F. Wärmeleitung in Rippensystemen

<u>Ziel</u>: Erhöhung des Wärmestroms (Festkörper$\leftrightarrow$Fluid)

durch Vergrößerung der Austauschfläche

Literatur: Elsner, Herwig, VDI-Atlas

Stationäre Wärmeleitung in und Wärmeübergang von

Rippen (Einfache Theorie)

V: Temperatur über Rippenquerschnitt konstant

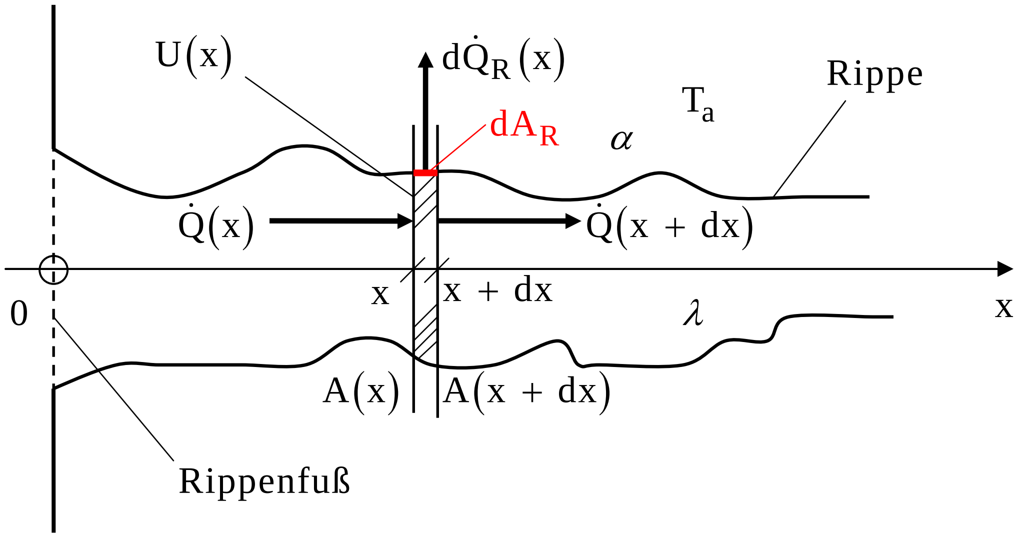
Siehe Figur!

$\rightarrow$ Dünne Rippe

Rippenmaterial:

Wärmeleitfähigkeit: $\lambda = \text{const}$

Wärmeübergangskoeffizient: $\alpha = \text{const}$



Querschnitt : $A = A(x)$
Oberfläche : $A_R = A_R(x)$

Wärmebilanz aus Rippenelement

$$\dot{Q}(x) - \dot{Q}(x + dx) - d\dot{Q}_R(x) = 0 \qquad (1)$$

Taylor : $$\dot{Q}(x+dx) = \dot{Q}(x) + \left(\partial_x \dot{Q}(x)\right)dx + O\left((dx)^2\right) \qquad (2)$$

Fourier: $$d\dot{Q}_R(x) = \alpha \, dA_R\left(T(x) - T_a\right) \qquad (3)$$

Fourier: $$\dot{Q}(x) = -\lambda A(x)\partial_x T \qquad \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} \qquad (4)$$

(1-4): $$\partial_x^2 T + \frac{1}{A}(\partial_x A)(\partial_x T) - \frac{\alpha}{\lambda A}(\partial_x A_R)\left(T(x) - T_a\right) = 0 \qquad (5)$$

