173)$$

Der Drehimpulsbetrag l aus Gl. (2.171) legt nun eindeutig die Anfangsbedingungen aus den Gln. (2.131) fest.

Die Abb. 2.24 zeigt eine begrenzte Bahn des binomialen Potentials. Analog zum linearen Potential handelt es sich um einen Bahnverlauf innerhalb eines Kreisringes mit den Radien r_{per} und r_{aph} . Im Vergleich zur begrenzten Bahn des linearen Potentials ist hier die Länge der Bahn zwischen zwei aufeinanderfolgenden Berührungspunkten des äußeren Kreisrings kürzer. Dies resultiert aus der größeren Gesamtenergie bei gleicher Geometrie (vgl. Abb. 2.20).

2.11.2 Der DUFFING-Schwinger als Sonderfall

Die Zentralkraftbewegung mit dem binomialen Potential umfaßt auch die eindimensionalen Schwingungen des DUFFING-Schwingers [3]. Die Bewegungsgleichung des DUFFING-Schwingers beschreibt zum Beispiel Schwingungen eines Feder-Masse-Systems mit progressiver Feder [3] und reibungsfreier Lagerungen (siehe Abb. 2.25) oder entsteht aus der linearisierten Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels unter Hinzunahme des Gliedes zweiter Ordnung der TAYLOR-Entwicklung (siehe Gl. (2.174)) [18].

$$m l \ddot{x} + m g \sin x \approx m l \ddot{x} + m g \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) = 0 \quad (2.174)$$

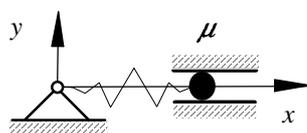


Abbildung 2.25: Der DUFFING-Schwinger

Das Potential des DUFFING-Schwingers hat folgende Form [3]:

$$V(x) = \frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\beta}{4} x^4 + \gamma \quad (2.175)$$

Das binomiale Potential ist nach Gl. (2.168) wie folgt:

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{2} k (r^2 - \lambda)^2 \\ &= \frac{k}{2} \lambda^2 - \lambda k r^2 + \frac{k}{2} r^4 \end{aligned} \quad (2.176)$$

Aus einem Koeffizientenvergleich der beiden Potentiale folgt:

$$\alpha = -2 k \lambda, \quad \beta = 2 k, \quad \gamma = \frac{1}{2} k \lambda^2 \quad (2.177)$$

Somit sind die Potentiale direkt vergleichbar. Damit auch eine Bewegung in einem Zentralkraftfeld mit dem binomialen Potential V , mit der ein-dimensionalen Bewegung eines DUFFING-Schwingers vergleichbar ist, muß der Betrag l des Drehimpulses identisch null sein. Dies läßt sich mittels einem Koeffizientenvergleich der jeweiligen Gesamtenergien zeigen. Die Gesamtenergie E eines DUFFING-Schwingers mit der Masse μ ist:

$$E \equiv T + V = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + V(x) \quad (2.178)$$

Die Gesamtenergie E des Massenpunktes aus dem Einkörperproblem hat in Polarkoordinaten die folgende Gestalt:

$$E \equiv T + V = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) \quad (2.179)$$

mit μ als reduzierte Masse.

Der Koeffizientenvergleich ergibt, daß $\dot{\phi} = 0$ sein muß, d.h. $\phi = \text{const.}$ Nach dem ersten Integral in Gl. (2.23) ist dieses Resultat zum geforderten Verschwinden des Drehimpulsbetrages äquivalent. Folglich ist der Radius r des Einkörperproblems identisch mit der Variablen x des DUFFING-Schwingers.

2.11.3 Phasenkurven des DUFFING-Schwingers

Bei einer ein-dimensionalen Bewegung kann die Bahnkurve nicht von großem Interesse sein, da sie immer die Form einer Linie annimmt. Dabei ist die Linie von endlicher Länge, weil die Bewegung eine Schwingung ist. Interessanter sind die Phasenebenen, aus denen man die Geschwindigkeit und den Wert der zugehörigen Koordinate zu jedem Zeitpunkt t entnehmen kann [3]. Die Phasenebenen enthalten somit eine eindeutige Beschreibung der Bewegung und können demzufolge zur Unterscheidung von charakteristischen Bewegungsabläufen dienen. Da der Winkel ϕ nach Kapitel 2.11.2 konstant ist, enthält die Phasenebene bzgl. ϕ stets nur den Anfangspunkt. Aus diesem Grund genügt es im folgenden nur noch die Koordinate r zu betrachten.

Die Funktion $\dot{r} = \dot{r}(r)$ der Phasenkurve bzgl. r ist implizit in der Gesamtenergie E enthalten:

$$\begin{aligned}\mu \dot{r}^2 &= 2(E - V(r)) \\ &= 2\left(E - \frac{k}{2}\lambda^2 + \lambda k r^2 - \frac{k}{2}r^4\right) \\ \mu \dot{r}^2 &= 2E - k\lambda^2 + 2k\lambda r^2 - k r^4\end{aligned}\quad (2.180)$$

Im Hinblick auf die Implementierung werden charakteristische Punkte der Phasenkurven bestimmt, die als geometrische Vorgabe dienen. Dazu sollen hier die Nullstellen verwendet werden.

$$\begin{aligned}\mu \dot{r}^2 &= -k\left(-\frac{2E}{k} + \lambda^2 - 2\lambda r^2 + r^4\right) \\ &= -k\left(\lambda^2 - \lambda_\infty^2 - 2\lambda r^2 + r^4\right) \\ &= -k\left((\lambda - \lambda_\infty)(\lambda + \lambda_\infty) - 2\lambda r^2 + r^4\right)\end{aligned}\quad (2.181)$$

mit

$$\lambda_\infty^2 := \frac{2E}{k}\quad (2.182)$$

Nach dem Satz von VIETA über die Zerlegung von Polynomen gilt:

$$\begin{aligned}x^2 + \alpha x + \beta &= (x - x_{0_1})(x - x_{0_2}) \\ \iff &\begin{cases} x_{0_1} + x_{0_2} = -\alpha \\ x_{0_1} x_{0_2} = \beta \end{cases}\end{aligned}\quad (2.183)$$

Aus einem Vergleich der Gln. (2.183) mit Gl. (2.181) sind die Linearfaktoren der rechten Seite von Gl. (2.181) erkennbar:

$$\mu \dot{r}^2 = -k\left(r^2 - (\lambda - \lambda_\infty)\right)\left(r^2 - (\lambda + \lambda_\infty)\right)\quad (2.184)$$

Für die Gl. (2.184) ist eine Fallunterscheidung notwendig, weil die Anzahl der Nullstellen vom gewählten λ abhängt. Nach Tab. 2.5 liegen drei unterschiedliche Typen von Phasenkurven vor. Mit der Kenntnis der Nullstellenlage ist somit möglich, in der numerischen Lösung die Kurvenform durch die entsprechende Wahl von λ_∞ vorzugeben.

In Tab. 2.5 sind auch negative Radien möglich. Dazu später mehr in Kapitel 2.11.5.

Bereich	Anzahl der Nullstellen	Nullstellen
$\lambda < \lambda_\infty $	2	$r_{0_{1,2}} = \pm \sqrt{\lambda + \lambda_\infty }$
$\lambda = \lambda_\infty $	3	$r_{0_1} = 0$ $r_{0_{2,3}} = \pm \sqrt{2 \lambda_\infty }$
$\lambda > \lambda_\infty $	4	$r_{0_{1,2}} = \pm \sqrt{\lambda + \lambda_\infty }$ $r_{0_{3,4}} = \pm \sqrt{\lambda - \lambda_\infty }$

Tabelle 2.5: Phasenkurven des DUFFING-Schwingers

2.11.4 Numerische Berechnung der Phasenkurven

Die numerische Lösung übernimmt das Zeitschrittverfahren in Polarkoordinaten, da hier polare Koordinaten geeigneter sind als kartesische Koordinaten. Erstens hat die numerische Lösung in Polarkoordinaten generell gegenüber der Lösung in kartesischen Koordinaten den Vorteil, daß dort das Residuum nur ein-dimensional ist. Nach den Bewegungsgleichungen des Einkörperproblems im Fall des DUFFING-Schwingers ist der Radius $r \equiv q_2^{(1)}$ auch die einzige generalisierte Koordinate die sich ändert, der Winkel ϕ hält den Wert aus der Anfangsbedingung bei ($\dot{\phi} = 0$). Zweitens ist durch das Verschwinden des Drehimpulsbetrags l das Residuum $R(q_2^{(1)})$ analog zu den kartesischen Koordinaten nur aufgrund des Potentials V nichtlinear in $q_2^{(1)}$ (siehe Kapitel 2.7). Ferner ist die Tangente lediglich quadratisch in $q_2^{(1)}$. Das Zeitschrittverfahren nimmt nach Kapitel 2.7 folgende Form an:

$$q_2^{(1)} - q_1^{(1)} - \frac{h_n}{2\mu} (p_1^{(1)} + p_2^{(1)}) = 0 \quad (2.185)$$

$$q_2^{(2)} - q_1^{(2)} = 0 \quad (2.186)$$

$$p_2^{(1)} - p_1^{(1)} + h_n \int_0^1 \frac{dV(r(\mathbf{q}^h(\alpha)))}{dr} d\alpha = 0 \quad (2.187)$$

$$p_2^{(2)} - p_1^{(2)} = 0 \quad (2.188)$$

Daraus ergeben sich das Residuum $R(q_2^{(1)})$ und die Tangente K_T zu:

$$R(q_2^{(1)}) = q_2^{(1)} - q_1^{(1)} - \frac{h_n}{\mu} p_1^{(1)} + \frac{h_n^2}{2\mu} \int_0^1 \frac{dV(r(\mathbf{q}^h(\alpha)))}{dr} d\alpha \quad (2.189)$$

$$K_T = 1 + \frac{h_n^2}{2\mu} \int_0^1 \frac{d^2 V(r(\mathbf{q}^h(\alpha)))}{dr^2} \alpha d\alpha \quad (2.190)$$

Als Anfangsbedingung sind der generalisierte Impuls \mathbf{p} und die generalisierte Koordinate \mathbf{q} eines Bahnpunktes zum Zeitpunkt $t = 0$ zu übergeben. Nach Gl. (2.84) sind die Komponenten des generalisierten Impulses:

$$p_r = \mu \dot{r} \quad (2.191)$$

$$p_\phi = \mu r^2 \dot{\phi} \equiv l \quad (2.192)$$

Die Bedingung die das ebene Einkörperproblem auf einen ein-dimensionalen DUFFING-Schwinger reduzierte war $\dot{\phi} = 0$. Demzufolge verschwindet p_ϕ in der Anfangsbedingung. Entsprechend Gl. (2.25) und Gl. (2.191) gilt für die Komponente p_r unter Berücksichtigung von $l = 0$:

$$\begin{aligned} p_r &= \pm \sqrt{2\mu(E - V(r))} \\ &= \pm \sqrt{2\mu(E - V(r))} \end{aligned} \quad (2.193)$$

Das Ziel ist die Vorgabe der Nullstellen der Phasenkurven, welche den Umkehrpunkten der Bahnkurve entsprechen. Somit wird als vorgegebener Bahnpunkt (r_0, ϕ_0) ein Umkehrpunkt gewählt. Demgemäß sind die Anfangsbedingungen für das Zeitschrittverfahren wie folgt:

$$\mathbf{q}_0 = [r_0, \phi_0]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_0 = \left[\pm \sqrt{2\mu(E - V(r_0))}, 0 \right]^T \quad (2.194)$$

Fall 1 Für $\lambda < |\lambda_\infty|$ liegen zwei Nullstellen vor, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden:

$$r_{0,2} = \pm \sqrt{\lambda + |\lambda_\infty|} \quad (2.195)$$

Damit läßt sich beispielsweise folgende Anfangsbedingung festlegen:

$$r_0 = \sqrt{\lambda + |\lambda_\infty|} \quad (2.196)$$

Die Vorgabe des Winkels hat auf die Phasenkurven bzgl. r keinen Einfluß. Demnach kann ϕ_0 einen beliebigen Wert annehmen. Wird die Nullstelle r_0 vorgegeben, so berechnet sich aus Gl. (2.196) der zugehörige Potentialparameter λ :

$$\lambda = r_0^2 - |\lambda_\infty| \quad (2.197)$$

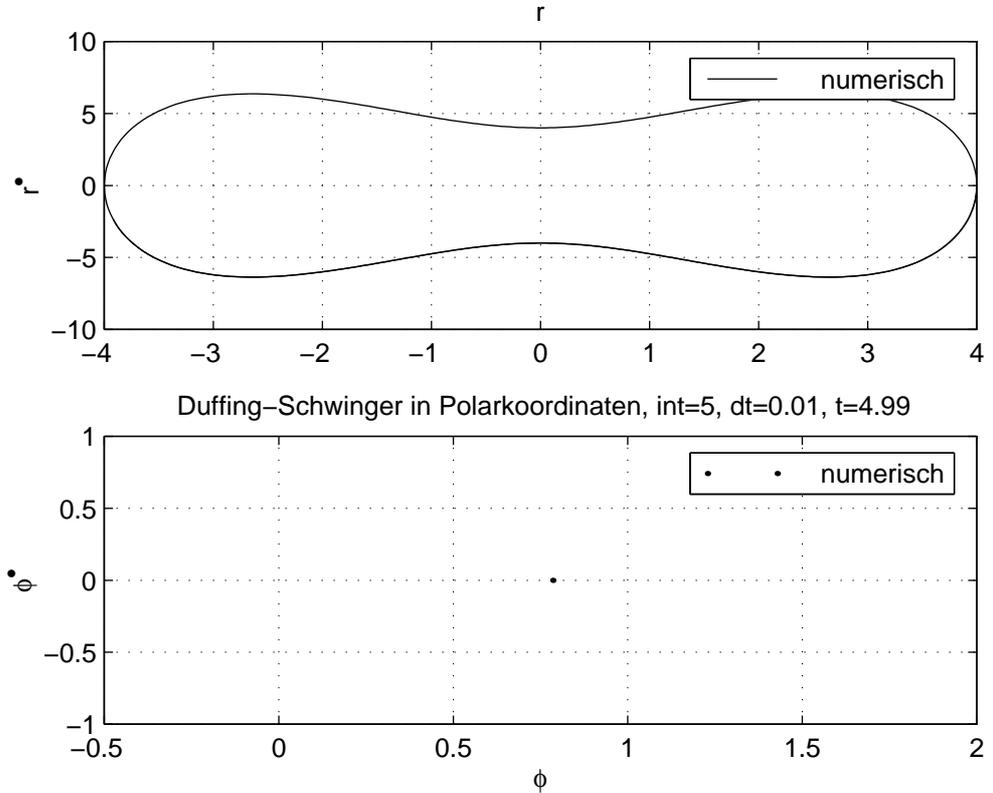


Abbildung 2.26: Fall 1 des DUFFING-Schwingers ($\mu = 2$, $k = 1$, $\lambda = 7$)

Die Konstante $|\lambda_\infty|$ ist für diesen Fall größer als λ zu wählen, das bedeutet mit Gl. (2.197) muß gelten:

$$|\lambda_\infty| > \frac{r_0^2}{2} \quad (2.198)$$

Die Konstante $|\lambda_\infty|$ enthält nach der Definition in Gl. (2.182) die Potentialekonstante k und die Gesamtenergie E . Gibt man k fest vor, so fehlt nur eine Gesamtenergie E die mit dem gewählten k die Gl. (2.198) erfüllt. Die Gesamtenergie E läßt sich über eine bekannte Geschwindigkeit diktieren.

Es liegen nur zwei Nullstellen vor. Zumal die Nullstellen mit den Um-

kehrpunkten der Bahnkurve identisch sind, werden beide Nullstellen immer in der Bewegung zu finden sein. Da die beiden Nullstellen unterschiedliches Vorzeichen aufweisen, muß der Massenpunkt den Ursprung des x-y-Koordinatensystems passieren. Demzufolge ist die Geschwindigkeit $\dot{r}_{r=0}$ des Massenpunktes bei $r = 0$ vorgebbar. Die Geschwindigkeit bei $r = 0$ hat den Vorteil, daß sie sich in der Phasenebene leicht nachprüfen läßt. Gemäß Gl. (2.179) gilt für die Gesamtenergie E bei $r = 0$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}_{r=0}^2 + V(r = 0) \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}_{r=0}^2 + \frac{1}{2} k \lambda^2 \end{aligned} \quad (2.199)$$

mit $\dot{\phi} = 0$.

Einsetzen von Gl. (2.197) und der Definition von λ_∞^2 in Gl. (2.182) führt auf:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu \dot{r}_{r=0}^2 + \frac{1}{2} k (r_0^2 - |\lambda_\infty|)^2 &= \frac{k}{2} \lambda_\infty^2 \\ \frac{1}{2} \mu \dot{r}_{r=0}^2 + \frac{1}{2} k r_0^4 - k |\lambda_\infty| r_0^2 + \frac{k}{2} \lambda_\infty^2 &= \frac{k}{2} \lambda_\infty^2 \end{aligned} \quad (2.200)$$

Nach weiteren Äquivalenzumformungen in Gl. (2.200) ergibt sich die Konstante $|\lambda_\infty|$ zu:

$$|\lambda_\infty| = \frac{\mu}{2k} \left(\frac{\dot{r}_{r=0}}{r_0} \right)^2 + \frac{r_0^2}{2} \quad (2.201)$$

Aus einem Vergleich von Gl. (2.198) mit Gl. (2.201) folgt, daß für alle $\dot{r}_{r=0} \neq 0$ die Konstante $|\lambda_\infty| > \lambda$ ist. Die notwendige Bedingung für zwei Nullstellen ist somit für $\dot{r}_{r=0} \neq 0$ erfüllt.

In Abb. 2.26 ist ein Beispiel der Phasenkurven mit zwei Nullstellen zu erkennen. Als geometrische Vorgabe dient die Nullstelle $r_0 = 4$ und die Geschwindigkeit $\dot{r}_{r=0} = 4$ bzw. der Winkel $\phi_0 = \pi/4$. Hierbei einer Potentialkonstanten $k = 1$ beträgt die Gesamtenergie $E = 40.5$. Eine Erhöhung der Potentialkonstanten bei Beibehaltung der Geometrie (gleiches λ) verursacht nach Gl. (2.199) eine Erhöhung der Gesamtenergie E . In der Phasenebene würde eine größere maximale Geschwindigkeit angezeigt.

Bemerkung 2.11 *Im Feder-Modell aus Abb. 2.25 würde dieser Fall bedeuten, daß die Feder durch den Ursprung des x-y-Koordinatensystems schlägt und dabei die Seiten wechselt, was aber in der Praxis aufgrund der Lagerung nicht beobachtet werden kann.*

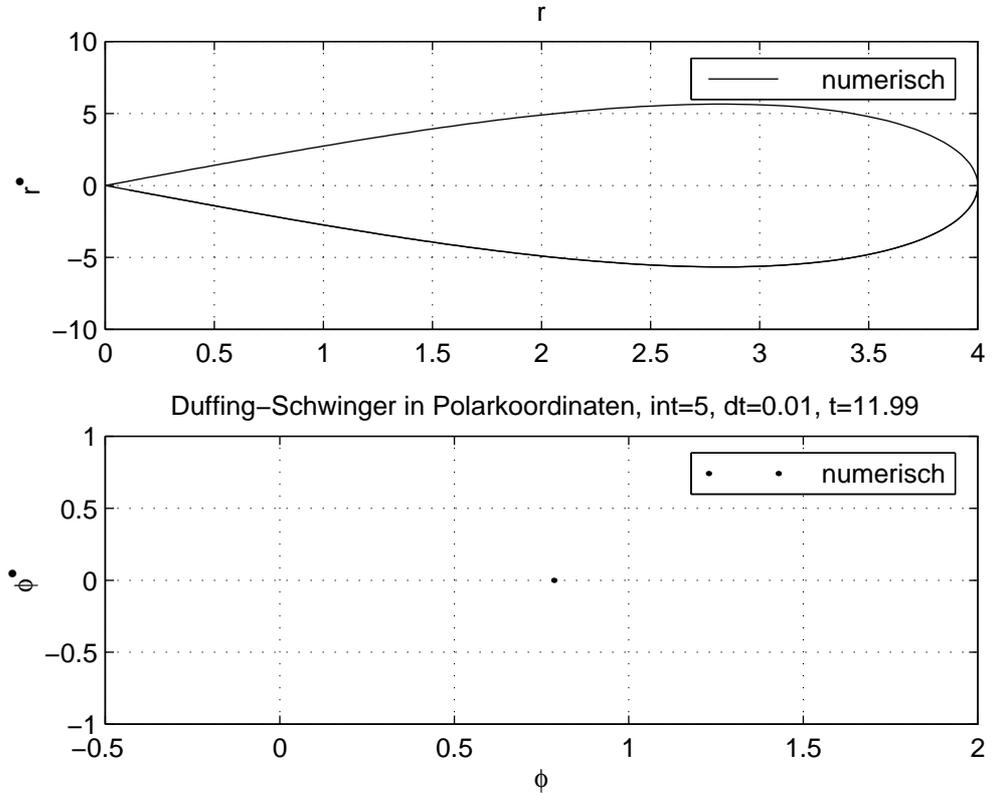


Abbildung 2.27: Fall 2 des DUFFING-Schwingers ($\mu = 2$, $k = 1$, $\lambda = 8$)

Fall 2 Bei $\lambda = |\lambda_\infty|$ besitzt die Phasenkurve drei Nullstellen. Aufgrund der ein-dimensionalen Bewegung können aber nur zwei Umkehrpunkte vorhanden sein. Das bedeutet, daß die Phasenkurve mit einer Anfangsbedingung nur zur Hälfte berechnet werden kann. Nach Tab. 2.5 sind die Nullstellen wie folgt:

$$r_{0_1} = 0 \quad (2.202)$$

$$r_{0_{2,3}} = \pm \sqrt{2|\lambda_\infty|} \quad (2.203)$$

Mit fester Potentialkonstante k , läßt sich in der Anfangsbedingung nur mit den äußersten Nullstellen $r_{0,2,3}$ die Gesamtenergie E eindeutig diktieren. Für die Berechnung der Phasenkurve im Bereich positiver Radien sei

$$r_0 = \sqrt{2|\lambda_\infty|} \quad (2.204)$$

Aus Gl. (2.204) berechnet sich die Konstante $|\lambda_\infty|$ zu:

$$|\lambda_\infty| = \frac{r_0^2}{2} \quad (2.205)$$

Die Gesamtenergie E ist mit fester Potentialkonstante k über die Definition in Gl. (2.182) eindeutig bestimmt:

$$E = \frac{k}{2} \lambda_\infty^2 \equiv \frac{k}{2} |\lambda_\infty|^2 \quad (2.206)$$

Eine numerische Beispielrechnung des zweiten Falles ist in Abb. 2.27 zu sehen. Da die Nullstellen der Phasenkurve $\dot{r} = \dot{r}(r)$ den Umkehrpunkten der Bahnkurve entsprechen, sind mit einer Anfangsbedingung nur zwei Nullstellen berechnet worden. Hier ist der Anfangsradius $r_0 = 4$ und der Anfangswinkel $\phi_0 = \pi/4$. Mit einer Potentialkonstanten $k = 1$ liegt eine Gesamtenergie von $E = 32$ vor.

Im Vergleich zum ersten Fall ist die maximale Auslenkung $r = r_0$ zwar gleich gewählt, die Gesamtenergie E ist jedoch kleiner. Dies ist durch die kleinere Konstante $|\lambda_\infty|$ bedingt.

Aufgefallen ist bei der numerischen Berechnung die relativ lange Verweildauer in der Umgebung von $r = 0$. Deshalb mußte die Berechnung länger als im ersten Fall geführt werden. Diese lange Verweildauer hat ihre Berechtigung, denn theoretisch gelangt der Massenpunkt erst in unendlich langer Zeit in das Zentralkraftzentrum [9].

Bemerkung 2.12 Die Phasenkurve im zweiten Fall nennt man die *Separatrix aller Phasenkurven*, da sie der Grenzfall zwischen den beiden übrigen Phasenkurventypen ist [3, 9].

Fall 3 Die letzte Möglichkeit ist die Wahl $\lambda > |\lambda_\infty|$. Hier treten vier Nullstellen bei der Phasenkurve auf. Diese sind nach der Tab. 2.5 wie folgt:

$$r_{0,1,2} = \pm \sqrt{\lambda + |\lambda_\infty|} \quad (2.207)$$

$$r_{0,3,4} = \pm \sqrt{\lambda - |\lambda_\infty|} \quad (2.208)$$

Auch hier wird numerisch entweder die Phasenkurve im positiven oder im negativen Bereich berechnet. Soll hier die Berechnung der Phasenkurve für positive Radien durchgeführt werden, so ist eine positive Nullstelle vorzugeben. Für die Vorgabe der maximalen Auslenkung r_0 sei:

$$r_0 = \sqrt{\lambda + |\lambda_\infty|} \iff \lambda = r_0^2 - |\lambda_\infty| \quad (2.209)$$

Für den dritten Fall muß die Konstante $|\lambda_\infty|$ unter Berücksichtigung von Gl. (2.209) folgende Bedingung erfüllen:

$$|\lambda_\infty| < \frac{r_0^2}{2} \quad (2.210)$$

Die Konstante $|\lambda_\infty|$ kann analog zum ersten Fall über eine bekannte Geschwindigkeit bestimmt werden. Beispielsweise läßt sich ein Extremum r_e der Phasenkurve ermitteln und die zugehörige Geschwindigkeit \dot{r}_e vorgeben.

