Universität Siegen

Institut für Fluid- und Thermodynamik · Universität Siegen
57068 Siegen, Germany

Professor i.R. Dr. J. U. Keller
Institute Fluid- and Thermodynamics
Mechanical Engineering
University of Siegen
D-57068 Siegen, Germany

Tel. +49-271-740-2755
Fax +49-271-740-2360
e-mail: keller@ift.maschinenbau.
uni-siegen.de

Wärmeübertragung

Übungsaufgaben

Prof. i. R. Dr. sc. techn. J. U. Keller
Bearbeiter: O. Amer
1. Auflage, 2010

Homepage
1) http://141.99.140.157/d/ifft3/index.htm
2) http:www.uni-siegen.de, Fachbereiche, Maschinenbau, Institute, Institut für Fluid- und Thermodynamik, Thermodynamik, Lehre.

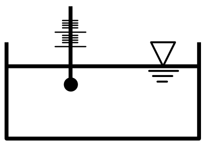
Das Skriptum stellt eine Kurzfassung der Vorlesung dar und ist zum Gebrauch neben der Vorlesung bestimmt. Ein Anspruch auf Vollständigkeit wird nicht erhoben. Als Manuskript gedruckt.

Aufgabe A 1

Abkühlen kochenden Wassers

Ein Topf enthält bei Umgebungsdruck (p = 1 atm) siedendes Wasser (T_0 = 100 °C). Man liest an einem Thermometer ab, dass die Temperatur des Wassers durch Wärmeabgabe an die Umgebung nach 4 Minuten auf T_1 = 91 °C gesunken ist. Nach welcher Zeit (t_x) ist die Temperatur des Wassers auf T_x = 40 °C abgesunken? Umgebungstemperatur T* = 20°C.

<u>Lösung</u>:



T* = 20°C

t in **min**	**°C**
$t_0 = 0$	$T_0 = 100$
$t_1 = 4$	$T_1 = 91$
$t_x = ?$	$T_x = 40$

Messungen!

$$T_1 - T^* = \left(T_0 - T^*\right) e^{-K\,t}$$

$$71 = 80 e^{-K\,4\,\mathrm{min}}$$

$$K = \frac{-1}{4\,\mathrm{min}} \ln\left(\frac{71}{80}\right)$$

$$\underline{K = 0{,}0298\,\mathrm{min}^{-1}}$$

$$t_x:\quad T_x - T^* = \left(T_0 - T^*\right) e^{-K\,t_x}$$

$$t_x = \frac{1}{-K} \ln \frac{T_x - T^*}{\left(T_0 - T^*\right)}$$

$$t_x = \frac{1\,\mathrm{min}}{-0{,}0298} \ln \frac{20}{80}$$

$$\underline{\underline{t_x = 46{,}4\,\mathrm{min}}}$$

Aufgabe A 2

Solaranlage, konvektiver Wärmetransport

Eine solarthermische Anlage liefert an einem schönen Sommertag einen Wärmeträgerstrom $\dot{V}$ = 320 l/h mit der Temperatur T_1 = 67 °C. Der Strom tritt in einen Wärmetauscher ein und gibt Wärme an umgebendes Wasser ab. Dabei wird das Wärmeträgermedium (Propylenglykol oder 1,2-Propandiol) auf T_2 = 44 °C abgekühlt.

1. Welche Wärmeleistung (kW) wird vom Wärmeträger auf das Wasser übertragen?
2. Wie viel Prozent der auf die Solarkollektorfläche $A_k = 9\ m^2$ einfallenden Sonnenstrahlung werden als Wärme vom Wärmeträgermedium abgeführt, wenn dieses von seiner Eintrittstemperatur in den Kollektor $T_3 = 41$ °C auf seine Austrittstemperatur T_4 = 71 °C im Kollektor erwärmt wird?

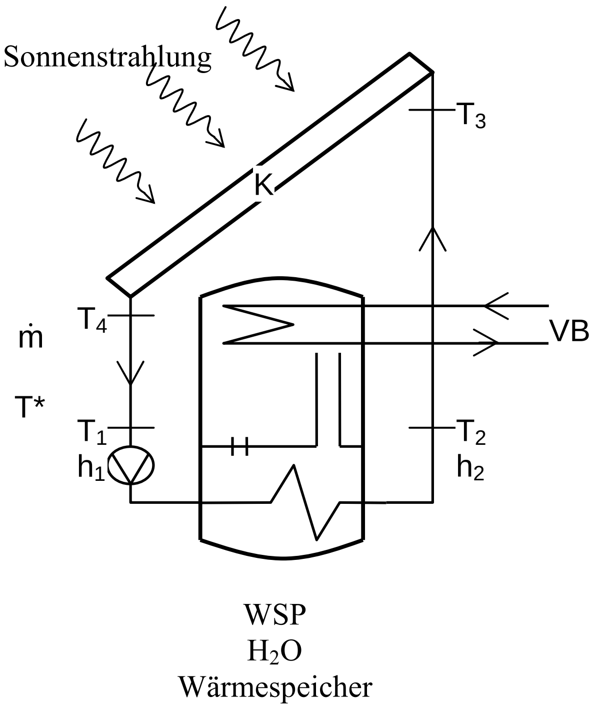
   Solarkonstante : $\sigma = 0{,}8\ kW/m^2$

3. Welche Wärmeleistung geht in den Rohrleitungen des Wärmeträgers zwischen Kollektor und Wärmetauscher verloren?

Stoffdaten:

Wärmeträgermedien: 1,2-Propandiol ($COH_3 - COH_2 - CH_3$)

Dichte: ρ (20 °C) = 1,04 g/cm^3
Siedetemperatur: T_S (1 bar) = 188 °C
Wärmekapazität: c_p = 3 kJ/(kg K)
Molmasse: M = 76,1 g/mol

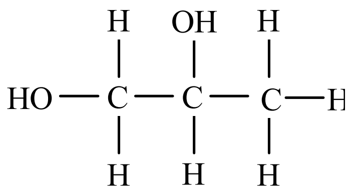


Lösung:
Solaranlage
1) Konvektiver Wärmetransport
   CO_2-Einsparung pro kWh
Solarwärme
   berechenbar aus
Erfahrungsregel:
   10 kWh Solarwärme ≅ 1 l Öl

Sommertag (12 h)

T* = 20 °C
T_1 = 67 °C
T_2 = 44 °C
$\dot{V}$ = 320 l/h
$\dot{Q}$ = ?

Wärmeträger
1,2-Propandiol
Propylenglykol



$$M = (3 \bullet 12 + 8 \bullet 1 + 2 \bullet 16 \; \frac{g}{mol} = 76{,}1 \; \frac{g}{mol}$$

Propandiol
Stoffdaten

ρ(20 °C) = 1,04 g / cm^3
T_S = 188 °C
T_{SchM} = - 68 °C → Kühlmittel

p_S (20 °C) = 11 Pa
p_{SH2O} (20 °C) = 23,4 mbar
c_p = 3 kJ/(kg K)

1. Solare Wärmezufuhr

$\dot{Q} = (h_1 - h_2)\ \dot{m}\ \ldots$ Allg.

$\dot{Q} = c_p\ (T_1 - T_2)\ \dot{m}$

$\dot{m} = \rho\dot{V}$

$\dot{Q} = c_p\ (T_1 - T_2)\ \rho\dot{V}$

$$\dot{Q} = 3\frac{kJ}{\cancel{kg}\ \cancel{K}}(67-44)\cancel{K}\cdot 1{,}04\frac{\cancel{kg}}{\cancel{dm^3}}\cdot 320\frac{\cancel{dm^3}}{\cancel{h}}\frac{\cancel{1h}}{3600s} = 6{,}379\,kW$$

2. Ausnutzung der Solarstrahlung

$A_K = 10\ m^2$
Vakuumkollektoren
$\sigma = 0{,}8\ kW/m^2$

$\dot{Q}_{S0} = \sigma \cdot A_K = 8\ kW$

$T_3 = 41\ °C$
$T_4 = 71\ °C$

$\dot{Q}_{S\,Wärmeträger} = 7{,}9565\ kW$

$$\frac{\dot{Q}_{S\,Wärmeträger}}{\dot{Q}_{S0}} = \frac{7{,}957}{8} = 99{,}5\%$$

Nettowärmeleistung: $\dfrac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{S0}} = \dfrac{6{,}38}{8} = 79{,}6\%$

3. Wärmeleistungsverluste in Rohrleitungen

$\Delta\dot{Q} = \dot{Q}_{S0} - \dot{Q} = 1{,}62\ kW$

Aufgabe A 3

Biologische Wärme von Flugpassagieren

Kühlbedarf der Kabinenluft eines Flugzeugs

Alle aeroben, d. h. atmenden Lebewesen erzeugen in ihrem Ruhezustand Wärme $\left(J_q\right)$ durch Oxidation von Kohlenwasserstoffen etc. mit dem Sauerstoff der Luft. Diese Wärme ist durch das Gesetz von Kleiber mit der Masse (M) des Lebewesens verknüpft, d. h. es gilt

$$J_q = a \cdot M^{\alpha}$$

Hierbei ist $a \cong 3{,}5\ W/kg^{\alpha}$ die Kleiber-Konstante und $\alpha = {}^3\!/_4$ ein charakteristischer Exponent. Bei körperlichen Aktivitäten des Lebewesens ist $\left(J_q\right)$ noch mit einem „Aktivitätsfaktor" (A) zu multiplizieren. Er beträgt für ruhig sitzende Fluggäste ca. A = 1,5.

Ein Jumbo-Jet kann 400 Passagiere befördern.

a) Welche Wärme wird von den ruhig sitzenden Passagieren erzeugt, wenn das Körpergewicht bzw. die Masse eines einzelnen Passagiers im Durchschnitt $M = 80\text{kg}$ beträgt?
   Das Volumen der Kabinenluft im Jet beträgt ca. 1000 m^3. Der Druck in der Kabine sei konstant.

b) Wie hoch steigt die Kabinetemperatur theoretisch nach 1h an?

c) Nach welcher Zeit ist die Temperatur der Kabinenluft von anfänglich $T_0 = 20°C$ auf $T_1 = 40°C$ angestiegen?
   Besteht Kühlbedarf?

Lösung A 3:

Biologische Wärme
Lufterwärmung im Flugzeug durch „Abwärme“ der Passagiere (400)

Biologischer Grundumsatz an Energie: Kleiber-Gesetz (ca. 1930, CH)

$$J_0 = aM^\alpha \qquad M: \text{Körpermasse}$$

$$a \cong 3{,}5\ W/kg^\alpha \qquad M = 80kg \qquad \alpha = 3/4 \qquad Z = 400$$

$$V_{Luft} = (0{,}7m \cdot \underbrace{10}_{\text{Pass/Reihe}} + 1m) \cdot 2{,}5m \cdot \underbrace{40}_{\text{Reihenzahl}} \cdot 1m$$

$$V_{Luft} = 800m^3 + \underbrace{200m^3}_{\text{Toil,Küche}}$$

$$V_{Luft} = 1000m^3$$

a) <u>Wärmeleistung Passagiere</u>

$$\dot{Q} = A\,J_0 \cdot Z$$

$A = 1\ldots$ Grundumsatz

$A = 1{,}5\ldots$ geringe Aktivität, Halteleistung im Sitzen

$$\dot{Q} = A\,a\,M^\alpha \cdot Z$$

$$\dot{Q} = 1{,}5 \cdot 3{,}5 \frac{W}{kg^\alpha}(80\,kg)^\alpha \cdot 400$$

$$\underline{\underline{\dot{Q} = 56{,}17\ kW}}$$

$$\dot{Q}_{Pass} = \frac{56\,kW}{400} = 140W/Pass.$$

b) Lufterwärmung

$$\sum : \text{Luft}, \quad p = \text{const!!}$$

$$dH = dQ + \underbrace{\cancel{V\,dp}}_{=0}$$

$$H - H_0 = Q^{\bullet} \cdot \Delta t$$

$$\text{CEOS}: H - H_0 = c_p m_L \underbrace{(T - T_0)}_{\Delta T}$$

$$\Delta T = \frac{Q^{\bullet} \cdot \Delta t}{c_p\, \rho_L V_L}$$

$$\Delta T = \frac{56,2\,\text{kW} \cdot 3600\,\text{s}\,\text{K}}{1\text{kJ}/\text{kg} \cdot 1,3\text{kg}/\text{m}^3 \cdot 10^3\,\text{m}^3} \quad \ldots \quad \Delta t = 1\text{ h} = 3600\text{ s}$$

$$\underline{\underline{\Delta T = 155,6\,\text{K}}} \ldots \text{Kühlung notwendig}$$

$$\Delta T_{max} = (50 - 20)°\text{C} = 30°\text{C}$$

$$c_p \cong 1\,\text{kJ}/(\text{kg}\,\text{K}), \quad \rho_L = 1,3\,\text{kg}/\text{m}^3$$

c) Nach welcher Zeit ist die Temperatur der Kabinenluft durch „Passagierwärme“ auf $T_1 = 40°\text{C}$ angestiegen?

$$\Delta t_{40°\text{C}} = \frac{c_V \rho_L V_L}{Q^{\bullet}} \underbrace{\Delta T}_{T_1 - T_0 = (40-20)°\text{C} = 20\text{K}}$$

$$\Delta t_{40°\text{C}} = \frac{1\,\cancel{\text{kJ}} \cdot 1,3\,\cancel{\text{kg}} \cdot 10^3\,\cancel{\text{m}^3} \cdot \text{s} \cdot 20\,\cancel{\text{K}}}{\cancel{\text{kg}}\,\cancel{\text{K}}\,\cancel{\text{m}^3} \cdot 56,2\,\cancel{\text{kJ}}} = 7\,\text{min}\,43\,\text{s}$$

Hinweis: Änderung der Masse der Luft bei Erwärmung vernachlässigen!

