

E. Wärmeleitung in Systemen mit Wärmequellen

Wärmequellen in Festkörpern *

1. Ohmsche Stromwärme
Elektrische Leiter
2. Induktionswärme
Mikrowellenheizung
3. Homogene chemische Reaktionen
Erstarrung von Beton
4. Adsorption / Desorption von Gasen und
Dämpfen in porösen Festkörpern
(Polzeifilter bei PKWs, LKWs)

Temperaturleitungsgleichung, vgl. Kap. D, Gl. (17):

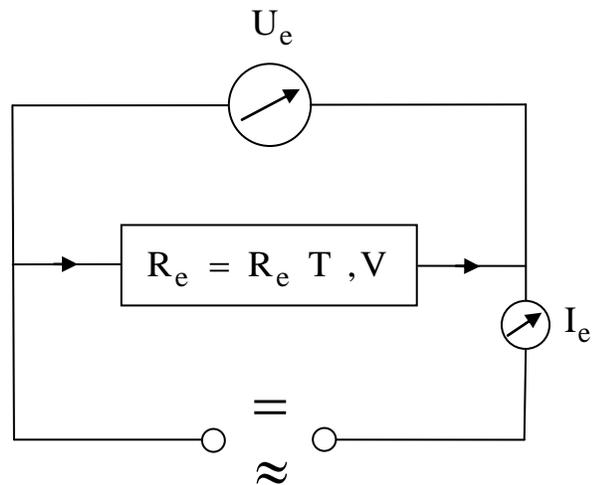
$$\partial_t T_{\underline{x},t} = a \Delta T_{\underline{x},t} + \frac{P_V}{\rho c}$$

* Wärmeleitprobleme in Flüssigkeiten und Gasen mit Wärmequellen – z.B. Kühlprobleme von Bioreaktoren (Alkoholische Vergärung beim Bierbrauen) – können in der Vorlesung beider nicht behandelt werden.

1. Elektroheizungen

Ohmsche Stromwärme

- 1a. Direkte Heizung
Wärmegut im Stromkreis



Stromquelle(Gleichstrom, Wechselstrom)

1. Gleichstrom, Ohm Gesetz

$$P = I_e U_e = R_e I_e^2 \quad (1)$$

$$U_e = R_e I_e$$

2. Wechselstrom

$$I_e = I_{e0} \sin \omega t$$

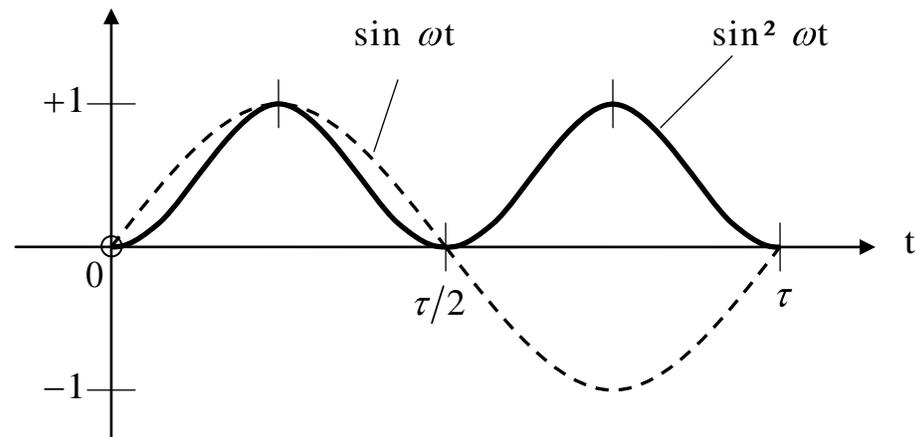
$$U_e = U_{e0} \sin \omega t - \varphi$$

φ ...Phasenverschiebung

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau} \quad \dots\text{Keisfrequenz}$$

ν ...Frequenz des Wechselstroms (50 Hz)

$\tau = \frac{1}{\nu}$...Schwingungsdauer



Zeitmittelwert der elektrischen Leistung

$$P = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} I_e(t) U_e(t) dt$$

$$P = \frac{1}{\tau} I_{e0} U_{e0} \int_0^{\tau} \sin \omega t - \varphi dt$$

$$P = \frac{1}{2} I_{e0} U_{e0} \cos \varphi \quad (2)$$

$$P \varphi = 0 = \frac{1}{2} I_{e0}^2 R_e \quad (2a)$$

$$P \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (2b)$$

Wärmeproduktionsdichte :

$$p = \frac{P}{V} \text{ W/m}^3 \quad (3)$$

Hinweise:

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}$$

$$e^{2\pi ni} = 1 \quad \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1 \quad \left| \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \right.$$

$$\rightarrow \int_0^{\tau} \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2}$$

1b. Indirekte Heizung

Ohmsche Wärme \rightarrow Wärmeträger(Luft)

Strahlung \rightarrow Wärmegut

Haushaltsbacköfen (Umluft)

2. Induktionswärme

Vgl. Bild [7]

Induktionsströme

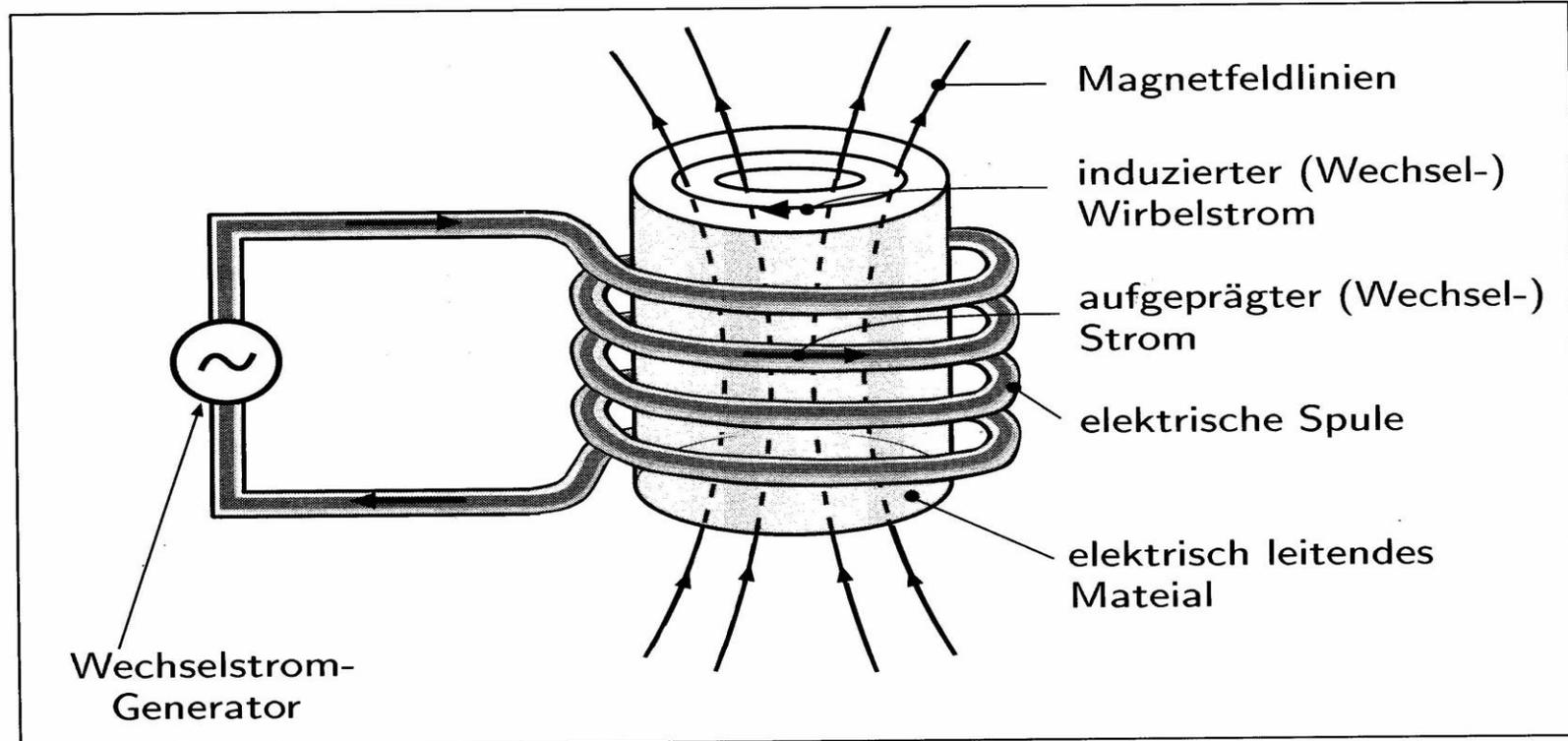
Erzeugung durch magnetische Wechselfelder

Eindringtiefe: $\delta \approx \frac{1}{\tau} = \nu$

Skin – Effekt !