Die notwendige Extremalbedingung für eine Phasenkurve $\dot{r} = \dot{r}(r)$ ist:

$$\left[\frac{d\dot{r}(r)}{dr} \right]_{r=r_e} = 0 \quad (2.211)$$

Nach der Kettenregel der Differentiation läßt sich schreiben:

$$\frac{d\dot{r}}{d\dot{r}^2} \cdot \frac{d\dot{r}^2}{dr} = 0 \quad (2.212)$$

Somit genügt folgende Bedingung zur Bestimmung von r_e :

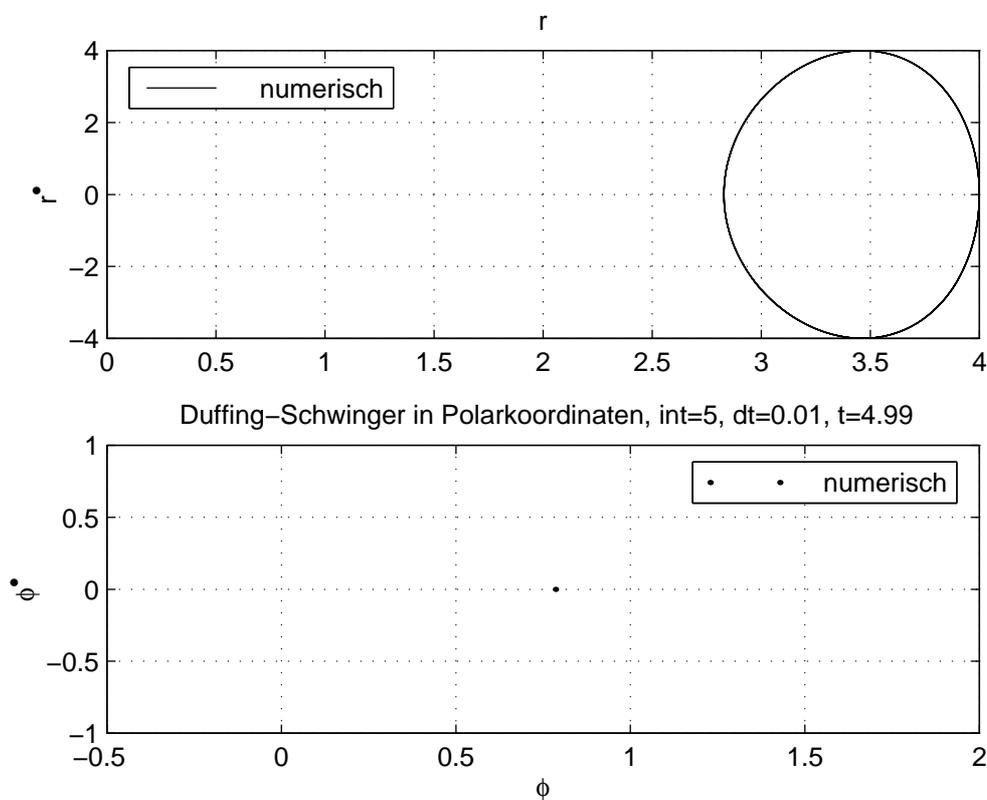
$$\left[\frac{d\dot{r}^2}{dr} \right]_{r=r_e} = 0 \quad (2.213)$$

Die Extrema für den dritten und den ersten Fall liegen dann mit der Phasenkurve nach Gl. (2.181) bei:

$$r_e^2 = \lambda \quad (2.214)$$

Einsetzen von Gl. (2.214) in die Phasenkurve (Gl. (2.181)) ergibt:

$$|\lambda_\infty| = \sqrt{\frac{\mu}{k}} \dot{r}_e \quad (2.215)$$

Abbildung 2.28: Fall 3 des DUFFING-Schwingers ($\mu = 2$, $k = 2$, $\lambda = 12$)

Die Wahl der extremalen Geschwindigkeit \dot{r}_e kann aber nicht willkürlich erfolgen. Unter Beachtung von Gl. (2.210) muß \dot{r}_e entsprechend folgender Ungleichung gewählt werden:

$$\dot{r}_e < \sqrt{\frac{k}{\mu}} \frac{r_0^2}{2} \quad (2.216)$$

Die numerische Berechnung der Phasenkurven zum dritten und letzten Fall zeigt Abb. 2.28. Die vorgegebenen Daten sind $r_0 = 4$ und $\dot{r}_e = 4$. Da durch die Beibehaltung von $r_0 = 4$ in allen drei Beispielberechnungen die Konstante $|\lambda_\infty|$ immer kleiner wurde und demzufolge der Potentialparameter λ immer

größer, so ist zwangsläufig die Gesamtenergie E hier am niedrigsten ($E = 16$). Der Anfangswinkel beträgt auch hier $\phi_0 = \pi/4$.

2.11.5 Schlußbemerkung zur numerischen Lösung

Die Polarkoordinaten r und ϕ sind formal durch folgende Koordinatentransformation definiert [2]:

$$\mathcal{T}_p = \begin{cases} x = r \cos\phi \\ y = r \sin\phi \end{cases} \quad (2.217)$$

mit

$$-\pi < \phi \leq \pi, \text{ und } r \geq 0 \quad (2.218)$$

In Abb. 2.26 erstreckt sich aber die Phasenkurve $\dot{r} = \dot{r}(r)$ über ein Gebiet der negativen r -Achse. Die Punkte der Bahnkurve deren Winkel unter Berücksichtigung von Gl. (2.218) um 180° kleiner als der Anfangswinkel ϕ_0 sein müßten, werden somit bei gleichem Winkel mit negativem Radius dargestellt. Die entsprechenden Werte für die kartesischen Koordinaten bleiben hierbei die gleichen, es widerspricht aber Gl. (2.218) aus der formalen Definition der Polarkoordinaten.

Die Ursache dafür liegt in den Bewegungsgleichungen des Einkörperproblems für den Sonderfall des DUFFING-Schwingers. Durch das notwendige Verschwinden der generalisierten Geschwindigkeit $\dot{\phi}$, ist der Winkel als konstant vorausgesetzt. Folglich muß der Radius r bei diesen Bahnpunkten einen negativen Wert annehmen.

Dies ist ein „Schönheitsfehler“ der mit der Wahl polarer Koordinaten für eine ein-dimensionale Bewegung und demzufolge nicht mit der numerischen Lösung zusammenhängt.

Kapitel 3

Das Doppelpendel

In diesem Kapitel wird ein ebenes mathematisches Doppelpendel im Schwerfeld der Erde betrachtet, welches aus zwei masselosen Stangen der Längen $2l_i$ und mittig angeordneten Massenpunkten der Massen m_i besteht. Ferner seien die Gelenke als reibungsfrei anzunehmen, wodurch ein konservatives System vorliegt. Das Pendel bewegt sich in einem euklidischen zweidimensionalen Raum \mathbf{E}^2 , in dessen Ursprung das inertielle (x,y) -Koordinatensystem liegt.

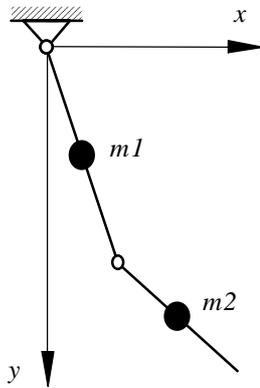


Abbildung 3.1: Mathematisches Doppelpendel

Bemerkung 3.1 *Nimmt man die Massenpunkte in den Mitten der Stangen an, so lässt sich dieses mathematische Pendel leicht zu einem physikalischen*

Pendel erweitern. Die Erweiterung besteht lediglich in der Hinzunahme der Trägheiten Θ_i der Stangen.

Die kinetische Energie T des Doppelpendels aus Abb. 3.1 ergibt sich aus [6, 7, 8]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (3.1)$$

wobei die $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2) \in \mathbf{E}^2$ die Ortsvektoren der Massenpunkte m_i im euklidischen Vektorraum \mathbf{E}^2 sind. Unter der Berücksichtigung der generalisierten Koordinaten q_j , ergibt sich für $\dot{\mathbf{r}}_i$ folgender Ausdruck [8]:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (3.2)$$

Mit Gl. (3.2) erhält man die kinetische Energie T in der Form

$$T = \sum_{i,j=1}^2 T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.3)$$

mit

$$T_{ij}(\mathbf{q}) := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (3.4)$$

wobei $\mathbf{q} := [q_1, q_2]^T$ der Koordinatenvektor ist.

Als generalisierte Koordinate wird zweckmäßigerweise jeweils der Winkel der jeweiligen Stange bzgl. einer Bezugsebene gewählt. Aus der Wahl der entsprechenden Bezugsebene leiten sich die zwei üblichen Koordinatensätze ab:

1. q_1 und q_2 sind die *Absolutwinkel* bzgl. der y-Achse,
2. q_i sind *Relativwinkel* bzgl. der y-Achse (q_1) bzw. der ersten Stange (q_2).

3.1 Lineares Doppelpendel

Zuerst werden Bewegungen des Doppelpendels in der unmittelbaren Umgebung der stabilen Gleichgewichtslage untersucht. Hierbei handelt es sich um *lineare* Schwingungen, da nahezu lineare Rückstellkräfte wirken [8].

Nach Gl. (3.3) ist die kinetische Energie eine homogene quadratische Funktion, mit den definitionsgemäß symmetrischen Koeffizienten $T_{ij}(\mathbf{q})$. Diese Koeffizienten T_{ij} entwickelt man an dieser Stelle in eine TAYLOR-Reihe um die Gleichgewichtslage \mathbf{q}_0 [7, 8]:

$$T_{ij}(\mathbf{q}) = T_{ij}(\mathbf{q}_0) + \sum_{k=1}^2 \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} \right]_0 q_k + \dots \quad (3.5)$$

Da nur kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage betrachtet werden, genügt es in erster Näherung den konstanten Term $T_{ij}(\mathbf{q}_0)$ zu berücksichtigen:

$$T = \sum_{i,j=1}^2 T_{ij}(\mathbf{q}_0) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.6)$$

In Matrixschreibweise hat die kinetische Energie die Form

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.7)$$

mit

$$m_{ij} := 2 T_{ij}(\mathbf{q}_0) \quad (3.8)$$

wobei $\mathbf{M} := [m_{ij}]$ die Massenmatrix ist.

Bemerkung 3.2 *Der Unterschied zwischen einem mathematischen und einem physikalischen Doppelpendel liegt lediglich in der Massenmatrix. Wenn \mathbf{M}_p die Massenmatrix des physikalischen Doppelpendels ist und θ_1, θ_2 die Massenträgheiten des ersten bzw. zweiten Pendels, dann gilt:*

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{M} + \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Das Doppelpendel wurde als konservativ vorausgesetzt. Somit existiert ein Potential $V(\mathbf{q})$, bei welchem ebenfalls eine TAYLOR-Entwicklung um die Gleichgewichtslage \mathbf{q}_0 vorgenommen wird [7, 8]:

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}_0) + \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial V}{\partial q_i} \right]_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right]_0 q_i q_j + \dots \quad (3.10)$$

Die potentielle Energie $V(\mathbf{q}_0)$ in der Gleichgewichtslage kann auf null gesetzt werden, da ein Potential durch die unbestimmte Integration der Kraft nur

bis auf eine Konstante bestimmt ist. Die ersten Ableitungen des Potentials verschwinden nach den LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art für konservative Systeme:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \right]_0 - \left[\frac{\partial V}{\partial q_i} \right]_0 = 0 \quad (3.11)$$

Folglich ist das Potential in der Umgebung der Gleichgewichtslage näherungsweise:

$$V = \sum_{i,j=1}^2 V_{ij} q_i q_j \quad (3.12)$$

mit

$$V_{ij} := \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right]_0 \quad (3.13)$$

In Matrixschreibweise hat die potentielle Energie die Form

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (3.14)$$

mit

$$c_{ij} := 2 V_{ij} \quad (3.15)$$

wobei $\mathbf{C} := [c_{ij}]$ die Steifigkeitsmatrix ist.

3.1.1 Analytische Lösung

Die Bewegungsgleichungen werden im Rahmen der LAGRANGESchen Mechanik aus den LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art hergeleitet.

Die LAGRANGE-Funktion L ist dann

$$L = T - V \quad (3.16)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (3.17)$$

Die LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art haben in Matrixschreibweise die folgende Form:

$$\frac{d}{dt} (\partial_{\dot{\mathbf{q}}} L) - \partial_{\mathbf{q}} L = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Mit

$$\partial_{\dot{\mathbf{q}}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}) = 2 \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \partial_{\mathbf{q}} (\mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}) = 2 \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (3.19)$$

haben die Bewegungsgleichungen die folgenden Form:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung wird mit dem folgenden Ansatz gelöst [19]:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{K} e^{j \lambda t} \quad (3.21)$$

Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (3.20) führt auf das folgende lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\left(-\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{C} \right) \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

Die noch unbekanntten Eigenwerte werden aus der charakteristische Gleichung

$$\det(-\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}) = 0 \quad (3.23)$$

bestimmt. Diese skalare Gleichung hat im zwei-dimensionalen Fall vier Wurzeln λ_i , also vier Eigenwerte.

$$\lambda_1 \quad (3.24)$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \quad (3.25)$$

$$\lambda_3 \quad (3.26)$$

$$\lambda_4 = -\lambda_3 \quad (3.27)$$

Sukzessives Einsetzen der Eigenwerte in Gl. (3.22) führt nach dessen Lösung auf die Eigenvektoren \mathbf{K}_i :

$$\mathbf{K}_1 \quad (3.28)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1 \quad (3.29)$$

$$\mathbf{K}_3 \quad (3.30)$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{K}_3 \quad (3.31)$$

Jeder Eigenvektor \mathbf{K}_i ist durch die lineare Abhängigkeit in Gl. (3.22) bis auf eine Konstante c_i eindeutig bestimmt.

Aus der Linearität von Gl. (3.20) folgt als allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen aus dem Superpositionsprinzip:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_i e^{j \lambda_i t} \quad (3.32)$$

Mit Hilfe der EULER-Formel läßt sich die allgemeine Lösung anschaulicher schreiben:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{l}_i (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \quad (3.33)$$

Die Eigenfrequenzen ω_i entsprechen dabei den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_3 und die Eigenformen \mathbf{l}_i den Eigenvektoren \mathbf{K}_1 und \mathbf{K}_3 .

Die Konstanten A_i und B_i werden über die Anfangsbedingungen bei $t = 0$ aus dem folgenden LGS bestimmt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \omega_1 \mathbf{l}_1 & \omega_2 \mathbf{l}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t=0) \\ \dot{\mathbf{q}}(t=0) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

3.1.2 Numerische Lösung

Zur numerischen Lösung im Rahmen der HAMILTONSchen Mechanik muß die HAMILTON-Funktion $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ermittelt werden. Der generalisierte Impuls \mathbf{p} wird aus der LAGRANGE-Funktion $L = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ wie folgt berechnet:

$$\mathbf{p} = \partial_{\dot{\mathbf{q}}} L \quad (3.35)$$

Mit Hilfe der Rechenregel in Gl. (3.19) ergibt sich aus der LAGRANGE-Funktion aus Gl. (3.17) der generalisierte Impuls \mathbf{p} zu:

$$\mathbf{p} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.36)$$

Damit läßt sich $\dot{\mathbf{q}}$ durch Multiplikation von Gl. (3.36) mit \mathbf{M}^{-1} bestimmen:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} \quad (3.37)$$

Mit Gl. (3.37) ist nun die HAMILTON-Funktion H bekannt. Für konservative, autonome Systeme gilt:

$$H \equiv E = T + V \quad (3.38)$$

Wird nun in T mit Gl. (3.37) $\dot{\mathbf{q}}$ durch den generalisierten Impuls \mathbf{p} ersetzt, so gilt:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{p})^T \mathbf{M} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}) + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \left(\mathbf{M}^{-T} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \right) \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-T} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \\
H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \tag{3.40}
\end{aligned}$$

mit $\mathbf{M}^{-T} = \mathbf{M}^{-1}$ wegen der Symmetrie der Massenmatrix \mathbf{M} .

Somit lassen sich die partiellen Ableitungen von H unter Beachtung von Gl. (3.19) berechnen:

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{p}} H &= \partial_{\mathbf{p}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} \right) \\
&= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} \tag{3.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{q}} H &= \partial_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \right) \\
&= \mathbf{C} \mathbf{q} \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Das folgende Gleichungssystem stellt das allgemeine Zeitschrittverfahren zur numerischen Lösung dar:

$$\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 - h_n \int_0^1 \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \tag{3.43}$$

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 + h_n \int_0^1 \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \tag{3.44}$$

Zur Integration von Gl. (3.41) und Gl. (3.42) in diesem Gleichungssystem, wird \mathbf{p} und \mathbf{q} durch die diskreten Lösungsfunktionen $\mathbf{p}^h(\alpha)$ bzw. $\mathbf{q}^h(\alpha)$ ersetzt. Das Ergebnis ist das folgende lineare Zeitschrittverfahren:

$$\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 - \frac{h_n}{2} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{0} \tag{3.45}$$

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 + \frac{h_n}{2} \mathbf{C} (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = \mathbf{0} \tag{3.46}$$

Dieses lineare Gleichungssystem (LGS) ist in dieser Form noch implizit und gekoppelt. Es läßt sich aber über die Einsetzmethode in zwei explizite LGS in \mathbf{p}_2 bzw. \mathbf{q}_2 überführen. Diese könnten mit dem GAUSS-Algorithmus eindeutig gelöst werden, aber im Hinblick auf die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme beim nichtlinearen Doppelpendel, wurde das allgemeine NEWTON-RAPHSON-Verfahren implementiert. Die Anwendung des allgemeinen NEWTON-RAPHSON-Verfahrens auf ein LGS hat aber keine Nachteile. Denn in

jedem Iterationsschritt des allgemeinen NEWTON-RAPHSON-Verfahrens wird die linearisierte Form des zu lösenden Gleichungssystems mit dem GAUSS-Algorithmus gelöst. Im Falle der Lösung eines LGS mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahrens fällt also nur ein Iterationsschritt an.

Die Lösung des Zeischrittverfahrens mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren erfordert die Bestimmung des zu lösenden Residuum $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ und dessen Tangente \mathbf{K}_T . Zum Beispiel das Residuum $\mathbf{R}(\mathbf{p}_2)$ folgt durch Einsetzen von Gl. (3.45) in Gl. (3.46):

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}_2) \equiv \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 + h_n \mathbf{C} \mathbf{q}_1 + \left(\frac{h_n}{2}\right)^2 (\mathbf{C} \mathbf{M}^{-1}) (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

Die Tangente \mathbf{K}_T wird dann mittels der Richtungsableitung berechnet [4]:

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{p}_2 = \left[\frac{d}{d\epsilon} \mathbf{R}(\mathbf{p}_2 + \epsilon \Delta \mathbf{p}_2) \right]_{\epsilon=0} \quad (3.48)$$

Aus einer Umstellung von Gl. (3.47) läßt sich die Tangente \mathbf{K}_T sofort ablesen:

$$\mathbf{R} = \left[\mathbf{I} + \left(\frac{h_n}{2}\right)^2 \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \right] \mathbf{p}_2 + \left[\left(\frac{h_n}{2}\right)^2 \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{I} \right] \mathbf{p}_1 + h_n \mathbf{C} \mathbf{q}_1 \quad (3.49)$$

Somit ergibt sich die Tangente \mathbf{K}_T zu:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{I} + \left(\frac{h_n}{2}\right)^2 \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \quad (3.50)$$

3.1.3 Beispielrechnung in absoluten Koordinaten

In diesem Kapitel wird ein konkretes Beispiel berechnet. Als generalisierte Koordinaten werden die Absolutwinkel q_1 und q_2 verwendet. Die Parameter des Doppelpendels sind:

$$l := l_1 = l_2 \quad \text{und} \quad m := m_1 = m_2. \quad (3.51)$$

Massenmatrix Der erste Schritt besteht in der Berechnung der Massenmatrix \mathbf{M} . Nach Gl. (3.8) ergeben sich die Komponenten m_{ij} der Massenmatrix aus den Komponenten T_{ij} der kinetischen Energie T des Doppelpendels. Zur

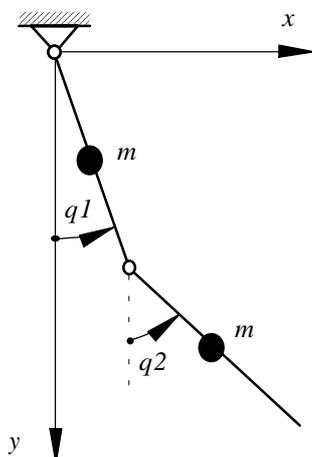


Abbildung 3.2: Doppelpendel in absoluten Koordinaten

Berechnung von T_{ij} sind nach Gl. (3.4) die Ortsvektoren \mathbf{r}_k der beiden Massenpunkte m_k notwendig. Diese sind:

$$\mathbf{r}_1 = l_1 \begin{bmatrix} \sin q_1 \\ \cos q_1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 2 l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \\ 2 l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Mit Gl. (3.4) ergeben sich die Koeffizienten T_{ij} unter Beachtung von Gl. (3.51) zu:

$$T_{11} = \frac{m}{2} 5 l^2 \quad (3.53)$$

$$T_{12} = \frac{m}{2} 2 l^2 \cos(q_1 - q_2) \quad (3.54)$$

$$T_{21} = T_{12} \quad (3.55)$$

$$T_{22} = \frac{m}{2} l^2 \quad (3.56)$$

Aus der Berechnung der Komponenten m_{ij} mit Gl. (3.8) folgt:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 5 m l^2 & 2 m l^2 \\ 2 m l^2 & m l^2 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Steifigkeitsmatrix Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} folgt aus dem Potential $V(\mathbf{q})$, welches bei dem obigen Pendel folgende Form besitzt:

$$V(\mathbf{q}) = -g l_1 (m_1 + 2 m_2) \cos q_1 - m_2 g l_2 \cos q_2$$

$$= -m g l (3 \cos q_1 + \cos q_2) \quad (3.58)$$

Aus diesem Potential lassen sich die Koeffizienten V_{ij} nach Gl. (3.13) bestimmen. Mit Gl. (3.15) ergeben sich daraus dann die Komponenten c_{ij} und somit die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{C} = [c_{ij}]$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 m g l & 0 \\ 0 & m g l \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Mit den Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{C} ist die Aufgabe eindeutig gestellt und kann gelöst werden.

Analytische Lösung

Aus der charakteristischen Gleichung (3.23) ergeben sich die folgenden Eigenwerte:

$$\lambda_1 = \sqrt{(4 + \sqrt{13})} \frac{g}{l} \quad (3.60)$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \quad (3.61)$$

$$\lambda_3 = \sqrt{(4 - \sqrt{13})} \frac{g}{l} \quad (3.62)$$

$$\lambda_4 = -\lambda_3 \quad (3.63)$$

Demnach sind die Eigenfrequenzen $\omega_1 > \omega_2$ der Lösung gegeben durch:

$$\omega_1 = \sqrt{(4 + \sqrt{13})} \frac{g}{l} \quad (3.64)$$

$$\omega_2 = \sqrt{(4 - \sqrt{13})} \frac{g}{l} \quad (3.65)$$

Bemerkung 3.3 Beide Eigenfrequenzen liegen somit immer im Bereich der reellen Zahlen. Es gilt dann:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbf{R} \notin \mathbf{Q} \quad (3.66)$$

mit \mathbf{R} als Menge der reellen Zahlen und \mathbf{Q} als Menge der rationalen Zahlen. Da der Quotient nicht mehr im Bereich der rationalen Zahlen liegt, sind die Eigenfrequenzen inkommensurabel. Das bedeutet, daß die Lösung aperiodisch ist, falls durch eine entsprechende Wahl der Anfangsbedingungen in der Lösung eine Überlagerung der zwei Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 auftritt [19, 3].

Werden die Konstanten c_i der Eigenvektoren \mathbf{K}_i alle auf eins gesetzt, so ergeben sich folgende Eigenvektoren:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} (1 - \sqrt{13}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1 \quad (3.68)$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} (1 + \sqrt{13}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{K}_3 \quad (3.70)$$

Die Eigenformen \mathbf{l}_i der allgemeinen Lösung der linearen Bewegungsgleichungen (3.20) sind somit:

$$\mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} (1 - \sqrt{13}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} (1 + \sqrt{13}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Zur Angabe der allgemeinen Lösung (3.33) fehlen noch die Konstanten A_i und B_i . Sie werden aus dem LGS (3.34) bestimmt. Mit den obigen Eigenfrequenzen und Eigenformen ergeben sich die Konstanten zu:

$$A_1 = \frac{(13 + \sqrt{13})}{52} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{13} & 2 \end{bmatrix} \mathbf{q}_0 \quad (3.73)$$

$$A_2 = \frac{(13 - \sqrt{13})}{52} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{13} & 2 \end{bmatrix} \mathbf{q}_0 \quad (3.74)$$

$$B_1 = \frac{(13 - 3\sqrt{13}) \sqrt{gl (4 + \sqrt{13})}}{52g} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{13} & 2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (3.75)$$

$$B_2 = \frac{(13 + 3\sqrt{13}) \sqrt{gl (4 - \sqrt{13})}}{52g} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{13} & 2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (3.76)$$

Numerische Lösung

Für die numerische Lösung des Beispiels ist nur die Massenmatrix (3.57) und die Steifigkeitsmatrix (3.59) notwendig. Die Zeitschrittweite h_n entspricht in den Rechnerschriften der Konstante dt .

Vergleich konkreter Anfangsbedingungen

In diesem Abschnitt wird die analytische Lösung mit der numerischen Lösung am Beispiel der Anfangsbedingungen aus Tab. 3.1 verglichen. Die ersten

q_1	q_2	\dot{q}_1	\dot{q}_2
$1 - \sqrt{13}$	6	0	0
$1 + \sqrt{13}$	6	0	0
0.1	-0.01	0	0

Tabelle 3.1: Lineare Anfangsbedingungen für Absolutwinkel

beiden Anfangsbedingungen sind die erste Eigenform \mathbf{I}_1 bzw. die zweite Eigenform \mathbf{I}_2 des Doppelpendels. Die dritte Anfangsbedingung ist eine beliebig ausgewählte kleine Auslenkung beider Pendel.

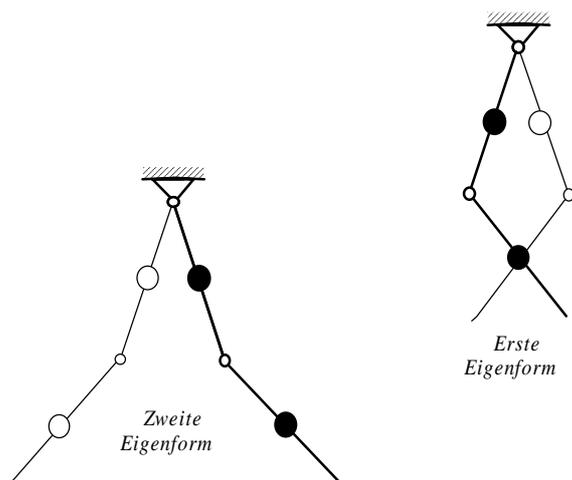


Abbildung 3.3: Eigenformen eines Doppelpendels [3]

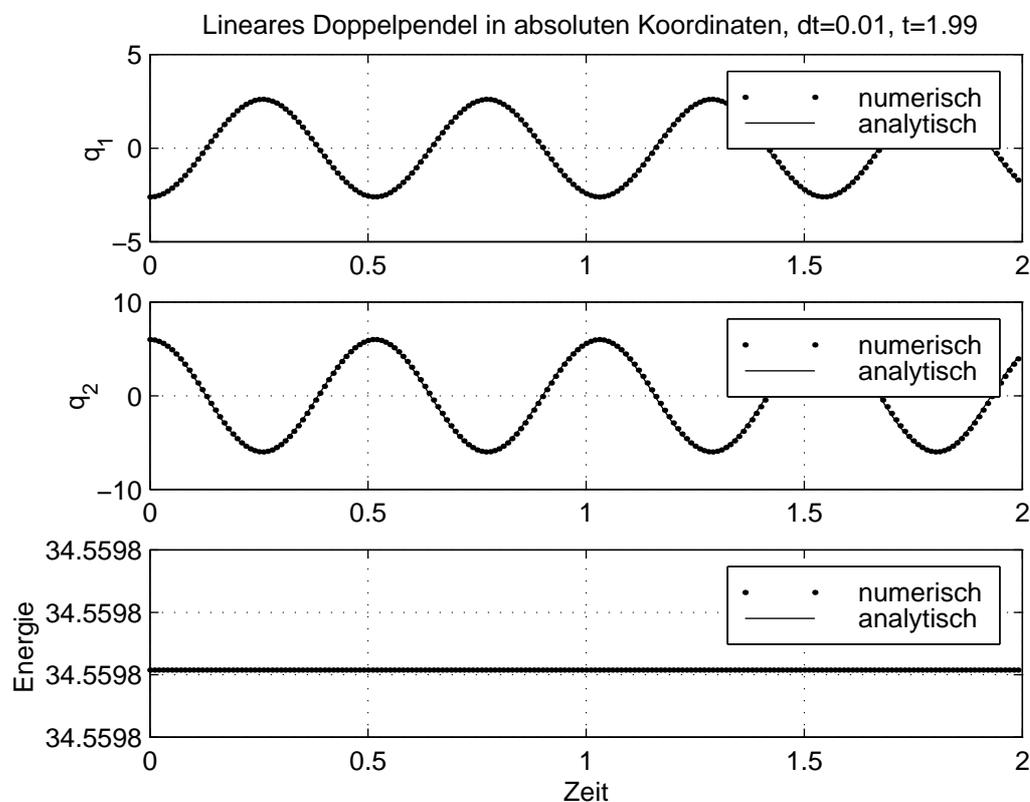


Abbildung 3.4: Erste Eigenform bei $m = 0.25$, $l = 0.5$

In Abb. 3.4 sieht man die erste Eigenform des Doppelpendels über der Zeit t aufgetragen. Die durchgezogenen Linien stellen die analytischen Lösungen q_1 bzw. q_2 und die gepunkteten Linien die numerischen Lösungen q_1^h bzw. q_2^h dar. Im letzten Rechenschrieb dieser Abbildung wird die Erhaltung der Gesamtenergie des Doppelpendels bestätigt.

