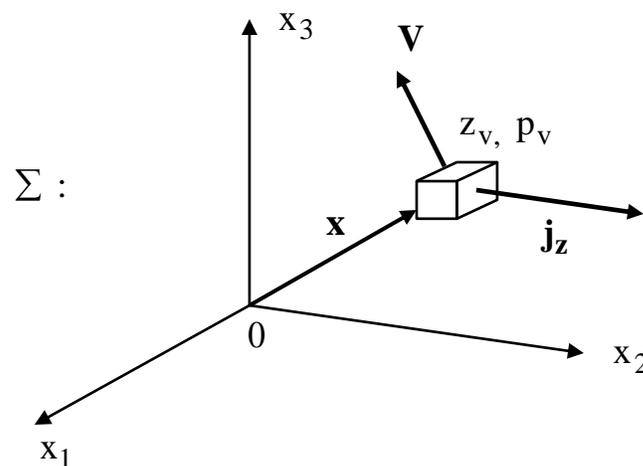


H Wärmetransport und Wärmeleitung in bewegten fluiden Medien Grundgleichungen der Thermo- Fluiddynamik

Lokale Bilanzgleichung einer extensiven Größe (Z) vgl. Kap.A14.

Strömendes fluides Medium (L,V), wärmeleitend, 1 Komponente.

Volumenelement, raumfest Ort $\underline{x} = x_1, x_2, x_3$, Zeit (t).



$$\underline{\partial_t z_v + \partial_\alpha j_{z\alpha} = p_v} \quad (1)$$

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

$$z_v = \rho z \quad \dots \text{ Dichte der Größe} \quad Z, \left[\frac{Z}{m^3} \right]$$

$$j_{z\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \dots \text{ Stromdichte von} \quad Z, \left[\frac{Z}{m^2 s} \right]$$

$$p_z \quad \dots \text{ Produktionsdichte von} \quad Z, \left[\frac{Z}{m^3 s} \right]$$

Charakteristische Felder von Σ

$$\rho = \rho(\underline{x}, t) \quad \text{kg/m}^3 \quad \dots \quad \text{Massendichte}$$

$$v_\alpha = v_\alpha(\underline{x}, t) \quad \text{m/s} \quad \dots \quad \text{Geschwindigkeit}$$

$$T = T(\underline{x}, t) \quad \text{K} \quad \dots \quad \text{Temperatur}$$

$$u = u(\underline{x}, t) \quad \text{kJ/kg} \quad \dots \quad \text{spez. Innere Energie}$$

$$h = h(\underline{x}, t) \quad \text{kJ/kg} \quad \dots \quad \text{spez. Enthalpie}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{\alpha\beta} \quad \text{N/m}^2 \quad \dots \quad \text{Tensor der Normal- und Schubspannungen}$$

$$\underline{\underline{P}} = -\underline{\underline{\sigma}} \quad \text{N/m}^2 \quad \left(\text{vgl. Festigkeitslehre, Fluiddynamik} \right)$$

$$s = s(\underline{x}, t) \quad \text{kJ/kgK} \quad \dots \quad \text{spez. Entropie}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Summenkonvention!

Bestimmungsgleichungen für die charakteristischen Felder

1. Bilanzgleichungen (1)

1a. Massenbilanz

$$z_v = \rho \quad , \quad z = 1$$

$$j_{z\alpha} = \rho v_\alpha \quad , \quad \alpha = 1, 2, 3$$

$$p_z = 0 \quad \dots \text{Massenerhaltung}$$

$$(1) \quad \underline{\partial_t \rho + \partial_\alpha \rho v_\alpha = 0} \quad (B1)$$

Spezialfall : Inkompressible Flüssigkeit (~ Wasser)

$$\rho = \text{const}$$

$$\partial_t \rho = 0$$

$$\partial_\alpha \rho = 0$$

$$(B1) \quad \partial_\alpha v_\alpha = 0 \quad \dots \text{Quellenfreiheit} \quad (B1a)$$

$$\text{div } \underline{v} = 0$$

1b. Impulsbilanz

Herleitung aus Newton-Bewegungsgleichung eines
Massenelementes (d m)

$$z_{v\alpha} = \rho v_\alpha \quad \dots \text{Impulsdichte in Richtung } \alpha - \text{Achse}$$

$$j_{z\alpha\beta} = +P_{\alpha\beta} + \underbrace{\rho v_\alpha v_\beta}_{\text{konvektiver Impulsfluss}} \quad , \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \dots \text{Impulsstromdichte}$$

