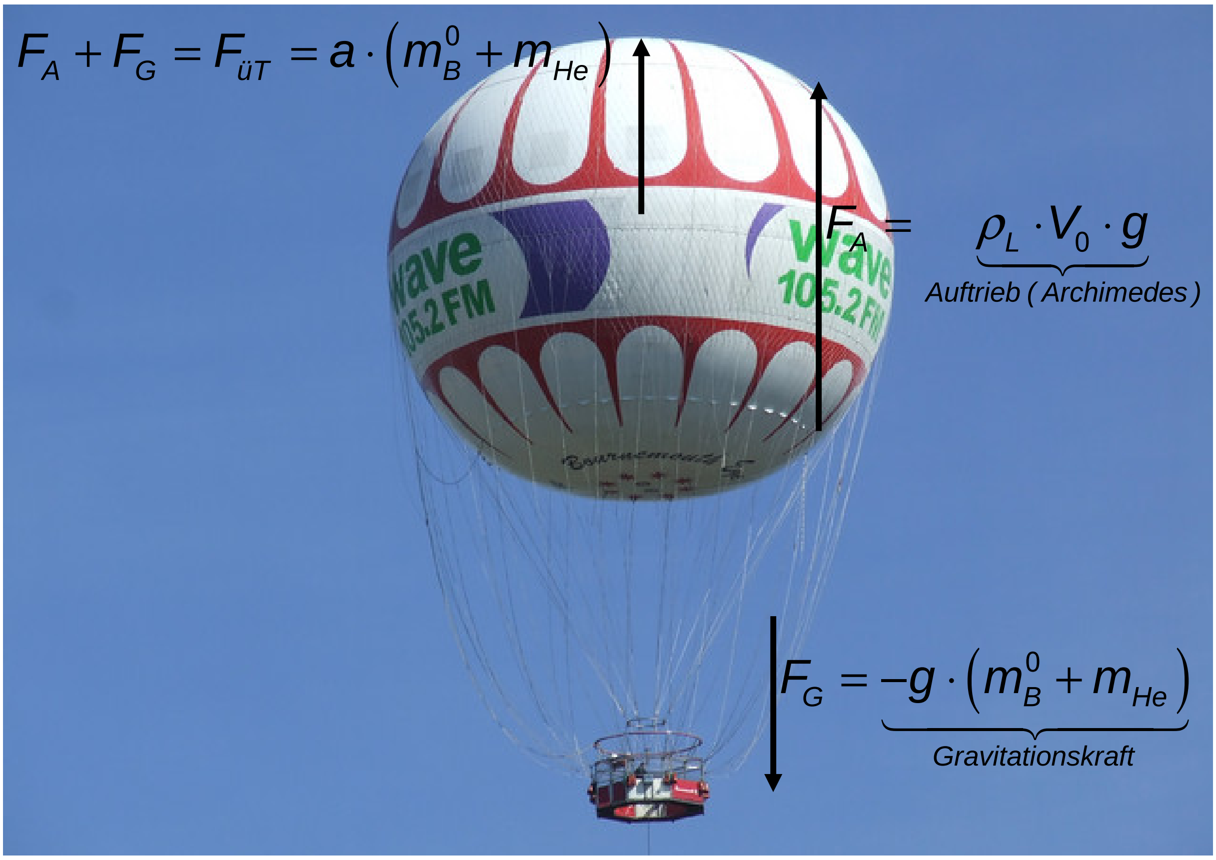
3. Übungsblatt, Teil Thermodynamik (Lösung)

ZUe 3.1 Freiballon

a) Wie groß ist die Anfangsbeschleunigung und die maximale Steighöhe?

Es besteht ein Gleichgewicht zwischen der Erdanziehungskraft F_G, die den Ballon am Boden halten will, der Auftriebskraft F_A (nach Archimedes) und der resultierenden Tragkraft bzw. dem Tragkraftüberschuss $F_{üT}$ des Ballons. Wenn die Auftriebskraft größer ist als die Erdanziehungskraft, ist der Tragkraftüberschuss positiv und der Ballon steigt mit der Beschleunigung *a*.



