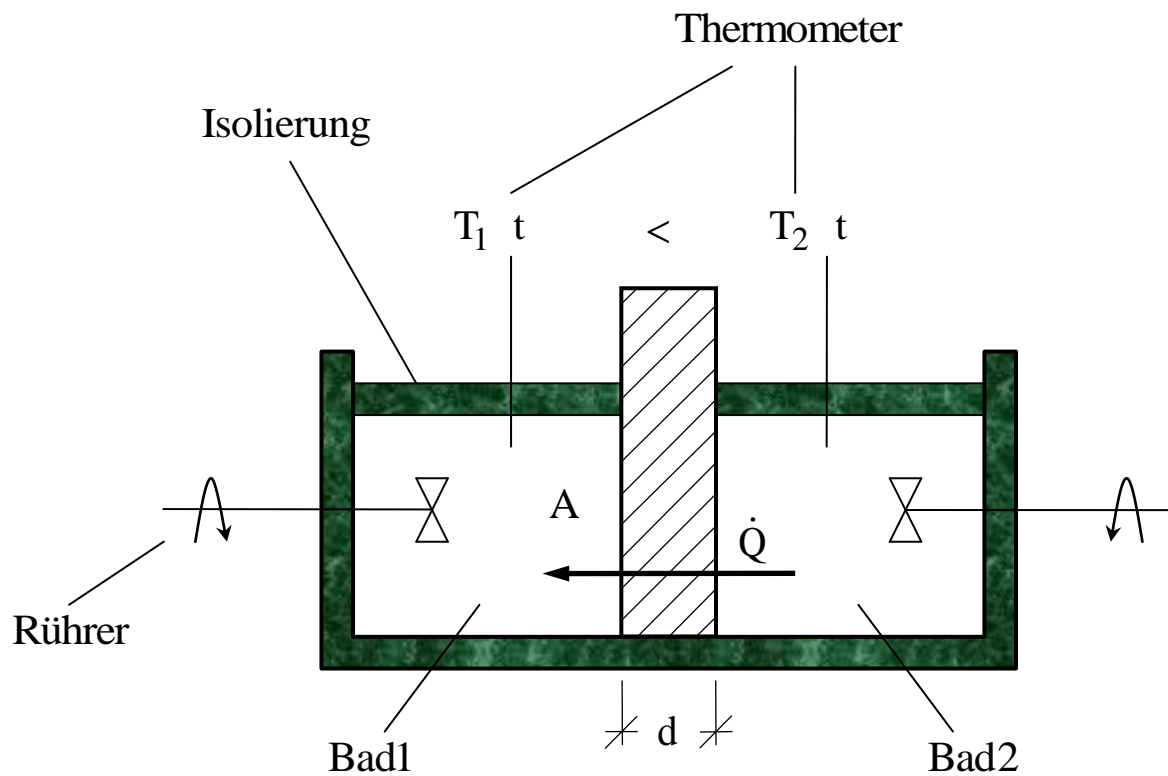


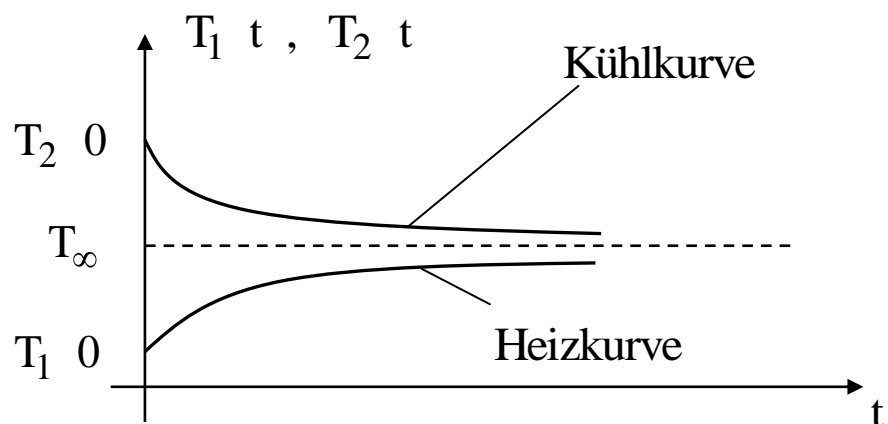
## B. Eindimensionale stationäre Wärmeleitung Fourier – Gesetz

Grundversuch :

Newton (~1700) und Fourier (1820)

Wärmeaustausch zwischen Reservoiren durch ebene Platte.