Aufgabe A 4

Energieäquivalente

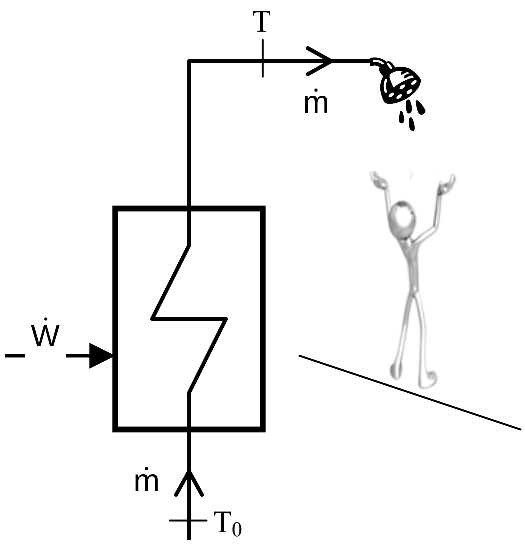
In einem Durchlauferhitzer wird ein Volumenstrom $\dot{V}$ = 0,5 l/s an Wasser von anfänglich T_0 = 10 °C auf T = 40 °C erhitzt. Wie lange kann man mit 1 kWh elektrischer Energie duschen?
Wärmekapazitat von Wasser: cp = 4,18 kJ / kgK
Dichte von Wasser: ρ = 1 kg / l.

<u>Lösung</u>:

T_0 = 10 °C $\qquad$ $\dot{m} = \rho \dot{V}\ ,\ \ \dot{V} = 0{,}5\,l/s$

T = 40°C $\qquad$ c_p = 4,18 kJ/kgK, ρ = 1 kg/l

<u>A) System: Erhitzer</u>



$$\dot{U} = h_0\dot{m} - h\,\dot{m} + \dot{W} = 0$$

1.HS $\quad \dot{U} = \sum_i J_{ui} + \cancel{P_u} = 0$ ... stationär

$$\dot{W} = (h - h_0)\dot{m}$$

$$\underline{\dot{W} = c_p(T - T_0)\dot{m}}\,\Big|\cdot t$$

$$W = \underbrace{\dot{W}}_{const} \cdot t = 1\text{kWh} \text{ ... gegeben}$$

$$W = c_p(T - T_0)\dot{m}\,t$$

$$t = \frac{W}{c_p(T - T_0)\dot{m}} = \frac{1\,\cancel{kW}\,\cancel{h}\ \cancel{kg}\ \cancel{K}\ \cancel{s}\,3600\,s\,1\,\cancel{kJ}}{4{,}18\,\cancel{kJ}\cdot 30\,\cancel{K}\cdot 0{,}5\,\cancel{kg}\,1\,\cancel{h}\,1\,\cancel{kWs}}$$

$$t = 57{,}4\,s$$

<u>B) System: Wassermenge</u>

$$p = const$$

$$dH = dQ = dW \text{ ... 1.HS}$$

$$m\,dh = dW\,\Big|\int \quad \text{CEOS}$$

$$m\,c_p\left(T - T_0\right) = W$$

$$m = \dot{m}\,t$$

$$\rightarrow t = \frac{W}{c_p\left(T - T_0\right)\dot{m}}$$

Aufgabe A5

Energieäquivalente

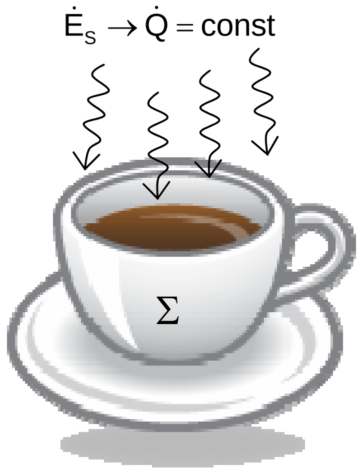
In einem Mikrowellenofen der Leistung 1 kW soll 0,25 l Milchkaffee von T_0 = 5 °C auf T_1 = 40 °C erwärmt werden. Wie lange dauert dieser Heizvorgang?

Lösung:
Mikrowellenofen
Leistung 1 kW

Erwärmen von 0,25 l Milchkaffee

T_0 = 5 °C
T = 40 °C

Heizzeit t = ?



Tasse: 1. Erwärmung vernachlässigen
Korrektur!
2. Strahlungsverluste

Energiesatz

$$\sum: \; dH = dE_s = dQ$$

$$H - H_0 = E_s = \dot{E}_s t \qquad (1)$$

Kal. Zgl. des Kaffees (CEOS)

$$H - H_0 = c\,m\underbrace{(T - T_0)}_{\Delta T} \qquad (2)$$

$$c\,m\,\Delta T = \dot{E}_s t$$

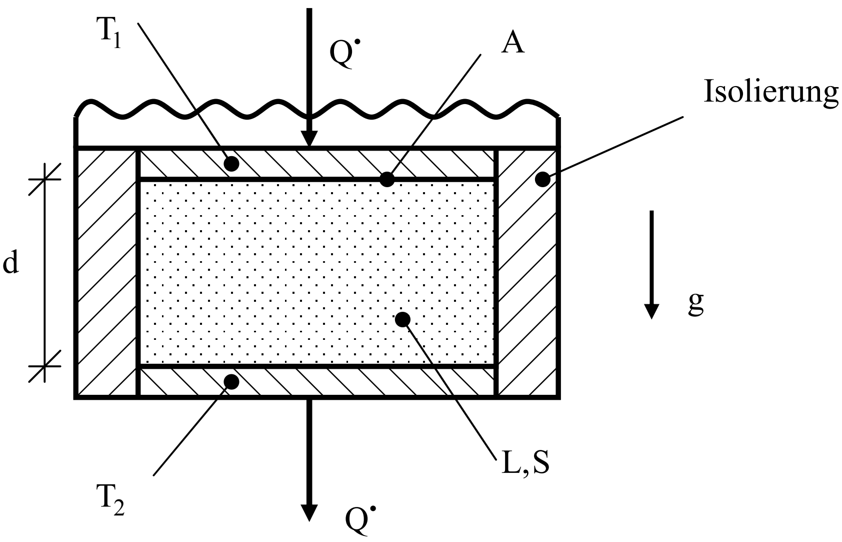
$$t^{-1} = \frac{\dot{E}_s}{c \cdot m \cdot \Delta T} = \frac{1\cancel{k}\overbrace{W}^{J/s}\ \cancel{kg}\ \cancel{K}}{4{,}18\cancel{k}J \cdot 0{,}25\,\cancel{kg} \cdot 35\cancel{K}}$$

$$t = 36{,}6\,s$$

Aufgabe A 6

Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten

Die Wärmeleitfähigkeit (λ) von Flüssigkeiten kann nach der 2-Platten-Methode in folgender Weise bestimmt werden: Die Flüssigkeit wird in einen engen Spalt zwischen 2 horizontale Metallplatten, die seitlich isoliert sind, eingefüllt (blasenfrei). Die obere Platte wird elektrische beheizt (Spannung U_e, Strom I_e) und die Temperaturen beider Platten (T_1, T_2) im stationären Zustand gemessen. Siehe Figur.



a) Man gebe den allg. Ausdruck für λ in Abhängigkeit von U_e, J_e, T_1, T_2 und der Fläche A sowie Dicke d der Flüssigkeitsschicht an.

b) Wie groß ist die Wärmeleitfähigkeit von Heptylbutyrat bei welchem bei einer elektrischen Heizung von $U_e = 4{,}416\,\mathrm{V}, I_e = 0{,}5\,\mathrm{A}$ in einer $d = 1\,\mathrm{mm}$ dicken und $A = 16\,\mathrm{cm}^2$ großen Schicht die Temperaturen $T_1 = 303\,\mathrm{K}, T_2 = 302\,\mathrm{K}$ gemessen worden sind?

Lösung A 6

Erwärmung von oben zur Vermeidung von Konvektionsströmungen (BENARD - Effekt)

Beispiel: Heptylbutyrat

Elektroheizung: $I_e = 0{,}5\,\mathrm{A}, \quad U_e = 4{,}416\,\mathrm{V}$

Fläche: $A = 4\,\mathrm{cm} \times 4\,\mathrm{cm}$,

Dicke: $d = 1\,\mathrm{mm}$

Temperaturmesswerte: $T_1 = 303\,\mathrm{K}, \quad T_2 = 302\,\mathrm{K}$

$$Q^{\bullet} = I_e \cdot U_e \qquad \text{1. HS}$$

$$Q^{\bullet} = \lambda \frac{A}{d}(T_1 - T_2)$$

$$\lambda = \frac{I_e \cdot U_e \cdot d}{A(T_1 - T_2)} = \frac{0{,}5\,\mathrm{A} \cdot 4{,}416\,\mathrm{V}}{16 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \cdot 1\,\mathrm{K}} = 1{,}38 \frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{mK}}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 1{,}38 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}}}$$

Aufgabe A7

Klimatisierung eines Hochhauses (Malaysia Tower)

Ein Wolkenkratzer in den Tropen (Höhe $H = 1000\text{m}$, Breite $b = 50\text{m}$, Länge $\ell = 100\text{m}$) soll klimatisiert werden, d.h. die Innentemperatur des Gebäudes soll konstant $T_i = 20°\text{C}$ betragen. Die Außentemperatur sinkt an einem Sommertag vom Erdboden von $T_\circ = 40^\circ\text{C}$ bis auf $T_H = 10^\circ\text{C}$ in 1000m Höhe linear ab. Die Außenwände des Gebäudes bestehen im Wesentlichen aus Glas ($\lambda_G = 1{,}18\text{W}/\text{Km}$) der Dicke $d = 1\text{cm}$.

Der Wärmeaustausch durch die horizontale Decke des Gebäudes kann wegen Vollisolierung vernachlässigt werden. Die wechselnde Sonneneinstrahlung auf das Gebäude soll nicht betrachtet werden.

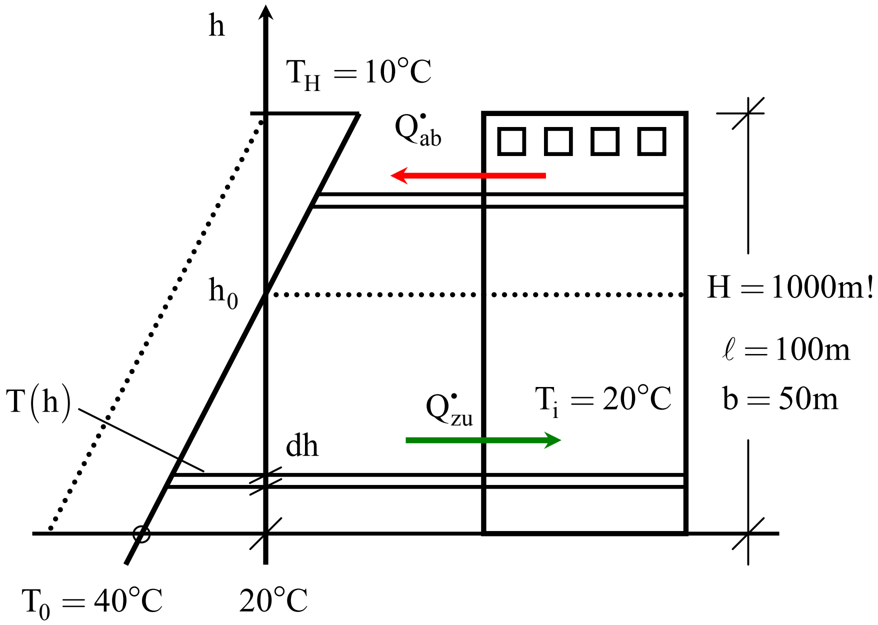
a) In welcher Höhe ($h_\circ$) ist die Außentemperatur der Luft gerade gleich der Innentemperatur $T(h_\circ) = T_i$?

b) Welche Wärme strömt im unteren Teil des Gebäudes ($h < h_\circ$) durch Wärmeleitung durch die Außenwände ein?

c) Welche Wärme strömt im oberen Teil des Gebäudes ($h > h_\circ$) aus diesem durch die Außenwände an die Umgebungsluft ab?

d) Mit welcher Maschine könnte man den gekoppelten Kälte- und Wärmebedarf des Hochhauses energetisch besonders günstig bereitstellen?