Die analytische Lösung zu dieser Anfangsbedingung ist:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \cos \omega_1 t \quad (3.77)$$

Es handelt sich somit um eine harmonische Schwingung beider Pendelstangen deren Frequenz jeweils die erste Eigenfrequenz ω_1 ist.

Die Verläufe der Phasenkurven lassen sich auf die Struktur des sogenannten Phasenraumes zurückführen. Dazu folgender Einschub:

Einschub 3.1 (Phasenraum von Systemen mit zwei Freiheitsgraden [6])
Die Bewegungsgleichungen (3.78)

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (3.78)$$

lassen sich als folgendes Gleichungssystem schreiben:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} \quad (3.79)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (3.80)$$

mit $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$.

Der Phasenraum dieses Gleichungssystems mit zwei Freiheitsgraden ist ein vier-dimensionaler reeller Raum \mathbf{R}^4 mit den Koordinaten q_1, q_2, y_1 und y_2 . Darin bildet das Gleichungssystem (3.79,3.80) das Vektorfeld $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{y})$.

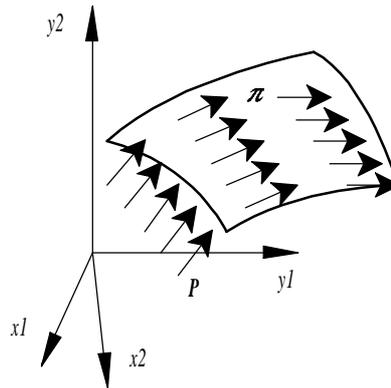


Abbildung 3.5: Phasenraum von Systemen mit zwei Freiheitsgraden

Die Gleichung der Erhaltung der Gesamtenergie $E = T + U$ definiert eine drei-dimensionale Hyperfläche

$$\pi_0 : E(\mathbf{q}, \mathbf{y}) = E_0 \quad (3.81)$$

im Phasenraum. Das Vektorfeld $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{y})$ tangiert π_0 in jedem Punkt, so daß π_0 alle Phasenkurven zur Energie E_0 enthält. Somit sind die Phasenebenen die Projektionen der Fläche π_0 auf die (q_1, y_1) - bzw. (q_2, y_2) -Ebene.

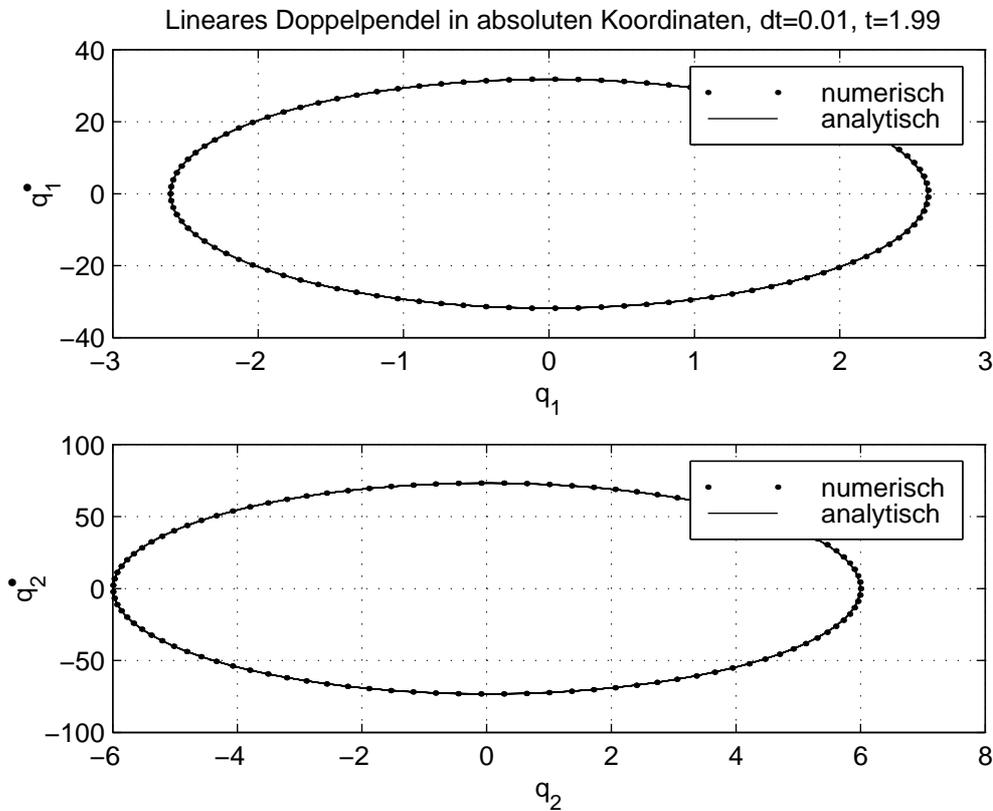


Abbildung 3.6: Phasenebenen der ersten Eigenform bei $m = 0.25$, $l = 0.5$

Die Abb. 3.6 zeigt die Phasenebenen der ersten Eigenform. Die geschlossenen Phasenkurven bestätigen die Periodizität der Lösungen.

Die zeitliche Ableitung von Gl. (3.77) ergibt $\mathbf{y} \equiv \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}_0 \omega_1 \cos \omega_1 t$. Unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $1 = \sin^2 \omega_1 t + \cos^2 \omega_1 t$ und Gl. (3.77) folgt für π_0 der erste Eigenform:

$$\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}{(\omega_1 \|\mathbf{q}_0\|)^2} + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}_0\|^2} = 1 \quad (3.82)$$

Diese Gleichung stellt einen Ellipsoiden im vier-dimensionalen Phasenraum dar [6]. Die Projektion auf die (q_1, y_1) - bzw. (q_2, y_2) -Ebene ergibt jeweils eine Ellipse.

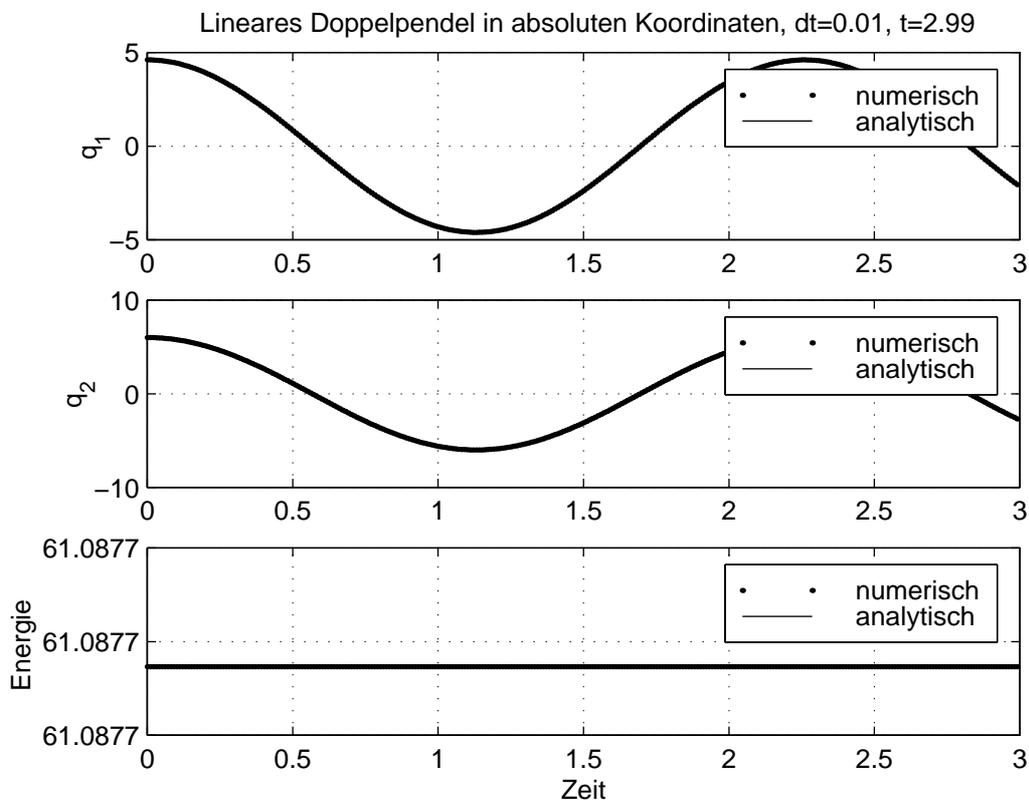


Abbildung 3.7: Zweite Eigenform bei $m = 0.25$, $l = 0.5$

In Abb. 3.7 ist die zweite Eigenform des Doppelpendels zu erkennen. Im Vergleich zu Abb. 3.4 sieht man deutlich die niedrigere Eigenfrequenz ω_2 der Schwingungen beider Pendel. Die Schrittweite dt ist die gleiche wie in den Abbildungen der ersten Eigenform.

Die analytische Lösung zu der zweiten Anfangsbedingung ist:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \cos \omega_2 t \quad (3.83)$$

Die Schwingung ist bei beiden Pendelstangen harmonisch. Die Frequenz ist jeweils die zweite Eigenfrequenz ω_2 .

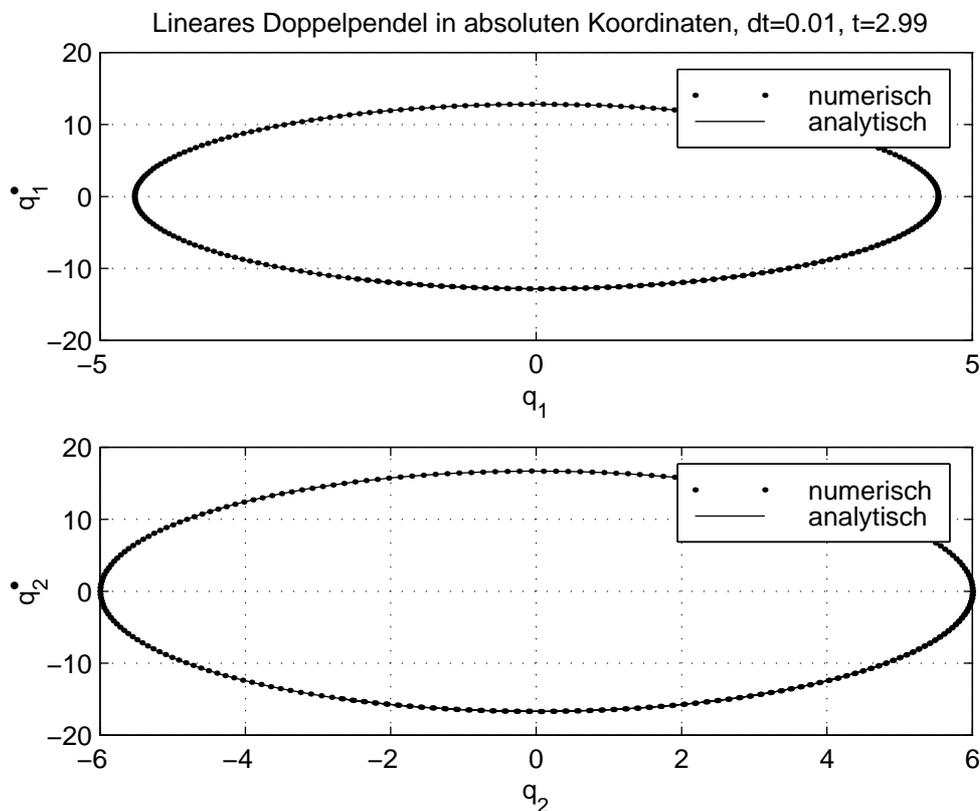


Abbildung 3.8: Phasenebenen der zweiten Eigenform bei $m = 0.25$, $l = 0.5$

Es liegt wieder eine völlig periodische Bewegung vor. Das bestätigen die geschlossenen Bahnen in den Phasenebenen in Abb. 3.8.

Die Hyperfläche π_0 der zweiten Eigenform ist nach analoger Herleitung zur ersten Eigenform folgender Ellipsoid:

$$\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}{(\omega_2 \|\mathbf{q}_0\|)^2} + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}_0\|^2} = 1 \quad (3.84)$$

Die Projektionen auf die (q_1, y_1) - bzw. (q_2, y_2) -Ebene ergeben Ellipsen. Diese sind in Abb. (3.8) zu erkennen.

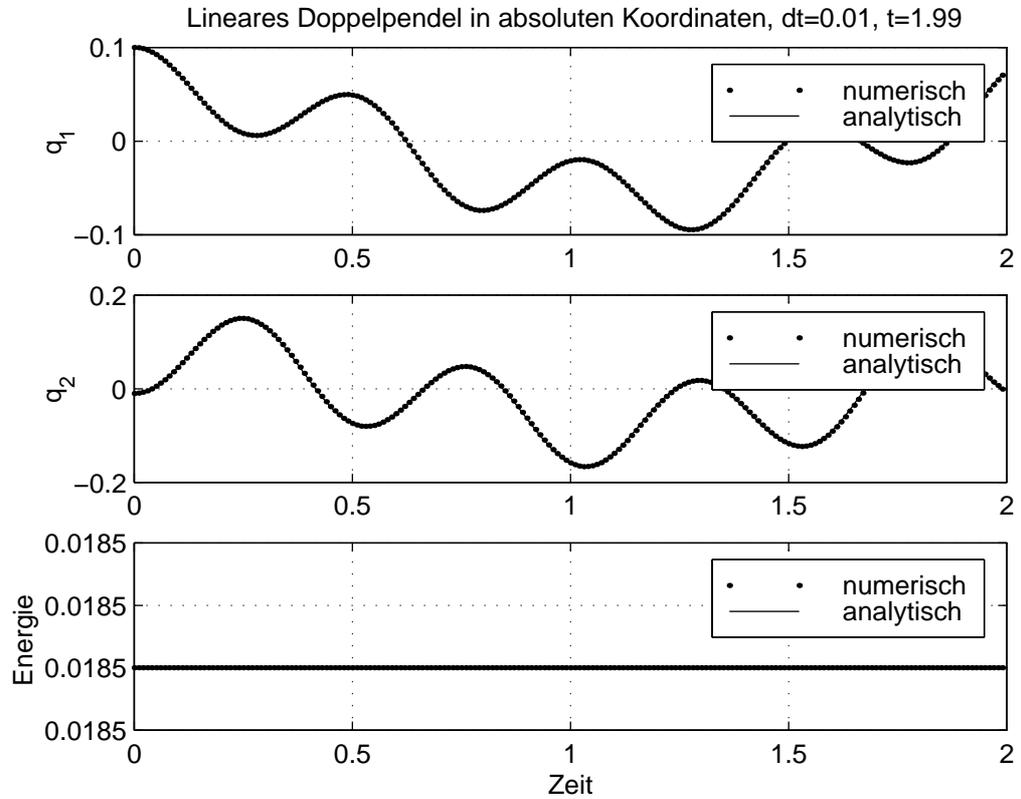


Abbildung 3.9: $\mathbf{q}_0 = [0.1, -0.01]^T$ bei $m = 0.25, l = 0.5$

Die dritte Anfangsbedingung stellt eine kleine Auslenkung beider Pendelstangen dar. Man sieht in Abb. 3.9, daß die Schwingungen nicht mehr harmonisch sind.

Die analytische Lösung dieser Anfangsbedingung ist wie folgt:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{l}_1 A_1 \cos \omega_1 t + \mathbf{l}_2 A_2 \cos \omega_2 t \quad (3.85)$$

mit $A_1 \approx -0.8959177992$ und $A_2 \approx +0.7959177992$.

Die Überlagerung beider inkommensurablen Eigenfrequenzen verursacht eine aperiodische Schwingung [19].

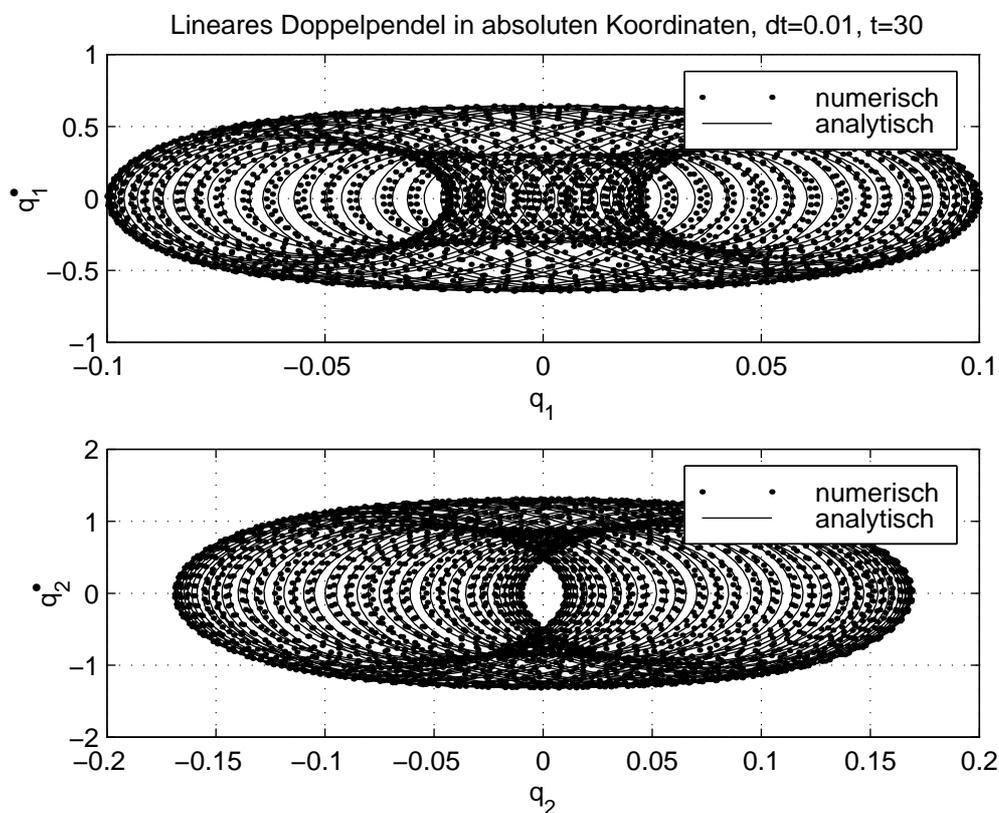


Abbildung 3.10: $\mathbf{q}_0 = [0.1, -0.01]^T$ bei $m = 0.25$, $l = 0.5$

Die Phasenebenen in Abb. 3.10 resultieren aus dem allgemeinen Fall der drei-dimensionalen Hyperfläche π_0 eines Systems mit zwei Freiheitsgraden. Die Hyperfläche π_0 besteht hier aus einem zwei-dimensionalen¹ Torus T_0^2 . Die Phasenkurven zum Energie-Niveau E_0 sind die Windungen um den Torus T_0^2 . Die Phasenebenen entstehen wieder durch eine Projektion des Torus T_0^2 auf die entsprechende Ebene des Phasenraumes [6, 3].

Die Phasenkurven sind offen, da die Lösungen aperiodisch sind.

¹Die Dimension des Torus bezieht sich nicht auf den Raum den der Torus einnimmt. Es gilt: $T^n := \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n$, wobei S^1 die Querschnittsfläche ist und $n = \dim T^n$ [6].

3.1.4 Beispielrechnung in relativen Koordinaten

Das Doppelpendel aus Kapitel 3.1.3 läßt sich auch mit Relativwinkeln als generalisierten Koordinaten lösen. Nach Gl. (3.51) sind die Längen und die Massen der Pendel gleich.

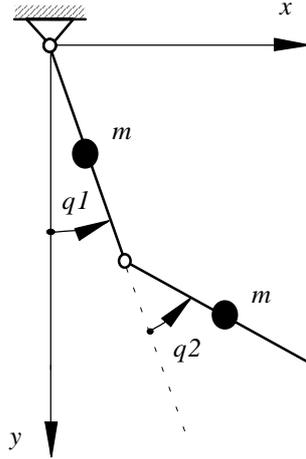


Abbildung 3.11: Doppelpendel in relativen Koordinaten

Massenmatrix Die Berechnung der Massenmatrix \mathbf{M} ist analog zur Berechnung mit absoluten Koordinaten. Der Unterschied besteht in den Ortsvektoren \mathbf{r}_k der Pendelmassen:

$$\mathbf{r}_1 = l_1 \begin{bmatrix} \sin q_1 \\ \cos q_1 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 2l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 2l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Die Koeffizienten T_{ij} ergeben sich mit Gl. (3.51) zu:

$$T_{11} = m l^2 (3 + 2 \cos q_2) \quad (3.88)$$

$$T_{12} = \frac{1}{2} m l^2 (1 + 2 \cos q_2) \quad (3.89)$$

$$T_{21} = T_{12} \quad (3.90)$$

$$T_{22} = \frac{1}{2} m l^2 \quad (3.91)$$

Die Berechnung der Komponenten m_{ij} nach Gl. (3.8), führt zur Massenmatrix \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 m l^2 & 3 m l^2 \\ 3 m l^2 & m l^2 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Steifigkeitsmatrix Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} wird wiederum aus dem Potential $V(\mathbf{q})$ bestimmt:

$$V(\mathbf{q}) = -m g l (3 \cos q_1 + \cos(q_1 + q_2)) \quad (3.93)$$

Aus den Koeffizienten V_{ij} ergibt sich die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ zu:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 m g l & m g l \\ m g l & m g l \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Analytische Lösung

Da das System das gleiche geblieben ist, sind die Eigenwerte exakt die, die auch mit absoluten Koordinaten berechnet wurden:

$$\lambda_1 = \sqrt{(4 + \sqrt{13})} \frac{g}{l} \quad (3.95)$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \quad (3.96)$$

$$\lambda_3 = \sqrt{(4 - \sqrt{13})} \frac{g}{l} \quad (3.97)$$

$$\lambda_4 = -\lambda_3 \quad (3.98)$$

Demnach sind die Eigenfrequenzen $\omega_1 > \omega_2$ der Lösung gegeben durch:

$$\omega_1 = \sqrt{(4 + \sqrt{13})} \frac{g}{l} \quad (3.99)$$

$$\omega_2 = \sqrt{(4 - \sqrt{13})} \frac{g}{l} \quad (3.100)$$

Die Eigenvektoren sind jedoch von den Koordinaten abhängig und sind damit anders:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} (3 + \sqrt{13}) \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1 \quad (3.102)$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} (3 - \sqrt{13}) \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{K}_3 \quad (3.104)$$

Die Eigenformen \mathbf{l}_i der allgemeinen Lösung sind hiermit:

$$\mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} (3 + \sqrt{13}) \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

$$\mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} (3 - \sqrt{13}) \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Die Konstanten A_i und B_i sind mit den obigen Eigenfrequenzen und Eigenformen wie folgt:

$$A_1 = \frac{(13 - 3\sqrt{13})}{52} \begin{bmatrix} 2 & -3 - \sqrt{13} \end{bmatrix} \mathbf{q}_0 \quad (3.107)$$

$$A_2 = \frac{(13 + 3\sqrt{13})}{52} \begin{bmatrix} 2 & -3 + \sqrt{13} \end{bmatrix} \mathbf{q}_0 \quad (3.108)$$

$$B_1 = \frac{(13 - 4\sqrt{13}) \sqrt{gl (4 + \sqrt{13})}}{78 g} \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{13} & 2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (3.109)$$

$$B_2 = \frac{(13 + 4\sqrt{13}) \sqrt{gl (4 - \sqrt{13})}}{78 g} \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{13} & 2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (3.110)$$

Numerische Lösung

Für die numerische Lösung nach Kapitel 3.1.2 muß auch hier keine weitere Rechnung durchgeführt werden.

Vergleich konkreter Anfangsbedingungen

Ein Vergleich der analytische Lösung mit der numerischen Lösung erfolgt anhand der Anfangsbedingungen aus Tab. 3.2. Die Anfangsbedingungen

q_1	q_2	\dot{q}_1	\dot{q}_2
-2	$3 + \sqrt{13}$	0	0
-2	$3 - \sqrt{13}$	0	0
0.1	-0.11	0	0

Tabelle 3.2: Lineare Anfangsbedingungen für Relativwinkel

wurden so gewählt, daß identische Pendelbewegungen ausgeführt werden. Die beiden ersten Anfangsbedingungen führen zu der ersten Eigenform \mathbf{l}_1 bzw. zu der zweiten Eigenform \mathbf{l}_2 des Doppelpendels. Die Eigenformbewegungen eines Pendels ändern sich nicht, da die Eigenfrequenzen gleich bleiben. Die dritte Anfangsbedingung ergibt sich aus einer Umrechnung der Anfangsbedingung in Tab. 3.1 auf die neuen Koordinaten.

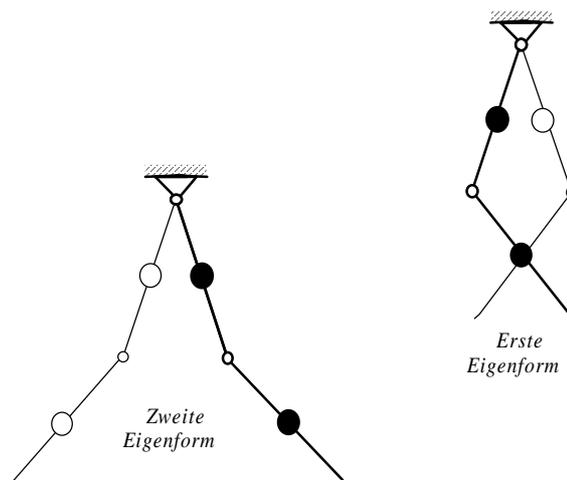


Abbildung 3.12: Eigenformen eines Doppelpendels [3]

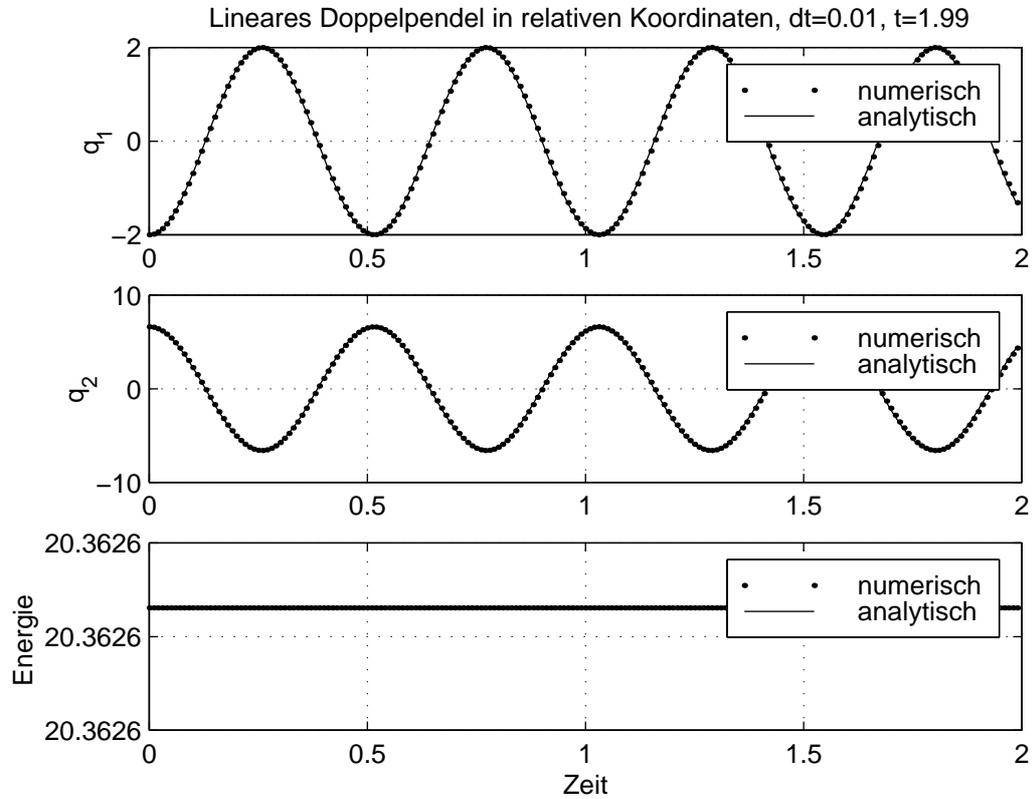


Abbildung 3.13: Erste Eigenform bei $m = 0.25$, $l = 0.5$

In Abb. (3.13) ist die erste Eigenform des Doppelpendels dargestellt. Die Energieerhaltung des gesamten Systems wird im unteren Rechnerschrieb dieser Abbildung verifiziert.