Spannungstensor

konvektiver Impulsfluss

$P_{\alpha\beta} \dots$ β - Komponente der Spannung (d.h. Kraft pro Flächeneinheit) die von der Umgebung auf die Masse in Bezugsvolumen $dx_1 dx_2 dx_3$ am Ort x_1, x_2, x_3 zur Zeit (t) auf eine Fläche ausgeübt wird, deren Flächennormale in Richtung der α - Achse weist.

Impulsproduktionsdichte

$$p_{z\alpha} = \rho F_{\alpha} \quad , \quad \alpha = 1,2,3$$

F_{α} ... α - Komponente der **äußeren** Kraft, die auf die
Masseneinheit des Fluides wirkt
Beispiel: Schwerkraft, Lorenzkraft etc

$$F_{\text{Schwerkraft}} = \begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ F_3 = -g \end{cases} \quad \text{m/s}^2$$

$$(1) \quad \frac{\partial_t \rho v_{\alpha} + \partial_{\beta} P_{\alpha\beta} + \rho v_{\alpha} v_{\beta}}{\quad} = \rho F_{\alpha}, \quad \alpha = 1,2,3 \quad (\text{B2})$$

9 neue unbekannte Felder!

Verknüpfung von $P_{\alpha\beta}$ mit ρ , \underline{v} etc. über sog. Material - oder
Prozessgleichungen. Diese können nach der Methode der
Thermodynamik irreversibler Prozesse als Beziehungen zwischen
thermodynamischen „Flüssen“ und „Kräften“
d. h. gewissen Faktoren der **Entropieproduktion** p_s im
strömenden Fluid gebildet werden.

- Literatur:
- 1) J. Kestin, A Course in Thermodynamics,
Vols. I; II; Blaisdell Publ. Coup.,
London, UK, 1968.
 - 2) S. Kjelstrup, D. Bedeaux, E. Johannessen, J. Gross
Non-Equilibrium Thermodynamics
for Engineers, World Scientific,
Singapour, 2010, p. 272.

Entropieproduktion:

$$p_s = \underbrace{p_D - p}_{\text{Volumenänderung}} \underbrace{\delta_{\alpha\beta} \cdot \partial_\beta v_\alpha}_{\text{Scherung}} + \underbrace{p \delta_{\alpha\beta} - P_{\alpha\beta}}_{\text{Scherung}} \partial_\beta v_\alpha + \underbrace{q_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{T}}_{\text{Wärmeleitung}} \quad (3)$$

Innere Reibung

Dynamischer Druck

$$p_D = \frac{1}{3} P_{11} + P_{22} + P_{33} \quad (4)$$

Statischer Druck (Zustandsgleichung (Equation of State) EOS))

$$p = p(\rho, T) \quad (5)$$

„Materialbeziehungen“ für Spannungstensor $P_{\alpha\beta}$

1. Symmetrie (Drehimpulssatz)

$$P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha} \quad , \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (6)$$

2. Newton Gesetz über Scherspannungen

$$p \delta_{\alpha\beta} - P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta \partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta \quad (7)$$

$\eta \dots$ dynamische Viskosität

3. Isotropie – Annahme

$$P_{11} = P_{22} = P_{33} \quad (8)$$

$$(4) \quad p_D - p = \zeta \partial_\alpha v_\alpha \quad (9)$$

ζ ... „Volumenviskosität“

(6-9): 9 Beziehungen für $P_{\alpha\beta}$.