Lösung A 7



Malaysia Tower

a)

$$\frac{H}{T_0 - T_H} = \frac{h_0}{T_0 - T_i}$$

$$\Rightarrow h_0 = \frac{T_0 - T_i}{T_0 - T_H} H$$

$$h_0 = \frac{40 - 20}{40 - 10} 1000m$$

$$\underline{\underline{h_0 = 667m = \frac{2}{3} H}}$$

b)

$$dQ^{\bullet} = \lambda \frac{dA}{d}\left(T(h) - T_i\right), \qquad dA = \underbrace{2\left(\ell + b\right)}_{U} dh$$

$$Q^{\bullet}_{zu} = \int_{h=0}^{h_0} dQ^{\bullet} = \lambda \frac{U}{d} \int_0^{h_0} \left(T(h) - T_i\right) \cdot dh$$

$$\frac{T(h) - T_i}{h_0 - h} = \frac{T_0 - T_i}{h_0}$$

$$\Rightarrow T(h) - T_i = \left(1 - \frac{h}{h_0}\right)\left(T_0 - T_i\right)$$

$$Q^{\bullet}_{zu} = \lambda \frac{U}{d}\left(T_0 - T_i\right) \underbrace{\int_0^{h_0} \left(1 - \frac{h}{h_0}\right) \cdot dh}_{= h_0 - \frac{1}{\cancel{h_0}} \frac{h_0^{\cancel{2}}}{2} = \frac{h_0}{2}}$$

$$Q^{\bullet}_{zu} = \lambda \frac{U h_0}{2d}\left(T_0 - T_i\right)$$

$$Q^{\bullet}_{zu} = \lambda \frac{UH}{3d}\left(T_0 - T_i\right)$$

$$Q^{\bullet}_{zu} = 1{,}18 \frac{W}{\cancel{K}\,\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot 150\,\cancel{m}}{2 \cdot 10^{-2}\,\cancel{m}} \overbrace{\frac{2}{3} \cdot 10^3\,\cancel{m}}^{h_0} \left(40 - 20\right) \cancel{{}^\circ C}$$

$$\underline{\underline{Q^{\bullet}_{zu} = 236\,MW}}$$

c)

$$Q^{\bullet}_{ab} = \int_{h_0}^{H} dQ^{\bullet} = \lambda \frac{U}{d} \int_{h=h_0}^{H} \left(T_i - T(h)\right) \cdot dh$$

$$\frac{-\left(T(h)-T_i\right)}{h-h_0}=\frac{T_i-T_H}{H-h_0}$$

$$T_i-T(h)=\frac{h-h_0}{H-h_0}\left(T_i-T_H\right),\qquad h-h_0=x,\qquad dh=dx$$

$$\dot{Q}_{ab}=\lambda\frac{U}{d}\left(T_i-T_H\right)\underbrace{\int_{x=0}^{H-h_0}\frac{x}{H-h_0}\cdot dx}$$

$$=\frac{1}{\cancel{H-h_0}}\frac{1}{2}\left(H-h_0\right)^{\cancel{2}}=\frac{1}{2}\underbrace{\left(H-h_0\right)}_{\frac{1}{3}H}$$

$$\dot{Q}_{ab}=\lambda\frac{UH}{6d}\left(T_i-T_H\right)$$

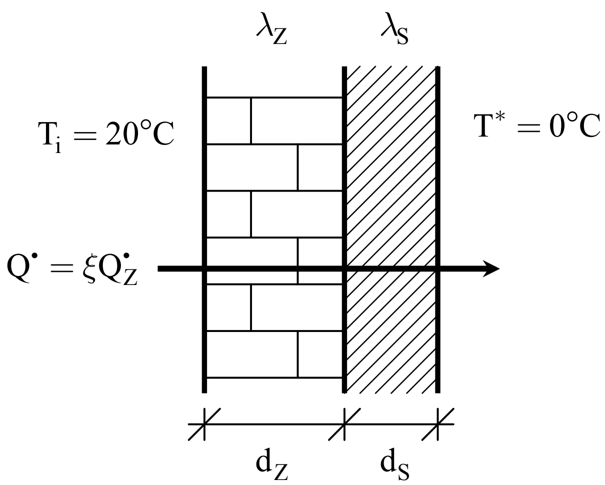
$$\dot{Q}_{ab}=1{,}18\frac{W}{\cancel{K}\,\cancel{m}}\frac{2\cdot 150\,\cancel{m}}{6\cdot 10^{-2}\,\cancel{m}}10^3\,\cancel{m}\,(20-10)\,\cancel{K}$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}_{ab}=59MW}}$$

Aufgabe A8

Wärmeleitung durch eine geschichtete Wand

Der Wärmestrom ($\dot{Q}_Z$) durch die lotrechte Ziegelmauer eines Wohngebäudes der Dicke $d_Z = 0{,}35\,\text{m}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda_Z = 1{,}5\,\text{W/Km}$, soll durch Aufbringen einer Isolierschicht $(\lambda_S = 0{,}3\,\text{W/Km})$ an der Außenseite auf den Bruchteil (ξ), d.h. den neuen Wert $\dot{Q} = \xi \dot{Q}_Z$ mit $\xi = 0{,}1$ reduziert werden. Die Innentemperatur betrage $T_i = 20°\text{C}$, die Außentemperatur $T^* = 0°\text{C}$.



a) Welche Wärme gibt die nichtisolierte Mauer pro Flächeneinheit (1m²) an die Umgebung ab?

b) Wie dick ist die benötigte Isolierschicht?

c) Man diskutiere das Ergebnis, d.h. prüfe die Frage, ob es bautechnisch sinnvoll realisiert werden kann.

Lösung A 8

a) Wärmeverluste pro Flächeneinheit (m^2) Ziegelmauer

$$\dot{Q}_Z = \frac{1}{R_Z}\left(T_i - T^*\right) \qquad (1)$$

$$\dot{Q}_Z = \lambda_Z \frac{A}{d_Z}\left(T_i - T^*\right)$$

$$q_Z = \frac{\dot{Q}_Z}{A} = 1{,}5\frac{W}{\cancel{K}m}\frac{1}{0{,}35m}(20-0)\cancel{^\circ C}$$

$$\underline{\underline{q_Z = 85{,}7\,W/m^2}}$$

b) Dicke der Isolierschicht

$$\dot{Q} = \xi\dot{Q}_Z = \frac{1}{R_W}\left(T_i - T^*\right) \qquad (2)$$

$$R_W = R_Z + R_S = \frac{d_Z}{\lambda_Z A} + \frac{d_S}{\lambda_S A}$$

$$(1{,}2) \rightarrow \quad \frac{\xi\cancel{\dot{Q}_Z}}{\cancel{\dot{Q}_Z}} = \frac{\frac{1}{R_W}\cancel{\left(T_i - T^*\right)}}{\frac{1}{R_Z}\cancel{\left(T_i - T^*\right)}}$$

$$\rightarrow \quad \xi = \frac{R_Z}{R_W}$$

$$R_W = \frac{1}{\xi}R_Z$$

$$\frac{d_Z}{\cancel{A}\lambda_Z} + \frac{d_S}{\cancel{A}\lambda_S} = \frac{1}{\xi}\frac{d_Z}{\cancel{A}\lambda_Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_S = \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\frac{\lambda_S}{\lambda_Z} d_Z}$$

$$\xi = \frac{1}{10}:$$

$$d_S = (10 - 1) \cdot \frac{0{,}3}{1{,}5} \cdot 0{,}35\text{m}$$

$$\underline{\underline{d_S = 0{,}63\text{m}}}$$

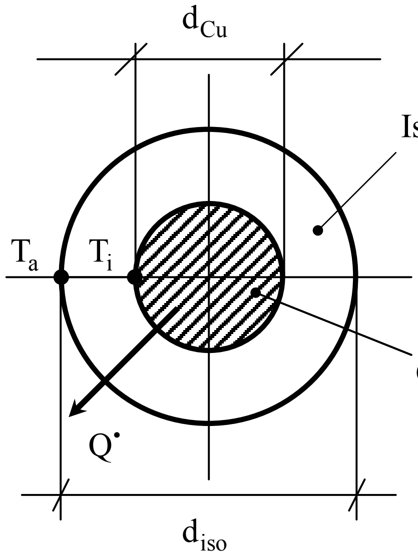
c) $\underline{\underline{d_S = 0{,}63\text{m}}}$ zu viel, (Wärmeübergänge nicht betrachtet!)

Aufgabe A9

Wärmeabfuhr aus stromdurchflossenem Kupferkabel

Ein Kupferkabel der Länge $\ell = 30\mathrm{m}$ und Durchmesser $d_{Cu} = 1{,}4\mathrm{mm}$ ist mit einer Isolierschicht mit Durchmesser $d_{iso} = 2{,}7\mathrm{mm}$ umgeben. Durch das Kabel fließt Gleichstrom $I_e = 30\mathrm{A}$. Dabei tritt an den Enden des Kabels eine Spannungsdifferenz $\Delta U_e = 10\mathrm{V}$ auf.

Die Wärmeleitfähigkeit des Isoliermaterials beträgt $\lambda_{iso} = 0{,}6\,\mathrm{kJ/mhK}$.($h = \text{hora}\left(\text{lat.}\right)$ Stunde)



Man berechne die Differenz zwischen der Temperatur (T_i) an der Oberfläche des Kupfers und der Außentemperatur (T_a).

Der Wärmeübergang vom Kupfer auf das Isoliermaterial und von diesem in die Umgebungsluft können (zunächst) vernachlässigt werden.

Lösung A 9

Ohm $\dot{Q} = I_e \cdot \Delta U_e = 300\mathrm{VA} = 300\mathrm{W}$

Fourier $\dot{Q} = -2\pi\lambda\ell \dfrac{T_a - T_i}{\ln\left(\dfrac{r_a}{r_i}\right)}$ $\qquad r_a = d_{iso}/2\,, \quad r_i = d_{cu}/2$

$$T_i - T_a = \frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda\ell}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

$$T_i - T_a = \frac{300\mathrm{W} \cdot \ln\left(\dfrac{2,7}{1,4}\right)\mathrm{mK} \cdot 3600\mathrm{s}}{2\pi 0,6\mathrm{kJ}}$$

$$\underline{\underline{T_i - T_a = 6,3\mathrm{K}}}$$

Aufgabe A10

Wärmeleitung durch Hohlblockmauer

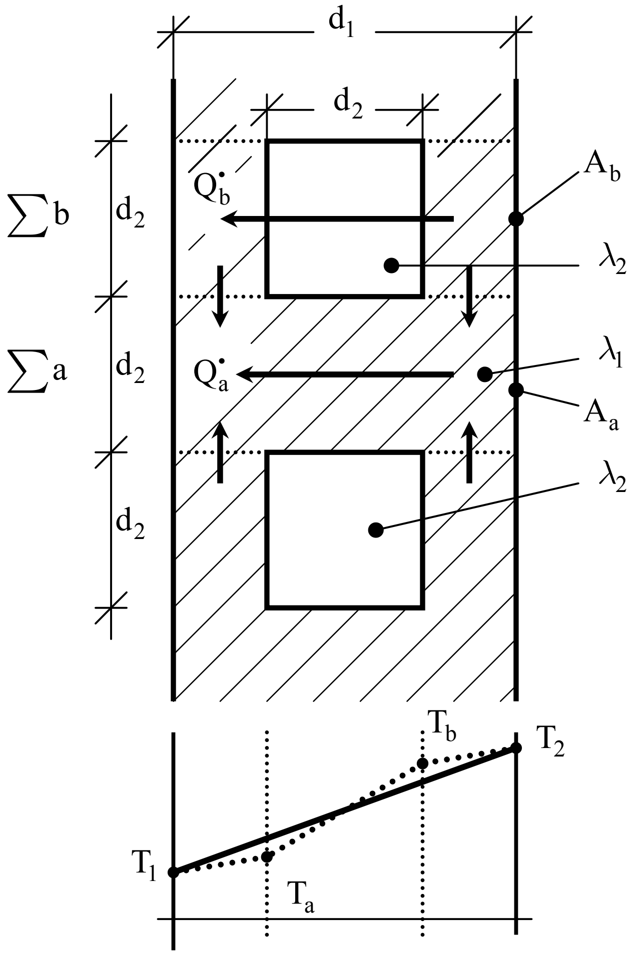
Eine lotrechte Mauer enthält periodisch angeordnete innere Hohlräume, die mit Luft gefüllt sind, vgl. Figur.

a) Man berechne einen allgemeinen Ausdruck für den Wärmestrom ($\dot{Q}$) durch die Mauer und vergleiche ihn mit dem entsprechenden Ausdruck für den Wärmestrom ($\dot{Q}_m$) durch die Massivmauer. Hinweis: Man zerlege die Mauer in eine periodische Folge verschiedener wärmeleitender Elemente und betrachte das zugehörige elektrische Ersatzschaltbild.

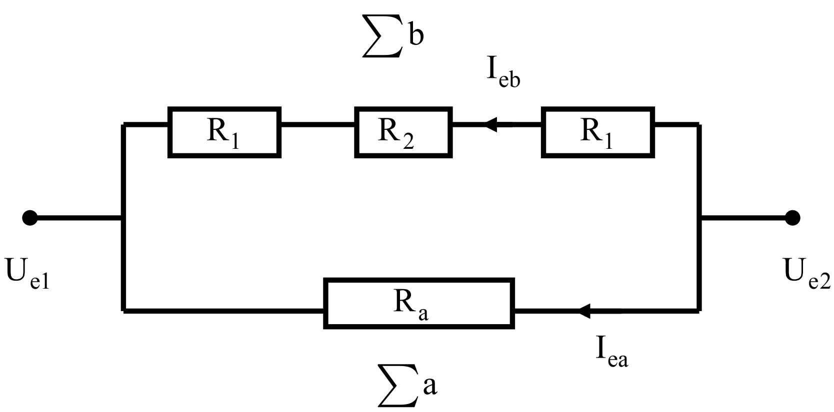
b) Wie groß ist das Verhältnis ($\dot{Q}/\dot{Q}_m$) für eine Hohlblockmauer mit folgenden Daten:

Mauerlänge	$\ell = 10\,\text{m}$
Mauerdicke	$d_1 = 36\,\text{cm}$
Hohlraum (Würfel)	$d_2 = 12\,\text{cm}$
Wärmeleitfähigkeit Ziegel:	$\lambda_1 = 1{,}25\,\text{W/Km}$
Wärmeleitfähigkeit Luft:	$\lambda_2 = 0{,}026\,\text{W/Km}$
Außenfläche eines Periodenelements:	$A = 2 d_2 \ell$

Lösung A 10



Elektrisches Ersatzschaltbild.



$$I_e = I_{ea} + I_{eb}$$

$$\frac{\Delta U_e}{R} = \frac{\Delta U_e}{R_a} + \frac{\Delta U_e}{R_b}$$

$$\underline{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{2R_1 + R_2}}$$

„Wärmeschaltung“

$$\sum = \sum{}_a + \sum{}_b$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_a + \dot{Q}_b$$

$$\frac{\cancel{T_1 - T_2}}{R_w} = \frac{\cancel{T_1 - T_2}}{R_{wa}} + \frac{\cancel{T_1 - T_2}}{R_{wb}}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{1}{R_w} = \frac{1}{R_{wa}} + \frac{1}{R_{wb}}}$$

$$R_{wa} = \frac{d_1}{\lambda_1 \cdot A_a},$$

$$R_{wb} = 2R_{W1} + R_{W2}$$

$$R_{wb} = 2\frac{d_1 - d_2}{2\lambda_1 A_b} + \frac{d_2}{A_b \lambda_2}$$

Wärmestrom:

$$\dot{Q} = \left(\frac{\lambda_1 A_a}{d_1} + \frac{A_b}{\frac{d_1 - d_2}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} \right) (T_1 - T_2)$$

Massivmauer:

$$\dot{Q}_m = \frac{\lambda_1}{d_1} (A_1 + A_2)(T_1 - T_2)$$

Vergleich Hohlblockmauer/ Massivmauer:

$$\underline{\underline{\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_m} = \frac{A_a + \frac{A_b}{1 + \frac{d_2}{d_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right)}}{A_a + A_b}}}$$