Die analytische Lösung zu dieser Anfangsbedingung ist:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \cos \omega_1 t \quad (3.111)$$

Es liegt eine harmonische Schwingung beider Pendelstangen vor, deren Frequenz jeweils die erste Eigenfrequenz ω_1 ist.

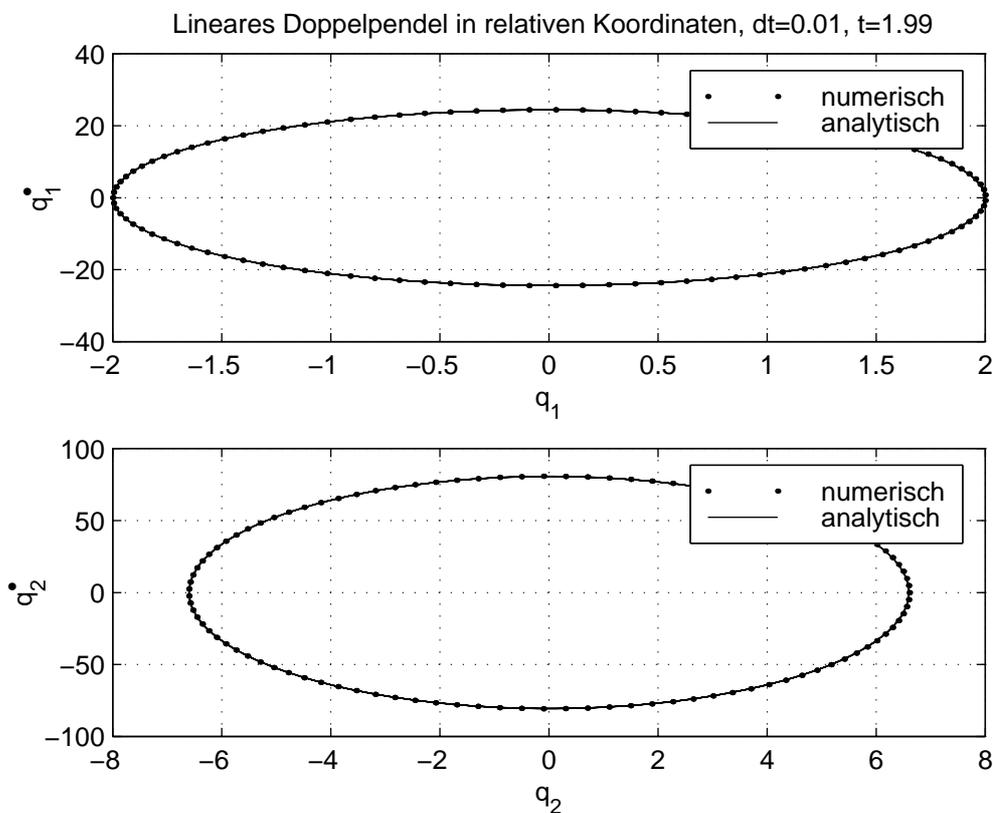


Abbildung 3.14: Phasenebenen der ersten Eigenform bei $m = 0.25$, $l = 0.5$

Der Rechnerscrib in Abb. 3.14 zeigt die Phasenebene jeder Pendelstange während der Bewegung in der ersten Eigenform. Die Phasenkurven sind geschlossen, da eine periodische Lösung vorliegt.

Analog zu der Herleitung in absoluten Koordinaten ist die Hyperfläche π_0 ein Ellipsoid im vier-dimensionalen Phasenraum:

$$\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}{(\omega_1 \|\mathbf{q}_0\|)^2} + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}_0\|^2} = 1 \quad (3.112)$$

Die Projektion auf die (q_1, y_1) - bzw. (q_2, y_2) -Ebene ergibt jeweils eine Ellipse.

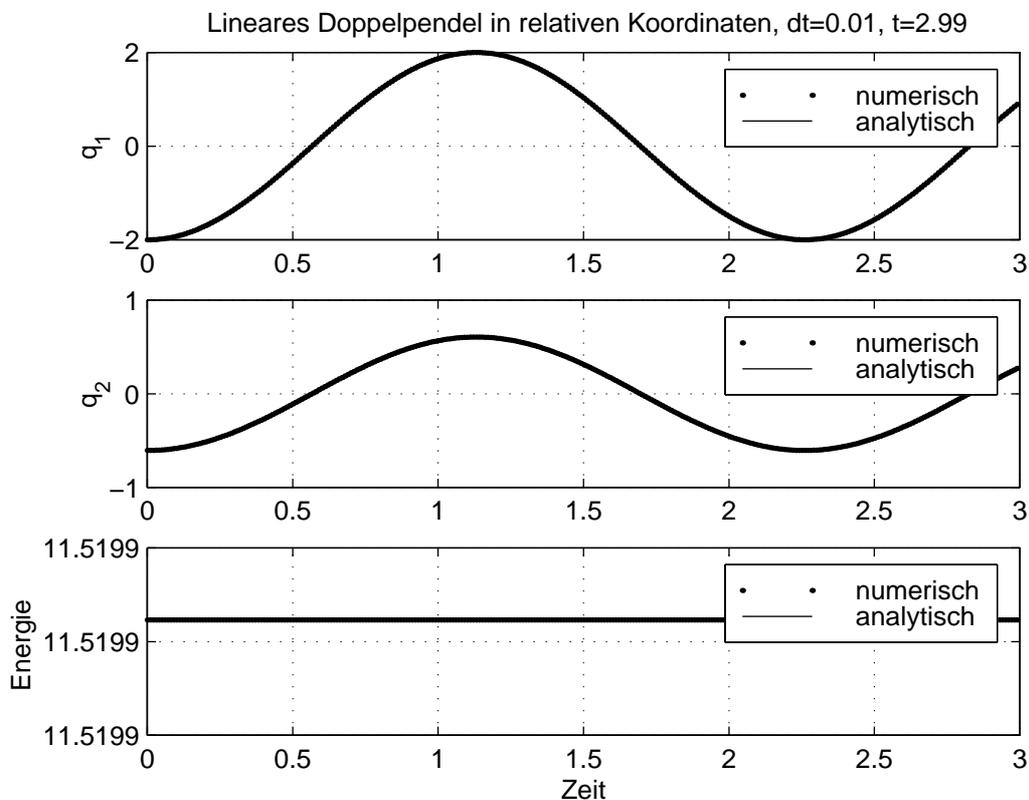


Abbildung 3.15: Zweite Eigenform bei $m = 0.25$, $l = 0.5$

In Abb. 3.15 ist die zweite Eigenform zu sehen. Die Zeitschrittweite dt ist hier die gleiche wie in den Abbildungen der ersten Eigenform. Man erkennt daher deutlich die niedrigere Eigenfrequenz ω_2 .

Die analytische Lösung zu der zweiten Anfangsbedingung ist wie folgt:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \cos \omega_2 t \quad (3.113)$$

Die Schwingungen sind ebenfalls harmonisch. Die Frequenz ist jeweils die zweite Eigenfrequenz ω_2 .

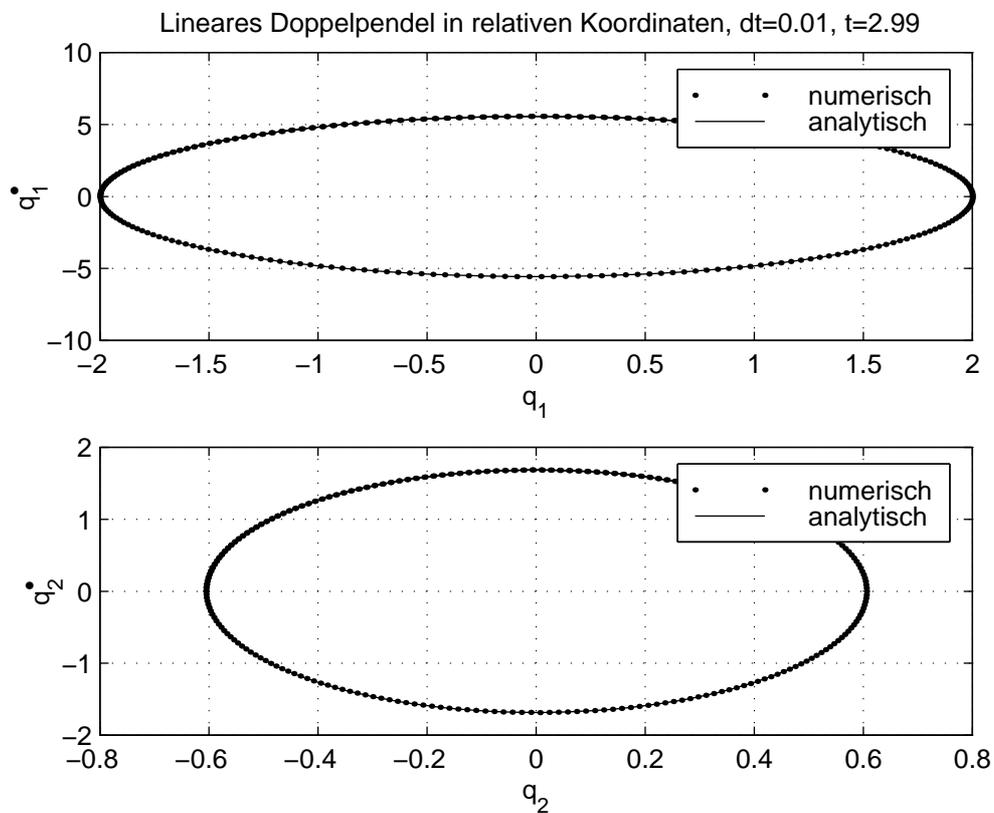


Abbildung 3.16: Phasenebenen der zweiten Eigenform bei $m = 0.25$, $l = 0.5$

Die Bewegung ist nach wie vor periodisch. Das bestätigen die geschlossenen Bahnen in den Phasenebenen in Abb. 3.16.

Im Phasenraum der zweiten Eigenform ist π_0 folgender Ellipsoid:

$$\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}{(\omega_2 \|\mathbf{q}_0\|)^2} + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}_0\|^2} = 1 \quad (3.114)$$

Die Projektionen ergeben daher jeweils eine Ellipse (s. Abb. 3.16).

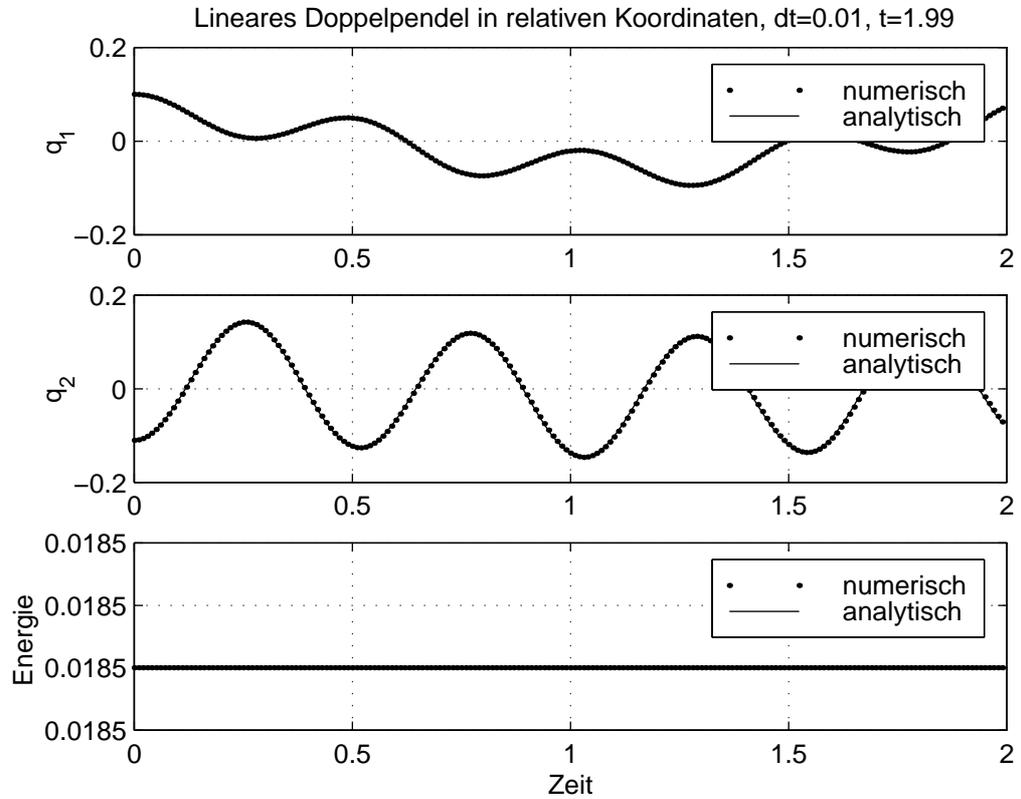


Abbildung 3.17: $\mathbf{q}_0 = [0.1, -0.01]^T$ bei $m = 0.25$, $l = 0.5$

Diese Anfangsbedingung stellt eine kleine Auslenkung beider Pendelstangen dar. Es läßt sich in Abb. 3.17 erkennen, daß die Schwingungen nicht mehr harmonisch sind.

Die analytische Lösung dieser Anfangsbedingung ist:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{l}_1 A_1 \cos \omega_1 t + \mathbf{l}_2 A_2 \cos \omega_2 t \quad (3.115)$$

mit $A_1 \approx 0.03890599608$ und $A_2 \approx 0.06109400392$.

Da auch diese Eigenfrequenzen inkommensurable sind liegt, hier eine aperi-
odische Schwingung vor.

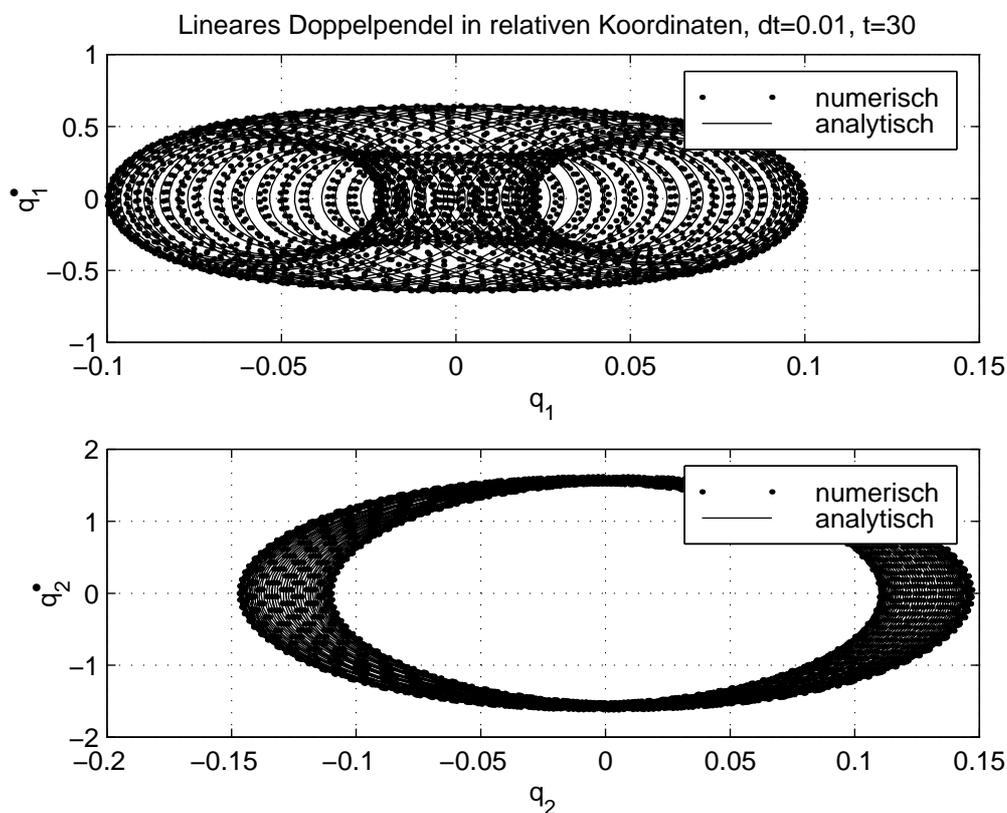


Abbildung 3.18: $\mathbf{q}_0 = [0.1, -0.01]^T$ bei $m = 0.25$, $l = 0.5$

Man erkennt in Abb. 3.18 wieder den allgemeinen Fall für ein System mit zwei Freiheitsgraden. Die Hyperfläche π_0 ist ein Torus T_0^2 . Die Phasenkurven zum Energie-Niveau sind die Windungen um T_0^2 . Die Phasenebenen sind die Projektionen von T_0^2 auf die Ebenen (q_1, y_1) bzw. (q_2, y_2) . Die offenen Phasenkurven in Abb. 3.10 bestätigen die Aperiodizität der Lösungen.

3.2 Nichtlineares Doppelpendel

Um Bewegungen zu beschreiben, bei denen die Auslenkungen der Pendelstangen groß sind, darf die kinetische und potentielle Energie des ebenen Doppelpendels nicht linearisiert werden. Unter Verwendung von Absolut- oder Relativwinkel als generalisierte Koordinaten liegen im allgemeinen Fall keine zyklischen Koordinaten vor. Damit fehlt zur Lösung der Bewegungsgleichungen ein zweites *erstes Integral* der Bewegung. Das einzige erste Integral der Bewegung ist in diesem konservativen, autonomen System die Gesamtenergie E . Damit läßt sich das nichtlineare Doppelpendel allgemein nur numerisch lösen.

Da die numerische Lösung im Rahmen der HAMILTONschen Mechanik erfolgt, ist der erste Schritt die Aufstellung der HAMILTON-Funktion $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. H ist für konservative, autonome System identisch mit der Gesamtenergie E [7]. Somit gilt:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + V(\mathbf{q}) \quad (3.116)$$

Die kinetische Energie T ist nach Gl. (3.3) eine homogene quadratische Funktion. Diese läßt sich auch im nichtlinearen Fall in Matrizenschreibweise darstellen. Die Energie E besitzt dann die folgende Form:

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{lin}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + V(\mathbf{q}) \quad (3.117)$$

Um aus der Gesamtenergie E die HAMILTON-Funktion H zu erhalten, muß der generalisierte Impuls \mathbf{p} aus der LAGRANGE-Funktion $L = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) &= T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - V(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{lin}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.118)$$

Der generalisierte Impuls \mathbf{p} ist dann mit der Rechenregel aus Gl. (3.19):

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \partial_{\dot{\mathbf{q}}} L \\ &= \partial_{\dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{lin}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) \\ \mathbf{p} &= \mathbf{M}_{lin}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.119)$$

Aus Gl. (3.119) ergeben sich die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ zu:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \quad (3.120)$$

Das Einsetzen von Gl. (3.120) in die Gesamtenergie E führt auf die HAMILTON-Funktion H :

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) \quad (3.121)$$

wegen $\mathbf{M}_{nl}^{-T} = \mathbf{M}_{nl}^{-1}$ aufgrund der symmetrischen Massenmatrix.

Das allgemeine Zeitschrittverfahren zur numerischen Lösung mittels linearen Elementen ist nach Kapitel 1.5:

$$\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 - h_n \int_0^1 \partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \quad (3.122)$$

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 + h_n \int_0^1 \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) d\alpha = \mathbf{0} \quad (3.123)$$

Darin kommen die partiellen Ableitungen der HAMILTON-Funktion H vor. Diese können nun mit Gl. (3.121) unter Beachtung von Gl. (3.19) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{p}} H &= \partial_{\mathbf{p}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right) \\ &= \mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{q}} H &= \partial_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right) + \partial_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{p} + \partial_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.125)$$

Die Integration im vorliegenden Zeitschrittverfahren ist nach dem Ersetzen der kontinuierlichen Lösungsfunktionen \mathbf{p} und \mathbf{q} durch die diskreten Lösungsfunktionen $\mathbf{p}^h(\alpha)$ bzw. $\mathbf{q}^h(\alpha)$ durchführbar.

Das vorliegende Zeitschrittverfahren der Gln. (3.122) und (3.123) ist mit Gl. (3.124) und Gl. (3.125) nichtlinear. Also muß das Verfahren iterativ gelöst werden. Dazu wurde das NEWTON-RAPHSON-Verfahren implementiert [4, 13].

Die Iteration im Zeitschrittverfahren betrifft beide Variablen, da es nicht

möglich ist eine Variable zu eliminieren. Das verwendete Residuum $\mathbf{R}(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2)$ besteht somit aus den Gln. (3.122) und (3.123):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} + h_n \int_0^1 \begin{bmatrix} -\partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) \\ \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha = \mathbf{0} \quad (3.126)$$

Die Tangente \mathbf{K}_T ergibt sich aus dem Residuum $\mathbf{R}(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2)$ wie folgt:

$$\mathbf{K}_T \equiv \partial_{\mathbf{x}_2} \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{I} + h_n \int_0^1 \mathbf{H}_T(\alpha) d\alpha \quad (3.127)$$

mit

$$\mathbf{H}_T(\alpha) := \partial_{\mathbf{x}_2} \begin{bmatrix} -\partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) \\ \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

und $\mathbf{x}_2 := [\mathbf{q}_2 \ \mathbf{p}_2]^T$.

Die sich ergebende Matrix \mathbf{H}_T im Integral, entspricht der JACOBI-Matrix bzgl. des Vektors $[\mathbf{q}_2 \ \mathbf{p}_2]^T$ [12]. Allgemein ist die JACOBI-Matrix einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ die folgende Matrix:

$$\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathcal{J}_x^R \equiv \begin{bmatrix} \text{grad}_{\mathbf{x}} R_1 \\ \vdots \\ \text{grad}_{\mathbf{x}} R_m \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial R_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial R_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial R_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

mit $\mathbf{R} = [R_1, \dots, R_m]^T$ und $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$.

Bemerkung 3.4 *Der Unterschied zwischen $\text{grad } f(\mathbf{x})$ und $\partial_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ liegt lediglich in der Lage des Ergebnisvektors. Der Gradient ist als Zeilenvektor definiert und $\partial_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ als Spaltenvektor [12].*

Im hier vorliegenden Fall ist der Vektor $\mathbf{x} \equiv [\mathbf{q}_2 \ \mathbf{p}_2]^T$ eine Vereinigung aus zwei Vektoren, wie auch das Residuum $\mathbf{R}(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2)$ aus zwei vektoriellen Gleichungen entstanden ist. Aus diesem Grund läßt sich die JACOBI-Matrix $\mathcal{J}_{x_2}^{\partial H}$ in vier Untermatrizen unterteilen, die jeweils für sich betrachtet, die JACOBI-Matrizen bzgl. der Vektoren \mathbf{q}_2 bzw. \mathbf{p}_2 sind:

$$\mathbf{H}_T = \mathcal{J}_{x_2}^{\partial H} \equiv \begin{bmatrix} \boxed{-\partial_{\mathbf{q}_2} \partial_{\mathbf{p}} H} & \boxed{-\partial_{\mathbf{p}_2} \partial_{\mathbf{p}} H} \\ \boxed{\partial_{\mathbf{q}_2} \partial_{\mathbf{q}} H} & \boxed{\partial_{\mathbf{p}_2} \partial_{\mathbf{q}} H} \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

Mit Hilfe der Kettenregel der Differentiation läßt sich die Ableitung nach den Knotenvektoren \mathbf{q}_2 bzw. \mathbf{p}_2 auf die Ableitung nach den kontinuierlichen Lösungsfunktionen \mathbf{q} und \mathbf{p} zurückführen:

$$\mathbf{H}_T = \begin{bmatrix} \boxed{-\partial_{\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{p}}H} & \boxed{-\partial_{\mathbf{p}}^2 H} \\ \boxed{\partial_{\mathbf{q}}^2 H} & \boxed{\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H} \end{bmatrix} \alpha \quad (3.131)$$

mit $\partial_{\mathbf{q}_2}\mathbf{q} = \partial_{\mathbf{p}_2}\mathbf{p} = \alpha$.

Nach dem Satz von H.A. SCHWARZ über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen gilt folgende Vereinfachung [12]:

$$\partial_{\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{p}}H \equiv \left(\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H\right)^T \quad (3.132)$$

Diese Vertauschbarkeit partieller Ableitungen führt auf:

$$\mathbf{H}_T = \begin{bmatrix} \boxed{-\left(\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H\right)^T} & \boxed{-\partial_{\mathbf{p}}^2 H} \\ \boxed{\partial_{\mathbf{q}}^2 H} & \boxed{\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H} \end{bmatrix} \alpha \quad (3.133)$$

Mit den Gln. (3.124) und (3.125) lassen sich die Untermatrizen von \mathbf{H}_T berechnen. Zuerst die Untermatrizen auf der Nebendiagonale:

$$\begin{aligned} -\partial_{\mathbf{p}}^2 H &= -\partial_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right) \\ &= -\mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.134)$$

Da die Massenmatrix \mathbf{M}_{nlin} symmetrisch ist, ist somit diese Untermatrix ebenfalls symmetrisch [10]. Für die zweifache Ableitung von H nach \mathbf{q} sind die Beziehungen aus Gl. (3.129) notwendig:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{q}}^2 H &= \partial_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{p} \right) + \partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{grad}_{\mathbf{q}} \left(\mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right) \\ \text{grad}_{\mathbf{q}} \left(\mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right) \end{bmatrix} + \partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.135)$$

Somit hat $\partial_{\mathbf{q}}^2 H$ folgende Form:

$$\partial_{\mathbf{q}}^2 H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} & \mathbf{p}^T \frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial q_1} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} & \mathbf{p}^T \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \end{bmatrix} + \partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q}) \quad (3.136)$$

Die Anwendung des Satzes von H.A. SCHWARZ auf die erste Matrix in Gl. (3.136) läßt erkennen, daß diese Matrix symmetrisch ist. Die Matrix $\partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q})$ ist identisch mit der HESSE-Matrix \mathcal{H}_q^V [12]:

$$\partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q}) = \mathcal{H}_q^V \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

Somit ist $\partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q})$ nach H.A. SCHWARZ ebenfalls symmetrisch. Mit der Berechnung der JACOBI-Matrix nach Gl. (3.129) lassen sich auch die Untermatrizen auf der Hauptdiagonalen von \mathbf{H}_T berechnen:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{q}} H &= \partial_{\mathbf{p}} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{p} + \partial_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{grad}_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right) \\ \text{grad}_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right)^T \\ 2 \left(\frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right)^T \end{bmatrix} \\ \partial_{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{q}} H &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right)^T \\ \left(\frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right)^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.138)$$

Die zweite Untermatrix ergibt sich aus der ersten Untermatrix in Gl. (3.138) durch Transposition:

$$-\left(\partial_{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{q}} H \right)^T = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} & -\frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

Die Matrix \mathbf{H}_T läßt sich nach dem Ursprung ihrer Untermatrizen in die Matrix \mathbf{M}_T^{-1} und die Matrix \mathbf{C}_T additiv aufteilen:

$$\mathbf{H}_T := \mathbf{M}_T^{-1} + \mathbf{C}_T \quad (3.140)$$

Die Matrix \mathbf{M}_T^{-1} enthält den Teil von \mathbf{H}_T der aus der kinetischen Energie und \mathbf{C}_T den Teil der aus der potentiellen Energie herrührt. Mit Gl. (3.134) ist \mathbf{M}_T^{-1} wie folgt:

$$\mathbf{M}_T^{-1} := \begin{bmatrix} \boxed{-(\partial_{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{q}} H)^T} & \boxed{-\mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q})} \\ \boxed{\mathbf{M}_{qq}^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q})} & \boxed{\partial_{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{q}} H} \end{bmatrix} \alpha \quad (3.141)$$

mit

$$\mathbf{M}_{qq}^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} & \mathbf{p}^T \frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial q_1} \mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} \mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} & \mathbf{p}^T \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

Nach Gl. (3.136) hat \mathbf{C}_T die folgende Form:

$$\mathbf{C}_T := \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{O}} & \boxed{\mathbf{O}} \\ \boxed{\partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q})} & \boxed{\mathbf{O}} \end{bmatrix} \alpha \quad (3.143)$$

Zum Schluß werden in den Matrizen \mathbf{M}_T^{-1} und \mathbf{C}_T die Abhängigkeit von α mit der Ersetzung der Lösungsfunktionen \mathbf{p} und \mathbf{q} durch die diskreten Lösungsfunktionen $\mathbf{p}^h(\alpha)$ bzw. $\mathbf{q}^h(\alpha)$ herbei geführt.