Beobachtung

$$1. \quad \text{HS:} \quad U_{1,0} + U_{2,0} = U_1 + U_2 = \text{const} \quad (17)$$

$$C_1 \cdot T_{10} + C_2 \cdot T_{20} = (C_1 + C_2) \cdot T_\infty \quad (18)$$

$$T_\infty = \frac{C_1 \cdot T_{10} + C_2 \cdot T_{20}}{C_1 + C_2} \quad (19)$$

Gleichgewichtstemperatur zwischen Bad1, Bad 2.

$$\text{Kinetik:} \quad \dot{T}_1 \cong T_2 - T_1 \geq 0 \quad (20)$$

$$\dot{T}_2 \cong T_1 - T_2 \leq 0 \quad (21)$$

1. HS, Bad1

Wärmedifferential

$$dU_1 = dQ = C_1 \cdot dT_1 \quad \left| \frac{1}{dt} \right. \quad (22)$$

$$(20-22) \rightarrow \quad \dot{Q} \cong T_2 - T_1 \quad (23)$$

**Experiment Newton – Fourier:**

Wärmestrom  $\longrightarrow \dot{Q} = +\lambda \frac{A}{d} T_2 - T_1 \quad \dots \quad d \approx \sqrt{A}$  Dicke Wand (24)

$\lambda$  — Wärmeleitfähigkeit       $A$  — Fläche  
 $d$  — Dicke

$$q = \frac{\dot{Q}}{A} = +\frac{\lambda}{d} T_2 - T_1 \quad (25)$$

$\lambda = \text{W/mK}$  ... Wärmeleitfähigkeit

Wärme, die durch Würfel ( $A = 1\text{m}^2$ ,  $d = 1\text{m}$ ) bei

$T_2 - T_1 = 1\text{K}$  hindurchtritt.

A3 – A5  $\rightarrow$  Messmethode

<u>Physik</u>	Molekulare Situation	$\lambda$ W/mK
Gase	Wenige Stöße Druckunabhängigkeit	klein
Flüssigkeiten	Größere Dichte	mittel
Nichtmetalle	Gitterschwingungen der Atome	hoch
Metalle	Elektronensee *) $T \rightarrow 0$	$\lambda \approx \frac{1}{T^2}$

\*) Beziehung zur elektrischen Leitfähigkeit!

Zahlenwerte	$\lambda$ W/mK
Luft, ruhend (V)	0.025
Wasser (L)	0,6
Kork (S)	0,05
Fensterglas	0,12
Ziegel (trocken)	0,5
Silber (Ag)	420
Kupfer (Cu)	380

Weitere Daten: VDI Wärmeatlas

2. HS: Wärme fließt immer von Systemen höherer zu Systemen niedrigerer Temperatur.

$$\text{Gl. (24): } T_2 > T_1.$$

Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  hängt von thermodynamischen Parametern, nämlich

Zusammensetzung (Legierungen)

Temperatur (Mittelwert)

Druck etc.

des wärmeleitenden Stoffes ab!

## Wärmeleitfähigkeit

Abhängigkeit von Druck  $p$  und Temperatur  $T$

Taylor – Reihe

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + K_T \frac{T - T_0}{T_0} + K_p \frac{p - p_0}{p_0} + \mathcal{O}^2$$