Aufgabe A18a,b

Elektrische Induktionsheizung (Wechselstrom, Faraday – Prinzip)



**Momentanbild der elektrischen Ströme und
Magnetfeldlinien bei der Induktionsheizung eines
elektrisch leitendes Materials**

Beispiel

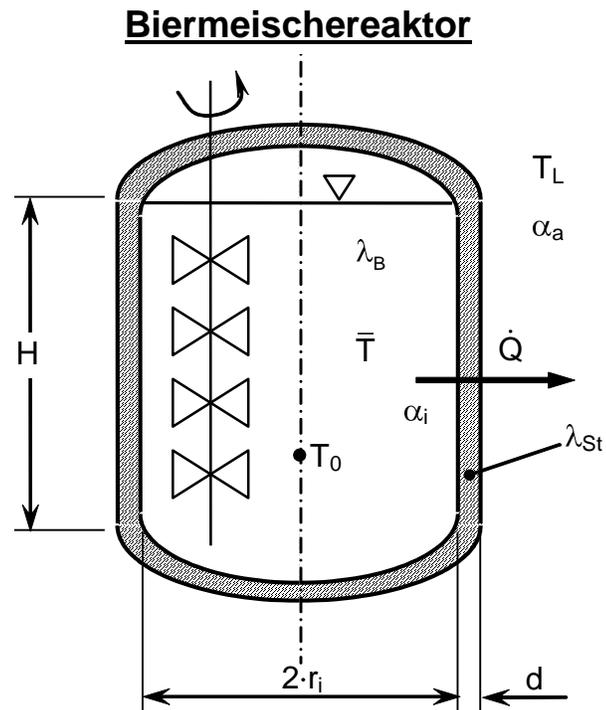
Biermaischereaktor

Der zylindrische Reaktor einer Brauerei (Höhe $H = 6$ m, Durchmesser $2 r_i = 2$ m, Wandstärke $d=1$ cm) ist vollständig mit Biermaische gefüllt ($\lambda_B = 0,6$ W/km). Die Maische produziert bei der alkoholischen Gärung die Wärme $p_v = 0,2$ kW/m³ = 0,2 W / l. Um Überhitzung zu vermeiden, wird die Maische ständig gerührt (Rührreaktor siehe Figur), so dass sie überall näherungsweise dieselbe konstante Temperatur (\bar{T}) besitzt. Die Temperatur der Umgebungsluft beträgt $T_L = 20$ °C.

- a) Welche Temperatur (\bar{T}) besitzt die Maische in gerührtem Zustand?
- b) Skizziere den Temperaturverlauf Maische – Behälterwand – Luft.

Durch eine Betriebsstörung fällt die Rühranlage aus und die Maische bewegt sich nicht mehr, so dass die in ihr erzeugte Wärme nur mehr durch Wärmeleitung, d.h. ein entsprechendes Temperaturgefälle von innen nach außen abgeführt werden kann (vgl. Aufgabe A 18 b).

- c) Auf welchen Wert (T_0) steigt die Temperatur der Maische auf der Achse des Reaktors ($r = 0$) an?
- d) Skizziere den Temperaturverlauf Maische – Behälter – Luft im ungerührten Zustand.

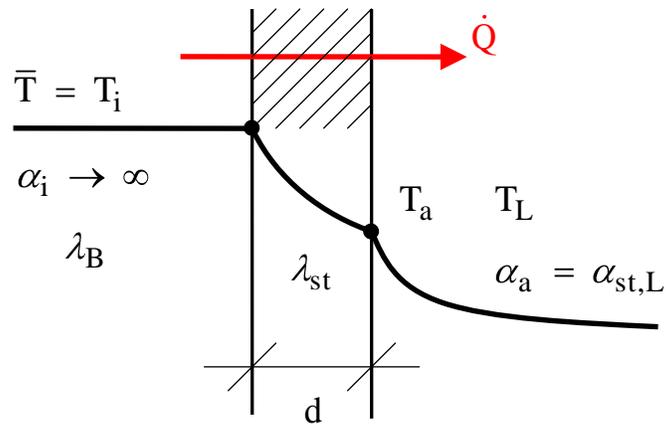


Wärmeleitfähigkeit Biermaische	$\lambda_B = 0,6 \text{ W/km}$
Wärmeleitfähigkeit Behälterwand (Stahl)	$\lambda_{St} = 40 \text{ W/km}$
Wärmeübergangskoeffizient Maische – Stahl	$\alpha_i \rightarrow \infty$
Wärmeübergangskoeffizient Stahl – Luft	$\alpha_a = 100 \text{ W/km}^2$