3.2.1 Beispielrechnung in absoluten Koordinaten

Zur Demonstration der Berechnung nichtlinearer Bewegungen, wird das vereinfachte Doppelpendel aus Kapitel 3.1.3 verwendet. Die Bewegung wird durch die Absolutwinkel q_1 und q_2 beschrieben. Die Vereinfachung betrifft wie zuvor die Massen und Pendellängen des Doppelpendels:

$$l := l_1 = l_2 \quad \text{und} \quad m := m_1 = m_2. \quad (3.144)$$

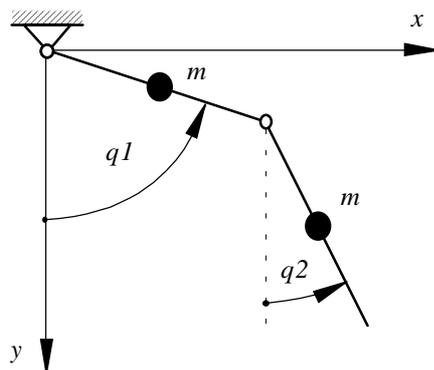


Abbildung 3.19: Doppelpendel in absoluten Koordinaten

Nach den Gln. (3.53 - 3.56) sind die Koeffizienten T_{ij} der kinetischen Energie T des Doppelpendels:

$$T_{11} = \frac{m}{2} 5 l^2 \quad (3.145)$$

$$T_{12} = \frac{m}{2} 2 l^2 \cos(q_1 - q_2) \quad (3.146)$$

$$T_{21} = T_{12} \quad (3.147)$$

$$T_{22} = \frac{m}{2} l^2 \quad (3.148)$$

Damit ist die nichtlineare Massenmatrix $\mathbf{M}_{nl\dot{in}}(\mathbf{q})$ wie folgt:

$$\mathbf{M}_{nl\dot{in}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 5 m l^2 & 2 m l^2 \cos(q_1 - q_2) \\ 2 m l^2 \cos(q_1 - q_2) & m l^2 \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

Nach der folgenden Rechenregel (3.150) für das Invertieren einer 2×2 -Matrix [10],

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

ergibt sich die inverse Massenmatrix $\mathbf{M}_{nl\dot{in}}^{-1}(\mathbf{q})$ zu:

$$\mathbf{M}_{nl\dot{in}}^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{\mathcal{D}}{m l^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \cos(q_1 - q_2) \\ -2 \cos(q_1 - q_2) & 5 \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

mit

$$\mathcal{D} = \frac{1}{5 - 4 \cos^2(q_1 - q_2)} \quad (3.152)$$

Damit läßt sich die partielle Ableitung der HAMILTON-Funktion H nach dem generalisierten Impuls \mathbf{p} nach Gl. (3.124) direkt angeben:

$$\partial_{\mathbf{p}} H = \frac{\mathcal{D}}{m l^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \cos(q_1 - q_2) \\ -2 \cos(q_1 - q_2) & 5 \end{bmatrix} \mathbf{p} \quad (3.153)$$

Für die partielle Ableitung der HAMILTON-Funktion H nach den generalisierten Koordinaten \mathbf{q} nach Gl. (3.125) wird das Potential V benötigt. Das Potential $V(\mathbf{q})$ ist nach Gl. (3.58) für das betrachtete Doppelpendel:

$$V(\mathbf{q}) = -m g l (3 \cos q_1 + \cos q_2) \quad (3.154)$$

Die partielle Ableitung von H nach \mathbf{q} ergibt sich mit Gl. (3.125) zu:

$$\partial_{\mathbf{q}}H = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \\ -\mathbf{p}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{p} + \begin{bmatrix} 3 \sin q_1 \\ \sin q_2 \end{bmatrix} g l m \quad (3.155)$$

mit

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \frac{\mathcal{D}^2 s}{m l^2} \begin{bmatrix} -4 \cos(q_1 - q_2) & 4 \cos^2(q_1 - q_2) + 5 \\ 4 \cos^2(q_1 - q_2) + 5 & -20 \cos(q_1 - q_2) \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

und $s := \sin(q_1 - q_2)$.

Die Matrixschreibweise aus Gl. (3.155) läßt sich aber vereinfachen, so daß letztendlich gilt:

$$\partial_{\mathbf{q}}H = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ -\mathbf{p}^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + \begin{bmatrix} 3 \sin q_1 \\ \sin q_2 \end{bmatrix} g l m \quad (3.157)$$

Nach der Einführung der diskreten Lösungsfunktionen $\mathbf{p}^h(\alpha)$ und $\mathbf{q}^h(\alpha)$ ist nur noch α eine kontinuierliche Variable in Gl. (3.153) und Gl. (3.157). Das Residuum ergibt sich dann nach Gl. (3.126) zu:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} + h_n \int_0^1 \begin{bmatrix} -\partial_{\mathbf{p}}H(\alpha) \\ \partial_{\mathbf{q}}H(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha \quad (3.158)$$

Die Tangente \mathbf{K}_T berechnet sich aus dem Residuum \mathbf{R} nach Gl. (3.127) unter Beachtung der Vereinbarung in Gl. (3.140) wie folgt:

$$\mathbf{K}_T \equiv \partial_{\mathbf{x}_2} \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{I} + h_n \int_0^1 (\mathbf{M}_T^{-1}(\alpha) + \mathbf{C}_T(\alpha)) d\alpha \quad (3.159)$$

Dabei besitzt die Matrix \mathbf{M}_T^{-1} nach Gl. (3.141) die folgende Gestalt:

$$\mathbf{M}_T^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{-(\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H)^T} & \boxed{-\mathbf{M}_{nlm}^{-1}(\mathbf{q})} \\ \boxed{\mathbf{M}_{qq}^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q})} & \boxed{\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H} \end{bmatrix} \alpha \quad (3.160)$$

Mit Gl. (3.155) lassen sich die beiden Untermatrizen auf der Hauptdiagonalen nach den Gln. (3.138) bzw. (3.139) berechnen:

$$\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H = \begin{bmatrix} 2(\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{p})^T \\ -2(\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{p})^T \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

$$-(\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H)^T = \begin{bmatrix} -2\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{p} & 2\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

Die Matrix \mathbf{M}_{qq}^{-1} ergibt sich nach Gl. (3.142) zu:

$$\mathbf{M}_{qq}^{-1} = \left(\mathbf{p}^T \begin{bmatrix} \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ \mathcal{G} & 5\mathcal{F} \end{bmatrix} \mathbf{p} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

Die unbekanntenen Koeffizienten der Matrix sind:

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{D}^3}{m l^2} \left(16 c^4 + 48 c^2 s^2 + 20 (s^2 - c^2) \right) \quad (3.164)$$

$$\mathcal{G} = -\frac{\mathcal{D}^3 c}{m l^2} \left(16 c^4 + 32 c^2 s^2 + 120 s^2 - 25 \right) \quad (3.165)$$

mit $c := \cos(q_1 - q_2)$ und $s := \sin(q_1 - q_2)$.

Zuletzt noch die Matrix \mathbf{C}_T . Sie ist nach Gl. (3.143) ebenfalls in Untermatrizen aufgeteilt:

$$\mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{O}} & \boxed{\mathbf{O}} \\ \boxed{\partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q})} & \boxed{\mathbf{O}} \end{bmatrix} \alpha \quad (3.166)$$

Hierbei entspricht $\partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q})$ nach Gl. (3.137) der HESSE-Matrix \mathcal{H}_q^V . Somit hat die Matrix \mathbf{C}_T folgende Gestalt:

$$\mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{O}} & \boxed{\mathbf{O}} \\ \boxed{\begin{matrix} 3 \cos q_1 & 0 \\ 0 & \cos q_2 \end{matrix}} & \boxed{\mathbf{O}} \end{bmatrix} \alpha \quad (3.167)$$

Im letzten Schritt ist zur Integration der Matrizen \mathbf{M}_T^{-1} und \mathbf{C}_T über α , die Substitution der kontinuierlichen Lösungsfunktionen \mathbf{p} und \mathbf{q} durch deren diskretisierten Formen $\mathbf{p}^h(\alpha)$ und $\mathbf{q}^h(\alpha)$ notwendig. Dies hat zur Folge, daß nur noch α eine kontinuierliche Variable in den Gln. (3.160) und (3.167) ist. Die Integration wird hier, auch bei überwiegend trigonometrischen Funktionen, durch eine Quadratur nach GAUSS angenähert [4, 13]. Bei den hier verwendeten linearen Formfunktionen führt jedoch eine Quadratur nach GAUSS mit genügend hoher GAUSS-Punktezahl zu einem unbedeutenden Fehler [1]. Die Quadratur betrifft das Residuum \mathbf{R} und die Tangente \mathbf{K}_T :

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} + h_n \sum_{i=1}^{ngp} \begin{bmatrix} -\partial_{\mathbf{p}} H(\alpha_i) \\ \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha_i) \end{bmatrix} w_i \quad (3.168)$$

mit ngp als Anzahl der GAUSS-Punkte und w_i als die zugehörigen Gewichte. Ebenso bei der Tangente \mathbf{K}_T :

$$\mathbf{K}_T \approx \mathbf{I} + h_n \sum_{i=1}^{ngp} \left(\mathbf{M}_T^{-1}(\alpha_i) + \mathbf{C}_T(\alpha_i) \right) \alpha_i w_i \quad (3.169)$$

Eine konkrete Anfangsbedingung

Als konkrete Anfangsbedingung für das nichtlineare Doppelpendel wird eine Anfangsauslenkung des unteren Pendels um $+90^\circ$ betrachtet (s. Tab. 3.3 und Abb. 3.20).

q_1	q_2	\dot{q}_1	\dot{q}_2
0	$\frac{\pi}{2}$	0	0

Tabelle 3.3: Nichtlineare Anfangsbedingung für Absolutwinkel

Die numerischen Lösungen und Phasenkurven wurden durch eine Quadratur mit fünf GAUSS-Punkten berechnet. Eine höhere Anzahl von GAUSS-Punkten wurde nicht implementiert. Die durchgezogenen Linien stehen für die analytischen Lösungen bzw. Phasenkurven der linearisierten Bewegungsgleichungen. Die Einbindung der linearen Berechnungen in die Rechnerschriebe, soll Unterschiede und eventuelle Gemeinsamkeiten zu den nichtlinearen Berechnungen verdeutlichen.

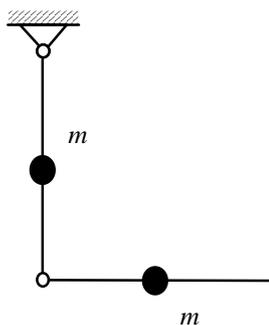


Abbildung 3.20: Anfangsauslenkung um $+90^\circ$ beim unteren Pendel

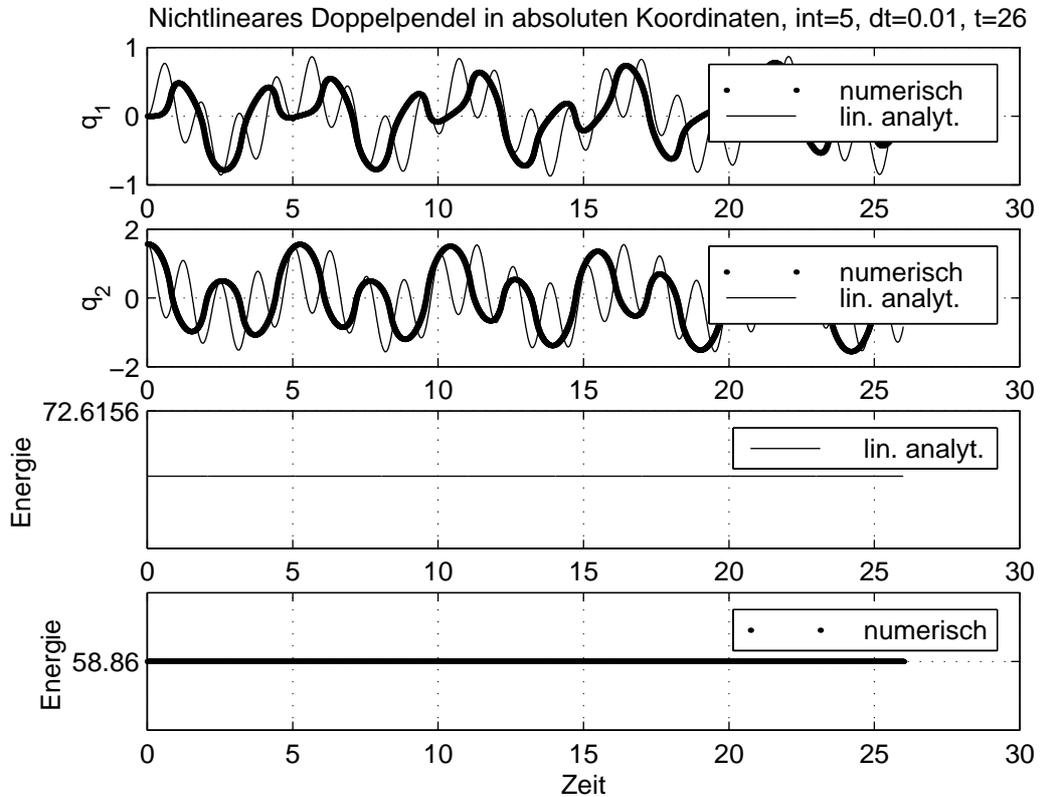


Abbildung 3.21: Lösung bei $q_{2_0} = +90^\circ$ mit $m = 2, l = 3$

Um auch die linearisierte Gesamtenergie mit der nichtlinearen Gesamtenergie vergleichen zu können, wird das Nullniveau des nichtlinearen Potentials an das Nullniveau des linearisierten Potentials angeglichen. Dies geschieht durch Abzug der potentiellen Energie $V(\mathbf{q} = \mathbf{0})$ des nichtlinearen Systems in der stabilen Ruhelage, von dessen Gesamtenergie E .

In Abb. 3.21 kann man erkennen, daß bei der hier vorliegenden Gesamtenergie $E = mgl$ eine reine Pendelbewegung beider Pendel vorliegt. Es treten keine Überschläge auf, die durch einen Winkel von größer 2π zu erkennen wären. Man sieht auch, daß die nichtlinearen Lösungen immer in der Nähe der linearen Lösungen bleiben.

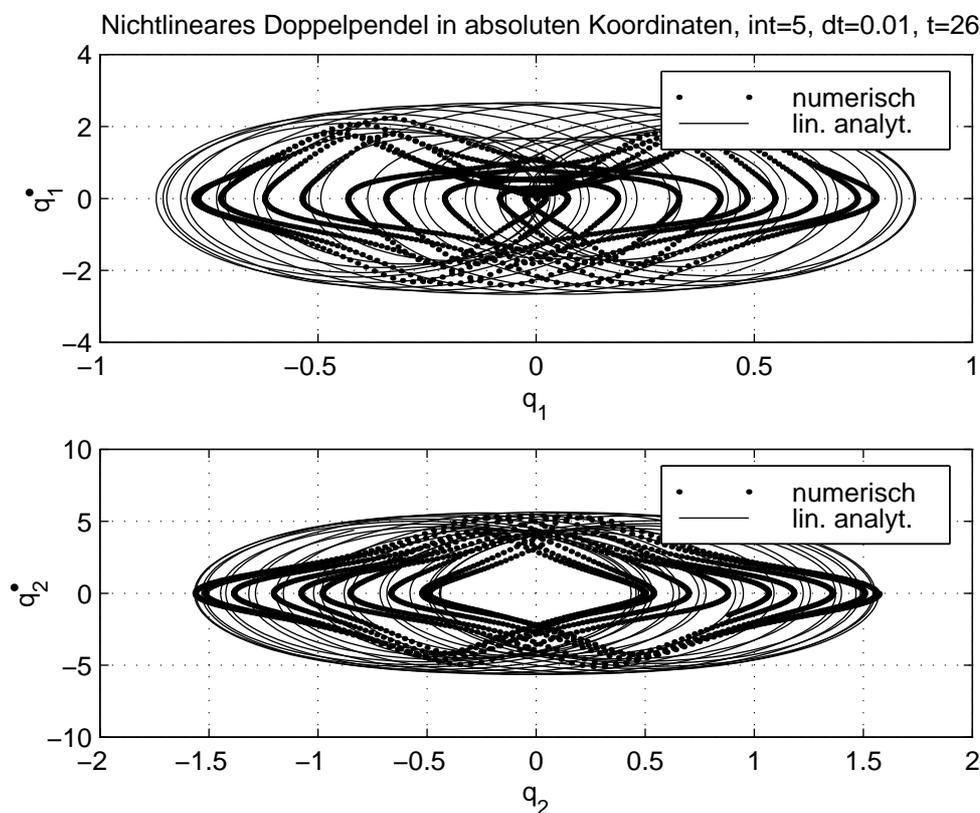


Abbildung 3.22: Phasenebenen bei $q_{2_0} = +90^\circ$ mit $m = 2$, $l = 3$

An Hand der Phasenebenen in Abb. 3.22 läßt sich ein Zusammenhang zwischen der linearen und der nichtlinearen Berechnung vermuten. Bekannt ist, daß die Phasenebenen des linearen Systems durch Projektion eines zwei-dimensionalen Torus auf die entsprechenden Ebenen des Phasenraumes entstehen (Kapitel 3.1.3). Die Phasenkurven des nichtlinearen Systems bleiben zu jedem Zeitpunkt t innerhalb des Torus, der von dem linearisierten System aufgespannt wird. Sie berühren ihn nur von Zeit zu Zeit an der Innenseite. Somit gibt hier das lineare System den maximal einnehmbaren Unterraum des Phasenraumes für die Bewegung vor. Deshalb ist auch in Abb. 3.21 die Gesamtenergie des linearen Systems größer als die tatsächliche Gesamtener-

gie.

3.2.2 Beispielrechnung in relativen Koordinaten

Eine zweite mögliche Form der Bewegungsgleichungen eines nichtlinearen Doppelpendels kann mit der Verwendung der Relativwinkel q_1 und q_2 entstehen. Es wird wieder die Gleichheit der Pendellängen bzw. Pendelmassen angenommen.

$$l := l_1 = l_2 \quad \text{und} \quad m := m_1 = m_2. \quad (3.170)$$

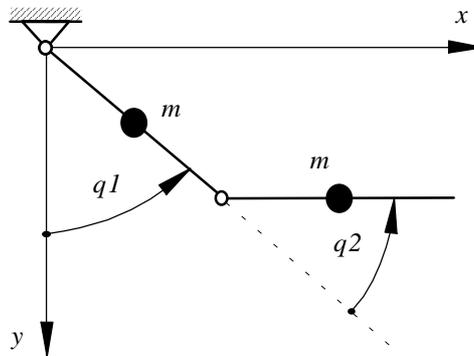


Abbildung 3.23: Doppelpendel in relativen Koordinaten

Die Koeffizienten T_{ij} ergeben sich nach den Gln. (3.88 - 3.91) zu:

$$T_{11} = m l^2 (3 + 2 \cos q_2) \quad (3.171)$$

$$T_{12} = \frac{1}{2} m l^2 (1 + 2 \cos q_2) \quad (3.172)$$

$$T_{21} = T_{12} \quad (3.173)$$

$$T_{22} = \frac{1}{2} m l^2 \quad (3.174)$$

Aus diesen Koeffizienten T_{ij} der kinetischen Energie T ergibt sich die Massenmatrix des nichtlinearen Systems \mathbf{M}_{nlin} zu:

$$\mathbf{M}_{nlin}(\mathbf{q}) = m l^2 \begin{bmatrix} 6 + 4 \cos q_2 & 1 + 2 \cos q_2 \\ 1 + 2 \cos q_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.175)$$

Mit Gl.(3.150) als Rechenregel für das Invertieren einer 2×2 -Matrix folgt die inverse Massenmatrix \mathbf{M}_{nlin}^{-1} aus Gl. (3.175):

$$\mathbf{M}_{nlin}^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{\mathcal{D}}{m l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 - 2 \cos q_2 \\ -1 - 2 \cos q_2 & 6 + 4 \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

mit

$$\mathcal{D} = \frac{1}{5 - 4 \cos^2 q_2} \quad (3.177)$$

Die partielle Ableitung der HAMILTON-Funktion H nach dem generalisierten Impuls \mathbf{p} folgt nach Gl. (3.124):

$$\partial_{\mathbf{p}} H = \frac{\mathcal{D}}{m l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 - 2 \cos q_2 \\ -1 - 2 \cos q_2 & 6 + 4 \cos q_2 \end{bmatrix} \mathbf{p} \quad (3.178)$$

Das Potential $V(\mathbf{q})$ ist mit Gl. (3.93) gegeben:

$$V(\mathbf{q}) = -m g l (3 \cos q_1 + \cos(q_1 + q_2)) \quad (3.179)$$

Ebenso folgt direkt mit der inversen Massenmatrix in Gl. (3.176) und dem Potential V , aus Gl. (3.125) die partielle Ableitung von H nach den generalisierten Koordinaten:

$$\partial_{\mathbf{q}} H = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{p}^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + \begin{bmatrix} 3 \sin q_1 + \sin(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} g l m \quad (3.180)$$

mit

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \frac{\mathcal{D}^2 s}{m l^2} \begin{bmatrix} 4c & -4c - (4c^2 + 5) \\ -4c - (4c^2 + 5) & 8c^2 + 24c + 10 \end{bmatrix} \quad (3.181)$$

wobei $s := \sin q_2$ und $c := \cos q_2$.

Durch die Einführung der diskreten Lösungsfunktionen $\mathbf{p}^h(\alpha)$ und $\mathbf{q}^h(\alpha)$ in die Gln. (3.178) und (3.180) ist die Integration im Zeitschrittverfahren bzw. Residuum $\mathbf{R}(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) = \mathbf{0}$ durchführbar. Das Residuum ist nach Gl. (3.126) wie folgt:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} + h_n \int_0^1 \begin{bmatrix} -\partial_{\mathbf{p}} H(\alpha) \\ \partial_{\mathbf{q}} H(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha \quad (3.182)$$

Durch Ableiten des Residuums nach dem Variablenvektor ergibt sich die Tangente \mathbf{K}_T nach Gl. (3.127), unter Beachtung der Definition in Gl. (3.140), zu:

$$\mathbf{K}_T \equiv \partial_{\mathbf{x}_2} \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{I} + h_n \int_0^1 (\mathbf{M}_T^{-1}(\alpha) + \mathbf{C}_T(\alpha)) d\alpha \quad (3.183)$$

Hierbei gilt für die Matrix \mathbf{M}_T^{-1} nach Gl. (3.141):

$$\mathbf{M}_T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{-(\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H)^T} & \boxed{-\mathbf{M}_{nl}^{-1}(\mathbf{q})} \\ \hline \boxed{\mathbf{M}_{qq}^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q})} & \boxed{\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H} \end{array} \right] \alpha \quad (3.184)$$

Die beiden Untermatrizen auf der Hauptdiagonalen sind mit der partiellen Ableitung (3.180) nach den Gln. (3.138) bzw. (3.139) zu ermitteln:

$$\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -2(\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{p})^T \end{bmatrix} \quad (3.185)$$

$$-(\partial_{\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{q}}H)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

Die noch fehlende Matrix \mathbf{M}_{qq}^{-1} ist nach der Gl. (3.142) zu berechnen:

$$\mathbf{M}_{qq}^{-1} = \left(\mathbf{p}^T \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & \mathcal{G} \\ \mathcal{G} & \mathcal{F}_2 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.187)$$

mit

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\mathcal{D}^3}{m l^2} \left(16 c^4 + 48 s^2 c^2 + 20 (s^2 - c^2) \right) \quad (3.188)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &= \frac{\mathcal{D}^3}{m l^2} \left(32 c^5 + 96 c^4 + 64 s^2 c^3 + 288 s^2 c^2 \right) + \\ &+ \frac{\mathcal{D}^3}{m l^2} \left(240 s^2 c - 50 c + 120 (s^2 - c^2) \right) \end{aligned} \quad (3.189)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= -\frac{\mathcal{D}^3}{m l^2} \left(16 c^5 + 16 c^4 + 32 s^2 c^3 + 48 s^2 c^2 \right) - \\ &- \frac{\mathcal{D}^3}{m l^2} \left(120 s^2 c - 25 c + 20 (s^2 - c^2) \right) \end{aligned} \quad (3.190)$$

wobei $c := \cos q_2$ und $s := \sin q_2$.

Die zweite Teilmatrix von \mathbf{H}_T ist die Matrix \mathbf{C}_T mit:

$$\mathbf{C}_T = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\mathbf{0}} & \boxed{\mathbf{0}} \\ \hline \boxed{\partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q})} & \boxed{\mathbf{0}} \end{array} \right] \alpha \quad (3.191)$$

Die Untermatrix $\partial_{\mathbf{q}}^2 V(\mathbf{q})$ ist nach Gl. (3.137) die HESSE-Matrix \mathcal{H}_q^V :

$$\mathbf{C}_T = \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{\mathbf{O}} & \boxed{\mathbf{O}} & \\ \hline \boxed{\begin{array}{cc} 3 \cos q_1 + c_+ & c_+ \\ c_+ & c_+ \end{array}} & \boxed{\mathbf{O}} & \\ \hline \end{array} \right] \alpha \quad (3.192)$$

Dabei ist $c_+ := \cos(q_1 + q_2)$.

Zur Integration der Matrizen \mathbf{M}_T^{-1} und \mathbf{C}_T ist noch die Substitution der kontinuierlichen Lösungsfunktionen \mathbf{p} und \mathbf{q} durch $\mathbf{p}^h(\alpha)$ und $\mathbf{q}^h(\alpha)$ notwendig. Die Integration wird analog zu Kap. 3.2.1 durch eine Quadratur nach GAUSS angenähert.