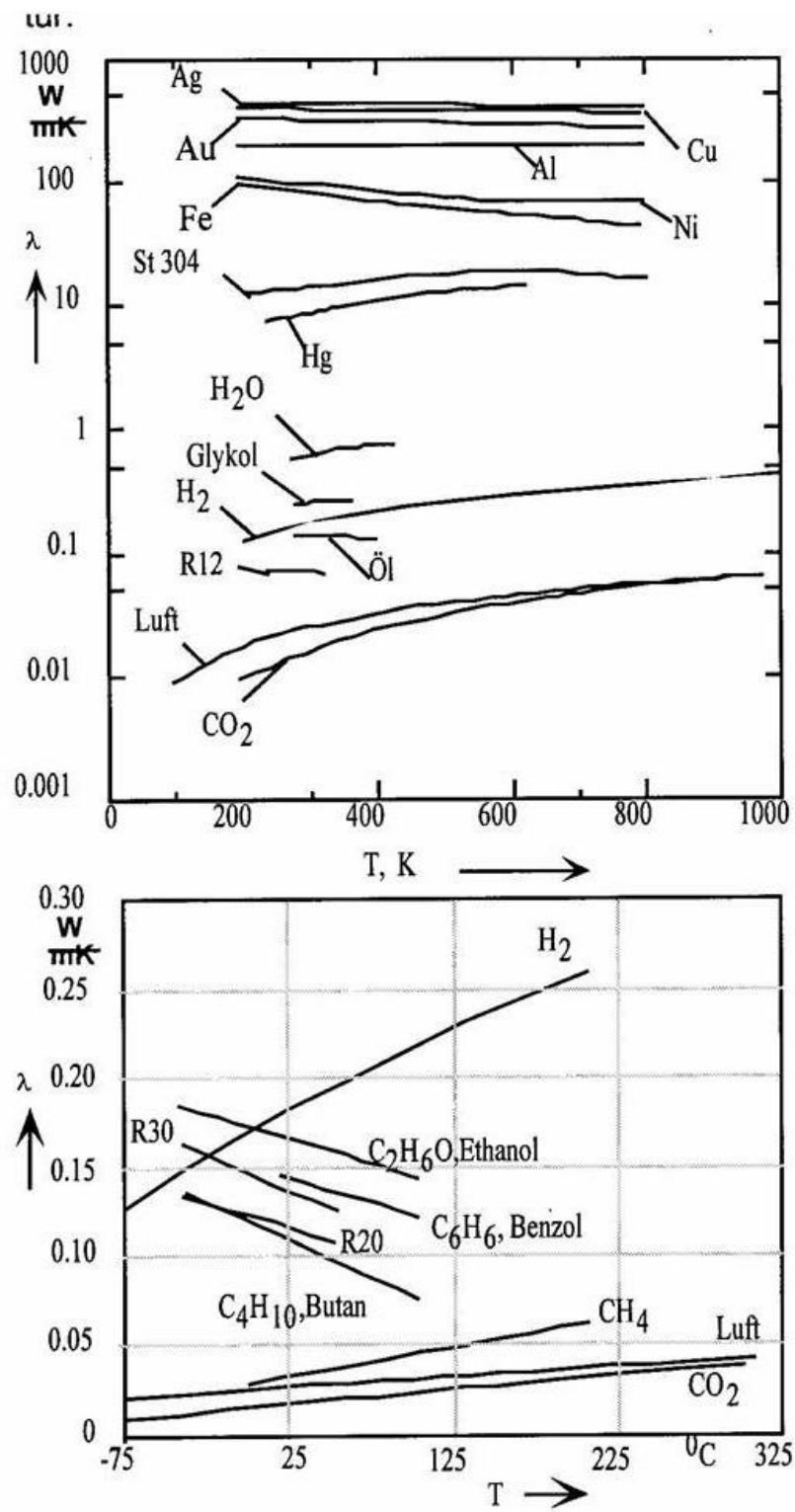
	$K_T$	$K_p$	$K_{TT}$ .....
Luft	0,891	0,002	...
Wasser	0,823	0,00008	...

$$0 < T < 50 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ , } 1 < p < 20 \text{ bar}$$