Spezialfall: Ebene Rippen mit konstantem Querschnitt

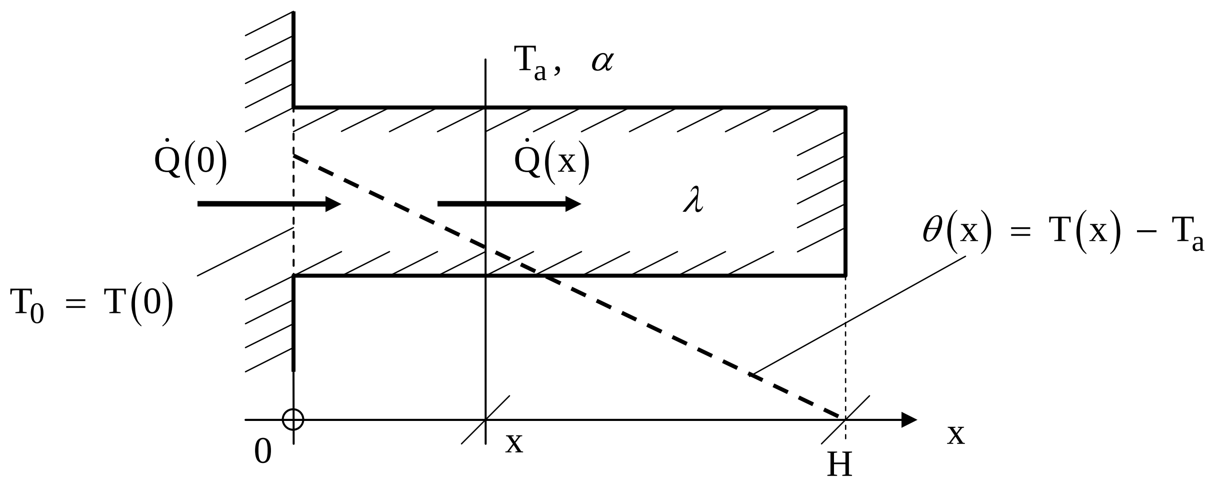
$$A(x) \quad = A = \text{const} \tag{6a}$$

Rippenoberfläche

$$A_R(x) \quad = U \cdot x \tag{6b}$$

Rippenumfang : $U = \text{const}$

$$\partial_x A_R(x) = U = \text{const} \tag{6c}$$



Temperaturgleichung (5), (6)

$$\partial_x^2 T - \frac{\alpha U}{\lambda A}\left(T - T_a\right) = 0 \tag{7}$$

Abkürzungen:

$$m^2 = \frac{\alpha U}{\lambda A} \tag{8a}$$

$$\theta = T(x) - T_a \tag{8b}$$

(7,8) $$\underline{\partial_x^2 \theta - m^2\theta = 0} \tag{9}$$

ODE, 2.Ordnung, Koeff. konstant!

Lösung über Ansatz $\theta = e^{px}$ (10)

(9,10) $$p = \pm m \tag{11}$$

$$\underline{\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}} \tag{12}$$

Bestimmung von C_1, C_2 über Randbedingungen

1) Rippenbasistemperatur sei bekannt:

$$\underbrace{\theta(x = 0)}_{} = T_0 - T_a \tag{13}$$

(12) $$\theta_0 = C_1 + C_2 \tag{14a}$$

2) Rippenhöhe (H) so groß, dass Wärmestrom durch Stirnfläche vernachlässigt werden kann

Fourier

$$\dot{Q} = -\lambda A \partial_x T(x) = -\lambda A \partial_x \theta$$

(12) $$\dot{Q}(H) = -\lambda A\left(-m C_1 e^{-mH} + m C_2 e^{mH}\right) = 0 \qquad (14b)$$

(14a, b) : $$C_1 = \frac{e^{mH}}{e^{mH} + e^{-mH}} \theta_0 \qquad (15a)$$

$$C_2 = \frac{e^{-mH}}{e^{mH} + e^{-mH}} \theta_0 \qquad (15b)$$

(15,12) $$\theta(x) = \frac{e^{m(H-x)} + e^{-m(H-x)}}{e^{mH} + e^{-mH}} \theta_0 \qquad (16)$$

$$\theta(x) = \frac{\operatorname{Cos} m(H - x)}{\operatorname{Cos}(mH)} \theta_0$$

Gesamter Wärmestrom durch Rippenfuß:

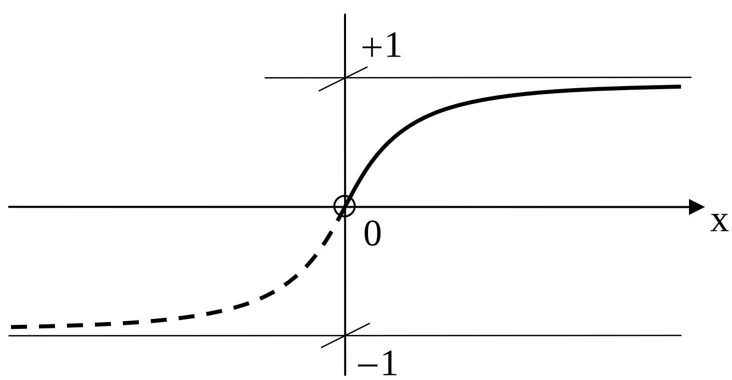
(16) $$\dot{Q}(x) = -\lambda A \partial_x \theta = -\lambda A \theta_0 \, m \frac{-e^{m(H-x)} + e^{-m(H-x)}}{e^{mH} + e^{-mH}} \quad (17)$$

$$\underline{\dot{Q}(0) = \lambda A \theta_0 \, m \, \mathrm{Th}(mH)} \quad (17a)$$

$$\underline{m = \sqrt{\frac{\alpha U_R}{\lambda A_R}}}$$

Hyperbolische Tangensfunktion:

$$\mathrm{Th}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$(17a,8a) \qquad \underline{\dot{Q}(0) = \sqrt{\alpha\lambda AU}\ \ Th(mH) \cdot \theta_0} \tag{18}$$

$$\theta_0 = T_0 - T_a$$

$$m = \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda A}}$$

Verstärkerungsfaktor (x) der Wärmeabgabe von Basisstruktur durch Rippe:

Wärmeabgabe durch Basisfläche ohne Rippe:

$$\dot{Q}_0 = \alpha A \theta_0 \tag{19}$$

Wärmeabgabe durch Rippe nach (18)

$$\dot{Q}(0) = x\alpha A \theta_0 \tag{18a}$$

$$(18,19) \qquad x = \sqrt{\frac{\lambda U}{\alpha A}}\ \ Th(mH) \tag{20}$$

Maximal von Rippe abgebbare Wärme (Rippenoberfläche hat überall Basistemperatur T_0):

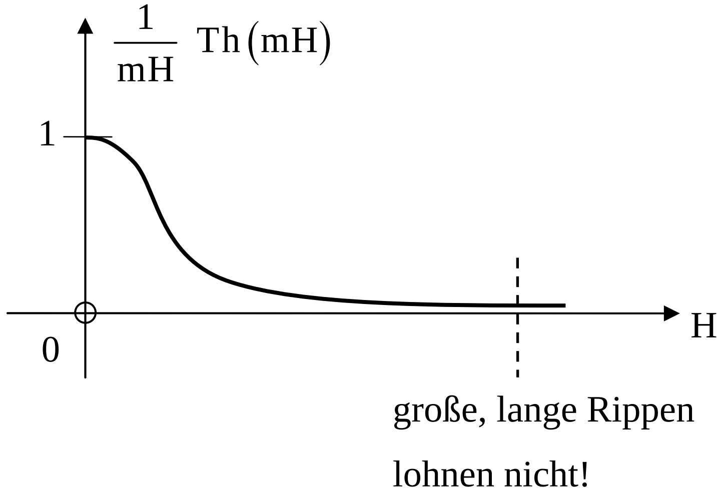
$$\dot{Q}_{max} = \alpha \; U \; H \; \theta_0 \tag{21}$$

$$A_R(H) = U\,H$$

Rippenwirkungsgrad:

$$\eta_R = \frac{\dot{Q}(0)}{\dot{Q}_{max}}$$

(18),(21)
$$\eta_R = \sqrt{\frac{\lambda A}{\alpha U}} \cdot \frac{1}{H} \mathrm{Th}(mH) \tag{22}$$