Eine konkrete Anfangsbedingung

Für das nichtlineare Doppelpendel in relativen Koordinaten wird ebenfalls die Anfangsauslenkung des unteren Pendels um $+90^\circ$ betrachtet.

q_1	q_2	\dot{q}_1	\dot{q}_2
0	$\frac{\pi}{2}$	0	0

Tabelle 3.4: Nichtlineare Anfangsbedingung für Relativwinkel

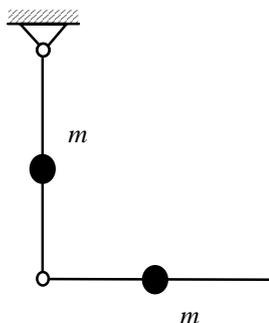


Abbildung 3.24: Anfangsauslenkung um $+90^\circ$ beim unteren Pendel

Da das obere Pendel keine Auslenkung erfährt, ist der Betrag des Relativwinkels identisch mit dem des Absolutwinkels (s. Tab. 3.4).

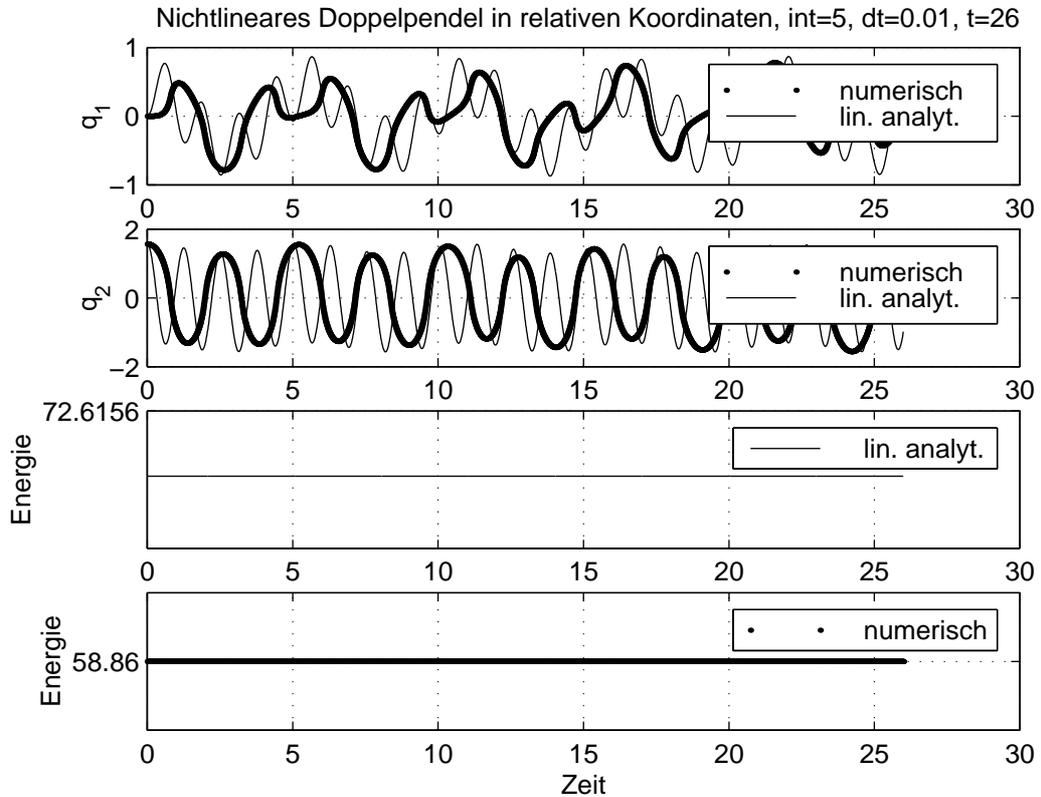


Abbildung 3.25: Lösung bei $q_{20} = +90^\circ$ mit $m = 2, l = 3$

Die Quadratur wird mit fünf GAUSS-Punkten durchgeführt. Dies entspricht auch hier der implementierten maximalen GAUSS-Punktezahl. Die durchgezogenen Kurven entsprechen der analytischen Lösungen bzw. Phasenkurven des linearisierten Systems. Das Nullniveau der Energie des nichtlinearen Doppelpendels wird wieder an das Nullniveau des linearen Doppelpendels angeglichen.

In Abb. 3.25 und Abb. 3.26 werden die Ergebnisse aus Kap. 3.2.1 bestätigt. Die Lösungen weisen auf eine reine Pendelbewegung der zwei Pendelstangen hin. Eine reine Pendelbewegung bedeutet keine Überschläge einer oder beider Pendelstangen. Die nichtlinearen Lösungen verlaufen immer in der Nähe

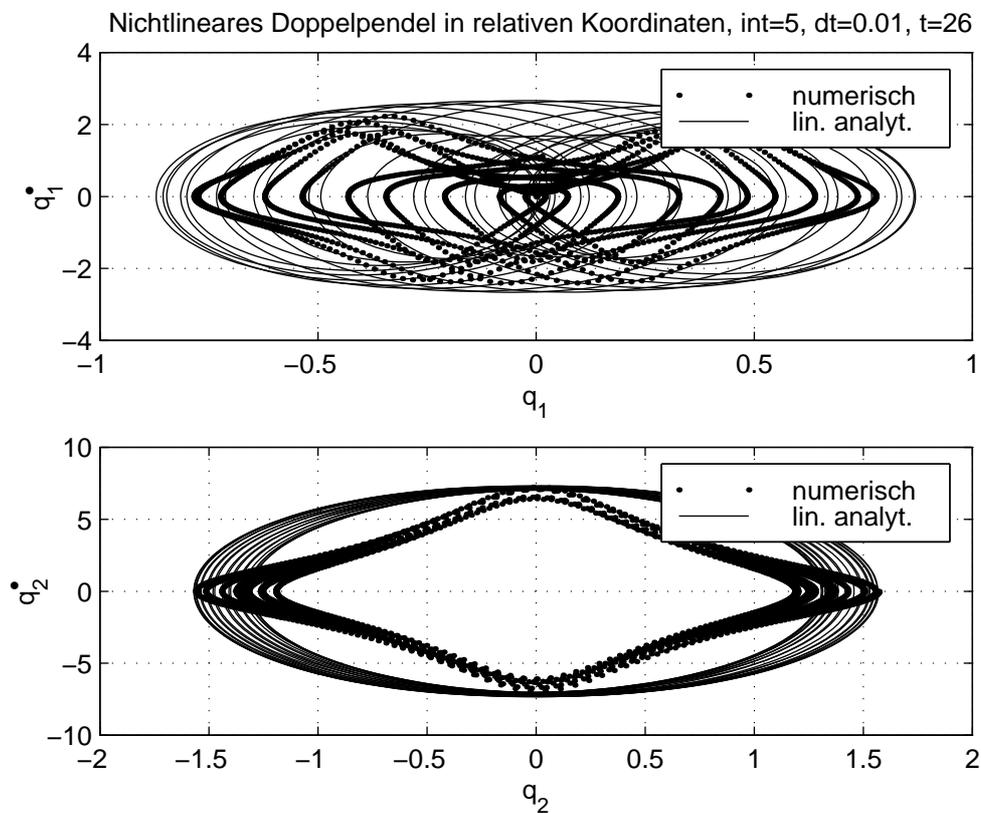


Abbildung 3.26: Phasenebenen bei $q_{2_0} = +90^\circ$ mit $m = 2$, $l = 3$

der linearen Lösungen. Die Phasenkurven des linearen Systems in Abb. 3.26 umfahren im Phasenraum einen zwei-dimensionalen Torus T^2 . Die Phasenkurven des nichtlinearen Systems bleiben zu jeder Zeit innerhalb dieses Torus. Lediglich eine Berührung an der Innenseite findet statt.

3.2.3 Schlußbemerkungen zur numerischen Lösung

Unterschiedliche Koordinaten rufen unter anderem eine unterschiedliche Struktur der nichtlinearen Massenmatrix \mathbf{M}_{nlin} und der Tangente \mathbf{K}_T hervor. Diese Matrizen üben Einflüsse auf das NEWTON-RAPHSON-Verfahren aus, das hier für die iterative Lösung des Zeitschrittverfahrens verantwortlich ist. Zum Beispiel ist \mathbf{K}_T für die Konvergenzrate verantwortlich [13].

Hinsichtlich der Konvergenz wurden keine Unterschiede festgestellt. Bei beiden Koordinatensätzen wurde eine Konvergenz nach spätestens drei Iterationen erreicht. Dabei hatte das Residuum eine Toleranz von 10^{-13} zu unterschreiten. Minimal wurde eine Iteration benötigt.

Als Maß für die Empfindlichkeit des relativen Fehlers der Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS) wird die sogenannte Konditionszahl verwendet. Ebenso mißt die Konditionszahl auch die Störempfindlichkeit der Lösung des LGS gegenüber Änderungen in der Koeffizientenmatrix des LGS, die z.B durch Rundungsfehler entstehen. Je größer die Konditionszahl ist, desto empfindlicher reagiert das LGS, d.h desto schlechter ist das LGS konditioniert. Im Falle des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens wird pro Iteration (m) das LGS $\mathbf{K}_T^{(m)} \mathbf{dx}_2^{(m)} = \mathbf{R}^{(m)}$ mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{K}_T^{(m)}$ gelöst. Dabei ist $\mathbf{dx}_2^{(m)}$ das Inkrement zum nächsten Iterationsschritt (m+1). Somit gibt die Konditionszahl von $\mathbf{K}_T^{(m)}$ Auskunft über Stellen, die eine eventuelle Ungenauigkeit in der Lösung mitführen können [13].

Allgemein ist die Konditionszahl $\text{cond}(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ einer quadratischen Matrix \mathbf{A} auf die verwendete Matrixnorm bezogen [13]. Hier im Fall der Tangente \mathbf{K}_T wurde die Zeilensummennorm $\|\mathbf{K}_T\|_\infty = \max_i \sum_{k=1}^n |k_{T_{ik}}|$ mit $\mathbf{K}_T = [k_{T_{ik}}]_{i,k=1,\dots,n}$ verwendet.

Im oberen Teil der Abb. 3.27 wird für absolute Koordinaten die Kondition der Tangente \mathbf{K}_T und der inversen Massenmatrix \mathbf{M}_{nlin}^{-1} über der Zeit aufgetragen. Im Fall von $\text{cond}(\mathbf{K}_T(t))$ wird also die Konditionierung des LGS bei der letzten Iteration im Zeitschritt t angezeigt. In dem in Abb. 3.27 dargestellten Zeitfenster sind zwei Zeitpunkte zu erkennen, bei denen die Kondition beider Matrizen fast sprunghaft ansteigt. Zu diesen Zeitpunkten liefert das NEWTON-RAPHSON-Verfahren also schlechtere Ergebnisse, wenn in der Matrix oder im Residuum $\mathbf{R}(t)$ Rundungsfehler auftauchen. Da die inverse Massenmatrix eine Untermatrix der Tangente ist, scheint der Anstieg in der Tangente zum Teil durch die inverse Massenmatrix verursacht zu werden. Da aber der Anstieg von \mathbf{K}_T niedriger ist als der von \mathbf{M}_{nlin}^{-1} , „dämpfen“ scheinbar die restlichen Untermatrizen zum Teil den Anstieg der Kondition

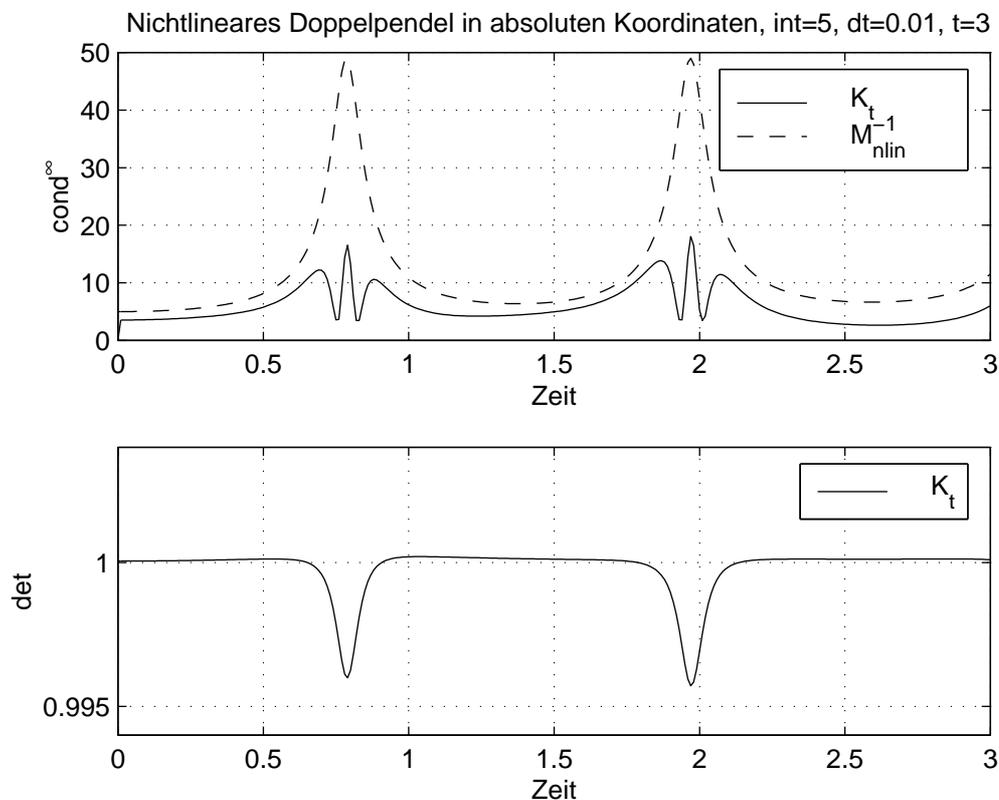


Abbildung 3.27: Kondition bei $q_{2_0} = +90^\circ$ mit $m = 2$, $l = 3$

von \mathbf{K}_T .

Bei relativen Koordinaten (siehe Abb. 3.28) ist kaum ein Anstieg bei der Kondition der Tangente \mathbf{K}_T zu erkennen. Allein eine starke Konditionserhöhung bei der inversen Massenmatrix ist sichtbar. Eine Konditionserhöhung die zudem stärker ist als bei absoluten Koordinaten. Die Dämpfung der Konditionserhöhung bei \mathbf{K}_T durch die übrigen Untermatrizen der Tangente, ist somit bei relativen Koordinaten effektiver. Das LGS des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens ist somit mit relativen Koordinaten besser konditioniert.

Nach der CRAMERSchen Regel berechnet sich die Lösung eines LGS mit Hilfe der Determinante der Koeffizientenmatrix des LGS [10]. Aus diesem Grund

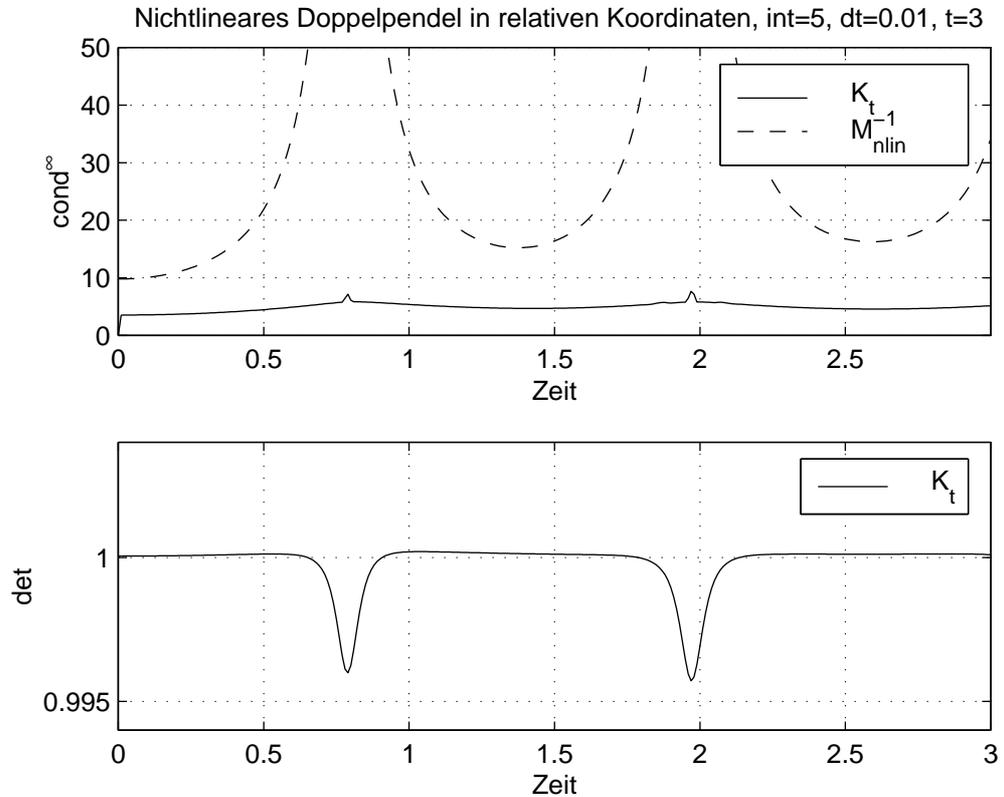


Abbildung 3.28: Kondition bei $q_{20} = +90^\circ$ mit $m = 2$, $l = 3$

werden in Abb. 3.27 und Abb. 3.28 die Determinanten der Tangenten beider Koordinatensätze über der Zeit aufgetragen.

Ein schlagartiges Fallen der Determinante, zu den Zeitpunkten an denen die Matrizenkondition eine Erhöhung erfährt, ist erkennbar. Zu den übrigen Zeitpunkten ist die Determinante praktisch konstant. Die Determinantenverläufe der beiden Tangenten der unterschiedlichen Koordinatensätze sind identisch, da beide Tangenten zueinander *ähnlich* sind. Ähnliche Matrizen besitzen stets die gleiche Determinante. Die Ähnlichkeit rührt von einer bijektiven Abbildung zwischen den Matrizenbasen [10], die hier durch die Koordinatentransformation zwischen Absolut- und Relativwinkel entsteht.

Damit ist klar, daß die Ursache des Effektes der Konditions- und Determinantenänderung nicht in den Koordinaten liegt. Die Wirkung des Effektes ist aber durch die Koordinatenwahl zu beeinflussen.

Anhang A

KEPLER-Problem

```
***** HAUPTPROGRAMM *****
clear qplo1 qplo2 rho phi x y Zeit
clear Energie AnaEnergie Kopfzeile times rplo Vstr
q1=zeros(2,1);
p1=zeros(2,1);
kt=zeros(2,2);
mass = 2;
k = 1;
tol = 1e-13;
r=2
disp('Anfangsbedingungen für Kreisbahn mit Radius r')
q1(2) = r;
p1(1) = -sqrt(mass*k/r);
l=-p1(1)*r;
E=-k/(2*r);
phistr=pi/2;
ph=l*1/(mass*k);
eps=sqrt(1+2*E*ph/k);
q2=q1;
p2=p1;
disp('*****');
disp('Anfangsbedigungen ');
disp('*****');
disp(' q1 p1');
initcond=[q1,p1]
```

```

j = 1;
Zeit(j)=0;
qplo1(j)=q1(1);
qplo2(j)=q1(2);
Energie(j)=.5/mass*p1'*p1+pot(norm(q1),k);
AnaEnergie(j)=E;
phi(j)=phistr;
rho(j)=ph/(1+eps*cos(phi(j)-phistr));
[x(j),y(j)]=pol2cart(phi(j),rho(j));
dt = input('dt = ');
intr = input('ir = ');
rplo(j)=dt;
Vstr(j)=Vstrich(rplo(j),l,mass,k);
for i=1:100;
macro = input('macro:', 's');
[ir,ic] = size(macro);
if ic<4
disp('mindestens vier Zeichen für ein Makro-Kommando!')
else
if (strcmp(macro(1:4),'step') == 1);
[ir,ic] = size(macro);
if ic==4
nsteps = 1;
else
nsteps = str2num(macro(7:ic));
end
for i = 1:nsteps;
j = j+1;
Zeit(j) = Zeit(j-1) + dt;
q1=q2;
p1=p2;
[resq,kt] = resinum(intr,dt,mass,k,q1,p1,q2);
iter=0;
while norm(resq) > tol;
    iter=iter+1;
    if iter>15
        disp('Divergenz: Mehr als 15 Iterationen benötigt!')
    return

```

```

    else
        dq = -kt\resq;
        q2=q2+dq;
        [resq,kt]=resinum(intr,dt,mass,k,q1,p1,q2);
    end
end
p2=2*mass/dt*(q2-q1)-p1;
qp1o1(j)=q2(1);
qp1o2(j)=q2(2);
Energie(j)=.5/mass*p2'*p2+pot(norm(q2),k);
rp1o(j)=Zeit(j);
Vstr(j)=Vstrich(rp1o(j),l,mass,k);
AnaEnergie(j)=E;
phi(j)=phi(1)+0.18*Zeit(j);
rho(j)=ph/(1+eps*cos(phi(j)-phistr));
[x(j),y(j)]=pol2cart(phi(j),rho(j));
end
elseif (strcmp(macro(1:4),'dt,') == 1);
    [ir,ic] = size(macro);
    dtstr = macro(5:ic);
    dt = str2num(dtstr);
elseif (strcmp(macro(1:4),'tol,') == 1);
    [ir,ic] = size(macro);
    tolstr = macro(6:ic);
    disp('Alte Toleranz = '),disp(tol)
    tol = str2num(tolstr);
    disp('Neue Toleranz = '),disp(tol)
elseif (strcmp(macro(1:4),'quit') == 1);
    return
else
    disp('Kein Makro-Kommando! ')
    disp('Verfügbare Makro-Kommandos :')
    disp('step,,n dt,,x tol,,x quit')
end
end
Kopfzeile = 'Kepler-Problem in kartesischen Koordinaten, int=';
irs= num2str(intr);
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);

```

```

[ir2,ic2] = size(irs);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = irs;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
tstep = ', dt=';
[ir2,ic2] = size(tstep);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = tstep;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
dts = num2str(dt);
[ir2,ic2] = size(dts);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = dts;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
tstr = ', t=';
[ir2,ic2] = size(tstr);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = tstr;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
times = num2str(Zeit(j));
[ir2,ic2] = size(times);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = times;
figure(1)
    subplot(2,1,1), plot(qplo1,qplo2,'.k',x,y,'k');
    grid;
    axis square;
    title('x')
    ylabel('y')
    legend('numerisch','analytisch',-1);
    subplot(2,1,2),
    plot(Zeit,Energie,'.k',Zeit,AnaEnergie,'k',rplo,Vstr,'k--',
    0,E,'k+',Zeit(j)+dt,E,'k+');
    grid;
    xlabel('Zeit / Radius')
    ylabel('Energie')
    legend('Gesamtenergie, num.','Gesamtenergie, analyt.',
    'Effektives Potential V(r)');
    axis([0 Zeit(j)+dt 2*E -2*E]);
    title(Kopfzeile)
end
***** Vstrich.m *****
function [Vs] = Vstrich(r,l,mass,k)

```

```

Vs = pot(r,k)+l*l/(2*mass*r*r);
***** resinum.m *****
function [resq,kt] = resinum(ir,dt,mass,k,q1,p1,q2)
ngp=ir;
if ir==1
    g1=0.5; w1=1.0;
    gp=g1; w=w1;
elseif ir==2
    gg=0.577350269189626; w1=0.5;
    g1=(1-gg)/2; g2=(1+gg)/2;
    gp=[g1, g2];
    w=[w1, w1];
elseif ir==3
    gg1=0.774596669241483; gg2=0;
    w1=5/18; w2=4/9;
    g1=(1-gg1)/2;
    g2=(1+gg2)/2;
    g3=(1+gg1)/2;
    gp=[g1, g2, g3];
    w=[w1, w2, w1];
elseif ir==4
    a = 3/7;
    b = 2*sqrt(1.2)/7;
    gp(1) = (1-sqrt(a+b))/2;
    gp(2) = (1-sqrt(a-b))/2;
    gp(3) = (1+sqrt(a-b))/2;
    gp(4) = (1+sqrt(a+b))/2;
    w(1) = (3-sqrt(5/6))/12;
    w(2) = 0.5-w(1);
    w(3) = w(2);
    w(4) = w(1);
elseif ir==5
    a = 5/9;
    b = 2*sqrt(10/7)/9;
    gp(1) = (1-sqrt(a+b))/2;
    gp(2) = (1-sqrt(a-b))/2;
    gp(3) = (1+0)/2;
    gp(4) = (1+sqrt(a-b))/2;

```

```

gp(5) = (1+sqrt(a+b))/2;
c = 161/450;
d = 13*sqrt(7/10)/90;
w(1) = (c-d)/2;
w(2) = (c+d)/2;
w(3) = 64/225;
w(4) = w(2);
w(5) = w(1);
else
    disp('Integrationsregel nicht implementiert!');
    return
end
N(1,:) = 1-gp;
N(2,:) = gp;
q = q1*N(1,:) + q2*N(2,:);
intf = zeros(2,1);
kt = zeros(2,2);
for i = 1:ngp
    normq = norm(q(:,i));
    [der1,der2] = deriv(normq,k);
    term1 = der1/normq;
    intf = intf + q(:,i)*term1*w(i);
    term2 = (der2-term1)/(normq*normq);
    kt = kt + (diag(term1*ones(2,1)) +
        term2*q(:,i)*q(:,i)')*N(2,i)*w(i);
end
vor = 2*mass/dt;
resq = vor*(q2-q1) - 2*p1 + dt*intf;
kt = diag(vor*ones(2,1)) + dt*kt;
***** deriv.m *****
function [y1,y2] = deriv(normq,k)
y1 = k/(normq*normq);
y2 = -2*k/(normq*normq*normq);
***** pot.m *****
function y = pot(normq,k)
y = -k/normq;

```

Anhang B

DUFFING-Schwinger

```
***** HAUPTPROGRAMM *****
format long g;
clear x y q1plo v1plo q2plo v2plo Zeit
clear Energie AnaEnergie Kopfzeile Zeitintervall rplo Vstr
clear itera
Q1=zeros(2,1);
P1=zeros(2,1);
Kt =zeros(2,2);
mass = 2;
k = 1;
tol = 1e-13;
l=0;
disp('Anfangsbedingung für zwei Nullstellen')
r=4
v0=4
phi=pi/4
lambdainftyabs=mass/(2*k)*(v0/r)*(v0/r)+r*r/2
lambda=r*r-lambdainftyabs
E=k/2*lambdainftyabs*lambdainftyabs
Q1(1) = r;
Q1(2) = phi;
P1(1) = sqrt(2*mass*(E-pot(r,k,lambda)));
P1(2) = 0;
Q2=Q1;
P2=P1;
```

```

disp('*****');
disp('Anfangsbedingungen');
disp('*****');
disp(' q1 p1');
initcond=[Q1,P1]
j = 1;
Zeit(j)=0;
[x(j),y(j)]=pol2cart(Q1(2),Q1(1));
q1plo(j)=Q1(1);
v1plo(j)=1/mass*P1(1);
q2plo(j)=Q1(2);
v2plo(j)=1/(mass*Q1(1)*Q1(1))*P1(2);
Minv=[1 0; 0 1/(Q1(1)*Q1(1))];
Energie(j)=1/(2*mass)*P1'*Minv*P1+pot(Q1(1),k,lambda);
AnaEnergie(j)=E;
dt = input('Zeitschritt: dt = ');
intr = input('Gauss-Punkte: ir = ');
rplo(j)=dt;
Vstr(j)=Vstrich(rplo(j),1,mass,k,lambda);
for i=1:100;
Makro = input('Makro:', 's');
[ir,ic] = size(Makro);
if ic<4
disp('mindestens vier Zeichen notwendig!')
else
if (strcmp(Makro(1:4),'step')== 1);
[ir,ic] = size(Makro);
if ic==4
nsteps = 1;
else
nsteps = str2num(Makro(7:ic));
end
for i = 1:nsteps;
j = j+1;
Zeit(j) = Zeit(j-1) + dt;
Q1=Q2;
P1=P2;
[resq,Kt] = resinum(intr,dt,mass,lambda,k,Q1,P1,Q2);