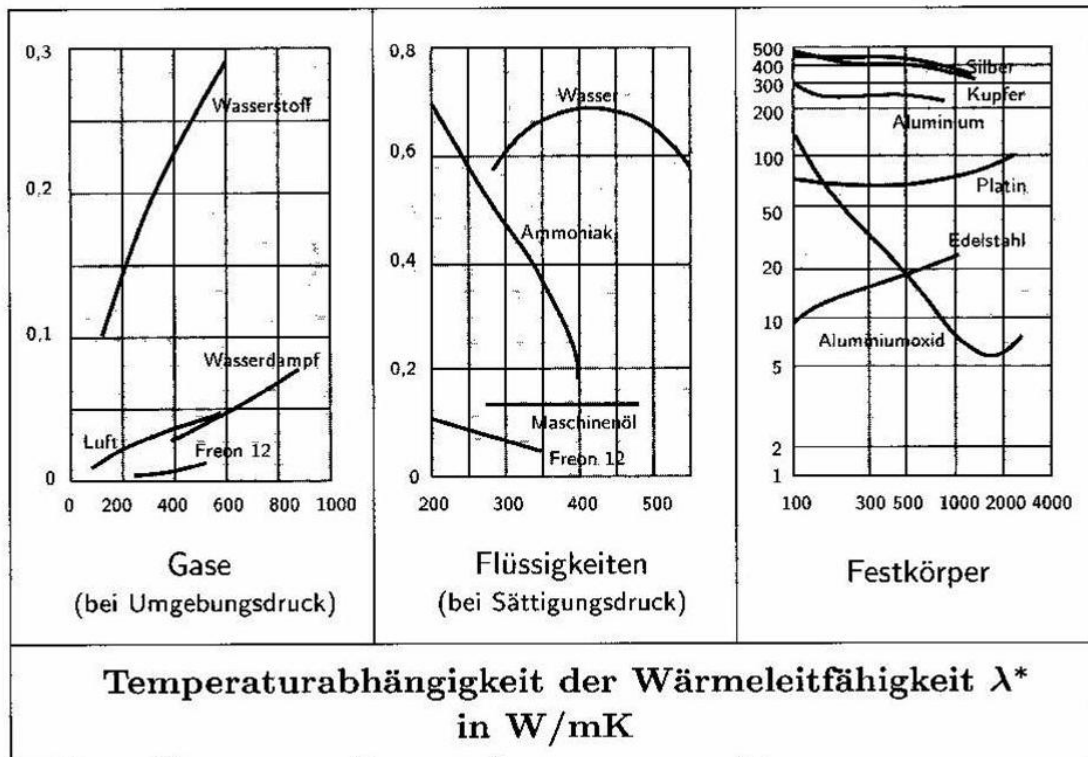
Zahlenwerte : VDI – Wärmetlas

Landolt – Börnstein

ASME – Tables etc.



Bilder 1.4: Wärmeleitfähigkeiten



Literatur: [7,10], Temperatur in Kelvin (K)

## Wärmewiderstand

$$(24) \quad T_2 - T_1 = \frac{d}{\lambda \cdot A} \cdot \dot{Q} \quad (30)$$

Ohmsches Gesetz

$$U_{e2} - U_{e1} = R_e \cdot \dot{Q}_e, \quad I_e = \frac{dQ_e}{dt} \quad (31)$$