Tragkraftüberschuss des Ballons: $F_{üT} = F_A + F_G$

$$a \cdot \left(m_B^0 + m_{He}\right) = \underbrace{\rho_L \cdot V_{0,He} \cdot g}_{\text{Auftrieb (Archimedes)}} \underbrace{-\left(m_B^0 + m_{He}\right) \cdot g}_{\text{Gravitationskraft}}$$

geg.: Ballonmasse ohne Gasfüllung: $m_B^0 = 500\,\text{kg}$

Prallfüllung des Ballons: $V_{max} = 800\,\text{m}^3$

Lufttemperatur: $t = 5°C \mathrel{\hat{=}} T = 278{,}15\,\text{K} = \text{konst.}$

Fülldruck von Helium: $p_{0,He} = 0{,}1013\,\text{MPa}$

Füllvolumen von Helium: $V_{0,He} = 500\,\text{m}^3$

ges.: Anfangsbeschleunigung *a* und die maximale Steighöhe h_{max}

Berechnung der fehlenden Größen m_{He} und ρ_L

Die Heliumfüllmasse sowie die Luftdichte in Höhe 0 des Ballons kann man mit Hilfe des idealen Gasgesetzes berechnen:

Heliummasse: $m_{He} = n_{He} \cdot M_{He} = \frac{p_{0,He} \cdot V_{0,He}}{R_m \cdot T} \cdot M_{He} = \frac{101300 \frac{N}{\cancel{m^2}} \cdot 500\,m^3}{8{,}314 \frac{J}{\cancel{mol} \cdot \cancel{K}} \cdot 278{,}15\,\cancel{K}} \cdot 0{,}004 \frac{kg}{\cancel{mol}} = 87{,}61\,kg$

Luftdichte in Höhe 0: $\rho_{Luft}(h=0) = \frac{m_L}{V_L} = \frac{p_{0,L}}{R_L \cdot T}$

mit $R_L = \frac{R_m}{M_{Luft}}$ und $M_{Luft} = 28{,}97 \frac{g}{mol}$ (siehe Skript Seeger, Grundvorlesung „Technische Thermodynamik I", Kapitel 1.6 / Folie 27)

$$\rho_{Luft}(h=0) = \frac{101300 \frac{N}{m^2}}{\frac{8{,}314 \frac{J}{\cancel{mol} \cdot \cancel{K}}}{0{,}02897 \frac{kg}{\cancel{mol}}} \cdot 278{,}15\,\cancel{K}} = 1{,}27 \frac{kg}{m^3}$$

Damit erhält man die Anfangsbeschleunigung aus dem Kräftegleichgewicht oben:

$$a = \frac{\rho_{0,L} \cdot V_{0,He} \cdot g}{m_B^0 + m_{He}} - g = \frac{1{,}27 \frac{\cancel{kg}}{\cancel{m^3}} \cdot 500\,\cancel{m^3} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}}{587{,}61\,\cancel{kg}} - 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 0{,}79 \frac{m}{s^2}$$

Um den Unterschied zwischen der Füllung des Ballons (500 m^3) und der Prallfüllung (800 m^3) zu verstehen, muss man sich folgende Zusammenhänge vergegenwärtigen. Mit zunehmender Höhe sinken sowohl Luftdichte als auch Luftdruck in exponentieller Funktion ab. Den Zusammenhang liefert die barometrische Höhenformel, die wir später verwenden werden.

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\left(\frac{\rho_0 \cdot g \cdot h}{p_0}\right)} \quad \text{bzw.} \quad \rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-\left(\frac{\rho_0 \cdot g \cdot h}{p_0}\right)}$$

Zunächst einmal bedeutet dies, dass der Auftrieb des Ballons mit zunehmender Höher immer geringer werden müsste. Weil die Ballonhülle jedoch elastisch ist, kann sie sich mit sinkendem Luftdruck bis zur Prallfüllung ausdehnen, was den Verlust an verdrängter Masse infolge der Luftdichteverringerung durch die Volumenvergrößerung kompensiert.