Spezialfall: $A_a = A_b$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_m} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{1}_{\text{Massivanteil}} + \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{d_2}{d_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right)}}_{\text{Hohlblockanteil}} \right)$$

<u>Numerisches Beispiel:</u>

$$\underline{\underline{\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_m} = 0,53}}$$

Problem: Querströme.....siehe Vorlage

Aufgabe A11

Isolierung eines Unterseebootes

Bei der Konstruktion eines Unterseebootes dessen Wand von außen nach innen aus Schichten von Stahl, Fiberglas und Aluminium besteht, wird eine Innentemperatur von 21°C vorgegeben. In idealisierter Form kann das Boot als Zylinder mit einer Länge von 61m und einem Innendurchmesser von 9m dargestellt werden.
Der Wärmeübergangskoeffizient von der Luft im Boot auf die Aluminiumschicht sei $\alpha_{L,A\ell} = 14\,W/Km^2$, der an der Außenseite vom Stahl auf das Seewasser wird auf $\alpha_{W,St} = 56{,}7\,W/Km^2$ bei ruhendem Schiff und auf $\alpha_{W,St} = 850\,W/Km^2$ bei voller Fahrt geschätzt.

a) Welche Heizleistung wird benötigt, wenn
   - die Temperatur der See von +1°C bis +12,8°C variiert?
   - die Wand des Schiffes folgenden Aufbau hat:

     20mm Stahl außen
     25mm Fiberglas nach innen
     6mm Aluminium nach innen

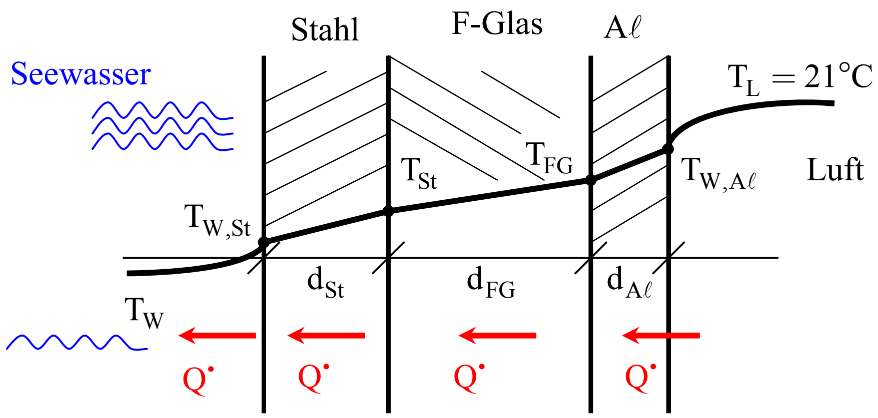
   Stoffwerte: Stahl $\lambda_{St} = 44\,W/mK$
   Fiberglas $\lambda_{FG} = 0{,}048\,W/mK$
   Aluminium $\lambda_{A\ell} = 200\,W/mK$

b) Um wie viel Prozent müsste/könnte die Isolierung dicker/dünner sein, wenn das Aluminium außen und der Stahl innen wäre? Versuchen Sie, die neuen WÜ-Koeffizienten abzuschätzen. (Nusselt – Zahlen).

<u>Hinweis</u>:
Da die Schichtdicken sehr viel kleiner als der Innendurchmesser sind, kann die U-Boot Wand zunächst als ebene Wand angesehen werden.

Lösung A11

a) <u>1. Anordnung:</u>



Innenfläche $\quad A = \pi d L + 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\left(9\text{m}\cdot 61\text{m} + \frac{1}{2}\cdot 81\text{m}^2\right) = 1852\text{m}^2$

Fourierbeziehungen

$$\text{WL: } T_{i+1} - T_i = R_{wi}\cdot \dot{Q}, \quad R_{wi} = \frac{d_i}{A\lambda_i}$$

$$\text{WÜ: } T_\infty - T_w = R_w \cdot \dot{Q}, \quad R_w = \frac{1}{\alpha A}$$

1. Anordnung der Materialien Fourier – Beziehungen

$$T_L - T_{W,A\ell} = R_{L,A\ell}\cdot \dot{Q}$$

$$T_{W,A\ell} - T_{FG} = R_{A\ell}\cdot \dot{Q}$$

$$T_{FG} - T_{St} = R_{FG}\cdot \dot{Q}$$

$$T_{St} - T_{W,St} = R_{St}\cdot \dot{Q}$$

$$\underline{T_W - T_{St} = R_{W,St}\cdot \dot{Q}}$$

$$\sum: \; T_L - T_W = R\cdot \dot{Q}$$

$$Q^{\bullet} = \frac{1}{R}\left(T_L - T_W\right),$$

$$\underline{R = R_{L,A\ell} + R_{A\ell} + R_{FG} + R_{St} + R_{St,W}}$$

$$A \cdot R = \frac{1}{\alpha_{L,A\ell}} + \frac{d_{A\ell}}{\lambda_{A\ell}} + \frac{d_{FG}}{\lambda_{FG}} + \frac{d_{St}}{\lambda_{St}} + \frac{1}{\alpha_{St,W}}$$

$$A \cdot R = \frac{1}{14}\frac{Km^2}{W} + \left(\frac{6 \cdot 10^{-3}}{200} + \frac{25 \cdot 10^{-3}}{0,048} + \frac{20 \cdot 10^{-3}}{44}\right)\frac{Km^2}{W} + \frac{1}{850}\frac{Km^2}{W}$$

$$A \cdot R = 0,5939\,Km^2/W,$$

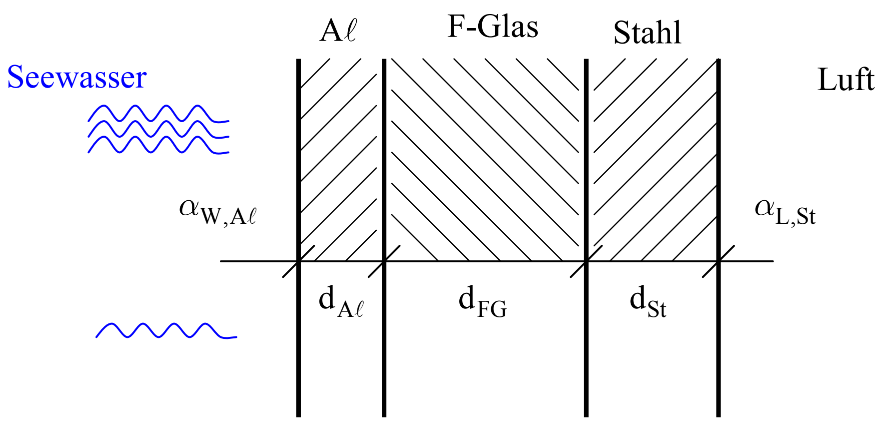
$$R = \frac{1}{1852\,\cancel{m^2}}\left(0,5939\right)\frac{K\,\cancel{m^2}}{W} = 0,32 \cdot 10^{-3}\,K/W$$

$$Q^{\bullet} = \frac{1}{\left(0,32 \cdot 10^{-3}\right)}\frac{W}{\cancel{K}}\left(21-1\right)\cancel{K}$$

$$Q^{\bullet} = 3125\frac{W}{\cancel{K}}\left(21-1\right)\cancel{K}$$

$$\underline{\underline{Q^{\bullet} = 62,5kW}}$$

b) <u>2. Anordnung der Materialschichten:</u>



Abschätzung WÜ – Zahlen $\alpha_{L,St}$, $\alpha_{A\ell,W}$ aus vorgegebenen Daten für $\alpha_{L,A\ell}$, $\alpha_{W,St}$

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha \cdot \delta_T}{\lambda}; \qquad \delta_T \text{ :Dicke thermische Grenzschicht des Fluids!}$$

$$\frac{\mathrm{Nu}}{\delta_T} = \frac{\alpha}{\lambda} = \mathrm{const}$$

1. WÜ Luft – Metall

   (Freie Konvektion)!

   Modell

$$\left(\frac{\alpha_{L,A\ell}}{\lambda_{A\ell}}\right) = \left(\frac{\alpha_{L,St}}{\lambda_{St}}\right)$$

$$\rightarrow \alpha_{L,St} = \alpha_{L,A\ell}\frac{\lambda_{St}}{\lambda_{A\ell}}$$

$$\alpha_{L,St} = 14\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Km^2}}\frac{44}{200}$$

$$\underline{\alpha_{L,St} = 3\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Km^2}}}$$

1. WÜ Seewasser – Metall

Modell

$$\left(\frac{\alpha_{W,St}}{\lambda_{St}}\right) = \left(\frac{\alpha_{W,A\ell}}{\lambda_{A\ell}}\right)$$

$$\rightarrow \alpha_{W,A\ell} = \alpha_{W,St}\frac{\lambda_{A\ell}}{\lambda_{St}}$$

$$\alpha_{W,A\ell} = 850\frac{W}{Km^2}\frac{200}{44}$$

$$\underline{\alpha_{W,A\ell} = 3864\frac{W}{Km^2}}$$

Bei gleichen Wärmeströmen und gleichen Temperaturdifferenzen $(T_i - T_a)$ muss die Dicke der Fiberglasschicht (d_{FG}) so gewählt werden, dass die Wärmewiderstände in beiden Materialanordnungen gleich sind.

1. Anordnung

$$(R \cdot A)_1 = 0{,}5939\frac{Km^2}{W}$$

2. Anordnung

$$(R \cdot A)_2 = \frac{1}{\alpha_{L,St}} + \frac{d_{A\ell}}{\lambda_{A\ell}} + \frac{d_{FG}}{\lambda_{FG}} + \frac{d_{St}}{\lambda_{St}} + \frac{1}{\alpha_{W,A\ell}}$$

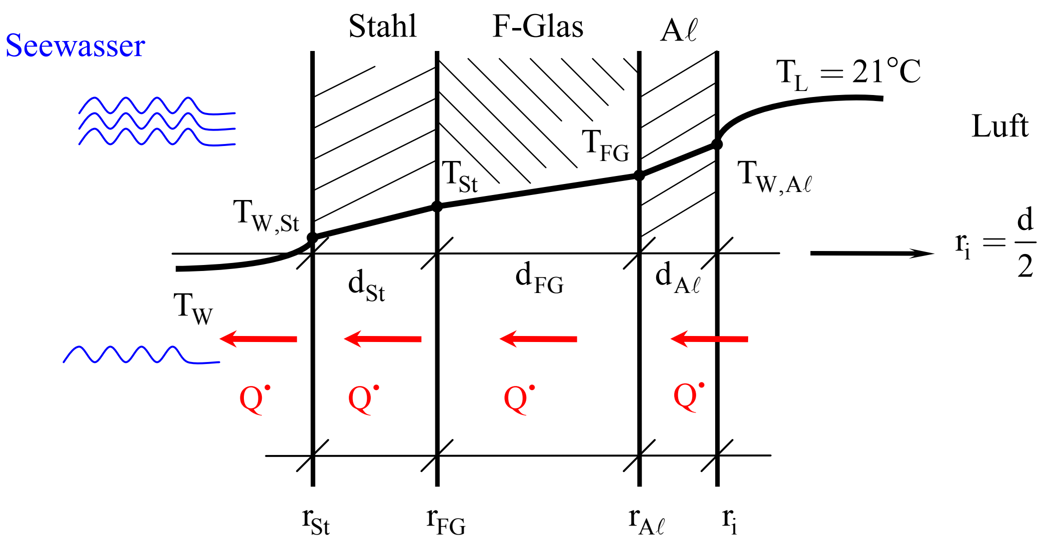
$$d_{FG} = \lambda_{FG}\left[(R \cdot A) - \frac{1}{\alpha_{L,St}} - \frac{1}{\alpha_{W,A\ell}} - \frac{d_{A\ell}}{\lambda_{A\ell}} - \frac{d_{St}}{\lambda_{St}}\right]$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{d_{FG} = 1{,}25cm}}$$

„Zylinderkorrektur"

Wärmebedarf U-Boot

1. <u>Anordnung</u>



<u>Stationarität!</u>

$r_i = 4,5\text{m},\ \ L = 61\text{m},\ \ d_{A\ell} = 6\text{mm},\ \ d_{FG} = 25\text{mm},\ \ d_{St} = 20\text{mm}$

$r_{A\ell} = r_i + d_{A\ell} = 4,5\text{m} + 0,006\text{m} = 4,506\text{m}$

$r_{FG} = r_i + d_{A\ell} + d_{FG} = 4,5\text{m} + 0,006\text{m} + 0,025\text{m} = 4,531\text{m}$

$r_{St} = r_i + d_{A\ell} + d_{FG} + d_{St} = 4,5\text{m} + 0,006\text{m} + 0,025\text{m} + 0,02\text{m} = 4,551\text{m}$

Zylindermantel, Stirnfläche: $2\pi r_i^2$

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L\left(T_L - T_W\right)}{\frac{1}{\alpha_{W,St}\cdot r_{St}} + \frac{1}{\lambda_{St}}\ln\left(\frac{r_{St}}{r_{FG}}\right) + \frac{1}{\lambda_{FG}}\ln\left(\frac{r_{FG}}{r_{A\ell}}\right) + \frac{1}{\lambda_{A\ell}}\ln\left(\frac{r_{A\ell}}{r_i}\right) + \frac{1}{\alpha_{L,A\ell}\cdot r_i}}$$

$$\dot{Q} = \frac{2\pi 61\text{m}(21-1)\text{K}}{\left[\frac{1}{56{,}7\cdot 4{,}551}+\frac{1}{44}\ln\left(\frac{4{,}551}{4{,}531}\right)+\frac{1}{0{,}048}\ln\left(\frac{4{,}531}{4{,}506}\right)+\frac{1}{200}\ln\left(\frac{4{,}506}{4{,}5}\right)+\frac{1}{14\cdot 4{,}5}\right]\frac{\text{Km}}{\text{W}}}$$

$$\underline{\underline{\dot{Q} = 57{,}4\ \text{kW}}}$$

Aufgabe A12

Wasserleitung, Wämeübergang Wasser-Rohrwand, Nusselt-Zahl

In einem Wasserleitungsrohr der Länge $L = 10\,\mathrm{m}$, Innenradius $r_i = 1{,}25\,\mathrm{cm}$, strömt Wasser der Eintrittstemperatur $T_0 = 70°\mathrm{C}$ mit der Geschwindigkeit $w = 5\,\mathrm{m/s}$. Das Wasser kühlt sich durch Übergang von Wärme an die Rohrinnenwand ab. Dabei bildet sich eine thermische Grenzschicht konstanter Dicke $d_T = 5\,\mathrm{mm}$. Die Temperaturdifferenz des Wassers am Beginn der Grenzschicht im Wasser und an der Rohrwand sei über die Rohrlänge konstant $\Delta T = 3°\mathrm{C}$.

a) Man stelle den Energiesatz für das Wasser im Rohr auf und berechne aus ihm allgemein die Austrittstemperatur T des Wassers am Rohrende.

b) Man berechne die Temperatur T numerisch.
Die Nusselt-Zahl der Rohrströmung kann aus der Korrelation

$$\mathrm{Nu} = 0{,}021 \cdot \mathrm{Pr}^{1/2} \cdot \mathrm{Re}^{0{,}8}$$

für $\mathrm{Pr} \simeq 1$, $\mathrm{Re} < 10^5$ berechnet werden.

c) Welche Austrittstemperatur (T') ergibt sich, wenn im Wärmeübergangskoeffizienten bzw. in der Nusseltzahl die sog. Rohrkorrektur

$$\alpha_{i,\mathrm{Rohr}} = \mathrm{Nu}\frac{\lambda}{r_i} \cdot \frac{-1}{\ln\left(1 - \frac{d_T}{r_i}\right)}$$

Berücksichtigt wird?