Spezialfall: $\rho = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, $\zeta = 0$

(B2), (7,9) \rightarrow Navier – Stokes – Gleichungen:

$$\underbrace{\rho \partial_t v_\alpha}_{\text{Speicherterm}} + \underbrace{\rho v_\beta \partial_\beta v_\alpha}_{\text{Impulsflu\ss}} = \underbrace{-\partial_\alpha p}_{\text{Druckabfall}} + \underbrace{\eta \Delta v_\alpha}_{\text{Reibung}} + \underbrace{\rho F_\alpha}_{\text{Äu\ssere Kräfte}} \quad (\text{B2a})$$

1c. **Energiebilanz**

Spezifische innere Energie

$$u = u(\underline{x}, t)$$

Dichte der inneren Energie

$$z_v = \rho u(\underline{x}, t) \quad (10)$$

Energiestrom

$$\dot{j}_{u\alpha} = \underbrace{\rho u v_\alpha}_{\text{konvektiver Anteil}} + \underbrace{q_\alpha}_{\text{Wärmestromdichte}} \quad (11)$$

Produktion innerer Energie

$$p_u = -P_{\alpha\beta} \partial_\beta v_\alpha \quad (12)$$

Umwandlung der mechanischen Arbeit der inneren Reibungsspannungen in innere Energie

(Äußere Kräfte $\underline{F} = F_1, F_2, F_3$ liefern nur über die Diffusionsströme in Mehrkomponentensystemen Beiträge zu p_u).

$$(1, 10-12) \quad \underline{\partial_t \rho u + \partial_\alpha \rho u v_\alpha + q_\alpha = -P_{\alpha\beta} \partial_\beta v_\alpha} \quad (B3)$$

Spezialfall von (B3) für „einfache Fluide“ konstanter Dichte:

1. Inkompressibilität

$$\rho_{\underline{x},t} = \text{const} \quad (13)$$

2. Kalorische Zustandsgleichung

$$u(T, \rho) = u_0 + c(T - T_0) + O(T - T_0)^2 \quad (14)$$

$$c = \text{const}$$

3. Fourier Wärmeleitungsgesetz, vgl. Gl. (3):

$$q_\alpha = -\lambda \partial_\alpha T \quad (15)$$

$$\lambda = \text{const}$$

4. Newton Reibungsgesetz, vgl. Gl.(7)

$$\rightarrow -P_{\alpha\beta} \partial_{\beta} v_{\alpha} = -p \delta_{\alpha\beta} \partial_{\beta} v_{\alpha} + \frac{1}{2} \eta \partial_{\beta} v_{\alpha} + \partial_{\alpha} v_{\beta} \cdot \partial_{\beta} v_{\alpha}$$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 \dots \alpha \neq \beta \\ 1 \dots \alpha = \beta \end{cases} \quad \text{Kronecker-Symbol}$$

$$\text{(Bla,13)} \quad -P_{\alpha\beta} \partial_{\beta} v_{\alpha} = \frac{1}{2} \eta \partial_{\beta} v_{\alpha} + \partial_{\alpha} v_{\beta} \cdot \partial_{\beta} v_{\alpha} \quad (16)$$

(B3,13 – 16)

$$\partial_t T + v_{\alpha} \partial_{\alpha} T = a \Delta T + \frac{\eta}{2\rho} \partial_{\beta} v_{\alpha} + \partial_{\alpha} v_{\beta} \cdot \partial_{\beta} v_{\alpha} \quad \text{(B3a)}$$

Temperaturleitungsgleichung für einfaches, bewegtes Fluid konstanter Dichte.