```

```

iter=0;
while abs(resq) > tol;
    iter=iter+1;
    if iter>15
        disp('Iterationsabbruch: Divergenz')
        return
    else
        Q2(1) = Q2(1)-Kt\resq;
        [resq,Kt] = resinum(intr,dt,mass,k,lambda,Q1,P1,Q2);
    end
end
itera(j)=iter;
Q2(2)=Q1(2)+dt/mass*P1(2)/(Q1(1)*Q2(1));
P2(1)=2*mass/dt*(Q2(1)-Q1(1))-P1(1);
P2(2)=P1(2);
q1plo(j)=Q2(1);
v1plo(j)=1/mass*P2(1);
q2plo(j)=Q2(2);
v2plo(j)=1/(mass*Q2(1)*Q2(1))*P2(2);
[x(j),y(j)]=pol2cart(Q2(2),Q2(1));
Minv=[1 0; 0 1/(Q2(1)*Q2(1))];
Energie(j)=1/(2*mass)*P2'*Minv*P2+pot(Q2(1),k,lambda);
AnaEnergie(j)=E;
rplo(j)=Zeit(j);
Vstr(j)=Vstrich(rplo(j),l,mass,k,lambda);
end
elseif (strcmp(Makro(1:4),'dt,') == 1);
    [ir,ic] = size(Makro);
    dtstr = Makro(5:ic);
    dt = str2num(dtstr);
elseif (strcmp(Makro(1:4),'tol,') == 1);
    [ir,ic] = size(Makro);
    tolstr = Makro(6:ic);
    disp('Alte Toleranz = '),disp(tol)
    tol = str2num(tolstr);
    disp('Neue Toleranz = '),disp(tol)
elseif (strcmp(Makro(1:4),'quit') == 1);

```

```

    return
else
    disp('Kein Makro-Kommando!')
    disp('Implementierten Makro-Kommandos:')
    disp('step,,n dt,,x tol,,x quit')
end
end
Kopfzeile = 'Duffing-Schwinger in Polarkoordinaten, int=';
irs= num2str(intr);
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
[ir2,ic2] = size(irs);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = irs;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
tstep = ', dt=';
[ir2,ic2] = size(tstep);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = tstep;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
dts = num2str(dt);
[ir2,ic2] = size(dts);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = dts;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
tstr = ', t=';
[ir2,ic2] = size(tstr);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = tstr;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
Zeitintervall = num2str(Zeit(j));
[ir2,ic2] = size(Zeitintervall);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = Zeitintervall;
figure(1)
    subplot(2,1,1), plot(x,y,'k');
    grid;
    axis square;
    title(Kopfzeile);
    axis([-4 4 -4 4])
    legend('numerisch',-1);
    title('x');
    ylabel('y');
    subplot(2,1,2), plot(Zeit,Energie,'.k',Zeit,AnaEnergie,'k',

```

```

rplo,Vstr,'k--',0,E,'k+',Zeit(j)+dt,E,'k+');
grid;
axis([0 Zeit(j) -10 90])
title(Kopfzeile);
xlabel('Zeit / Radius')
ylabel('Energie')
legend('Gesamtenergie, num.','Gesamtenergie, analyt.','
'Effektives Potential V(r)');
figure(2)
subplot(2,1,1), plot(q1plo,v1plo,'k');
grid;
title('r');
ylabel('vr');
legend('numerisch');
subplot(2,1,2), plot(q2plo,v2plo,'k. ');
grid;
title(Kopfzeile);
xlabel('phi');
ylabel('vphi');
legend('numerisch');
figure(3)
plot(q1plo,itera,'k');
grid;
title(Kopfzeile);
axis([-4.2 4.2 0 3.5]);
ylabel('Iterationen');
end
***** Vstrich.m *****
function [Vs] = Vstrich(r,l,mass,k)
Vs = pot(r,k)+l*l/(2*mass*r*r);
***** resinum.m *****
function [resq,Kt] = resinum(ir,dt,mass,k,lambda,Q1,P1,Q2)
ngp=ir;
if ir==1
    g1=0.5; w1=1.0;
    gp=g1; w=w1;
elseif ir==2
    gg=0.577350269189626; w1=0.5;

```

```

    g1=(1-gg)/2; g2=(1+gg)/2;
    gp=[g1, g2];
    w=[w1, w1];
elseif ir==3
    gg1=0.774596669241483; gg2=0;
    w1=5/18; w2=4/9;
    g1=(1-gg1)/2;
    g2=(1+gg2)/2;
    g3=(1+gg1)/2;
    gp=[g1, g2, g3];
    w=[w1, w2, w1];
elseif ir==4
    a = 3/7;
    b = 2*sqrt(1.2)/7;
    gp(1) = (1-sqrt(a+b))/2;
    gp(2) = (1-sqrt(a-b))/2;
    gp(3) = (1+sqrt(a-b))/2;
    gp(4) = (1+sqrt(a+b))/2;
    w(1) = (3-sqrt(5/6))/12;
    w(2) = 0.5-w(1);
    w(3) = w(2);
    w(4) = w(1);
elseif ir==5
    a = 5/9;
    b = 2*sqrt(10/7)/9;
    gp(1) = (1-sqrt(a+b))/2;
    gp(2) = (1-sqrt(a-b))/2;
    gp(3) = (1+0)/2;
    gp(4) = (1+sqrt(a-b))/2;
    gp(5) = (1+sqrt(a+b))/2;
    c = 161/450;
    d = 13*sqrt(7/10)/90;
    w(1) = (c-d)/2;
    w(2) = (c+d)/2;
    w(3) = 64/225;
    w(4) = w(2);
    w(5) = w(1);
else

```

```

        disp('Gewählte Gauss-Punktezahl nicht implementiert');
        return
    end
    N(1,:)=1-gp;
    N(2,:)=gp;
    q=Q1(1)*N(1,:)+Q2(1)*N(2,:);
    Resint=0;
    Ktint=0;
    for i=1:ngp
        [der1,der2]=deriv(q(i),k,lambda);
        Resint=Resint+der1*w(i);
        Ktint=Ktint+der2*N(2,i)*w(i);
    end
    vor1=dt/mass;
    vor2=vor1*dt/2;
    term1=(vor1*P1(2)/(Q1(1)*Q2(1)));
    term1=term1*term1;
    term2=(Q1(1)+Q2(1))/4;
    resq=Q2(1)-Q1(1)-vor1*P1(1)-term1*term2+vor2*Resint;
    Kt=1+1/4*term1*(2*Q1(1)/Q2(1)+1)+vor2*Ktint;
    ***** deriv.m *****
    function [y1,y2] = deriv(normq,k,lambda)
    y1 = 2*k*normq*(normq*normq-lambda);
    y2 = 2*k*(normq*normq-lambda)+4*k*normq*normq;
    ***** pot.m *****
    function y = pot(normq,k,lambda)
    y=0.5*k*(normq*normq-lambda)*(normq*normq-lambda);

```


Anhang C

Nichtlineares Doppelpendel

C.1 Absolute Koordinaten

```
***** HAUPTPROGRAMM *****
format long e;
maxiter=15;
clear phi1 phi2 qlana1 qlana2 v1 v2 vlana1 vlana2 Zeit
clear Energie LinEnergie Kopfzeile Zeitintervall
clear condKt condMst detKt
Q1=zeros(2,1);
P1=zeros(2,1);
x1=zeros(4,1);
Kt=zeros(4,4);
g=9.81;
mass = 2;
l = 3;
tol = 1e-13;
vor=g*l*mass;
vor1=mass*l*l;
Q1(1) = 0;
Q1(2) = pi/2;
P1(1) = 0;
P1(2) = 0;
x1=[Q1; P1];
maxit=0;
```

```

minit=maxiter;
M=vor1*[5 2; 2 1];
C=vor*[3 0; 0 1];
qdot=M\P1;
vlana1(1)=qdot(1);
vlana2(1)=qdot(2);
A1=1/52*(sqrt(13)+13)*(-sqrt(13)*Q1(1)+2*Q1(2)+Q1(1));
A2=-1/52*(sqrt(13)-13)*(sqrt(13)*Q1(1)+2*Q1(2)+Q1(1));
B1=-1/(52*g)*sqrt(1*g*(4+sqrt(13)))*(3*sqrt(13)-
13)*(2*vlana2(1)-sqrt(13)*vlana1(1)+vlana1(1));
B2=1/(52*g)*sqrt(1*g*(4-sqrt(13)))*(3*sqrt(13)+
13)*(2*vlana2(1)+sqrt(13)*vlana1(1)+vlana1(1));
omega1=sqrt((4+sqrt(13))*g/l);
omega2=sqrt((4-sqrt(13))*g/l);
K1=[-1/6*(-1+sqrt(13)) 1];
K2=[1/6*(1+sqrt(13)) 1];
Q2=Q1;
P2=P1;
x2=[Q2; P2];
disp('-----');
disp(' Nichtlineares Doppelpendel in absoluten Koordinaten ');
disp('-----');
disp('*****');
disp('Anfangsbedingungen');
disp('*****');
disp(' q1 p1');
initcond=[Q1,P1]
j = 1;
Zeit(j)=0;
phi1(j)=Q2(1);
phi2(j)=Q2(2);
schwing1=K1(1)*(A1*cos(omega1*Zeit(j))+
B1*sin(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(1)*(A2*cos(omega2*Zeit(j))+
B2*sin(omega2*Zeit(j)));
qlana1(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(2)*(A1*cos(omega1*Zeit(j))+
B1*sin(omega1*Zeit(j)));

```

```

schwing2=K2(2)*(A2*cos(omega2*Zeit(j))+
B2*sin(omega2*Zeit(j)));
qlana2(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(1)*omega1*(-A1*sin(omega1*Zeit(j))+
B1*cos(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(1)*omega2*(-A2*sin(omega2*Zeit(j))+
B2*cos(omega2*Zeit(j)));
vlana1(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(2)*omega1*(-A1*sin(omega1*Zeit(j))+
B1*cos(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(2)*omega2*(-A2*sin(omega2*Zeit(j))+
B2*cos(omega2*Zeit(j)));
vlana2(j)=schwing1+schwing2;
cosdeltaq=cos(Q2(1)-Q2(2));
Mdet=vor1*(4*cosdeltaq*cosdeltaq-5);
Mst=1/Mdet*[-1 2*cosdeltaq; 2*cosdeltaq -5];
condMst(j)=cond(Mst,inf);
qdot=Mst*P2;
v1(j)=qdot(1);
v2(j)=qdot(2);
Energie(j)=1/2*P2'*Mst*P2-vor*(3*cos(Q2(1))+cos(Q2(2))-4)
qlanadot=[vlana1(j); vlana2(j)];
qlana=[qlana1(j); qlana2(j)];
LinEnergie(j)=1/2*qlanadot'*M*qlanadot+1/2*qlana'*C*qlana
dt = input('Zeitschritt: dt = ');
intr = input('Gauss-Punkte: ir = ');
for i=1:100;
Makro = input('Makro:', 's');
[ir,ic] = size(Makro);
if ic<4
disp('mindestens vier Zeichen notwendig!')
else
if (strcmp(Makro(1:4), 'step') == 1);
[ir,ic] = size(Makro);
if ic==4
nsteps = 1;
else
nsteps = str2num(Makro(7:ic));

```

```

end
for i = 1:nsteps;
j = j+1;
Zeit(j) = Zeit(j-1) + dt;
x1=x2;
[resq,Kt] = nlinresinum(intr,dt,mass,g,l,x1,x2);
iter=0;
while norm(resq)>tol;
    iter=iter+1;
    if iter>maxiter
        disp('Iterationsabbruch: Divergenz')
        det(Kt)
        return
    else
        dx2=-Kt\resq;
        x2=x2+dx2;
        condKt(j)=cond(Kt,inf);
        detKt(j)=det(Kt);
        [resq,Kt] = nlinresinum(intr,dt,mass,g,l,x1,x2);
    end
    if iter>maxit
        maxit=iter;
    elseif iter<minit
        minit=iter;
    end
end
end
Q2=x2(1:2);
P2=x2(3:4);
phi1(j)=Q2(1);
phi2(j)=Q2(2);
schwing1=K1(1)*(A1*cos(omega1*Zeit(j))+
B1*sin(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(1)*(A2*cos(omega2*Zeit(j))+
B2*sin(omega2*Zeit(j)));
qlana1(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(2)*(A1*cos(omega1*Zeit(j))+
B1*sin(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(2)*(A2*cos(omega2*Zeit(j))+

```

```

B2*sin(omega2*Zeit(j)));
qlana2(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(1)*omega1*(-A1*sin(omega1*Zeit(j))+
B1*cos(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(1)*omega2*(-A2*sin(omega2*Zeit(j))+
B2*cos(omega2*Zeit(j)));
vlana1(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(2)*omega1*(-A1*sin(omega1*Zeit(j))+
B1*cos(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(2)*omega2*(-A2*sin(omega2*Zeit(j))+
B2*cos(omega2*Zeit(j)));
vlana2(j)=schwing1+schwing2;
cosdeltaq=cos(Q2(1)-Q2(2));
Mdet=vor1*(4*cosdeltaq*cosdelteq-5);
Mst=1/Mdet*[-1 2*cosdeltaq; 2*cosdeltaq -5];
condMst(j)=cond(Mst,inf);
qdot=Mst*P2;
v1(j)=qdot(1);
v2(j)=qdot(2);
Energie(j)=.5*P2'*Mst*P2-vor*(3*cos(Q2(1))+cos(Q2(2))-4);
qlanadot=[vlana1(j); vlana2(j)];
qlana=[qlana1(j); qlana2(j)];
LinEnergie(j)=.5*qlanadot'*M*qlanadot+.5*qlana'*C*qlana;
end
elseif (strcmp(Makro(1:4),'dt,') == 1);
    [ir,ic] = size(Makro);
    dtstr = Makro(5:ic);
    dt = str2num(dtstr);
elseif (strcmp(Makro(1:4),'tol,') == 1);
    [ir,ic] = size(Makro);
    tolstr = Makro(6:ic);
    disp('Alte Toleranz = '),disp(tol)
    tol = str2num(tolstr);
    disp('Neue Toleranz = '),disp(tol);
elseif (strcmp(Makro(1:4),'quit') == 1);
    return
else
    disp('Kein Makro-Kommando!')

```

```

disp('Implementierten Makro-Kommandos:')
disp('step,,n dt,,x tol,,x anim quit')
end
end
Kopfzeile = 'Nichtlineares Doppelpendel in
absoluten Koordinaten, int=';
irs= num2str(intr);
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
[ir2,ic2] = size(irs);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = irs;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
tstep = ', dt=';
[ir2,ic2] = size(tstep);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = tstep;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
dts = num2str(dt);
[ir2,ic2] = size(dts);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = dts;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
tstr = ', t=';
[ir2,ic2] = size(tstr);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = tstr;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
Zeitintervall = num2str(Zeit(j));
[ir2,ic2] = size(Zeitintervall);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = Zeitintervall;
figure(1);
    subplot(4,1,1), plot(Zeit,phi1,'.k',Zeit,qlana1,'k');
    grid;
    title(Kopfzeile);
    ylabel('q1');
    legend('numerisch','lin. analyt.');
```

```

    subplot(4,1,2), plot(Zeit,phi2,'.k',Zeit,qlana2,'k');
    grid;
    ylabel('q2');
    legend('numerisch','lin. analyt.');
```

```

    subplot(4,1,3), plot(Zeit,LinEnergie,'k');
    grid;
```

```

ylabel('Energie ');
legend('lin. analyt. ');
subplot(4,1,4), plot(Zeit,Energie,'.k');
grid;
xlabel('Zeit');
ylabel('Energie ');
legend('numerisch');
Energie(j)
LinEnergie(j)
figure(2);
subplot(2,1,1), plot(phi1,v1,'.k',qlana1,vlana1,'k');
title(Kopfzeile);
grid;
ylabel('v1');
xlabel('q1');
legend('numerisch','lin. analyt. ');
subplot(2,1,2), plot(phi2,v2,'.k',qlana2,vlana2,'k');
grid;
ylabel('v2');
xlabel('q2');
legend('numerisch','lin. analyt. ');
figure(4);
subplot(2,1,1), plot(Zeit,condKt,'k',Zeit,condMst,'--k');
title(Kopfzeile);
grid;
ylabel('condinfty')
xlabel('Zeit');
legend('Kt','Minvnlin');
detKt(1)=detKt(2);
subplot(2,1,2), plot(Zeit,detKt,'k');
grid;
ylabel('det')
xlabel('Zeit');
legend('Kt');
disp('Maximale Iterationstiefe : '), disp(maxit)
disp('Minimale Iterationstiefe : '), disp(minit)
disp('Durchschnittliche Iterationstiefe : ')
durch=1/2*(maxit+minit)

```

```

end
***** nlinresinum.m *****
function [resq,Kt] = nlinresinum(ir,dt,mass,g,l,x1,x2)
ngp=ir;
if ir==1
    g1=0.5; w1=1.0;
    gp=g1; w=w1;
elseif ir==2
    gg=0.577350269189626; w1=0.5;
    g1=(1-gg)/2; g2=(1+gg)/2;
    gp=[g1, g2];
    w=[w1, w1];
elseif ir==3
    gg1=0.774596669241483; gg2=0;
    w1=5/18; w2=4/9;
    g1=(1-gg1)/2;
    g2=(1+gg2)/2;
    g3=(1+gg1)/2;
    gp=[g1, g2, g3];
    w=[w1, w2, w1];
elseif ir==4
    a = 3/7;
    b = 2*sqrt(1.2)/7;
    gp(1) = (1-sqrt(a+b))/2;
    gp(2) = (1-sqrt(a-b))/2;
    gp(3) = (1+sqrt(a-b))/2;
    gp(4) = (1+sqrt(a+b))/2;
    w(1) = (3-sqrt(5/6))/12;
    w(2) = 0.5-w(1);
    w(3) = w(2);
    w(4) = w(1);
elseif ir==5
    a = 5/9;
    b = 2*sqrt(10/7)/9;
    gp(1) = (1-sqrt(a+b))/2;
    gp(2) = (1-sqrt(a-b))/2;
    gp(3) = (1+0)/2;
    gp(4) = (1+sqrt(a-b))/2;

```

```

gp(5) = (1+sqrt(a+b))/2;
c = 161/450;
d = 13*sqrt(7/10)/90;
w(1) = (c-d)/2;
w(2) = (c+d)/2;
w(3) = 64/225;
w(4) = w(2);
w(5) = w(1);
else
    disp('Gewählte Gauss-Punktezahl nicht implementiert');
    return
end
N(1,:) = 1-gp;
N(2,:) = gp;
p=zeros(2,ngp);
q=zeros(2,ngp);
p=x1(3:4)*N(1,:)+x2(3:4)*N(2,:);
q=x1(1:2)*N(1,:)+x2(1:2)*N(2,:);
Resint=zeros(4,1);
Kt=zeros(4,4);
K=zeros(4,4);
M=zeros(4,4);
KA=zeros(2,2);
KB=zeros(2,2);
KC=zeros(2,2);
K31=0;
vor=1/(mass*l*l);
vor1=g*l*mass;
for i=1:ngp
    c=cos(q(1,i)-q(2,i));
    s=sin(q(1,i)-q(2,i));
    o=4*c*c-5;
    u=[-4*c 4*c*c+5];
    v=[4*c*c+5 -20*c];
    f1=-48*c*c*s*s-20*s*s-16*c*c*c*c+20*c*c;
    f2=-240*c*c*s*s-100*s*s-80*c*c*c*c+100*c*c;
    h=c*(16*c*c*c*c-25+32*s*s*c*c+120*s*s);
    A31=[f1 h; h f2];

```

```

KA(1,1)=KA(1,1) + (-2*s/(o*o))*u*p(:,i)*N(2,i)*w(i);
KA(2,1)=KA(2,1) + (-2*s/(o*o))*v*p(:,i)*N(2,i)*w(i);
KB(1,1)=KB(1,1) + 1/o*N(2,i)*w(i);
KB(1,2)=KB(1,2) + (-2)*c/o*N(2,i)*w(i);
K31=K31 + 1/(o*o*o)*p(:,i)'*A31*p(:,i)*N(2,i)*w(i);
M(3,1)=M(3,1) + 3*cos(q(1,i))*N(2,i)*w(i);
M(4,2)=M(4,2) + cos(q(2,i))*N(2,i)*w(i);
ResA=[-1 2*c; 2*c -5];
ResB=[u; v];
Resc=[3*sin(q(1,i)); sin(q(2,i))];
dHdp=vor*1/o*ResA*p(:,i);
dHdq=vor*s/(o*o)*[p(:,i)'; -p(:,i)']*ResB*p(:,i)+
vor1*Resc;
Resint=Resint+[-dHdp; dHdq]*w(i);
end
resq=x2-x1+dt*Resint;
KA(1,2)=-KA(1,1);
KA(2,2)=-KA(2,1);
KB(2,1)=KB(1,2);
KB(2,2)=5*KB(1,1);
KC=[K31 -K31; -K31 K31];
K=[KA KB; KC -KA'];
Kt=diag(ones(4,1))+dt*(vor*K+vor1*M);

```

C.2 Relative Koordinaten

***** HAUPTPROGRAMM *****

```

format long e;
clear phi1 phi2 qlana1 qlana2 v1 v2 vlana1 vlana2 Zeit
clear Energie LinEnergie Kopfzeile Zeitintervall
clear condKt condMst detKt
Q1=zeros(2,1);
P1=zeros(2,1);
x1=zeros(4,1);
Kt=zeros(4,4);
g=9.81;
mass = 2;

```

```

l = 3;
tol = 1e-13;
vor=g*l*mass;
vor1=l*l*mass;
Q1(1) = 0;
Q1(2) = pi/2;
P1(1) = 0;
P1(2) = 0;
x1=[Q1; P1];
maxit=0;
minit=16;
M=vor1*[10 3; 3 1];
C=vor*[4 1; 1 1];
qdot=M\P1;
vlana1(1)=qdot(1);
vlana2(1)=qdot(2);
A1=-1/52*(-13+3*sqrt(13))*(2*Q1(1)-3*Q1(2)-sqrt(13)*Q1(2));
A2=1/52*(3*sqrt(13)+13)*(2*Q1(1)-3*Q1(2)+sqrt(13)*Q1(2));
B1=-1/(78*g)*sqrt(1*g*(4+sqrt(13)))*(4*sqrt(13)-
13)*(2*vlana2(1)+vlana1(1)*(-sqrt(13)+3));
B2=1/(78*g)*sqrt(1*g*(4-sqrt(13)))*(4*sqrt(13)+
13)*(vlana1(1)*(3+sqrt(13))+2*vlana2(1));
omega1=sqrt((4+sqrt(13))*g/l);
omega2=sqrt((4-sqrt(13))*g/l);
K1=[1; -1/2*(3+sqrt(13))];
K2=[1; 1/2*(-3+sqrt(13))];
Q2=Q1;
P2=P1;
x2=[Q2; P2];
disp('-----');
disp(' Nichtlineares Doppelpendel in relativen Koordinaten ');
disp('-----');
disp('*****');
disp('Anfangsbedingungen');
disp('*****');
disp(' q1 p1');
initcond=[Q1,P1]
j = 1;

```

```

Zeit(j)=0;
phi1(j)=Q2(1);
phi2(j)=Q2(2);
schwing1=K1(1)*(A1*cos(omega1*Zeit(j))+
B1*sin(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(1)*(A2*cos(omega2*Zeit(j))+
B2*sin(omega2*Zeit(j)));
qlana1(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(2)*(A1*cos(omega1*Zeit(j))+
B1*sin(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(2)*(A2*cos(omega2*Zeit(j))+
B2*sin(omega2*Zeit(j)));
qlana2(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(1)*omega1*(-A1*sin(omega1*Zeit(j))+
B1*cos(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(1)*omega2*(-A2*sin(omega2*Zeit(j))+
B2*cos(omega2*Zeit(j)));
vlana1(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(2)*omega1*(-A1*sin(omega1*Zeit(j))+
B1*cos(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(2)*omega2*(-A2*sin(omega2*Zeit(j))+
B2*cos(omega2*Zeit(j)));
vlana2(j)=schwing1+schwing2;
vdet=vor1*(-5+4*cos(Q2(2))*cos(Q2(2)));
Mst=1/vdet*[-1 1+2*cos(Q2(2)); 1+2*cos(Q2(2)) -6-4*cos(Q2(2))];
qdot=Mst*P2;
v1(j)=qdot(1); v2(j)=qdot(2);
condMst(j)=cond(Mst,inf);
Energie(j)=.5*P2'*Mst*P2-vor*(3*cos(Q2(1))+cos(Q2(1)+Q2(2))-4)
qlanadot=[vlana1(j); vlana2(j)];
qlana=[qlana1(j); qlana2(j)];
LinEnergie(j)=.5*qlanadot'*M*qlanadot+.5*qlana'*C*qlana;
dt = input('Zeitschritt: dt = ');
intr = input('Gauss-Punkte: ir = ');
for i=1:100;
Makro = input('Makro:', 's');
[ir,ic] = size(Makro);
if ic<4

```

```

disp('mindestens vier Zeichen notwendig!')
else
if (strcmp(Makro(1:4),'step') == 1);
[ir,ic] = size(Makro);
if ic==4
nsteps = 1;
else
nsteps = str2num(Makro(7:ic));
end
for i = 1:nsteps;
j = j+1;
Zeit(j) = Zeit(j-1) + dt;
x1=x2;
[resq,Kt] = rnlresinum(intr,dt,mass,g,l,x1,x2);
iter=0;
while norm(resq)>tol;
    iter=iter+1;
    if iter>15
disp('Iterationsabbruch: Divergenz')
return
    else
dx2 = -Kt\resq;
x2 = x2 + dx2;
condKt(j) = cond(Kt,inf);
detKt(j) = det(Kt);
[resq,Kt] = rnlresinum(intr,dt,mass,g,l,x1,x2);
    end
    if iter>maxit
maxit=iter;
elseif iter<minit
minit=iter;
    end
end
end
Q2=x2(1:2);
P2=x2(3:4);
phi1(j)=Q2(1);
phi2(j)=Q2(2);
schwing1=K1(1)*(A1*cos(omega1*Zeit(j)))+