<u>Stoffdaten Wasser</u>

$\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$

$\eta = 0{,}001\,\mathrm{kg/ms}$

$\lambda = 0{,}6\,\mathrm{w/Km}$

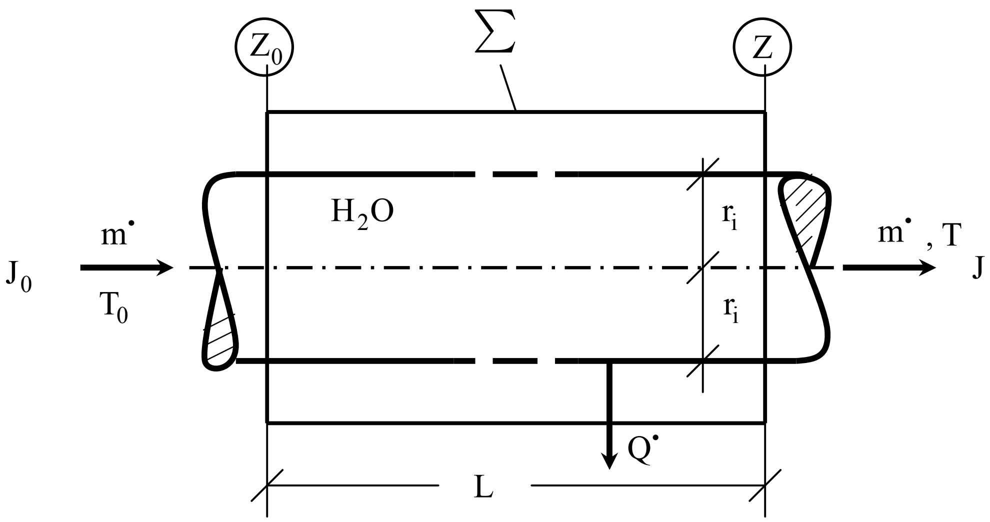
$c_p = 4{,}18\,\mathrm{kJ/kgK}$

Lösung A 12

Wärmeübergang Wasser – Rohrwand in Wasserleitungsrohr,   Nusselt – Zahl

a) Energiesatz für Rohr

Thermodynamisches System



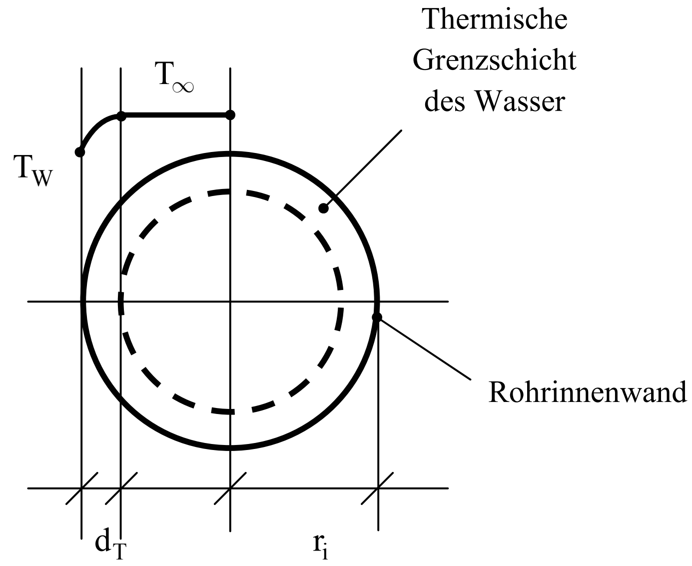
$$\sum \; : \quad \dot{H} = J_0 - J - Q^\bullet = 0 \qquad (1)$$

$J_0 - J = (h_0 - h) m^\bullet$ keine potentielle und kinetische Energiedifferenzen

$$h_0 - h = c_p (T_0 - T) \qquad (2)$$

$$(1,2) \qquad \boxed{T = T_0 - \frac{Q^\bullet}{m^\bullet \cdot c_p}} \qquad (3)$$

b) Berechnung der abgegebenen Wärmeleistung



$$\dot{Q} = \alpha_i A \underbrace{\left(T_\infty - T_W\right)}_{\Delta T = 3°C = const} \tag{4}$$

$$A = 2\pi r_i L = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-2}\,m \cdot 10m = 0{,}785m^2$$

$$\alpha_i = Nu \frac{\lambda}{d_T} \tag{5}$$

$$Nu = 0{,}021 \cdot Pr^{1/2} \cdot Re^{0{,}8} \qquad \text{für} \quad Pr \simeq 1, \quad Re < 10^5 \tag{6}$$

H_2O : $\quad Pr = 7....20°C....\text{VDI-Tabelle}$

$$Re = \frac{w\rho r_i}{\eta} = \frac{5\,m/s \cdot 10^3\,kg/m^3 \cdot 0{,}0125m}{0{,}001\,kg/ms}$$

$$Re = 62500 < 10^5$$

(6): $\mathrm{Nu} = 0,021 \cdot 7^{1/2} \cdot (62500)^{0,8} = 381$

(5): $\alpha_{\mathrm{i}} = \mathrm{Nu}\frac{\lambda}{\mathrm{d_T}} = 381 \cdot \frac{0,6\,\mathrm{W/Km}}{0,005\mathrm{m}}$

$$\underline{\alpha_{\mathrm{i}} = 45,6\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{Km^2}}}$$

(4): $\mathrm{Q}^{\bullet} = 45,6\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{Km^2}} \cdot 0,785\mathrm{m^2} \cdot 3\mathrm{K}$

$$\underline{\mathrm{Q}^{\bullet} = 107,4\mathrm{kW}}$$

(3): $\mathrm{T} = 70°\mathrm{C} - \frac{107,4\mathrm{kW}}{1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot \pi \cdot (1,25)^2 \cdot 10^{-4}\mathrm{m^2} \cdot 5\,\mathrm{m/s} \cdot 4,18\,\mathrm{kj/kgK}}$

$$\underline{\underline{\mathrm{T} = 70°\mathrm{C} - 21°\mathrm{C} = 49°\mathrm{C}}}$$

c) Wärmeübergangskoeffizient (α_{i}) mit Rohrkorrektur (vgl. VL)

$$\alpha_{\mathrm{i,Rohr}} = \mathrm{Nu}\frac{\lambda}{\mathrm{r_i}}\frac{-1}{\ln\left(1 - \frac{\mathrm{d_T}}{\mathrm{r_i}}\right)}$$

$$\lim_{\mathrm{r_i}\to\infty} \alpha_{\mathrm{i,Rohr}} = \mathrm{Nu}\frac{\lambda}{\mathrm{d_T}}$$

$$\alpha_{\mathrm{i,Rohr}} = 380\frac{0,6\,\mathrm{W/Km}}{0,0125\mathrm{m}} \cdot \frac{-1}{\ln\left(1 - \frac{5}{12,5}\right)}$$

$$\underline{\alpha_{\mathrm{i,Rohr}} = 35,7\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{Km^2}}}$$

$$\mathrm{T}' = 70°\mathrm{C} - \frac{35,7}{45,6} \cdot 21°\mathrm{C}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{T}' = 70°\mathrm{C} - 16,4°\mathrm{C} = 53,6°\mathrm{C}}}$$

Aufgabe A13

Wärmeübergang sonnenbeschienene Hauswand-Luft
Freie Konvektion, Grashof-Zahl

Eine lotrechte Hauswand (Länge $L = 20\,\mathrm{m}$, Höhe $h = 12\,\mathrm{m}$) wird von der (schräg einfallenden) Sonne beschienen und erwärmt sich dabei auf eine Oberflächentemperatur $T_W = 40°C$. Die Temperatur der umgehenden Luft ist $T_L = 20°C$.

a) Man skizziere das Temperaturprofil in der Umgebung der Wand.

b) Wieviel Wärme gibt die Wand an die umgehende Luft ab?

   Hinweis: Die Nusselt-Zahl des Wärmeübergangsprozesses Wand-Luft kann nach der Beziehung

$$\mathrm{Nu} = C\left(\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Gr}\right)^{\mu}$$

   mit der Prandtlzahl Pr und der Grashofzahl

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta\Delta T\ell^3}{\nu^2},$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P,$$

$$\Delta T = T_W - T_L$$

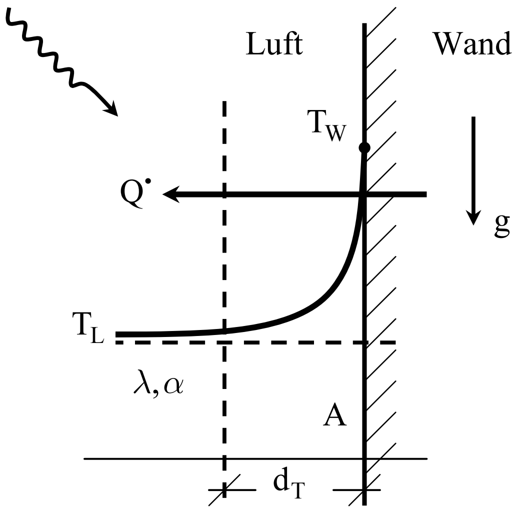
   und $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $C = 0{,}6$, $\mu = 0{,}25$ berechnet werden.

c) Man schätze die Strahlungsleistung der Sonne ab, die bei einem Einfallswinkel $\alpha = 45°C$ auf die Wand einfällt.

Lösung A 13

Freie Konvektion , Grashofzahl
Wärmeübergang von Hauswand (Sonne) auf umgebende Luft

a)



$$A = h \cdot L = 12\text{m} \cdot 20\text{m} = 240\text{m}^2$$

$$T_L = 20°\text{C}$$

$$T_W = 40°\text{C}$$

$$\lambda_L = 0{,}02\,\text{W/Km}$$

$$\Pr\left(\text{Luft}, 20°\text{C}\right) = 0{,}72$$

b) Wie groß ist $Q^\bullet = ?$

$$Q^\bullet = \alpha \cdot A \cdot \left(T_W - T_L\right)$$

$$\alpha = \text{Nu} \cdot \frac{\lambda_{\text{Luft}}}{d_T}$$

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{C}\left(\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Gr}\right)^{\mu}$$

Berechnung der Grashofzahl Gr

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta\Delta T\ell^3}{\nu^2}$$

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$$

Luft (1bar, 298K)....ideales Gas

1kg : $\quad P\cdot V = R\cdot T, \qquad R = \frac{\mathbb{R}}{M}, \qquad M = 29\,\mathrm{g/mol}$

$$\left.\frac{\partial}{\partial T}\right| \quad V = \frac{R\cdot T}{P}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{P} = \frac{V}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{293}\mathrm{K}^{-1} = 3{,}4\cdot 10^{-3}\mathrm{K}^{-1}$$

$$\Delta T = T_W - T_L = 20\mathrm{K}$$

ℓ ....charakteristische Länge des System

$\ell = d_T \simeq 0{,}1\mathrm{m}$ physikalischer Schätzwert

$\eta_{\mathrm{Luft}} = 17\,\mu\,\mathrm{Pas}$, $\qquad \rho_{\mathrm{Luft}} = 1{,}3\,\mathrm{kg/m^3}$, $\qquad 1\mathrm{Pas} = 1\,\mathrm{kg/ms}$

$$\nu_{\mathrm{Luft}} = \frac{\eta_{\mathrm{Luft}}}{\rho_{\mathrm{Luft}}} = \frac{17\mu\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}\cdot 1{,}3\mathrm{kg}}\mathrm{m^3} = 13\mu\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}}$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta\Delta T\ell^3}{\nu^2} = \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\cdot 3{,}4\cdot 10^{-3}\frac{1}{\mathrm{K}}\cdot 20\mathrm{K}\cdot 10^{-3}\mathrm{m^3}}{13\cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{m^4}}{\mathrm{s^2}}} \cong 51\cdot 10^{6} \gg 1$$

$$Nu = 0{,}6\left(Pr \cdot Gr\right)^{1/4}$$

$$Nu = 0{,}6\left(0{,}72 \cdot 51 \cdot 10^{6}\right)^{1/4}$$

$$Nu = 46{,}71$$

$$\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda_{Luft}}{d_T} = 46{,}71 \cdot \frac{0{,}02\,W/Km}{0{,}1m} = 9{,}34\,W/Km^2$$

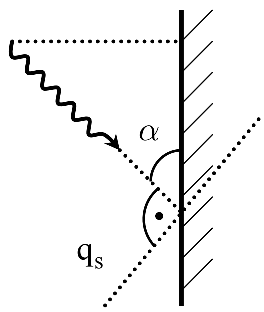
$$\dot{Q} = 9{,}34\,\frac{W}{Km^2} \cdot 240m^2 \cdot \left(40-20\right)K$$

$$\underline{\underline{\dot{Q} = 44{,}8kW}}$$

c) Vergleich mit eingestrahlter Sonnenenergie :

$$\dot{Q}_s = q_s \cdot A \cdot \sin\alpha$$

$q_s \cong 1kW/m^2$ ....Rom!