Temperaturleitfähigkeit

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} = \text{const.}$$

Dynamische Viskosität

$$\eta = \text{const.}$$

Kinematische Viskosität

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \text{const.}$$

Grundgleichungen der Thermo-Fluiddynamik

Felder	Gleichungen	Größe
Dichte $\rho(\underline{x}, t)$	B1 Bilanzgleichungen $\partial_t \rho + \partial_\alpha \rho v_\alpha = 0$	Masse (Eichinvarianz)
Geschwindigkeit $v_\alpha(\underline{x}, t)$	B2 $\partial_t \rho v_\alpha + \partial_\beta P_{\alpha\beta} + \rho v_\alpha v_\beta = \rho F_\alpha$ $\alpha, \beta = 1, 2, 3$	Impuls (Ortsinvarianz)
Innere Energie $u(\underline{x}, t)$	B3 $\partial_t \rho u + \partial_\alpha \rho u v_\alpha + q_\alpha = -P_{\alpha\beta} \partial_\beta v_\alpha$	Energie (Zeitinvarianz)
Spannungstensor	$P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$	Drehimpuls (Richtungsinvarianz)
<u>Zustandsgleichungen</u>		
	(4) $u = u_0 + c(T - T_0) + O((T - T_0)^2)$	
	(13) $\rho = \text{const}$	
<u>Prozess- und Transportgleichungen</u>		
Wärmestrom $q(\underline{x}, t)$	(15) $q_\alpha = -\lambda \partial_\alpha T(\underline{x}, t)$...Fourier
Spannungstensor $P_{\alpha\beta}(\underline{x}, t)$	(7) $P_{\alpha\beta} = p \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta (\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta)$...Newton
	(9) $p_D = p(\rho, T) = \zeta \partial_\alpha v_\alpha$	
	(4) $p_D = \frac{1}{3} (P_{11} + P_{22} + P_{33})$...Stokes
	Für Nicht-Newton'sche Fluide sind andere Prozessgleichungen zu verwenden!	

Beispiel

Rohrströmung nach Hagen – Poiseuille

Wärmeleitung im Fluid (WL)

Wärmeübergang von Rohrwand auf das Fluid (WÜ)

Stationarität

Strömung ausgebildet über Rohrlänge ℓ

Laminarität, Rotationssymmetrie

Keine äußeren Kräfte $\mathbf{F} = 0$

Rohr horizontal

Stoffdaten konstant ρ, λ, η, c

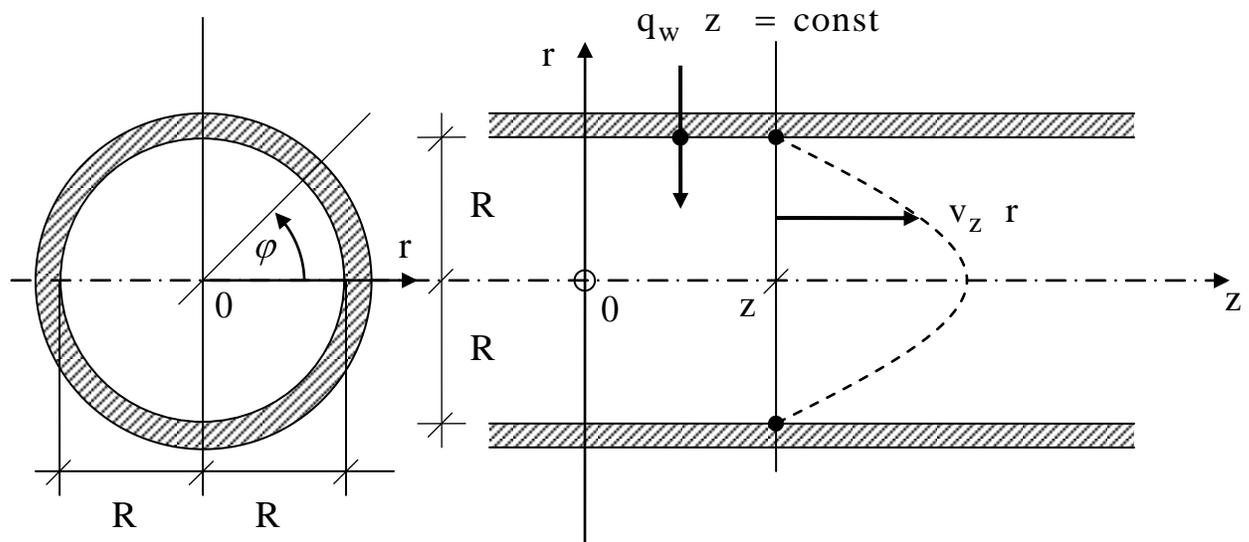
Modell

1. Wärmestromdichte an der inneren Rohrwand
sei konstant $q_w = \text{const}$. (M1)

2. Druckgradient längs Rohrachse konstant.
 $\partial_z p = -\eta B = \text{const}, \quad B = \text{const}$. (M2)

3. Wandtemperatur T_w ändert sich linear mit der Rohrlänge:
 $T_w(z) - T_0 = (T_\ell - T_0) \frac{z}{\ell}$ (M3)

$$T_0 = T_w(z = 0), \quad T_\ell = T_w(z = \ell)$$



Gesuchte Feldgrößen:

1. Geschwindigkeitsprofil der Strömung

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \varphi, z, t) = ?$$

$$\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$$

Kontinuitätsgleichung (B1)

$$\rho = \text{const}$$

$$\text{B1} \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{r} \partial_r (r v_r) + \frac{1}{r} \partial_\phi v_\phi + \partial_z v_z = 0 \quad (20)$$

V: Rotationssymmetrie,

Strömung voll ausgebildet, d.h. homogen in z-Richtung.

$$\mathbf{v}(r, \phi, z) = \mathbf{v}(r) \quad (21)$$

$$(20,21) \quad \partial_r (r v_r) = 0$$

$$v_r(r) = \frac{C}{r} \quad (22)$$

Haftbedingung des Fluids an Rohrwand

$$v_r(R) = \frac{C}{R} = 0 \quad (23)$$

$$C = 0$$

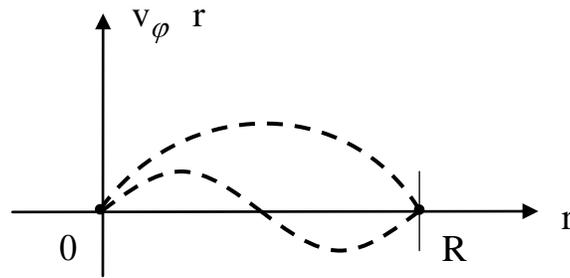
$$\underline{v_r = 0} \quad (24)$$

Azimutgeschwindigkeit :

$$v_\phi = v_\phi(r)$$

Grenzbedingungen

$$v_\phi(r=0) = v_\phi(r=R) = 0 \quad (25)$$



Mögliche Verläufe von $v_z(r)$. Physikalische Ursache bzw. treibende Kraft für Rotation (Wirbelrohr)?

$$v_z(r) = 0 \tag{26}$$

Achsgeschwindigkeit:

$$v_z = v_z(r) = ? \tag{27}$$

Bestimmung aus Impulsbilanz (B2) und Prozessgleichungen (7,9):

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) v_z = -\partial_z p + \eta \Delta v_z \tag{28}$$

Stationarität

Zylinderkoordinaten:

$$\rho \left(v_r \partial_r + v_\phi \frac{1}{r} \partial_\phi + v_z \partial_z \right) v_z = -\partial_z p + \eta \left(\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r v_z) + \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 v_z + \partial_z^2 v_z \right)$$

$$\left(24, 26, 27 \right) \quad \partial_r (r \partial_r v_z) = -rB \tag{29}$$

Gewöhnliche Integration von (29)

$$\partial_r v_z = -\frac{r}{2}B + \frac{C}{r} \quad (30)$$

$$v_z \cdot r = -\frac{r^2}{4}B + C \ln r + D \quad (31)$$

Integrationskonstante C, D:

1. Symmetriebedingung Rohrachse $r = 0$:

$$\partial_r v_z \cdot r \Big|_{r=0} = 0 \quad (32)$$

$$(30) \rightarrow C = 0 \quad (33)$$

2. Haftbedingung am Rohrrand:

$$v_z \cdot r = R = 0 \quad (34)$$

$$(31) \rightarrow D = \frac{B}{4}R^2 \quad (35)$$

$$(31,33,35) \quad \underline{v_z \cdot r = \frac{B}{4}R^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)} \quad (36)$$

Hagen – Poiseuille – Gesetz

Paraboloidprofil der Strömungsgeschwindigkeit.