Elektrischer Widerstand

$$(30): \quad \frac{T_2 - T_1}{\frac{d}{\lambda \cdot A}} = \dot{Q} \quad (32)$$

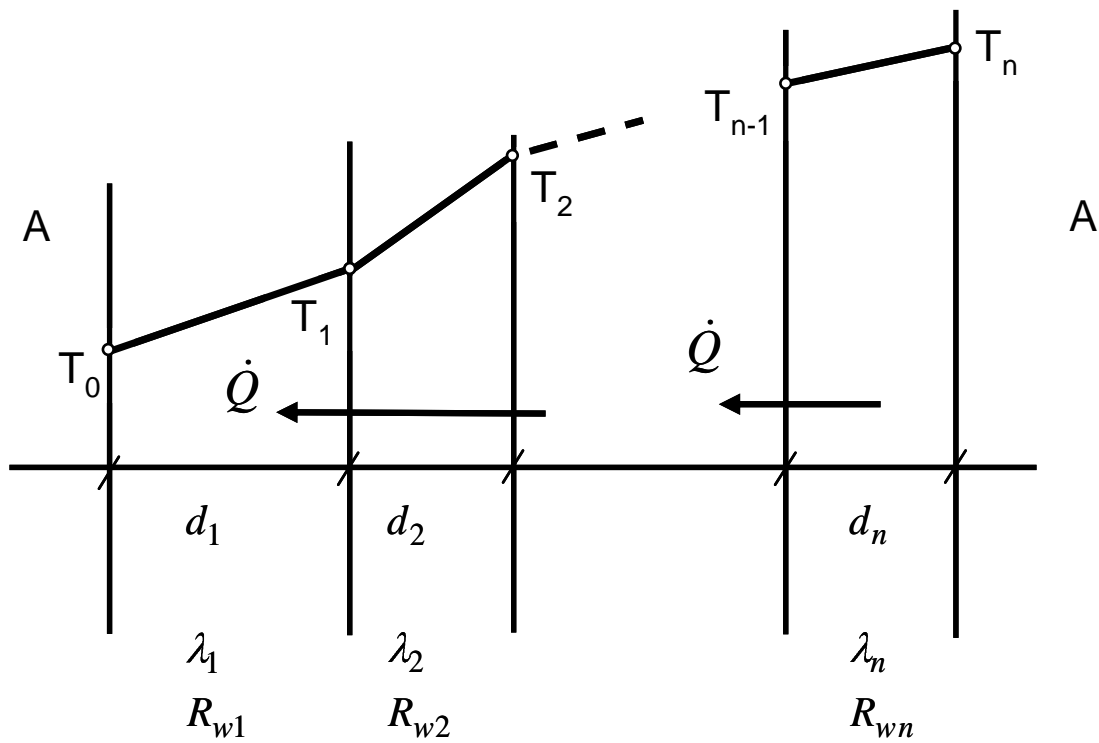
Wärmewiderstand

$$R_w = \frac{d}{\lambda \cdot A}, \quad R_w = \frac{K}{W} \quad (33)$$



Anwendung von (32)

Wärmeleitung durch inhomogene Platte bzw. Plattensysteme ( $A = \text{const}$ )



$$\text{Platte } i: \quad T_i - T_{i-1} = R_{wi} \cdot \dot{Q}_i \quad \sum_i \quad (34)$$

$$\text{Stationarität!} \quad \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dots = \dot{Q}_h \equiv \dot{Q} \quad (35)$$

$$(34,35) \quad T_n - T_0 = R_w \cdot \dot{Q} \quad (36)$$

$$R_w = \sum_{i=1}^n R_{wi} \quad (36a)$$

$$R_w = \frac{d}{\lambda \cdot A} \quad (37)$$

$$(36a) \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{d} \sum_i \frac{d_i}{\lambda_i} \quad (38)$$

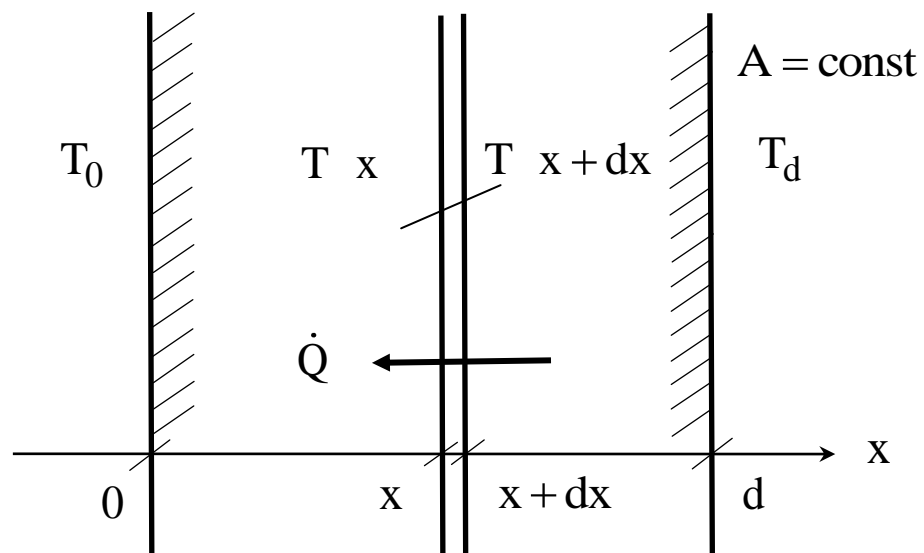
Effektive oder äquivalente Wärmeleitfähigkeit der geschichteten Platte

$$d = \sum_{i=1}^n d_i \quad (39)$$

Siehe auch Aufgabe A8

**WL einer Platte mit kontinuierlich veränderlicher  
Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = \lambda(x)$**

(Legierungen, Verunreinigungen, Feuchte etc.)