Schätzwert: $\alpha = 45°$

$$\dot{Q}_s = 1\frac{kW}{m^2} \cdot 240m^2 \cdot 0{,}71$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}_s = 170kW}} \quad > \dot{Q}$$

Differenz : Absorption in Mauer!

Aufgabe A14

Warmbundtransportanlage, SIEMAG Luftkühlung von Stahlbunden (Coils)

In einer Warmbundtransportanlage für hohlzylindrische Stahlbunde (Coils) sollen diese von einer Anfangstemperatur $T_{C,0} = 800°C$ auf $T_{C,1} = 600°C$ durch Luft der Eintrittstemperatur $T_{L,0} = 30°C$ im Gegenstrom gekühlt werden. Die Coils wandern mit einer Geschwindigkeit $v = 5\,cm/s$ durch Anlage deren Länge $L = 75m$ beträgt, vgl. Figur1 und Erläuterungen in der Vorlesung.

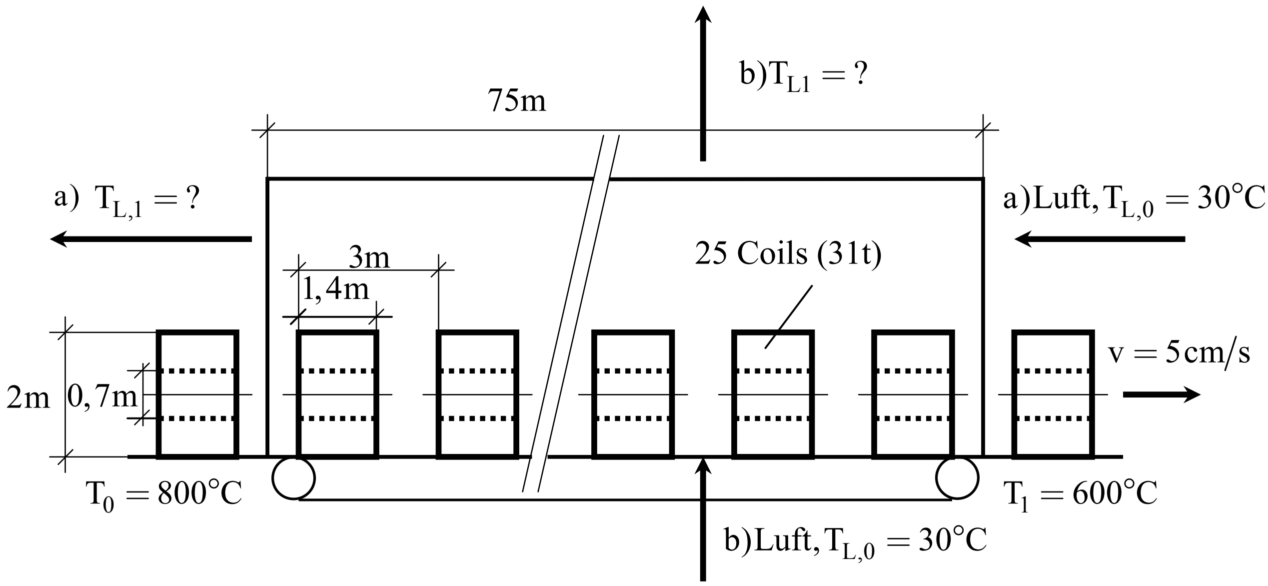


Fig.1: Warmbundtransportanlage, SIEMAG Transplan, Netphen

Baujahr: 1985 Standort: AUS

Ein einzelner Stahlbund hat die Maße:

Innendurchmesser $d_i = 0,7m$, Außendurchmesser $d_a = 2m$, Höhe $h = 1,4m$, Abstand auf Förderband 3m, Dichte des Stahls $\rho_{St} = 8\,t/m^3$, Wärmekapazität $C_{St} = 0,84\,kj/kgK$

a) Welche Energie muss aus einem einzelnen Bund abgeführt werden, wenn er von $T_{C,0} = 800°C$ auf $T_{C,1} = 600°C$ abgekühlt werden soll?

b) Man entwickle 2 Gleichungen, aus denen die Austrittstemperaturen der Luft($T_{L,1}$)und der Stahlbunde ($T_{C,1}$) berechnet werden können.

Dazu betrachte man die Anlage als Gegenstrom-Wärmetauscher mit linearen Temperaturprofil, d.h. linearen Anstieg der Lufttemperatur und Abfall der Oberflächentemperatur der Stahlbunde.

c) Wie groß sind $T_{L,1}$ und $T_{C,1}$ wenn bei einer Eintrittsgeschwindigkeit der Luft $w = 20\,m/s$ der mittlere Wert des Wärmeübergangskoeffizienten Stahlbund-Luft $\overline{\alpha} = 40\,w/Km^2$ beträgt?

Diskutiere das Ergebnis!

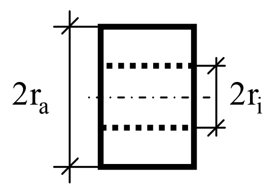
1. Warmbundtransportanlage, Basisdaten

Kanallänge	$L = 75\text{m}$
Querschnitt	$A_k = 13,9\text{m}^2$
Freier Querschnitt	$A_f = 9\text{m}^2$
Bundzahl im Kanal	$n_C = 25\ \text{Stk}$
Bundfrequenz	$\dot{n}_C = (1/60)\ \text{s}^{-1}$
Transportgeschwindigkeit	$v_C = 5\ \text{cm/s}$
Durchlaufzeit eines Bundes	$t_C = 25\ \text{Minuten}$
Bundtemperatur bei Übergabe von Haspel	$T_0 = 800°\text{C}$
Kühlluft, Anfangstemperatur (Australien)	$T_{L,0} = 30°\text{C}$

2. Stahlbund/Basisdaten

Repräsentativer Stahlbund

Hohlzylinder



Masse	$m = 31\,\text{t}$
Höhe	$h = 1,4\,\text{m}$
Außendurchmesser	$d_a = 2,095\,\text{m}$
Innendurchmesser	$d_i = 0,700\,\text{m}$
Oberfläche	$A = 18,4\ \text{m}^2$
Dichte	$\rho = 8\ \text{t/m}^3$
Spezifische Wärme (700°C)	$c = 0,84\ \text{kJ/kgK}$
Wärmeleitfähigkeit (Mittelwert)	$\lambda = 60\ \text{W/mK}$
Emissionskoeffizient	$\varepsilon = 0,8$

Lösung A14

Abkühlen von Stahlbunden (Coils)

Umgebungsluft, Strahlung

Warmbundtransportanlage (SIEMAG)

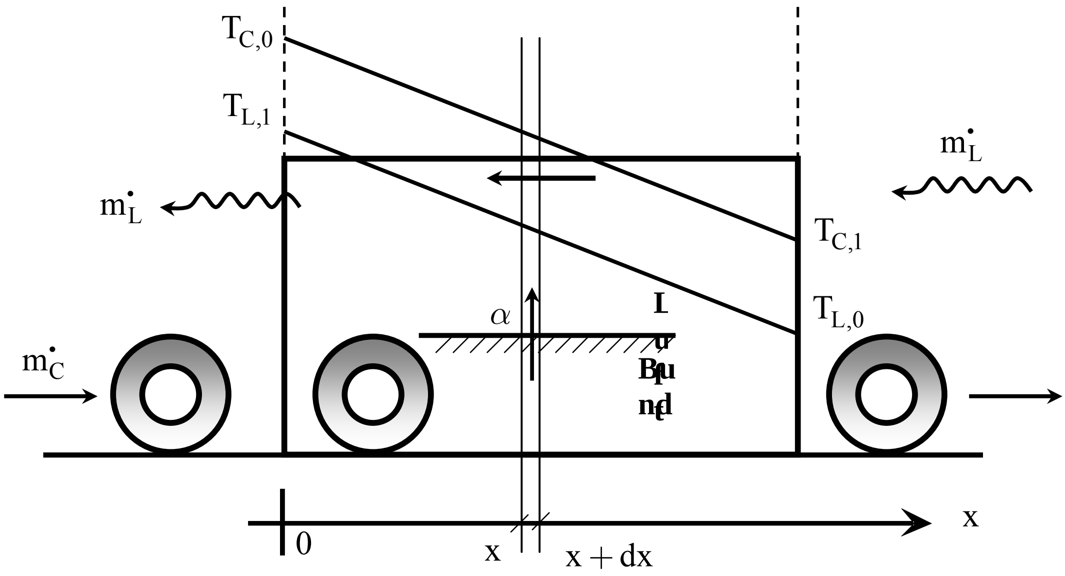
a. Abzuführende Wärme pro Bund

$$Q_0 = m_C \cdot C_{St} \cdot (T_0 - T_1)$$

$$Q_0 = 31 \cdot 10^3 \text{kg} \cdot 0{,}84 \frac{\text{kj}}{\text{kgK}} (800 - 600) \text{K}$$

$$\underline{\underline{Q_0 = 5{,}2 \,\text{GJ/Bund}}}$$

b. Berechnung Endtemperaturen des Bundes und der Luft nach Austritt aus Anlage
$\rightarrow$ Gegenstrom – <u>Wärmetauscher</u>



$$d\dot{Q}_{C\rightarrow L} = \alpha \cdot dA \cdot (T_C(x) - T_L(x)) \qquad (1)$$

Austauschfläche Bund – Luft

$$dA = b \cdot dx \tag{1A}$$

b …. Fiktive Breite

$$A = b \cdot L = n \cdot A_C \cdot r \tag{1B}$$

N … Anzahl Stahlbunde in Anlage

$r = \frac{2}{3}$ … Reduktionsfaktor Bund – Anordnung, Transportbund

<u>Temperaturverlauf in der Anlage</u>:

<u>Stahlbünde</u> $\frac{T_C(x) - T_{C,1}}{L - x} = \frac{T_{C,0} - T_{C,1}}{L}$

$$T_C(x) = T_{C,1} + \frac{L - x}{L}\left(T_{C,0} - T_{C,1}\right) \tag{2C}$$

<u>Luft</u> $\frac{T_L(x) - T_{L,0}}{L - x} = \frac{T_{L,1} - T_{L,0}}{L}$

$$T_L(x) = T_{L,0} + \frac{L - x}{L}\left(T_{L,1} - T_{L,0}\right) \tag{2L}$$

(1,2C,2L,1A):

$$Q^{\bullet} = \alpha \cdot b \int_0^L \left[T_{C,1} + \left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(T_{C,0} - T_{C,1}\right) - T_{L,0} - \left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(T_{L,1} - T_{L,0}\right)\right] \cdot dx \tag{1B}$$

$$\underline{Q^{\bullet} = \alpha \cdot r \cdot n \cdot A_C \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[T_{C,0} + T_{C,1} - T_{L,0} - T_{L,1}\right]} \tag{3}$$

Oberfläche Bund:

$$A_C = 2\pi\left(r_a^2 - r_i^2\right) + 2\pi\left(r_a - r_i\right)h$$

$$\left(A_C/m^2\right) = 2\pi\left(1{,}05^2 - 0{,}38^2\right) + 2\pi\left(1{,}05 + 0{,}38\right)\cdot 1{,}373$$

$$A_C = 18.35\,m^2$$

$$A_{eff} = r \cdot A_C \simeq 12\,m^2 \tag{4}$$

<u>Energiesatz</u>

<u>Energiebilanz des “Wärmetauschers“</u>:

$$\dot{Q} = \dot{m}_C \underbrace{\left(h_{C,0} - h_{C,1}\right)}_{C_C\left(T_{C,0} - T_{C,1}\right)} = \dot{m}_L \underbrace{\left(h_{L,1} - h_{L,0}\right)}_{C_{pL}\left(T_{L,1} - T_{L,0}\right)} \tag{5}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\gamma T_{C,1} + T_{L,1} = \gamma T_{C,0} + T_{L,0}} \tag{5A}$$

$$\gamma = \frac{\dot{m}_C \cdot C_C}{\dot{m}_L \cdot C_{pL}}$$

$$\dot{m}_L = \rho_L \cdot \underbrace{A_f}_{\text{Freier Kanal - Querschnitt}} \cdot w_L \tag{6L}$$

$$\dot{m}_C = m_{Coil} \cdot \underbrace{\dot{n}_C}_{\text{Beschickungsrate der Anlage mit Bunden}} \tag{6C}$$

!(3,5) $$\underline{(1+\delta)T_{C,1} - T_{L,1} = (\delta - 1)T_{C,0} + T_{L,0}} \tag{7}$$

$$\delta = \frac{2\dot{m}_C \cdot C_C}{\alpha \cdot r \cdot n \cdot A_C} \tag{8}$$

Berechnung der unbekannten Austrittstemperaturen ($T_{C,1}$, $T_{L,1}$)

aus <u>linearen</u> Gleichungen (5A , 7):

$$T_{C,1} = \frac{2T_{L,0} + (\gamma + \delta - 1)T_{C,0}}{1 + \delta + \gamma} \tag{9}$$

$$T_{L,1} = \frac{2\gamma T_{C,0} + (1 - \gamma + \delta)T_{L,0}}{1 + \delta + \gamma} \tag{10}$$

Berechnung WÜ – Koeffizient nach Colburn (1) und Gnielinski (2)
Anlage.