Interpretation von B durch Betrachtung des Massen – bzw. Volumenstroms der Strömung

$$\begin{aligned}
 \dot{m} &= \rho \dot{V} = \rho \int_{r=0}^R 2\pi r \, dr \cdot v_z \cdot r \\
 (36) \qquad &= 2\pi\rho \frac{B}{4} \int_0^R R^2 - r^2 \, dr
 \end{aligned}$$

$$\dot{m} = \frac{\pi}{8} B \rho R^4 \quad (37)$$

$$B = \frac{8\dot{m}}{\pi\rho R^4} \quad (38)$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{\pi}{8} B R^4 \quad (39)$$

Mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{v}_z

$$\dot{V} \doteq \pi R^2 \bar{v}_z \quad (40)$$

$$(39,40) \qquad \underline{B = \frac{8\bar{v}_z}{R^2}} \quad (41)$$

Druckgradient gemäß Annahme M2

$$\underline{\partial_z p \cdot z = -8\eta \frac{v_z}{R^2} = \text{const.}} \quad (42)$$

Temperaturprofil der Strömung:

$$T = T(r, \varphi, z, t) = ?$$

Energiebilanz (B3a), Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} & \partial_t T + \left(v_r \partial_r + \frac{1}{r} v_\varphi \partial_\varphi + v_z \partial_z \right) T = \\ & = a \left(\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r T) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 T + \partial_z^2 T \right) \\ & + \underbrace{\frac{\eta}{2\rho} (\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta)}_{\text{Dvis.}} \partial_\beta v_\alpha \end{aligned} \quad (44)$$

Vereinfachungen:

Stationarität $\partial_t T = 0$

Rotationssymmetrie $\partial_\varphi T = 0$

$$\partial_\varphi^2 T = 0$$

Reibungswärme klein $\text{Dvis} \approx 0$

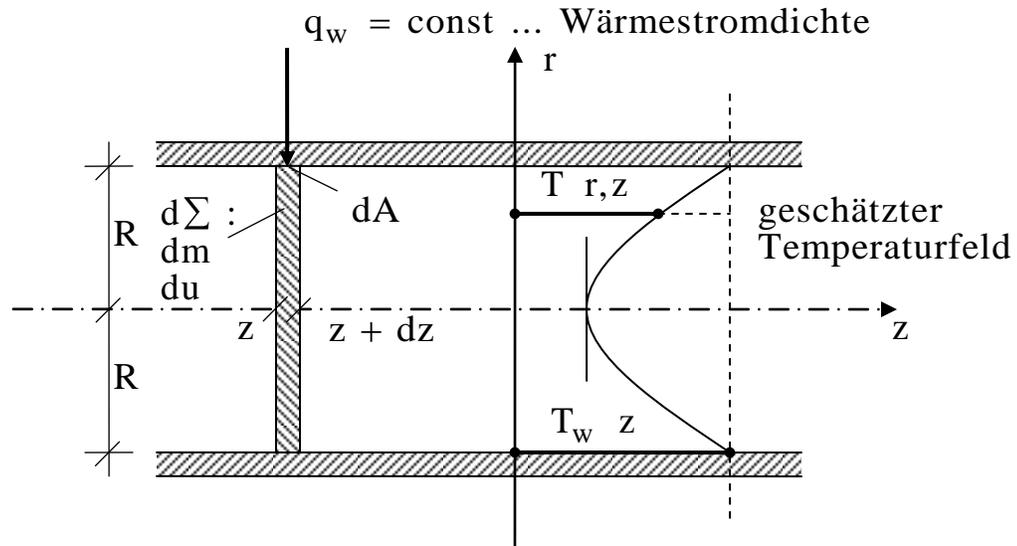
$$(26) \quad v_\varphi = 0$$

$$(24) \quad v_r = 0$$

$$(44) \quad v_z \partial_z T(r, z) = \frac{a}{r} \partial_r (r \partial_r T(r, z)), \quad a = \frac{\lambda}{c\rho} = \text{const} \quad (45)$$

$$(36) \quad v_z(r) = \frac{B}{4} (R^2 - r^2)$$

(45): PDE 2. Ordnung. Umwandlung in ODE durch Modellierung von $\partial_z T(r, z)$ über Wärmebilanz Massenelement