Fourier:

$$\dot{Q} = \lambda(x) \frac{A}{dx} \underbrace{T_{x+dx} - T_x}_{dT_x} = \text{const} \quad (40)$$

Energieerhaltung / Stationarität

$$\dot{Q} \frac{dx}{\lambda x} = AdT \quad \Bigg|_{x=0}^d$$

$$\dot{Q} \int_0^d \frac{dx}{\lambda x} = A T_d - T_0$$

$$\underline{\dot{Q} = \lambda_{\text{eff}} \frac{A}{d} T_d - T_0} \quad (41)$$

$$\frac{\lambda_{\text{eff}}}{d} = \frac{1}{\int_0^d \frac{dx}{\lambda x}}$$

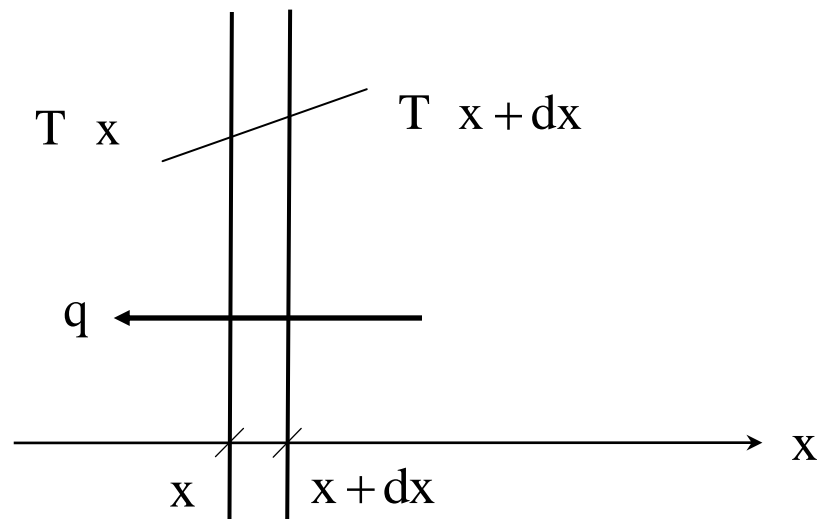
$$\rightarrow \frac{d}{\lambda_{\text{eff}}} = \int_0^d \frac{dx}{\lambda x} \quad \dots \text{Def. „effektive“ „äquivalente“}$$

$$\text{WLF:} \quad (41a)$$

**Fourier – WL Gesetz:**

## Lokale Form

Stationarität, 1 – Dimension



$$q = \frac{\dot{Q}}{A} = -\frac{\lambda}{dx} \underbrace{T_{x+dx} - T_x}_{\text{Taylor-Reihe}}$$

$$= \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dx^2 + \dots$$

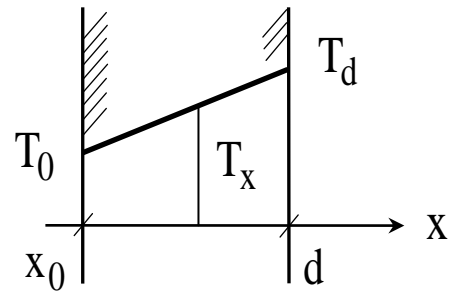
$$\rightarrow \boxed{q = -\lambda \cdot x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)} \quad (42)$$

Beispiel:

Temperaturverlauf in ebener Platte,  $A = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$

$$q_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \Big|_{x_0}^x \int dx$$

$$q(x - x_0) = -\lambda (T_x - T_0)$$



$$T_d - T_0 = -\frac{q}{\lambda} (x_d - x_0)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{T_x - T_0}{T_d - T_0} = \frac{x - x_0}{x_d - x_0}} \quad (43)$$