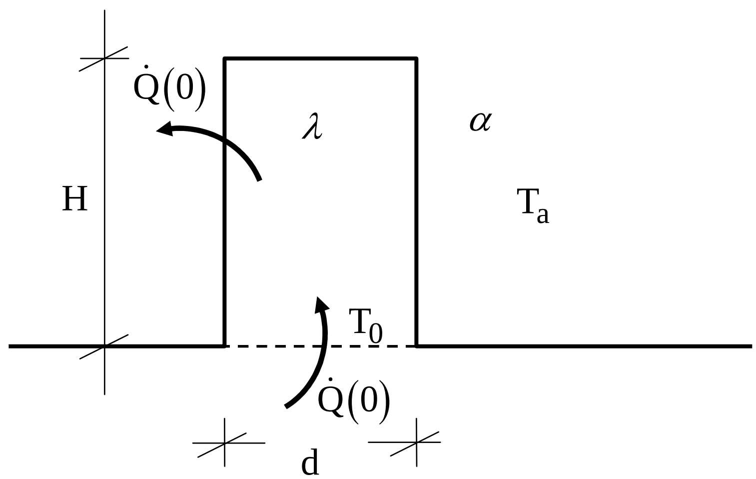
$$\lim_{H \to 0} \frac{1}{H} \mathrm{Th}(mH) = m + O(m^2)$$

``Rippenfaktor`` (RF)

$$\dot{Q}(0) = RF\,(T_0 - T_a) \tag{23}$$

(18) $$RF = \sqrt{\alpha\lambda UA}\;\; Th\left(\sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda A}} \cdot H\right) \tag{24}$$

Rechteckrippen, Länge ℓ, Höhe H, Dicke d

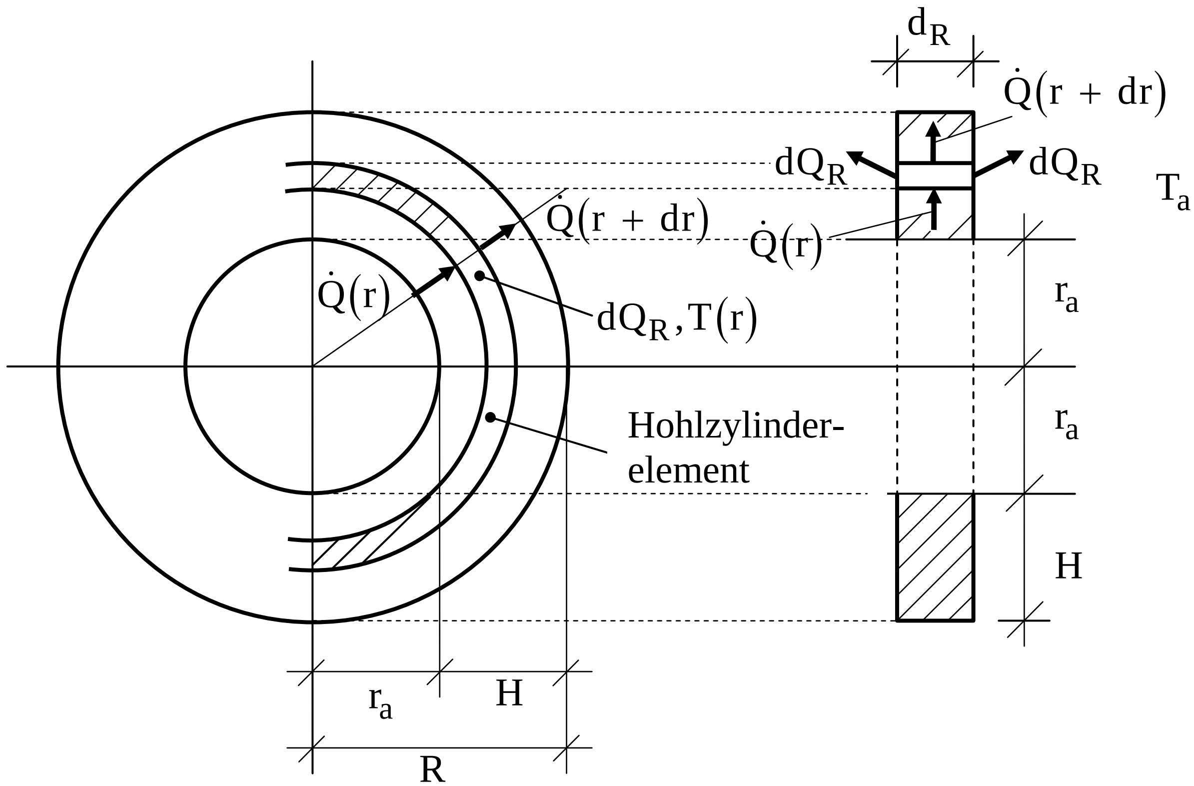


$$A = d \cdot \ell$$

$$U = 2\,(d + \ell)$$

Aufgaben A19, A20

Kreisrippen um Zylinderrohre



Wärmeabgabe durch Vorder- und Rückseite der Rippe! Sationarität

Zylinderrohr, Außenradius: r_a

Kreisrippe:

Höhe H

Basisfläche $A_B = 2\pi r_a \cdot d_R$

Rippenoberflächenelement $dA_R = 2\pi r \cdot dr$

Rippenoberfläche $A_R = 2\pi\left(R^2 - r_a^2\right) + \cancel{2\pi R \cdot d_R}$

Rippentemperatur: $T = T(r)$

Rippenfußtemperatur: $T_0 = T(r_a)$ … bekannt.

Energiebilanz

Hohlzylinderelement:

Sationarität!

$$\dot{Q}(r) - \dot{Q}(r + dr) - 2d\dot{Q}_R(r) = 0 \qquad (1)$$

Taylor – Entwicklung

$$\dot{Q}(r + dr) = \dot{Q}(r) + \partial_r \dot{Q}(r) \cdot dr + O\left((dr)^2\right) \qquad (2)$$

Wärmeübergang Rippenflächenelement(dA_R)

$$d\dot{Q}_R = \alpha \cdot dA_R \cdot \left(T(r) - T_a\right) \qquad (3)$$

Homogene Temperaturverteilung in der Rippe!

Newton – Fourier – Gesetz innerer Wärmefluss

$$\dot{Q}_R = 2\pi r \cdot d_R \cdot q(r) \qquad (4)$$

$$q(r) = -\lambda \partial_r T(r) \qquad \partial_r = \frac{\partial}{\partial r} \qquad (5)$$

(1 – 5)

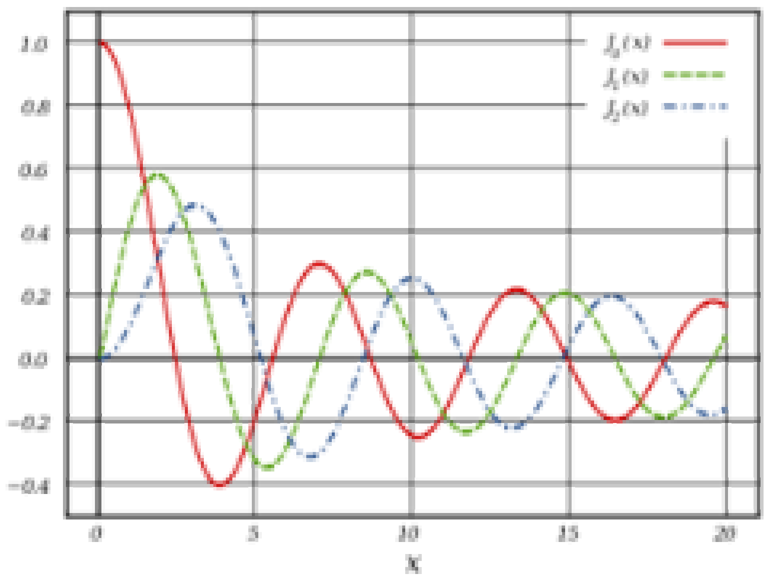
$$\underline{\partial_r^2 \theta + \frac{1}{r}\partial_r \theta - m^2 \theta = 0} \qquad (6)$$