Strahlungskühlung:
Durchlaufzeit: 25 Minuten, $\Delta T_{St} \cong 17°C$

Der Wärmeübergangskoeffizient Stahl – Luft

ist näherungsweise nach zwei voneinander unabhängigen Verfahren bestimmt worden:

1. Methode nach Colburn

Luft (100°C, 1bar) $\quad w = (20 - 100)\,\mathrm{m/s}$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{\ell}\mathrm{Nu}\,,$$

Nusselt-Zahl $\quad \mathrm{Nu} = 0{,}036 \cdot \mathrm{Re}^{0{,}8} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3}\,,$

Reynolds-Zahl $\quad \mathrm{Re} = \frac{w\ell}{\nu}\,,$

Prandtl-Zahl $\quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} = 0{,}77\,,$

Temperaturleitfähigkeit $\quad a = \frac{\lambda}{C_p \cdot \rho} = 0{,}3\,\mathrm{cm^2/s}\,,$

Kinematische Viskosität $\quad \nu = \frac{\eta}{\rho} = 0{,}23\,\mathrm{cm^2/s}$ (100°C).

Charaktersitische Länge $\quad \ell = \sqrt{A_f} = 3\mathrm{m}$

2. Methode nach Gnielinski

$$\alpha_2 = \frac{\lambda}{\ell} \mathrm{Nu},$$

$$\mathrm{Nu} = \frac{(\xi/8)(\mathrm{Re}-1000)\,\mathrm{Pr}}{1+12,7\sqrt{\xi/8}\left(\mathrm{Pr}^{2/3}-1\right)}\left[1+\left(\frac{\ell}{\mathrm{L}}\right)^{2/3}\right].$$

Druckverlustbeiwert nach Filonenko:

$$\xi = \frac{1}{\left(1,82\log^{10}\mathrm{Re}-1,64\right)^2}.$$

c. Ergebnisse

a) Längsströmung

$\mathrm{L} = 3\mathrm{m}$, $\mathrm{L} = 75\mathrm{m}$, $\overline{\alpha}$ … mittlerer WÜK einschließlich

Turbulenzkorrektur

w [m/s]	α_1 [W/Km²]	α_2 [W/Km²]	$\overline{\alpha}$ [W/Km²]	10^{-6} Re
20	45	30	40	2,6
60	115	85	100	7,8
100	302	180	240	26

Ergebnisse

Luftgeschwindigkeit w [m/s]	$\overline{\alpha}$ [W/Km²]	Endtemperatur Coil $T_{C,1}$ [°C]	Endtemperatur der Luft $T_{L,1}$ [°C]	$T_{S,1} = T - \underbrace{\Delta T_{St}}_{17°C}$ [°C]	Volumenstrom der Luft $\dot{V}$ [m³/s]
20	40	780	78	763	180
60	100	750	81	733	540
100	240	687	84	670	900

Stahlbunde (Coils)

Kühlung: $T_0 = 800°C \rightarrow T_1 = 600°C$, $Q = 5{,}2 GJ$

Strahlungskühlung

$$\dot{Q}_{St} = \sigma_{St} \cdot A_{St} \cdot \varepsilon \cdot \overline{T}^{4}_{Coil} \cdot t_{Coil}$$

t_{Coil}	$T_0 - T_1$ [°C]	$\overline{\dot{Q}}_{St}$ [kW]
12 h	200	125
25 min	17	200

Luftkühlung (Gegenstrom)

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot \left(T_{Coil} - T_{Luft}\right)$$

w_L $[m/s]$	α $[W/Km^2]$	T_1 $[°C]$	$(T_1 - \Delta T_{St})$ $[°C]$	$T_{L,1}$ $[°C]$	$\dot{V}_L$ $[m^3/s]$
20	40	780	763	78	180
60	100	750	733	81	540
100	240	690	673	84	900

Luftkühlung (Querstrom)

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot \left(T_{Coil} - T_{Luft}\right)$$

w_L $[m/s]$	α $[W/Km^2]$	T_1 $[°C]$	$(T_1 - \Delta T_{St})$ $[°C]$	$T_{L,1}$ $[°C]$	$\dot{V}_L$ $[m^3/s]$
20	50	777	760	34	4,000
60	120	744	727	34	12,000
100	320	655	638	35	20,000

Aufgabe A15

Isolierung eines Kühlraums

Eine 12 m² große Außenwand eines Kühlraumes muss erneuert werden. Es ist eine 14 cm dicke Betonwand vorgesehen, die raumseitig mit Polystyrolschaum - Platten isoliert werden soll. Das vorhandene Kühlaggregat ist so ausgelegt, dass der Wärmestrom durch die zu erneuernde Wand nicht größer als 500 W sein darf.

Wie dick muss die Polystyrolschaum - Isolierung mindestens sein, damit einerseits eine Kondensation des in der feuchten Luft enthaltenen Wasserdampfes an beiden Wandoberflächen ausgeschlossen ist und andererseits die zur Verfügung stehende Kühlleistung ausreicht?

Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe des h_{1+x} , x – Diagrammes für feuchte Luft gemäß Anlage (Siehe VL TT2, Prof. Keller)

Folgende Daten sind gegeben:

$\alpha_i = \alpha_a = 6 \;\; \mathrm{W/m^2K}$

$\lambda_B = 1{,}4 \;\; \mathrm{W/mK}$

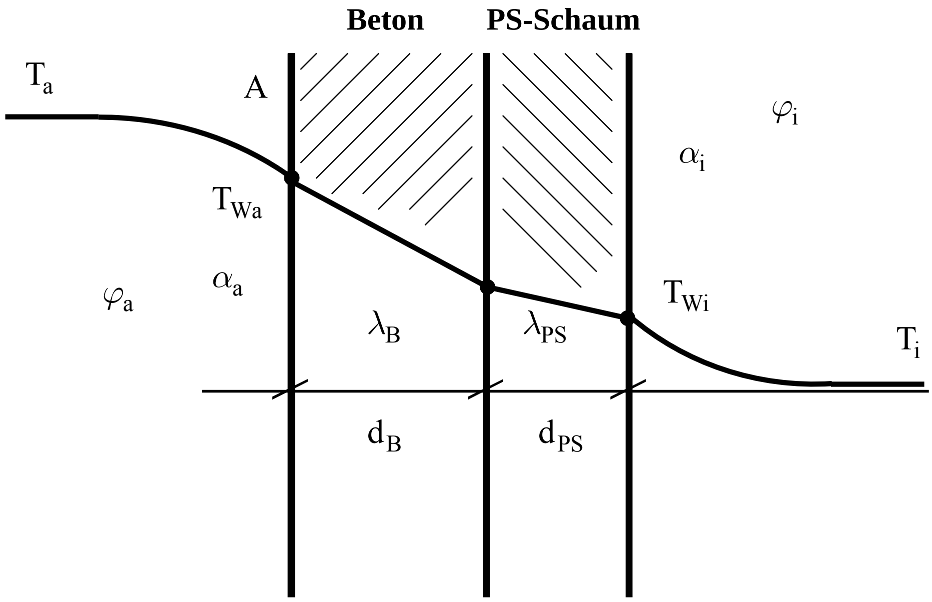
$\lambda_{PS} = 0{,}04 \;\; \mathrm{W/mK}$

$t_i = -15°C$, $\quad t_a = +30°C$

$\varphi_i = 40\%$, $\quad \varphi_a = 70\%$

Lösung A15

Isolierung Kühlraum
Feuchte Luft, Vermeidung von Tau



$A = 12\ m^2\ ,\quad d_B = 14\ cm\ ,\quad d_{PS} = ?$

$$\underline{\dot{Q} = \frac{1}{R}\left(T_a - T_i\right)} \tag{1}$$

$$R = \frac{1}{\alpha_a \cdot A} + \frac{d_B}{\lambda_B \cdot A} + \frac{d_{PS}}{\lambda_{PS} \cdot A} + \frac{1}{\alpha_i \cdot A} \tag{2}$$

$\dot{Q}_0 \leq 500W$

$$(1,2)\quad d_{PS} = \lambda_{PS} \cdot \cancel{A} \cdot \left[\frac{A}{\dot{Q}} (T_a - T_i) - \frac{1}{\alpha_a \cdot \cancel{A}} - \frac{d_B}{\lambda_B \cdot \cancel{A}} - \frac{1}{\alpha_i \cdot \cancel{A}} \right] \quad (3)$$

Wandtemperatur (außen) bei max. Kälteleistung ($\dot{Q}_0$)

$$\dot{Q}_0 = \alpha_a \cdot A \cdot (T_a - T_{Wa})$$

$$T_{Wa} = T_a - \frac{\dot{Q}_0}{\alpha_a \cdot A} = 30°C - \frac{500\,W}{6 \frac{W}{Km^2} \cdot 12\,m^2} = (30 - 7)°C = 23°C$$

Tautemperatur Außenwand für $T_a = 30°C$, $\varphi_a = 70\%$

$\rightarrow$ Diagramm (h_{1+x} - x- Anlage): $T_{S,a} = 24°C$!

Sättigung Außen

$\rightarrow$ Reduktion Kälte – Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{max} = \alpha \cdot A \cdot (T_a - T_{S,a})$$

$$\dot{Q}_{max} = 6 \frac{W}{Km^2} \cdot 12\,m^2 \cdot (30 - 24)\,K = 432\,W \; !$$

Praxis: $\dot{Q} < \dot{Q}_{max}$ vorsehen wegen Taugefahr!

Dicke Polystyrolschicht nach (3) mit $\dot{Q} \rightarrow \dot{Q}_{max}$

$$d_{PS} = 0,04 \frac{W}{Km} \left[\frac{12\,m^2}{432\,W} (30 + 15)\,K - \frac{1}{6W} m^2K - \frac{0,14\,m}{1,4\,W} mK - \frac{1}{6W} m^2K \right]$$

$$\underline{\underline{d_{PS} = 3,27\,cm}}$$

Innenwand-Temperatur:

$$\dot{Q}_{max} = \alpha_i \cdot A \cdot (T_{Wi} - T_i)$$

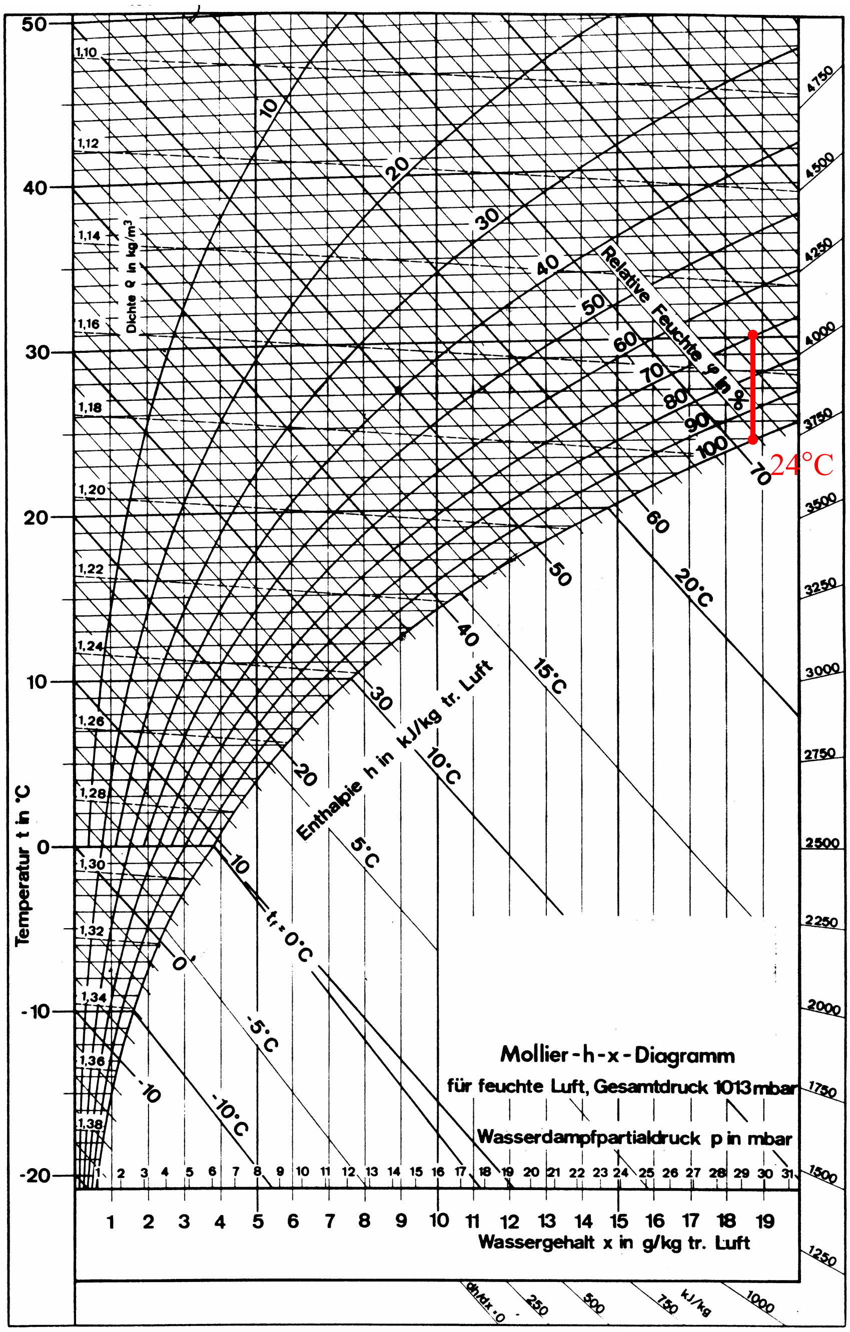
$$T_{Wi} = \frac{\dot{Q}_{max}}{\alpha_i \cdot A} + T_i = \frac{432\,W}{6\,\frac{W}{m^2K} \cdot 12\,m^2} - 15°C = -9°C$$

Wassergehalt: $x = \frac{m_W}{m_L}$,

Relative Feuchte: $\varphi = \frac{\rho_W}{\rho_{WS}(T)} = \frac{x}{x + (M_W / M_L)} \cdot \frac{p}{p_S(T)}$

Sättigung

$$x_S = \frac{p_S(T)}{p - p_S(T)} \cdot \frac{M_W}{M_L}$$



Enthalpie - Wassergehalt - Diagramm Für Feuchte Luft

Wassergehalt :

$$x = \frac{m_W}{m_L}$$

Rel. Feuchte

$$\varphi = \frac{\rho_W}{\rho_{WS}(T)} = \frac{x}{x + (M_W / M_L)} \cdot \frac{p}{p_S(T)}$$

$$x_S = \frac{p_S(T)}{p - p_S(T)} \cdot \frac{M_W}{M_L}$$

Aufgabe A 16

Isolierung Stahlrohr, Thermischer Kontaktwiderstand

Ein Stahlrohr mit Außenradius $r_{St} = 25 \text{ mm}$ ist zunächst mit einer Asbestschicht der Dicke $d_A = 6{,}4 \text{ mm}$ und darüber mit einer $d_{FG} = 25 \text{ mm}$ dicken Fiberglasschicht isoliert, vgl. Figur. Die Außentemperatur des Stahlrohrs beträgt $T_{St} = 350°C$, die Außentemperatur des Fiberglasmantels $T_{FG,a} = 38°C$. Die Wärmeleitfähigkeiten von Asbest und Fiberglas sind $\lambda_A = 0{,}21 \, W/Km$, $\lambda_F = 0{,}048 \, W/Km$. Der Kontaktwiderstand zwischen Asbest und Fiberglas wird durch die thermische Kontaktzahl $\alpha_K = 500 \, W/Km^2$ beschrieben. Die Länge des Rohres beträgt $\ell = 1 \, m$.

a) Wie groß ist der Wärmewiderstand der zusammengesetzten Rohrisolierung Asbest – Fiberglas (R_W) ?