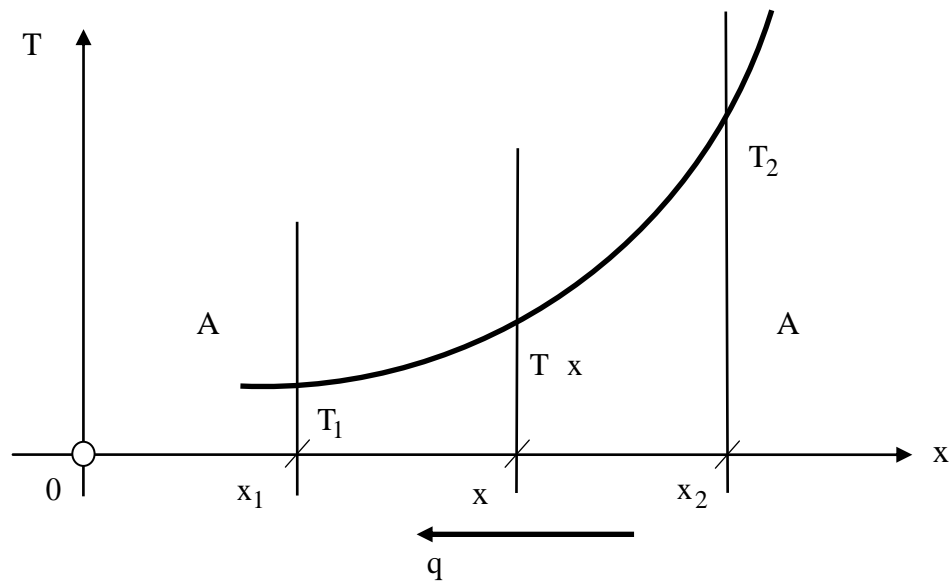
Verallgemeinerung von (42) auf 3 Dimensionen:

$$\underline{q}(x) = -\lambda(\bar{x}) \cdot \text{grad } T \quad (44)$$

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = -\lambda(\bar{x}) \cdot \begin{pmatrix} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \\ \partial T / \partial z \end{pmatrix} \quad (44a)$$

Beispiel:

Wärmeleitung und Temperaturverlauf in einer **inhomogenen** Platte, Stationarität!



$$(42) \quad q = -\lambda(x) \cdot \left( \frac{dT}{dx} \right) = \text{const}$$

Temperaturverlauf in Platte?

$$dT = -\frac{q}{\lambda(x)} dx \quad \left| \int_{x_1, T_1}^{x, T} \right.$$

$$T(x) - T_1 = - \int_{x_1}^x \frac{q}{\lambda(x)} dx \quad (45)$$

Stationarität:  $\dot{Q} = A \cdot q = \text{const}$

(Energiesatz)  $A = \text{const} \rightarrow q = \text{const!}$  (46)

(45,46)  $T(x) - T_1 = -q \int_{x_1}^x \frac{dx}{\lambda(x)}$  (47)

$x = x_2$  :  $T_2 - T_1 = -q \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda(x)}$  (47a)

$$T(x) - T_1 = (T_2 - T_1) \cdot \frac{\int_{x_1}^x \frac{dx}{\lambda(x)}}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda(x)}} \quad (48)$$