Die max. Steighöhe ist erreicht, wenn der Ballon sich vollständig entfaltet hat (V_{max}) und schwebt.

Dann gilt: $F_A = F_G$

$$V_{max} \cdot \rho_L(h) \cdot \cancel{g} = \left(m_B^0 + m_{He}\right) \cdot \cancel{g}$$

$$V_{max} \cdot \rho_0 \cdot e^{-\left(\frac{\rho_{0,L} \cdot g \cdot h_{max}}{p_{0,L}}\right)} = m_B^0 + m_{He}$$

$$h_{max} = -\frac{p_{0,L}}{\rho_{0,L} \cdot g} \cdot \ln\left(\frac{m_B^0 + m_{He}}{V_{max} \cdot \rho_{0,L}}\right) = -\frac{101300 \frac{N}{m^2}}{1{,}27 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} \cdot \ln\left(\frac{(500 + 87{,}61)\,kg}{800 m^3 \cdot 1{,}27 \frac{kg}{m^3}}\right) = \underline{\underline{4452{,}2\,m}}$$

b) Wie viel m^3 Wasserstoff wären am Boden einzufüllen, um denselben Tragkraftüberschuss (Auftrieb) zu gewinnen?

Zunächst verwenden wir die ideale Gasgleichung, um die Wasserstoffmasse als Funktion des Füllvolumens zu beschreiben:

$$p_0 \cdot V_{0,H_2} = \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}} \cdot R_m \cdot T \Rightarrow m_{H_2} = \frac{p_0 \cdot V_{0,H_2} \cdot M_{H_2}}{R_m \cdot T}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in unsere Anfangsbeziehung und lösen nach V_{0,H_2} auf:

$$F_{üT} = F_A + F_G = a \cdot \left(m_B^0 + \frac{p_0 \cdot V_{0,H_2} \cdot M_{H_2}}{R_m \cdot T} \right) = \rho_{0,L} \cdot V_{0,H_2} \cdot g - \left(m_B^0 + \frac{p_0 \cdot V_{0,H_2} \cdot M_{H_2}}{R_m \cdot T} \right) \cdot g$$

$$a = \frac{\rho_{0,L} \cdot V_{0,H_2} \cdot g}{m_B^0 + \frac{p_0 \cdot V_{0,H_2} \cdot M_{H_2}}{R_m \cdot T}} - g \;\Rightarrow\; (a+g) \cdot \left(m_B^0 + \frac{p_0 \cdot V_{0,H_2} \cdot M_{H_2}}{R_m \cdot T} \right) = \rho_{0,L} \cdot V_{0,H_2} \cdot g$$

$$a \cdot m_B^0 + g \cdot m_B^0 + a \cdot \frac{p_0 \cdot V_{0,H_2} \cdot M_{H_2}}{R_m \cdot T} + g \cdot \frac{p_0 \cdot V_{0,H_2} \cdot M_{H_2}}{R_m \cdot T} = \rho_{0,L} \cdot V_{0,H_2} \cdot g$$

$$a \cdot m_B^0 + g \cdot m_B^0 = \rho_{0,L} \cdot V_{0,H_2} \cdot g - a \cdot \frac{p_0 \cdot V_{0,H_2} \cdot M_{H_2}}{R_m \cdot T} - g \cdot \frac{p_0 \cdot V_{0,H_2} \cdot M_{H_2}}{R_m \cdot T}$$

$$m_B^0 \cdot (a+g) = V_{0,H_2} \cdot \left(\rho_{0,L} \cdot g - (a+g) \cdot \frac{p_0 \cdot M_{H_2}}{R_m \cdot T} \right)$$

$$V_{0,H_2} = \frac{m_B^0 \cdot (a+g)}{\rho_{0,L} \cdot g - (a+g) \cdot \frac{p_0 \cdot M_{H_2}}{R_m \cdot T}}$$

$$V_{0,H_2} = \frac{500\,\text{kg} \cdot (0{,}79 + 9{,}81)\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1{,}27\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - (0{,}79 + 9{,}81)\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{101300\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0{,}002\frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8{,}314\frac{\text{J}(\hat{=}\,\text{N}\cdot\text{m})}{\text{mol}\cdot\text{K}} \cdot 278{,}15\,\text{K}}}$$

$$V_{0,H_2} = \frac{5300\,\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{12{,}4587\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2} - 0{,}9287\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2}} = \underline{\underline{459{,}7\,\text{m}^3 \cong 460\,\text{m}^3}}$$