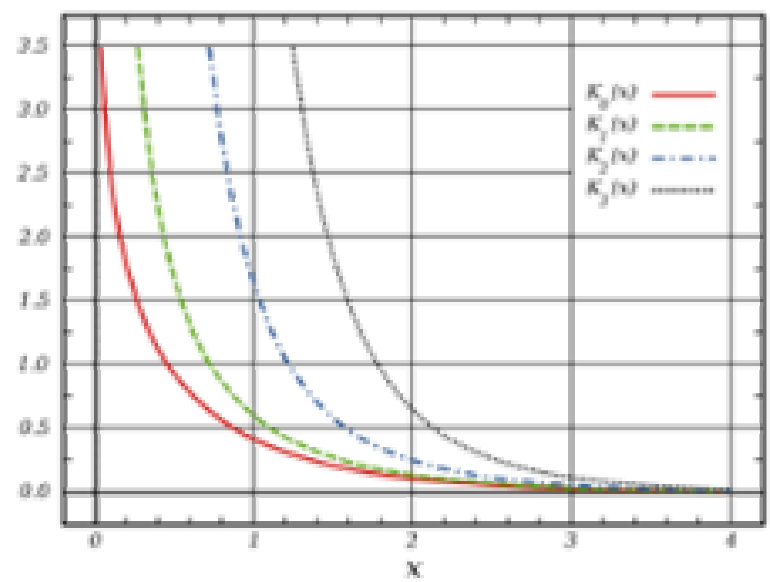
$$\theta(r) = T(r) - T_a \qquad (7)$$

$$m^2 = \frac{2\alpha}{\lambda d_R}, \qquad m = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda d_R}} \qquad (8)$$

(6): ODE 2.Ordnung, Randbedingungen!

Bessel – Funktionen J_0 … K_3





Ref.: Wikipaedia,2010

Allg. Lösung von (6)

$$\theta(r) = C_1 \; J_0(mr) + C_2 \; K_0 \tag{9}$$

J_0, K_0 … modifizierte Bessel – Funktionen als Spezialfälle der Hypergeometrischen Reihe
Literatur: Bronstein – Semendjajew
Taschenbuch der Mathematik, Teubner;
Madelung, Smirnow, Fichtenholz

Bestimmung Integrationskonstante C_1, C_2 über Randbedingungen:

1) $r = r_a$: $\theta(r_a) = T_0 - T_a$ …vorgegeben (10)

2) $r = R = r_a + H$: $\partial\theta(R) = 0$ …kein Wärmestrom am Rippenende (11)

Wärmestrom durch Rippenbasis

= Wärmestrom abgegeben / aufgenommen durch Rippenoberfläche

(4) $$\dot{Q}_0 = \dot{Q}_R(r_a) = A_B \cdot q(r_a) \quad (12)$$

$$q(r_a) = -\lambda \ \partial_r \theta(r_a) \quad (13)$$

$$A_B = 2\pi r_a \cdot d_R \quad \text{...Basisfläche der Rippe} \quad (14)$$

Berechnung von $\partial_r \theta(r_a)$ nach Gl. (9) allgemein möglich!

Beschränkung auf **Schmidt – Näherung**

$$\underline{\underline{\dot{Q}_0 = \alpha^* A_B (T_0 - T_a)}} \quad (15)$$

$$\alpha^* = \frac{\lambda m \cdot \mathrm{Th}\left[mH\left(1 + 0{,}35\ln(R/r_a)\right)\right]}{2\left(1 + 0{,}35\ln(R/r_a)\right)} \cdot \left(1 + \frac{R}{r_a}\right) \quad (16)$$

$$m = +\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda d_R}}$$

R ...Rippenaußenradius

r_a ...Rohraußenradius

$$V: mH \leq 2, \quad mr_a \geq 0{,}5 \quad (17)$$

α^*... Äquivalenter WÜ – Koeffizient der Rippe.

Aufgabe A21

Andere Rippenformen

Nährungsweise Berechnung des abgegebenen Wärmestroms als Wärmestrom durch Basisfläche der Rippe.

Vergleich der Rippe mit

a) Ebener Rippe auf ebener Wand
b) Kreisrippe um Zylinderrohr

Einführung von ``äquivalenten`` Rippenparametern (Dicke d_R , Höhe H) aus Messungen bzw. Erfahrung.

a) $$\dot{Q}_0 = \alpha^* A_B \left(T_0 - T_a\right)$$

Basistemperatur (T_0), Umgebungstemperatur (T_a)