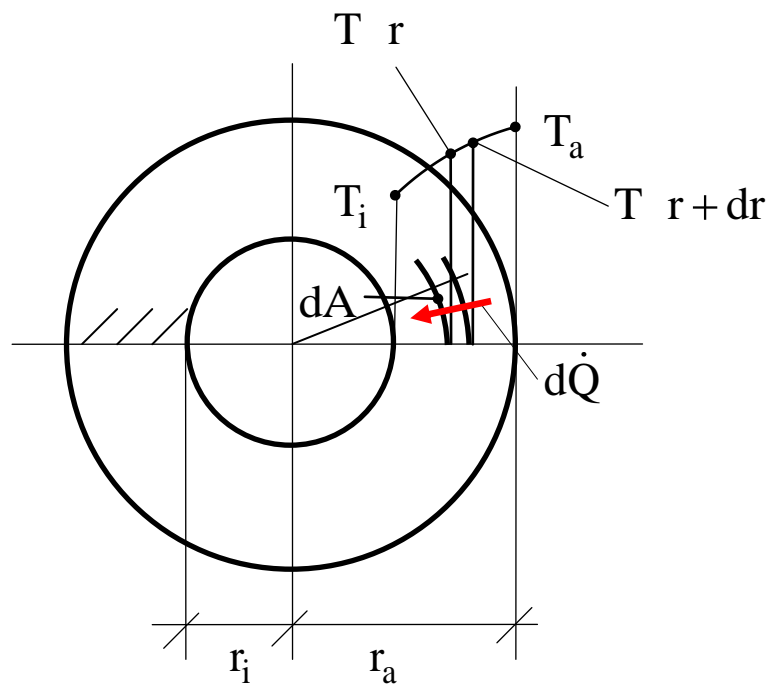


## Stationäre Wärmeleitung durch Kreisrohrwand

Beispiel: Temperaturverlauf in Zylinderwand

$\lambda = \text{const}$  Rohrlänge  $l$

Stationarität, Zylindersymmetrie



Fourier für Massenelement  $r, r + dr, \varphi, \varphi + d\varphi, l$

$$dA = r \cdot d\varphi \cdot l$$

$$d\dot{Q} = q \cdot dA$$

$$\underline{q} = -\lambda \nabla T$$

$$\underline{q} = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$d\dot{Q} = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) r \cdot d\varphi \cdot \ell \quad \left| \int_{\varphi=0}^{2\pi} \right.$$

$$\dot{Q} = -2\pi \ell r \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \text{const} \quad *$$

1.HS – Stationarität

$$\left( \dot{U} = \sum_i J_{ui} + \dot{P}_u \right)$$

$$\sum: \Delta m_{r, r+\Delta r} : \Delta \dot{U} = \dot{Q}_{r+\Delta r} - \dot{Q}_r$$

$$0 = \dot{Q}_{r+\Delta r} - \dot{Q}_r \rightarrow \dot{Q} = \text{const}$$

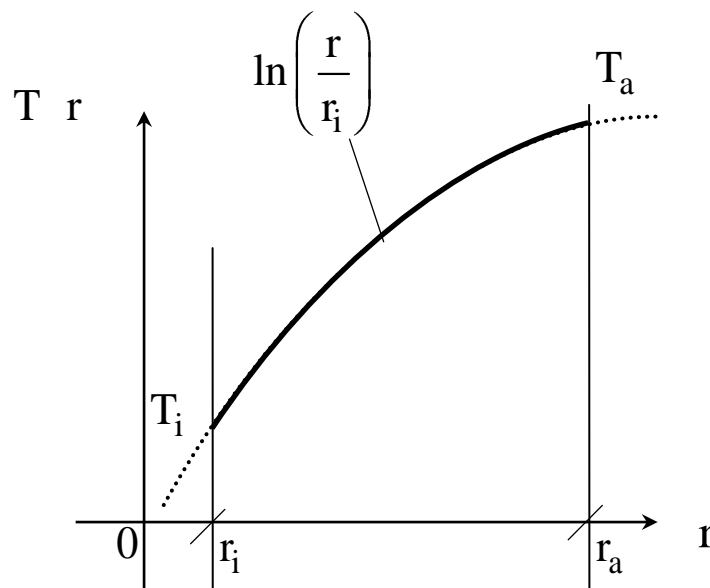
$$* \quad \dot{Q} \frac{dr}{r} = -2\pi \cdot \ell \cdot \lambda \cdot dT \quad \left| \int_{r_i}^{r, r_a} \right.$$

$$\dot{Q} \ln r/r_i = -2\pi \cdot \ell \cdot \lambda T r - T_i$$

$$r = r_a :$$

$$\dot{Q} \ln r_a/r_i = -2\pi \cdot \ell \cdot \lambda T_a - T_i \quad \dots \text{Grenzbedingung} \quad **$$

$$\rightarrow \frac{T r - T_i}{T_a - T_i} = \frac{\ln r/r_i}{\ln r_a/r_i}$$



Temperaturverlauf in Zylinderwand

Aus \*\*

$$\dot{Q} = -\frac{2\pi\ell\lambda}{\ln r_a/r_i} T_a - T_i$$

## Aufgabe A9 / U – Boot

Nahrung \*\* fur dunnwandige Rohre

$$r_a = r_i + d \quad , \quad d \ll r_i \quad ,$$

$$\dot{Q} = -2\pi\ell\lambda \left[ \ln r_a/r_i \right]^{-1} T_a - T_i$$

$$\ln r_a/r_i \simeq \left( \frac{d}{r_i} \right)$$

$$\rightarrow \quad \dot{Q} = -2\pi\ell\lambda \frac{r_i}{d} T_a - T_i \quad \dots \text{“ Platte “}$$