Mit diesem Volumen können wir die Wasserstoffmasse ausrechnen:

$$m_{H_2} = \frac{101300\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 459{,}7\,\text{m}^3 \cdot 0{,}002\frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8{,}314\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \cdot 278{,}15\,\text{K}} = \underline{\underline{40{,}27\,\text{kg}}}$$

c) Wie hoch kann der Ballon maximal steigen, wenn er mit der unter b) berechneten Menge Wasserstoff gefüllt wird?

maximale Steighöhe mit der Wasserstoffmenge $m_{H_2} = 40{,}27\,\text{kg}$:

$$h_{max} = -\frac{p_{0,L}}{\rho_{0,L} \cdot g} \cdot \ln\left(\frac{m_B^0 + m_{H_2}}{V_{max} \cdot \rho_{0,L}}\right) = -\frac{101300\,\frac{N}{m^2}}{1{,}27\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} \cdot \ln\left(\frac{540{,}27\,kg}{800\,m^3 \cdot 1{,}27\,\frac{kg}{m^3}}\right)$$

$$h_{max} = \underline{\underline{5135{,}1\,m}}$$

d) Wie hoch kann der Ballon bei Prallfüllung (800 m^3) mit Wasserstoff steigen?

Masse der Prallfüllung (isotherme Umgebung und ideales Gasgesetz):

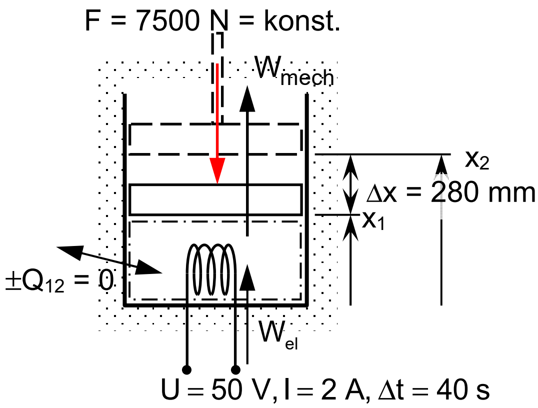
$$\frac{V_{H_2}}{m_{H_2}} = \frac{V_{max}}{m_{H_2,max}} \quad \Rightarrow \quad m_{H_2,max} = \frac{V_{max}}{V_{H_2}} \cdot m_{H_2} = \frac{800\,m^3}{459{,}7\,m^3} \cdot 40{,}27\,kg = 70{,}08\,kg$$

Damit berechnen wir die neue Steighöhe wie oben:

$$h_{max}^P = -\frac{p_0}{\rho_0 \cdot g} \cdot \ln\left(\frac{m_B^0 + m_{He,max}}{V_{max} \cdot \rho_0}\right) = -\frac{101300\,\frac{N}{m^2}}{1{,}27\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} \cdot \ln\left(\frac{570{,}08\,kg}{800\,m^3 \cdot 1{,}27\,\frac{kg}{m^3}}\right)$$

$$h_{max}^P = \underline{\underline{4698{,}4\,m}}$$

3.2 geg.:



ges.: Änderung der inneren Energie U_2 - U_1= ?