Basisfläche der Rippe

$$A_B = \ell \cdot d_R$$

Äquivalenter WÜ – Koeffizient

$$\alpha^* = m \ \lambda \ \mathrm{Th}(mH)$$

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda d_R}}$$

$$\mathrm{Th}(mH > 2) \cong 1$$

b)

$$\dot{Q}_0 = \alpha^* A_B (T_0 - T_a)$$

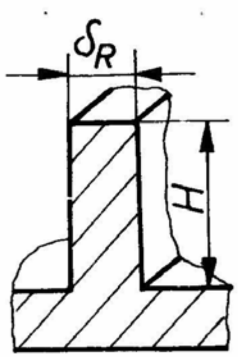
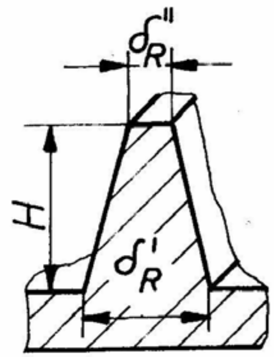
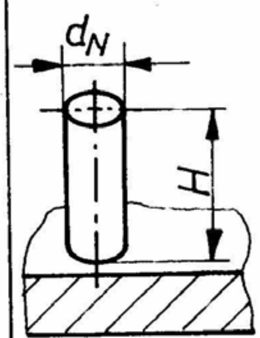
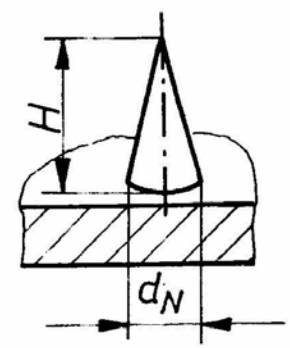
$$A_B = 2\pi r_a \cdot d_R$$

$$\alpha^* = \frac{\lambda m \cdot \mathrm{Th}\left[mH\left(1 + 0{,}35\ln\left(R/r_a\right)\right)\right]}{2\left(1 + 0{,}35\ln\left(R/r_a\right)\right)} \cdot \left(1 + \frac{R}{r_a}\right)$$

$$\lim_{(R/r_a)\to 1} \alpha^* = m\lambda \ \mathrm{Th}(mH) \quad \ldots \quad \text{ebene Rippe}$$

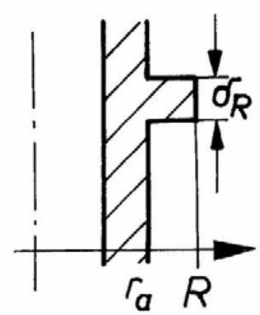
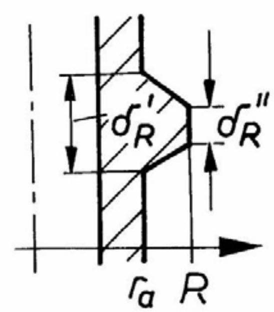
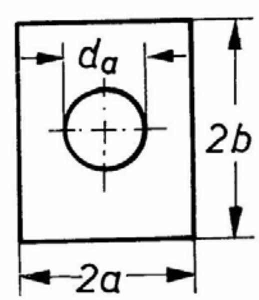
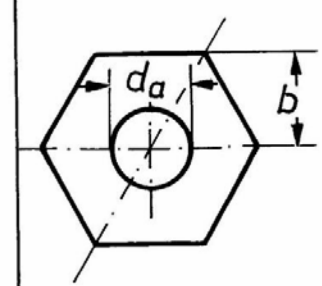
Äquivalente Dicken verschiedener Rippen auf ebener Wand

Literatur: Elsner, VDI -Wärmeatlas

	ebene Rippe	Trapezrippe	stumpfe Nadelrippe	spitze Nadelrippe
Rippen-form				
Rippen-stärke	δ_R	$\delta_R = \frac{3}{4}\delta_R' + \frac{1}{4}\delta_R''$	$\delta_R = \frac{d_N}{2}$	$\delta_R = \frac{3}{8} d_N$

Äquivalente Dicken und Höhen verschiedener Rippen auf Zylinderrohren

Literatur: Elsner, VDI -Wärmeatlas

	Kreisrippe	Trapezrippe	Rechteckrippe	Sechseckrippe
Rippen-form				
Rippen-stärke	δ_R	$\delta_R = \frac{1}{2}(\delta_R' + \delta_R'')$	δ_R	δ_R
Rippen-höhe	$H = R - r_a$	$H = R - r_a$	$H = 1{,}13\, b \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{d_a}{2}$	$H = 1{,}102\, b - \frac{d_a}{2}$