Wärmebilanz Massenelement $d\Sigma$ 

$$\begin{aligned}
 d\Sigma : \quad dV &= \pi R^2 dz \dots \text{const} \\
 dm &= \rho dv \dots \text{const} \\
 dA &= 2\pi R dz
 \end{aligned} \tag{46}$$

Energiebilanz

$$dU = dQ \tag{47}$$

$$dt \rightarrow dT : \quad c \, dm \cdot dT = q_w \cdot dA \, dt$$

$$c \, \dot{m} \, dT = q_w \cdot dA \tag{47a}$$

$$(46) \quad c \rho \pi R^2 \bar{v}_z dT = q_w \cdot 2\pi R \, dz$$

$$\partial_z T = \frac{2q_w}{c\rho R \bar{v}_z} = \text{const} \dots \text{M1} \tag{48}$$

$$(36,45,48) \quad 4 \frac{q_w}{\lambda R^3} R^2 - r^2 \quad r = \partial_r \quad r \partial_r T \quad r,z \quad \dots \text{ODE} \tag{49}$$

(49): Gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für $T_{r,z}$

1. Integration

$$r \partial_r T_{r,z} = \frac{4q_w}{\lambda R^3} \left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) + C_1 \quad \left| \frac{1}{r} \right. \quad (50)$$

2. Integration

$$T_{r,z} = \frac{4q_w}{\lambda R^3} \left(R^2 \frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16} \right) + C_1 \ln r + C_2 \quad (51)$$

Bestimmung der Integrationskonstanten C_1, C_2 :

1. Zylindersymmetrie des Temperaturfeldes

$$\partial_r T_{r,z} \Big|_{r=0} = 0 \quad \dots \text{vgl. Figur} \quad (52)$$

$$(50) \quad C_1 = 0 \quad (53)$$

2. Modell für z – Abhängigkeit der Wandtemperatur

$$r = R : \quad T_{R,z} \doteq T_w(z) \quad (54)$$

Annahme : Linearer Temperaturanstieg entlang der Rohrachse :

$$\partial_z T_w(z) = \text{const} \quad (55)$$

$$\partial_z T_w(z) = \frac{1}{\ell} \underbrace{T_w(z = \ell)}_{T_\ell} - \underbrace{T_w(z = 0)}_{T_0} \quad (55a)$$

$$(55a) \quad T_{w,z} = T_0 + T_\ell - T_0 \frac{z}{\ell} \dots \text{vgl. (M3)} \quad (56)$$

Wandtemperatur nach (51) mit $r = R$:

$$T_{w,z} = \frac{4q_w}{\lambda R^3} \cdot \frac{3}{16} R^4 + C_2 \quad (57)$$

$$C_2 = T_{w,z} - \frac{4q_w}{\lambda} \cdot \frac{3}{16} R$$

$$(51,57,56) \quad T_{r,z} = \underbrace{T_{w,z}}_{\text{Rohrachse-}} - \underbrace{\frac{q_w R}{4\lambda} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^4 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 3 \right]}_{\text{Radial-Abhängigkeit}} \quad (58)$$

Anwendung von (58):

Berechnung eines WÜ – Koeffizienten α Rohrwand – Fluid aus

Temperaturverteilung:

Definition:

$$q_w = \frac{\dot{Q}}{A} = \alpha \underbrace{T_{w,z}}_{\text{Wand}} - \underbrace{T_{r=0,z}}_{\text{Rohrmitte}} \quad (60)$$

$$(58) \quad T_{r=0,z} = T_{w,z} - \frac{3 q_w R}{4 \lambda} \quad (61)$$

$$(61) \quad q_w = \frac{4\lambda}{3R} T_{w,z} - T_{r=0,z} \quad (62)$$

$$(60,62) : \quad \alpha = \frac{4\lambda}{3R} \quad \dots \text{Näherungswert} \quad (63)$$

Problem: 1).Eigenschaften der Rohrwand werden nicht berücksichtigt.

2).Grenzverhalten $R \rightarrow \infty$... Platte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \alpha R = 0 \quad \dots ?$$