Es gilt der 1. HS für ruhende, geschlossene Systeme: $U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$

mit $$Q_{12} = \sum Q = 0 \text{ (da adiabat)}$$

und $$W_{12} = \sum W = W_{el} + W_{mech}$$

folgt für die Änderung $$U_2 - U_1 = W_{el} + W_{mech}$$

zugeführte elektrische Energie:

$$W_{el} = \int_{t_1=0}^{t_2=40s} U \cdot I \cdot dt = U \cdot I \cdot \Delta t = 50\,V \cdot 2\,A \cdot 40\,s = 4000\,J$$

geleistete Arbeit:

$$W_{mech} = W_V = -\int p \cdot dV$$

aber p und V unbekannt.
Ersetzen von p und V durch bekannte Größen.

$p = \frac{F}{A}\left(\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}\right)$ mit $F = \vec{F} \cdot \cos\varphi$ und φ = 0°, $dV = d(A \cdot x)$ mit A = konstant

$$\Rightarrow W_{mech} = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{F}{A} \cdot A \cdot dx$$

$$W_{mech} = -F \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{=\Delta x} = -7500\,N \cdot 0{,}28\,m = -2100\,J$$

Damit wird die Änderung der inneren Energie:

$$U_2 - U_1 = 4000\,J + (-2100\,J) = \underline{\underline{1900\,J = 1{,}9\,kJ}}$$

ZUe 3.3 geg.: geschlossenes System mit $m = 1\,\text{kg}$ Helium gefüllt

$t_1 = 20\,°\text{C} \triangleq T_1 = 293{,}15\,\text{K}$, $p_1 = 2\,\text{bar}$, c_p und $c_V = \text{konst.}$

Isentropenexponent (für 1-atomige Gase): $\kappa = \frac{5}{3}$ (siehe Skript Seeger, Grundvorlesung „Technische Thermodynamik I“, Kapitel 1.7 / Folie 35)

Molmasse: $M_{He} = 0{,}004\,\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$, allg. Gaskonstante: $\mathbb{R} = R_m = 8{,}3145\,\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$

a) ges.: die Stoffmenge *n* des Heliums:

$$m = n \cdot M \Rightarrow n_{He} = \frac{m_{He}}{M_{He}} = \frac{1\,\cancel{\text{kg}}}{0{,}004\,\frac{\cancel{\text{kg}}}{\text{mol}}} = 250\,\text{mol}$$

b) ges.: $V_1 = ?$ und $\rho_1 = ?$

Therm. ZGl für ideales Gas: $p_1 \cdot V_1 = m_{He} \cdot R_{He} \cdot T_1$ mit $R_{He} = \frac{R_m}{M_{He}} = \frac{8{,}3145\,\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}}{0{,}004\,\frac{\text{kg}}{\text{mol}}} = 2078{,}625\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{m_{He} \cdot R_{He} \cdot T_1}{p_1} = \frac{1\,\cancel{\text{kg}} \cdot 2078{,}625\,\frac{\overset{=\text{N}\cdot\text{m}}{\widehat{\text{J}}}}{\cancel{\text{kg}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 293{,}15\,\cancel{\text{K}}}{2 \cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = \underline{\underline{3{,}047\,\text{m}^3}}$$

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{1\text{kg}}{3{,}047\,\text{m}^3} = \underline{\underline{0{,}328\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}$$

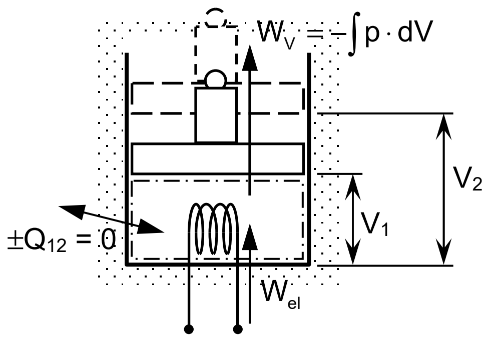
c) ges.: Zuzuführende Energie $E_{zu} = ?$ für isobare ZÄ von $t_1 = 20\,°\text{C}$ auf $t_2 = 50\,°\text{C}$

1. HS für ruhende, geschlossene Systeme

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$$

Angewendet auf das thermodynamisch System folgt:

$$U_2 - U_1 = W_{el} - \int p \cdot dV$$



$$E_{zu} = W_{el} = U_2 - U_1 + p \cdot \int dV = U_2 - U_1 + p \cdot (V_2 - V_1)$$