Hinweis:

Da $\alpha_i \rightarrow \infty$, kann der Wärmeübergangswiderstand Maische – Stahlwand vernachlässigt werden.

- a) Rührzustand, Mischtemperatur $\bar{T} = ?$
 Gesamte im stationären Rührzustand erzeugte Wärme muss abgeführt werden durch Behälterwand
- b) Temperaturverlauf:



Mischtemperatur \bar{T} :

$$\dot{Q} = \frac{1}{R} (\bar{T} - T_L) \quad (5)$$

$$\dot{Q} = p_v \cdot V$$

$$V = \pi r_i^2 H$$

$$R = \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{r_i + d}{r_i}\right)}{2\pi H \lambda_{st}}}_{R_{wL} \quad WL} + \frac{1}{\underbrace{2\pi r_i + d}_{R_{wüa}} \underbrace{H \alpha_{st,L}}_{WÜ(st \rightarrow L)}}$$

$$(1,2) \quad \underline{\bar{T} = T_L + R\dot{Q}} \quad (5a)$$

Zahlenwerte

$$\dot{Q} = 0,2 \frac{\text{kW}}{\text{m}^3} \cdot 18,85 \text{ m}^3$$

$$\dot{Q} = 3,77 \text{ kW}$$

$$V = \pi \text{ m}^2 \cdot 6\text{m} = 18,85 \text{ m}^3$$

$$R = R_{\text{wL}} + R_{\text{wüa}}$$

$$R_{\text{wL}} = \frac{\ln\left(\frac{r_i + d}{r_i}\right)}{2\pi H \lambda_{\text{st}}} = \frac{0,01 \text{ m K}}{2\pi \cdot 6\text{m} \cdot 40\text{W}} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ K/W}$$

$$R_{\text{wüa}} = \frac{1}{2\pi r_i + d H \alpha_a} = \frac{1 \text{ m}^2 \text{ K}}{2\pi \cdot 1 + 0,01 \text{ m} \cdot 6\text{m} \cdot 100\text{W}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ K/W}$$

$$R = 0,00004 + 0,0003 \text{ K/W}$$

$$\underline{R = 0,00034 \text{ K/W}}$$

$$(1A) \quad \bar{T} = 20^\circ\text{C} + 0,00034 \frac{\text{K}}{\text{W}} \cdot 3,77 \text{ kW}$$

$$\underline{\bar{T} = 21,14^\circ\text{C}}$$

Achsensentemperatur: $T_0 = T \text{ r} = 0$

$$(6) \quad r = 0$$

$$T_0 = T_i + \frac{P_v}{4\lambda_B} r_i^2 \quad (6a)$$

Bestimmung T_i

Rückrechnung Wärmetransport \dot{Q} ... bekannt

$$\text{WÜa} \quad \dot{Q} = \frac{1}{R_{\text{wÜa}}} T_a - T_L \quad T_a = T_L + R_{\text{wÜa}} \dot{Q}$$

$$\text{WL} \quad \dot{Q} = \frac{1}{R_{\text{wL}}} T_i - T_a \quad T_i = T_a + R_{\text{wL}} \dot{Q}$$

$$T_i = T_L + R_{\text{wÜa}} + R_{\text{wL}} \dot{Q}$$

$$\underline{T_i = \bar{T}} \quad (7)$$

$$(6a,7) \quad T_0 = 21,14^\circ\text{C} + \frac{\overbrace{0,2\text{kW} \cdot 1\text{m}^{2+1} \cdot \text{K}}^{83,3\text{K}}}{\text{m}^3 \cdot 4 \cdot 0,6\text{W}}$$

$$T_0 = 104,5^\circ\text{C} \dots \text{Sieden?}$$

Aufgaben 18 a, 18b