```

```

B1*sin(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(1)*(A2*cos(omega2*Zeit(j))+
B2*sin(omega2*Zeit(j)));
qlana1(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(2)*(A1*cos(omega1*Zeit(j))+
B1*sin(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(2)*(A2*cos(omega2*Zeit(j))+
B2*sin(omega2*Zeit(j)));
qlana2(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(1)*omega1*(-A1*sin(omega1*Zeit(j))+
B1*cos(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(1)*omega2*(-A2*sin(omega2*Zeit(j))+
B2*cos(omega2*Zeit(j)));
vlana1(j)=schwing1+schwing2;
schwing1=K1(2)*omega1*(-A1*sin(omega1*Zeit(j))+
B1*cos(omega1*Zeit(j)));
schwing2=K2(2)*omega2*(-A2*sin(omega2*Zeit(j))+
B2*cos(omega2*Zeit(j)));
vlana2(j)=schwing1+schwing2;
vdet=vor1*(-5+4*cos(Q2(2))*cos(Q2(2)));
Mst=1/vdet*[-1 1+2*cos(Q2(2)); 1+2*cos(Q2(2)) -6-4*cos(Q2(2))];
qdot=Mst*P2;
v1(j)=qdot(1);
v2(j)=qdot(2);
condMst(j)=cond(Mst,inf);
Energie(j)=.5*P2'*Mst*P2-vor*(3*cos(Q2(1))+cos(Q2(1)+Q2(2))-4);
qlana=[qlana1(j); qlana2(j)];
qlanadot=[vlana1(j); vlana2(j)];
LinEnergie(j)=.5*qlanadot'*M*qlanadot+1/2*qlana'*C*qlana;
end
elseif (strcmp(Makro(1:4),'dt,') == 1);
    [ir,ic] = size(Makro);
    dtstr = Makro(5:ic);
    dt = str2num(dtstr);
elseif (strcmp(Makro(1:4),'tol,') == 1);
    [ir,ic] = size(Makro);
    tolstr = Makro(6:ic);
    disp('Alte Toleranz = '),disp(tol)

```

```

    tol = str2num(tolstr);
    disp('Neue Toleranz = '),disp(tol);
elseif (strcmp(Makro(1:4),'quit') == 1);
    return
else
    disp('Kein Makro-Kommando!')
    disp('Implementierten Makro-Kommandos:')
    disp('step,,n dt,,x tol,,x anim quit')
end
end
Kopfzeile = 'Nichtlineares Doppelpendel in
relativen Koordinaten, int=';
irs= num2str(intr);
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
[ir2,ic2] = size(irs);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = irs;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
tstep = ', dt=';
[ir2,ic2] = size(tstep);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = tstep;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
dts = num2str(dt);
[ir2,ic2] = size(dts);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = dts;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
tstr = ', t=';
[ir2,ic2] = size(tstr);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = tstr;
[ir1,ic1] = size(Kopfzeile);
Zeitintervall = num2str(Zeit(j));
[ir2,ic2] = size(Zeitintervall);
Kopfzeile(ic1+1:ic1+ic2) = Zeitintervall;
figure(1);
    subplot(4,1,1), plot(Zeit,phi1,'.k',Zeit,qlana1,'k');
    grid;
    title(Kopfzeile);
    ylabel('q1');
    legend('numerisch','lin. analyt.');
```

```

subplot(4,1,2), plot(Zeit,phi2,'.k',Zeit,qlana2,'k');
grid;
ylabel('q2');
legend('numerisch','lin. analyt.');
```

```

subplot(4,1,3), plot(Zeit,LinEnergie,'k');
grid;
ylabel('Energie');
```

```

legend('lin. analyt.');
```

```

subplot(4,1,4), plot(Zeit,Energie,'.k');
grid;
xlabel('Zeit');
```

```

ylabel('Energie');
```

```

legend('numerisch');
```

```

Energie(j)
figure(2);
subplot(2,1,1), plot(phi1,v1,'.k',qlana1,vlana1,'k');
title(Kopfzeile);
grid;
ylabel('v1');
```

```

xlabel('q1');
```

```

legend('numerisch','lin. analyt.');
```

```

subplot(2,1,2), plot(phi2,v2,'.k',qlana2,vlana2,'k');
grid;
ylabel('v2');
```

```

xlabel('q2');
```

```

legend('numerisch','lin. analyt.');
```

```

figure(4);
subplot(2,1,1), plot(Zeit,condKt,'k',Zeit,condMst,'--k');
title(Kopfzeile);
grid;
ylabel('condinfty')
```

```

xlabel('Zeit');
```

```

legend('Kt','Minvnlin');
```

```

detKt(1)=detKt(2);
subplot(2,1,2), plot(Zeit,detKt,'k');
```

```

grid;
ylabel('det')
```

```

xlabel('Zeit');
```

```
    legend('Kt');
disp('Maximale Iterationstiefe : '), disp(maxit)
disp('Minimale Iterationstiefe : '), disp(minit)
disp('Durchschnittliche Iterationstiefe : ')
durch=1/2*(maxit+minit)
end
***** rmlinresinum.m *****
function [resq,Kt] = rmlinresinum(ir,dt,mass,g,l,x1,x2)
ngp=ir;
if ir==1
    g1=0.5; w1=1.0;
    gp=g1; w=w1;
elseif ir==2
    gg=0.577350269189626; w1=0.5;
    g1=(1-gg)/2; g2=(1+gg)/2;
    gp=[g1, g2];
    w=[w1, w1];
elseif ir==3
    gg1=0.774596669241483; gg2=0;
    w1=5/18; w2=4/9;
    g1=(1-gg1)/2;
    g2=(1+gg2)/2;
    g3=(1+gg1)/2;
    gp=[g1, g2, g3];
    w=[w1, w2, w1];
elseif ir==4
    a = 3/7;
    b = 2*sqrt(1.2)/7;
    gp(1) = (1-sqrt(a+b))/2;
    gp(2) = (1-sqrt(a-b))/2;
    gp(3) = (1+sqrt(a-b))/2;
    gp(4) = (1+sqrt(a+b))/2;
    w(1) = (3-sqrt(5/6))/12;
    w(2) = 0.5-w(1);
    w(3) = w(2);
    w(4) = w(1);
elseif ir==5
    a = 5/9;
```

```

b = 2*sqrt(10/7)/9;
gp(1) = (1-sqrt(a+b))/2;
gp(2) = (1-sqrt(a-b))/2;
gp(3) = (1+0)/2;
gp(4) = (1+sqrt(a-b))/2;
gp(5) = (1+sqrt(a+b))/2;
c = 161/450;
d = 13*sqrt(7/10)/90;
w(1) = (c-d)/2;
w(2) = (c+d)/2;
w(3) = 64/225;
w(4) = w(2);
w(5) = w(1);
else
    disp('Gewählte Gauss-Punktezahl nicht implementiert');
    return
end
N(1,:) = 1-gp;
N(2,:) = gp;
p=zeros(2,ngp);
q=zeros(2,ngp);
p=x1(3:4)*N(1,:)+x2(3:4)*N(2,:);
q=x1(1:2)*N(1,:)+x2(1:2)*N(2,:);
Resint=zeros(4,1);
Kt=zeros(4,4);
K=zeros(4,4);
M=zeros(4,4);
vor=1/(mass*l*l);
vor1=g*l*mass;
for i=1:ngp
    c=cos(q(2,i));
    s=sin(q(2,i));
    st=sin(q(1,i)+q(2,i));
    ct=cos(q(1,i)+q(2,i));
    o=-5+4*c*c;
    u1=[-4*c 4*c+4*c*c+5];
    v1=[4*c+4*c*c+5 -10-24*c-8*c*c];
    b1=1+2*c;

```

```

b2=-6-4*c;
f1=-16*c*c*c*c+20*c*c-20*s*s-48*s*s*c*c;
f2=-240*s*s*c-32*c*c*c*c*c-96*c*c*c*c+120*c*c-120*s*s+
50*c-288*s*s*c*c-64*s*s*c*c*c;
h=120*s*s*c-20*c*c+20*s*s-25*c+48*s*s*c*c+32*s*s*c*c*c+
16*c*c*c*c+16*c*c*c*c*c;
A42=[f1 h; h f2];
K(1,2)=K(1,2)+(-2*s/(o*o))*u1*p(:,i)*N(2,i)*w(i);
K(1,3)=K(1,3)+1/o*N(2,i)*w(i);
K(1,4)=K(1,4)+(-b1/o)*N(2,i)*w(i);
K(2,2)=K(2,2)+(-2*s/(o*o))*v1*p(:,i)*N(2,i)*w(i);
K(2,3)=K(1,4);
K(2,4)=K(2,4)+(-b2/o)*N(2,i)*w(i);
K(4,2)=K(4,2)+1/(o*o*o)*p(:,i)'*A42*p(:,i)*N(2,i)*w(i);
K(4,3)=-K(1,2);
K(4,4)=-K(2,2);
M(3,1)=M(3,1)+(3*cos(q(1,i))+ct)*N(2,i)*w(i);
M(3,2)=M(3,2)+ct*N(2,i)*w(i);
M(4,1)=M(3,2);
M(4,2)=M(3,2);
Hp=[-1 b1; b1 b2];
Hq=[3*sin(q(1,i))+st; st];
Hq2=[u1; v1];
dHdq2=vor*s/(o*o)*p(:,i)'*Hq2*p(:,i);
dHdp=vor/o*Hp*p(:,i);
dHdq=[0; dHdq2]+vor1*Hq;
Resint=Resint + [-dHdp; dHdq]*w(i);
end
resq=x2-x1+dt*Resint;
Kt=diag(ones(4,1))+dt*(vor*K+vor1*M);

```


Anhang D

Aufgabenstellung

Studienarbeit im Fach Finite Elemente

Numerische Untersuchungen diskreter dynamischer Systeme im
Rahmen der PETROV-GALERKIN-Methode

Bearbeiter: Michael Groß

Matrikelnummer: 319 545

Betreuer: Dr.-Ing. P. Betsch

Im Rahmen der HAMILTONSchen Mechanik sollen dynamische Systeme mit Hilfe von Zeitintegrationsverfahren numerisch untersucht werden. Hierbei sollen Finite Elemente in der Zeit verwendet werden, die auf einer PETROV-GALERKIN Formulierung der kanonischen Gleichungen von HAMILTON basieren.

Für die Einarbeitung in die Thematik werden folgende Unterlagen und Dateien zur Verfügung gestellt:

- Das Manuskript [1] in dem die Grundlagen der PETROV-GALERKIN-Finite-Elemente-Methode zur Integration der Bewegungsgleichungen im Rahmen der HAMILTONSchen Mechanik beschrieben werden.
- Ein MATLAB-Programm zur numerischen Simulation der Dynamik eines mathematischen Pendels bei großen Auslenkungen sowie ein MATLAB-Programm zur Berechnung des KEPLER-Problems.

Darauf aufbauend sollen die folgenden Punkte untersucht werden:

- Das vorhandene MATLAB-Programm zum KEPLER-Problem soll auf weitere Potentialfunktionen für das Zweikörperproblem erweitert werden. Entsprechend GOLDSTEIN [7] führt neben dem Potential $V(r) = -k/r$ für das KEPLER-Problem nur noch das 'HOOKSche Potential'

$$V(r) = -\frac{1}{2}kr^2 \quad (\text{D.1})$$

auf eine geschlossene Bahnkurve. Beide Potentialfunktionen und die jeweils berechneten Bahnkurven sollen miteinander verglichen werden.

- Außerdem soll die Potentialfunktion

$$V(r) = \frac{1}{2}k[r^2 - 1]^2 \quad (\text{D.2})$$

implementiert und numerisch untersucht werden. Insbesondere sollen hier die Werte $k = 1000$ und $k = 10^6$ für die Konstante in (D.2) betrachtet werden.

- Das ursprüngliche MATLAB-Programm basiert auf einer Formulierung des Zweikörperproblems in kartesischen Koordinaten, d.h. es werden die kartesischen Koordinaten x_i sowie die Koeffizienten des Impulses $p_i = m\dot{x}_i$, $i = 1, 2, 3$ als Freiheitsgrade verwendet. Alternativ hierzu soll nun das reduzierte Problem in ebenen Polarkoordinaten formuliert und numerisch umgesetzt werden. Es soll untersucht werden, ob die reduzierte Darstellung Vorteile, insbesondere im Hinblick auf die Numerik, mit sich bringt.

Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt zwei Beispiele für die Anwendung des, von P. BETSCH und P. STEINMANN im Rahmen der PETROV-GALERKIN-Finite-Elemente-Methode entwickelten, Zeitschrittverfahrens zur numerischen Lösung der HAMILTONSchen kanonischen Gleichungen. Die Beispiele sind beide konservative, autonome Zwei-Massenpunktsysteme, welche sich formal durch ihre Nebenbedingungen unterscheiden.

Die Begründung für die numerische Berechnung im Rahmen der HAMILTONSchen Mechanik liegt in der Tatsache, daß die HAMILTONSchen kanonischen Gleichungen, sprich die Bewegungsgleichungen, ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung sind. Nur Systeme erster Ordnung führen bei Anfangswertproblemen im GALERKIN-Verfahren zu Ansatzfunktionen, die gleiche Kontinuität wie die Testfunktionen besitzen. Die Ansätze für die Lösungsfunktionen und die Testfunktionen sind im Rahmen der PETROV-GALERKIN-Methode LAGRANGE-Polynome unterschiedlichen Grades. Dabei können im Gegensatz zu den Lösungsfunktionen die Testfunktionen diskontinuierlich verlaufen. In dieser Arbeit erfolgt eine Beschränkung auf lineare Lösungsfunktionen. Ein wesentlicher Vorteil des hier angewendeten Zeitschrittverfahrens ist, daß die HAMILTON-Funktion H für autonome dynamische Systeme in jedem Zeitschritt erhalten bleibt. Für konservative, autonome Systeme ist das gleichbedeutend mit einer Energieerhaltung $T + V = \text{const}$. Dies ist in diesen Sonderfällen ein Beweis für die numerische Stabilität des Verfahrens und physikalisch gesehen eine Möglichkeit die Konsistenz der Lösungen zu überprüfen.

Das erste Beispiel ist das *Zweikörperproblem*, welches ein System ohne Zwangsbedingungen darstellt. Dabei reduziert sich die Betrachtung des, anfangs räumlichen, Zwei-Massenpunktproblems auf die Betrachtung einer ebenen Bewegung einer sogenannten reduzierten Masse in einem Zentralkraftfeld. In dem Problem wird von einem konservativen Kraftfeld ausgegangen. Die

Wahl der Potentiale des konservativen Zentralkraftfeldes fällt allgemein auf Polynome in r , dem Abstand der beiden Massenpunkte des ursprünglichen Zweikörperproblems voneinander. Von Interesse ist hier die Bahn der ebenen Einkörperbewegung bzgl. des Koordinatenursprunges. Dazu wird die analytische Bestimmung der Bahngleichung in Polarkoordinaten auf die Lösung eines Integrals reduziert. Eine Untersuchung auf Lösbarkeit dieses Integrals in Abhängigkeit des Polynomexponenten ergibt, daß nur wenige Integrale analytisch lösbar sind. Dabei gliedern sich die analytisch lösbaren Integrale in zwei Typen:

1. Integrale die mittels elliptischen Funktionen zu lösen sind, und
2. Integrale deren Lösung eine trigonometrische Funktion ergeben.

Unter den zweiten Punkt fallen nur die zwei bekanntesten Potentiale: das KEPLER-Potential und das HOOKE-Potential des harmonischen Schwingers. Nur für die Bahnen dieser beiden Potentiale wird eine geschlossene Bahnkurve bestätigt. Bei anderen Potentialen ist mittels der graphischen Methode des effektiven Potentials höchstens eine begrenzte Bahn feststellbar. Die Bestimmungsgleichungen des Zeitschrittverfahrens für die Knotenwerte werden in kartesischen und in polaren Koordinaten aufgestellt. Bei der allgemeinen Lösung in Polarkoordinaten führt eine zusätzliche Erhaltungsgröße auf eine skalare Iteration, während eine Lösung mit kartesischen Koordinaten generell eine Iteration in zwei Variablen erfordert. Dagegen wird bei kartesischen Koordinaten das Zeitschrittverfahren nur durch ein nichtlineares Potential nichtlinear und erfordert dadurch eine iterative Lösung. Bei der Lösung in Polarkoordinaten ist das Zeitschrittverfahren generell nichtlinear. Beim KEPLER-Potential sind bei der analytische Lösung zwischen vier Bahnformen zu differenzieren:

- Eine hyperbolische,
- eine parabolische,
- eine elliptische Bahn und eine
- Kreisbahn

Dies bestätigt die numerische Lösung in kartesischen Koordinaten nach dem die entsprechenden Anfangswerte mittels der Methode des effektiven Potentials bestimmt wurden. Die physikalische Unterscheidung erfolgt beim KEPLER-Potential an Hand der Gesamtenergie. Das HOOKE-Potential erfordert

eine Unterscheidung nach der Potentialkonstanten. Dies verifiziert ein Feder-Masse-Modell für die Einkörperbewegung, denn die Potentialkonstante entspricht in diesem Modell der Steifigkeit der linearen Spiralfeder. Auch hier sind nach der analytischen Lösung vier Bahnformen zu unterscheiden:

- Hyperbel
- Gerade
- Ellipse
- Kreis

Die Krümmung der hyperbolischen Bahnkurve besitzt eine dem KEPLER-Potential entgegengesetzte Bahnkrümmung. Die Ellipsen liegen beim HOOKE-Potential konzentrisch zum Ursprung des Koordinatensystems, beim KEPLER-Potential liegt der Koordinatenursprung in einem Brennpunkt. Als Beispiel eines Potentials für offene Bahnkurven wurde das *lineare Potential* numerisch untersucht. Neben der Kreisbahn und der hyperbolischen Bahnkurve liegt hier eine begrenzte Bahnkurve vor, die innerhalb eines Kreisringes verläuft. Der Sonderfall einer geradlinigen Bahn der reduzierten Masse ist mathematisch ebenfalls enthalten. Die Unterscheidung erfolgt hier nach der Gesamtenergie über die Methode des effektiven Potentials. Ein Beispiel für eine Superposition der angesprochenen Grundtypen ist das *binomiale Potential*. Es kann ebenfalls durch ein Feder-Masse-Modell veranschaulicht werden. Dabei ist aber im Gegensatz zum HOOKE-Potential die Spiralfeder progressiv. Die Bahnformen sind in, zum linearen Potential analoge Bahntypen, zu unterteilen. Als Sonderfall der ebenen Bewegung der reduzierten Masse in einem Zentralkraftfeld mit dem binomialen Potential, ist die eindimensionale Bewegung des DUFFING-Schwingers. Hier erfolgt eine analytische und numerische Berechnung der Phasenkurven, wobei erstmals die numerische Lösung in Polarkoordinaten angewendet wird. Die Phasenkurven sind nach der Anzahl der Nullstellen in der Phasenebene in drei Typen zu unterteilen. Dabei fällt bei einem Phasenkurventyp auf, daß die numerische Lösung die Definition der Polarkoordinaten verletzt und negative Radien berechnet. Eine Überprüfung der Bewegungsgleichungen ergibt jedoch, daß dieser "Schönheitsfehler" analytisch begründet ist und aus der Wahl polarer Koordinaten herrührt.

Das zweite und letzte Anwendungsbeispiel des Zeitschrittverfahrens ist ein

ebenes mathematisches Doppelpendel mit gleichen Massen und Pendellängen. Die Bewegung wird in Absolut- und Relativwinkel betrachtet. Zuerst erfolgt eine analytische und numerische Berechnung des *linearen Doppelpendels*, welches sich durch lineare Rückstellkräfte auszeichnet. Die analytische Lösung wird im Rahmen der LAGRANGESchen Mechanik mittels der LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art durchgeführt. Konkrete Beispiele für die numerische Berechnung bilden die erste und zweite Eigenform und eine beliebige kleine Auslenkung des Doppelpendels. Dabei erfolgt die Berechnung des Zeitverlaufes der Lösungen und der Darstellung der Phasenebenen. Die Energieerhaltung und ein qualitativer Vergleich mit theoretischen Erkenntnissen bestätigt die numerischen Berechnungen. Das *nichtlineare* Doppelpendel, d.h. die Zulassung großer Auslenkungen, beschränkt die Betrachtung auf eine numerische Lösung. Hierbei wird die analytische Lösung des linearen Doppelpendels als Vergleich in die Rechnerschriebe eingebunden. Es wird eine konkrete Anfangsbedingung untersucht. Abschließend wird ein Vergleich zwischen Absolut- und Relativwinkel herbeigeführt. Der Vergleich erbringt Vor- bzw. Nachteile in Bezug auf die iterative Lösung des Zeitschrittverfahrens beim Doppelpendel.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Betsch and P. Steinmann. Energy conserving time stepping schemes of arbitrary order for classical mechanics. submitted to Journal of Computational Physics.
- [2] E. Zeidler. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, volume 1. B. G. Teubner Stuttgart, 1996.
- [3] H.J. Korsch and H.-J. Jodl. *Chaos*. Springer, 2nd edition, 1999.
- [4] P. Betsch und P. Steinmann. *Finite Elemente*. Lehrstuhl für Technische Mechanik, 1998. Vorlesungsmitschrift.
- [5] G. Grosche und E. Zeidler. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, volume 2. B. G. Teubner Stuttgart, 1995.
- [6] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 2nd edition, 1989.
- [7] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1980.
- [8] F. Kuypers. *Klassische Mechanik*. VCH-Verlag, 2nd edition, 1988.
- [9] V.F. Müller. *Mechanik*. Fachbereich Physik, 1997. Vorlesungsskript.
- [10] G. Merziger und Th. Wirth. *Repetitorium der höheren Mathematik*. Binomi, 2nd edition, 1993.
- [11] P. Steinmann. *Höhere Mechanik I*. Lehrstuhl für Technische Mechanik, 1997. Vorlesungsskript.
- [12] W. Walter. *Analysis*, volume 2. Springer, 3rd edition, 1990.

- [13] J. Stoer. *Numerische Mathematik*, volume 1. Springer, 7th edition, 1994.
- [14] R. Brombeer. *Numerische Mathematik*. Fachbereich Mathematik, 1997. Vorlesungsmitschrift.
- [15] P. Steinmann. *Kontinuumsmechanik*. Lehrstuhl für Technische Mechanik, 1998. Vorlesungsmitschrift.
- [16] W. Schweizer. *Ebene Trigonometrie*. Klett, 12th edition, 1990.
- [17] W. Steinhilper und R. Röper. *Maschinen- und Konstruktionselemente*, volume 3. Springer, 1st edition, 1994.
- [18] W. Seemann. *Nichtlineare und chaotische Schwingungen*. Arbeitsgruppe Maschinendynamik, 1998. Vorlesungsskript.
- [19] W. Seemann. *Maschinendynamik*. Arbeitsgruppe Maschinendynamik, 1998. Vorlesungsmitschrift.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Diskretisierung der Zeit	4
1.2	Masterelement des Zeitschrittverfahrens	5
2.1	Zwei-Massenpunktsystem im \mathbf{E}^3	13
2.2	Gegenseitige Einflußnahme zweier Massenpunkte	15
2.3	Zentralkraft im \mathbf{E}^3	16
2.4	Polarkoordinaten r und ϕ	20
2.5	Effektives Potential $V'(r)$ des KEPLER-Potentials	25
2.6	Kartesische Koordinaten q_1 und q_2	27
2.7	Polarkoordinaten $r = q_1$ und q_2	32
2.8	Kreisbahn des KEPLER-Potentials bei $\mu = 2, k = 1$	42
2.9	Elliptische Bahn des KEPLER-Potentials bei $\mu = 2, k = 1$	44
2.10	Parabolische Bahn des KEPLER-Potentials bei $\mu = 2, k = 1$	45
2.11	Hyperbel als Bahn des KEPLER-Potentials bei $\mu = 2, k = 1$	46
2.12	Feder-Modell für das HOOKE-Potential	48
2.13	Kreisbahn des HOOKE-Potentials bei $\mu = 2, E = 1$	51
2.14	Effektives Potential $V'(r)$ des HOOKE-Potentials	52
2.15	Elliptische Bahn des HOOKE-Potentials bei $\mu = 2, E = 1$	53
2.16	Geradlinige Bahn des HOOKE-Potentials bei $\mu = 2, E = 1$	54
2.17	Hyperbel des HOOKE-Potentials bei $\mu = 2, E = 0.1, k = 0.1$	55
2.18	Effektives Potential $V'(r)$ des linearen Potentials	57
2.19	Kreisbahn des linearen Potentials bei $\mu = 2, k = 1$	58
2.20	Begrenzte Bahn des linearen Potentials bei $\mu = 2, k = 1$	59
2.21	Hyperbel des linearen Potentials bei $\mu = 2, E = -0.1 = k$	60
2.22	Feder-Modell für das binomiale Potential	62
2.23	Effektives Potential $V'(r)$ des binomialen Potentials	63
2.24	Begrenzte Bahn des binom. Potentials ($\mu = 2, k = 1 = \lambda$)	64
2.25	Der DUFFING-Schwinger	65
2.26	Fall 1 des DUFFING-Schwingers ($\mu = 2, k = 1, \lambda = 7$)	70

2.27	Fall 2 des DUFFING-Schwingers ($\mu = 2, k = 1, \lambda = 8$)	72
2.28	Fall 3 des DUFFING-Schwingers ($\mu = 2, k = 2, \lambda = 12$)	75
3.1	Mathematisches Doppelpendel	77
3.2	Doppelpendel in absoluten Koordinaten	85
3.3	Eigenformen eines Doppelpendels [3]	88
3.4	Erste Eigenform bei $m = 0.25, l = 0.5$	89
3.5	Phasenraum von Systemen mit zwei Freiheitsgraden	90
3.6	Phasenebenen der ersten Eigenform bei $m = 0.25, l = 0.5$	91
3.7	Zweite Eigenform bei $m = 0.25, l = 0.5$	92
3.8	Phasenebenen der zweiten Eigenform bei $m = 0.25, l = 0.5$	93
3.9	$\mathbf{q}_0 = [0.1, -0.01]^T$ bei $m = 0.25, l = 0.5$	94
3.10	$\mathbf{q}_0 = [0.1, -0.01]^T$ bei $m = 0.25, l = 0.5$	95
3.11	Doppelpendel in relativen Koordinaten	96
3.12	Eigenformen eines Doppelpendels [3]	99
3.13	Erste Eigenform bei $m = 0.25, l = 0.5$	100
3.14	Phasenebenen der ersten Eigenform bei $m = 0.25, l = 0.5$	101
3.15	Zweite Eigenform bei $m = 0.25, l = 0.5$	102
3.16	Phasenebenen der zweiten Eigenform bei $m = 0.25, l = 0.5$	103
3.17	$\mathbf{q}_0 = [0.1, -0.01]^T$ bei $m = 0.25, l = 0.5$	104
3.18	$\mathbf{q}_0 = [0.1, -0.01]^T$ bei $m = 0.25, l = 0.5$	105
3.19	Doppelpendel in absoluten Koordinaten	111
3.20	Anfangsauslenkung um $+90^\circ$ beim unteren Pendel	115
3.21	Lösung bei $q_{2_0} = +90^\circ$ mit $m = 2, l = 3$	116
3.22	Phasenebenen bei $q_{2_0} = +90^\circ$ mit $m = 2, l = 3$	117
3.23	Doppelpendel in relativen Koordinaten	118
3.24	Anfangsauslenkung um $+90^\circ$ beim unteren Pendel	121
3.25	Lösung bei $q_{2_0} = +90^\circ$ mit $m = 2, l = 3$	122
3.26	Phasenebenen bei $q_{2_0} = +90^\circ$ mit $m = 2, l = 3$	123
3.27	Kondition bei $q_{2_0} = +90^\circ$ mit $m = 2, l = 3$	125
3.28	Kondition bei $q_{2_0} = +90^\circ$ mit $m = 2, l = 3$	126

Tabellenverzeichnis

2.1	Bahnen des KEPLER-Potentials	39
2.2	Bahnen des HOOKE-Potentials	49
2.3	Bahnen des linearen Potentials	61
2.4	Bahnen des binomialen Potentials	63
2.5	Phasenkurven des DUFFING-Schwingers	68
3.1	Lineare Anfangsbedingungen für Absolutwinkel	88
3.2	Lineare Anfangsbedingungen für Relativwinkel	98
3.3	Nichtlineare Anfangsbedingung für Absolutwinkel	115
3.4	Nichtlineare Anfangsbedingung für Relativwinkel	121