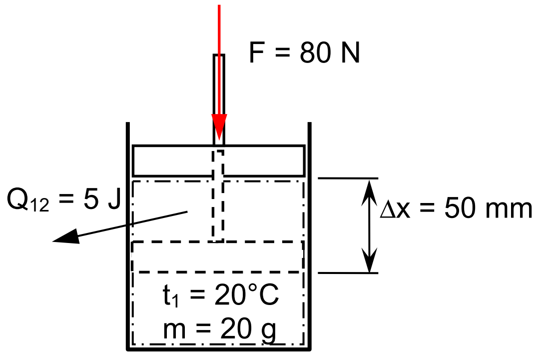
$$W_{el} = m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) + p \cdot \left(\frac{m \cdot R_{He} \cdot T_2}{p} - \frac{m \cdot R_{He} \cdot T_1}{p} \right)$$

$$c_p - c_V = R,\ \frac{c_p}{c_V} = \kappa \ \Rightarrow c_V = \frac{1}{(\kappa - 1)} \cdot R_{He} = \frac{1}{(5/3 - 1)} \cdot 2078{,}625\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} = 3117{,}94\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

$$c_p = c_V + R_{He} = 3117{,}94\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} + 2078{,}625\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} = 5196{,}565\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} = 5{,}2\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

$$E_{zu} = W_{el} = m \cdot \underbrace{(c_V + R_{He})}_{=c_p} \cdot (T_2 - T_1) = 1\,\cancel{\text{kg}} \cdot 5{,}2\,\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{kg}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 30\,\cancel{\text{K}} = 156\,\text{kJ}$$

3.4 geg: Ideales Gas gemäß der Abbildung mit c_v = 718 J/(kg·K).



a) ges.: die verrichtete Arbeit (Volumenänderungsarbeit)

$$W_{12} = -\int p \cdot dV = -\int \frac{\vec{F}}{A} d(A \cdot x) = -\int \frac{F \cdot \cos\varphi}{A} A \cdot dx = -F \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx \quad \text{mit } x_1 > x_2$$

$$W_{12} = -F \cdot \Delta x = -F \cdot (x_2 - x_1) = -80\,\text{N} \cdot (-0{,}05\,\text{m}) = 4\,\underbrace{\text{Nm}}_{\text{J}}$$

b) ges.: die Änderung der inneren Energie

1. HS für ruhende, geschlossene Systeme

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12} = -5\text{J} + 4\text{J} = -1\text{J}$$

c) ges.: die Endtemperatur

Mit der kalorischen ZGl

$$U_2 - U_1 = m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1)$$

ergibt sich die Endtemperatur:

$$T_2 = \frac{U_2 - U_1}{m \cdot c_V} + T_1 = \frac{-1\,\text{J}}{0{,}02\,\text{kg} \cdot 718 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} + 293{,}15\,\text{K} = 293{,}08\,\text{K}$$

ZUe 3.5 Definition von einem PS: *1 PS* ist als die Leistung definiert, welche erbracht werden muss, um einen Körper der Masse von 75 kg entgegen dem Schwerkraftfeld der Erde mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s zu bewegen. (1 PS = 0,7355kW ≅ ¾ kW)

a) ges.: Leistung des Motors in kW und in PS

Für die Wellenleistung gilt:

$$P_W = M \cdot 2\pi \cdot n = 320\,\text{Nm} \cdot 2\pi \cdot \frac{2000 \frac{1}{\text{min}}}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}} = 67020 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 67\,\text{kW} \cong 91\,\text{PS}$$

b) ges.: Leistung des Motors bei 4000 U·min^{-1} und einem Drehmoment von 240 Nm

$$P_W = 240\text{Nm} \cdot 2\pi \cdot \frac{4000 \frac{1}{\text{min}}}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}} = 100531 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 100{,}5\,\text{kW} \cong 137\,\text{PS}$$