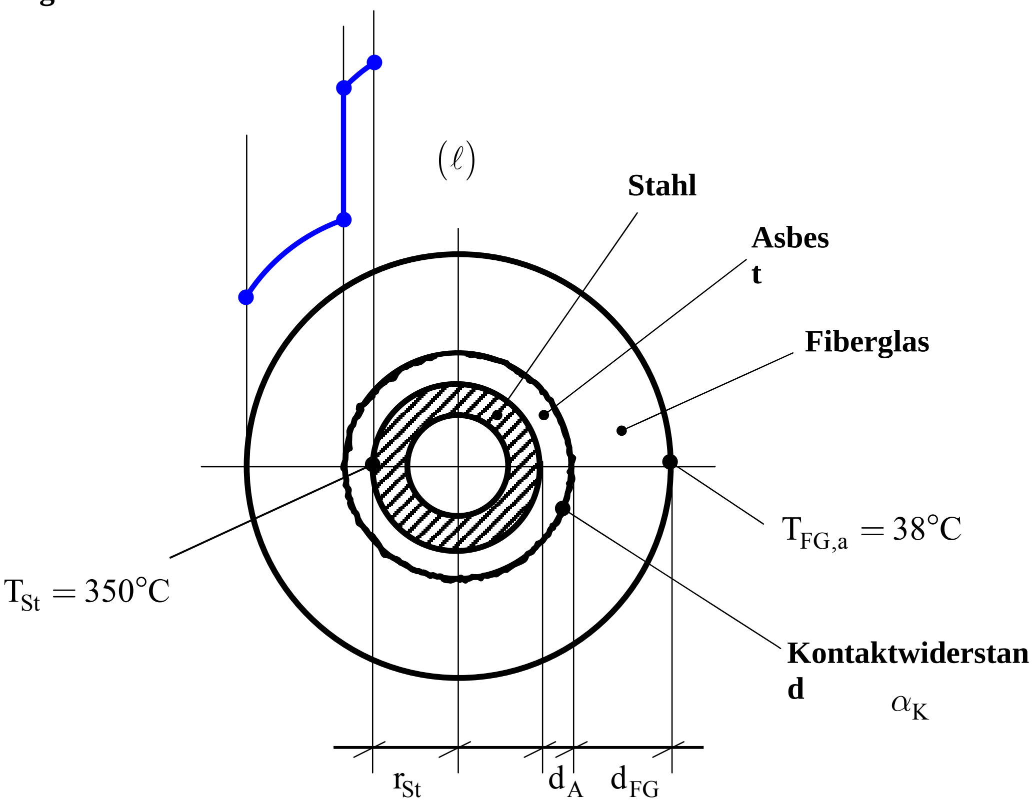
b) Welche Wärme $(\dot{Q})$ gibt das Rohr im stationären Zustand ab ?

c) Wie groß ist die innere Grenztemperatur des Fiberglases ?

d) Welcher Temperatursprung tritt an der Grenzfläche Asbest – Fiberglas auf ?

Hinweis: Der Wärmeübergangswiderstand Stahlrohr – Asbest kann vernachlässigt werden.

Lösung A 16



a) $\dot{Q} = \frac{1}{R_W}\left(T_{St} - T_{FG,a}\right)$

$$R_W = \underbrace{\frac{1}{2\pi r_{St}\ell\alpha_{St,A}}}_{R_{St,A}} + \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{r_{St}+d_A}{r_{St}}\right)}{2\pi\ell\lambda_A}}_{R_A} + \underbrace{\frac{1}{2\pi\left(r_{St}+d_A\right)\ell\alpha_K}}_{R_K} + \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{r_{St}+d_A+d_{FG}}{r_{St}+d_A}\right)}{2\pi\ell\lambda_{FG}}}_{R_{FG}}$$

$R_{St,A}$	R_A	R_K	R_{FG}
↓	↓	↓	↓
WÜ (St-A) = 0 (Vernachlässigen)	WL (A)	WK (A-FG)	WL (FG)

$$R_W = \underbrace{\frac{\ln\left(\dfrac{0,025\text{m}+0,0064\text{m}}{0,025\text{m}}\right)}{2\pi\cdot 1\text{m}\cdot 0,21\dfrac{\text{W}}{\text{Km}}}}_{R_A} + \underbrace{\frac{1}{2\pi\left(0,025\text{m}+0,0064\text{m}\right)\cdot 1\text{m}\cdot 500\dfrac{\text{W}}{\text{Km}^2}}}_{R_K} +$$

$$\underbrace{\frac{\ln\left(\dfrac{0,025\text{m}+0,0064\text{m}+0,025\text{m}}{0,025\text{m}+0,0064\text{m}}\right)}{2\pi\cdot 1\text{m}\cdot 0,048\dfrac{\text{W}}{\text{Km}}}}_{R_{FG}}$$

$$R_W = R_A + R_K + R_{FG}$$

$$R_W = \left(0,1727+0,0101+1,9419\right)\frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$\underline{\underline{R_W = 2,1247\frac{\text{K}}{\text{W}}}}$$

b)

$$\dot{Q} = \frac{1}{R_W}\left(T_{St} - T_{FG,a}\right)$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{2,1247}\frac{\text{W}}{\text{K}}\left(350-38\right)°\text{C}$$

$$\underline{\underline{\dot{Q} = 146,84\,\text{W}}}$$

c) Innere Grenztemperatur Fiberglas:

$$\dot{Q} = \frac{1}{R_{FG}}\left(T_{FG,i} - T_{FG,a}\right) \text{ …………..WL (FG)}$$

$$T_{FG,i} = Q^{\bullet} \cdot R_{FG} + T_{FG,a}$$

$$T_{FG,i} = 146,84 \cdot 1,9419 + 38°C$$

$$\underline{\underline{T_{FG,i} = 323,15°C}}$$

d) Temperatursprung Kontaktfläche Asbest – Fiberglas:

$$Q^{\bullet} = \frac{1}{R_K} \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = R_K \cdot Q^{\bullet}$$

$$\Delta T = 0,0101 \frac{K}{W} \cdot 146,84 W$$

$$\underline{\underline{\Delta T = 1,48°C}}$$

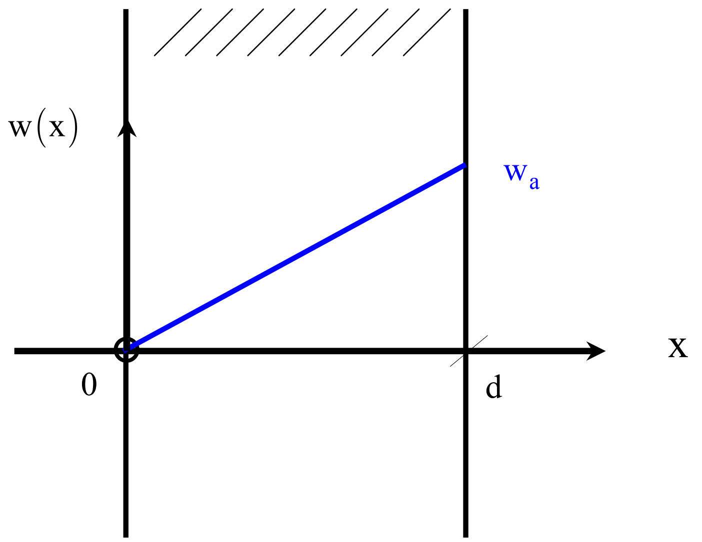
Aufgabe A 17

Wärmeleitung durch feuchte Wand

1. Die Wand eines Hauses ist durchfeuchtet. Der Wassergehalt der Wand in Massenanteilen w ändert sich mit der Mauerdicke (x) gemäß der Beziehung

$$w(x) = w_a \frac{x}{d} \qquad (1)$$

Hierbei ist d die Mauerstärke und W_a der Wassergehalt an der Außenseite der Mauer, vgl. Figur.



Die Wärmeleitfähigkeit der Wand hängt von Wassergehalt gemäß der Gleichung

$$\lambda(x) = \lambda_0 \left(1 + \alpha w(x)\right) \qquad (2)$$

ab. Dabei bedeutet λ_0 die Wärmeleitfähigkeit der trockenen Wand und α eine Konstante, deren numerischer Wert aus der Erfahrungsregel bestimmt werden kann, dass bei Zunahme des Wassergehalts von 1 % Masse die Wärmeleitfähigkeit des feuchtn Mauerwerks um 10 % zunimmt.

a) Man leite aus der Energiegleichung für die Wärmeleitung in der feuchten Wand

$$\rho \partial_t u + \partial_\alpha q_\alpha = p_v \quad (3)$$

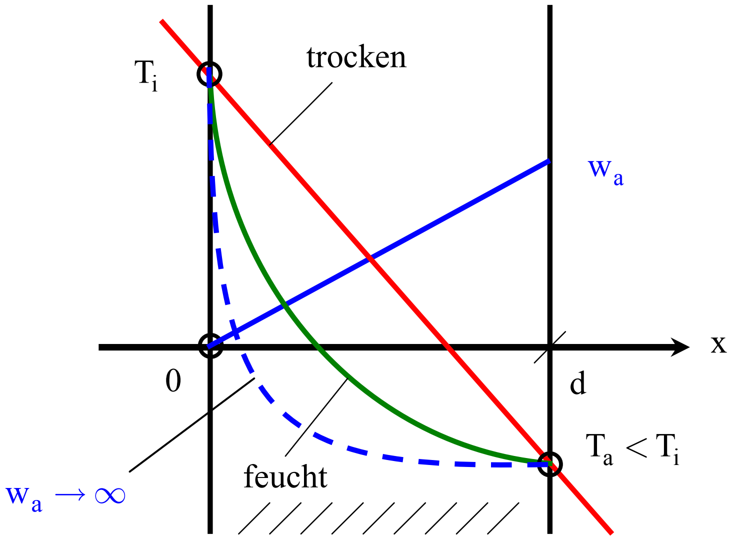
eine Differentialgleichung für das stationäre Temperaturfeld $T = T(x)$ in der Wand ab.

b) Man Integriere die unter (a) bestimmte Temperaturgleichung, d. h. bestimme den Temperaturverlauf $T = T(x)$ in der Wand bei gegebenen Innen – und Außentemperaturen $(T_i > T_a)$.

c) Wie groß ist das Verhältnis der Wärmeströme durch die feuchte bzw. vollkommen trockene Wand $(Q^{\bullet}, Q_0^{\bullet})$ bei gleichen Werten von $(T_i > T_a)$?

Wie groß ist dieses Verhältnis für $w_a = 5\%$?

Lösung A 17



Wassergehalt in Massenprozenten

$$w(x) = w_a \frac{x}{d} = \frac{\rho_{w(x)}}{\rho_0} \qquad (1)$$

Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda(x) = \lambda_0 \left(1 + \alpha w(x)\right) \qquad (2)$$

Erfahrungsregel (α)

$$\Delta w = 1 \ \% \text{ Wasser} \rightarrow \quad \Delta\lambda = 10 \ \%$$

$$\rightarrow \ 1{,}1 \cdot \cancel{\lambda_0} = \cancel{\lambda_0}\left(1 + \alpha \cdot 0{,}01\right)$$

$$\underline{\underline{\alpha = 10}}$$

a)

Energiebilanz

$$\boxed{\rho\partial_t u + \partial_\alpha q_\alpha = p_v} \qquad (3)$$

1. Stationarität $\qquad \partial_t u = 0$
2. Keine Wärmequellen $\qquad p_v = 0$
3. Dimension: 1 $\qquad$ x-Achse
4. Fourier – Ansatz $\qquad q = -\lambda(x)\partial_x T$

einsetzen in (3) $\rightarrow$ $\qquad 0 = \partial_x\left(\lambda(x)\cdot\partial_x T\right) \qquad (4)$

$$(4)\rightarrow \qquad \underline{\lambda(x)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \text{const} = \lambda_0\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} \simeq Q^{\bullet}} \qquad (5)$$

$$(5)\rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda_0(\partial T/\partial x)_{x=0}}{\lambda(x)}} \qquad (5a)$$

b)

$$(5a)\rightarrow \qquad dT = \frac{\lambda_0(\partial T/\partial x)_{x=0}}{\lambda(x)}\cdot dx$$

$$\text{Integration} \rightarrow \qquad \int_{T_i}^{T(x)} dT = \int_0^x \frac{\lambda_0(\partial T/\partial x)_{x=0}}{\lambda(x)}\cdot dx$$

$$T(x) - T_i = \int_0^x \frac{\lambda_0(\partial T/\partial x)_{x=0}}{\lambda(x)}\cdot dx$$

$$T(x)-T_i=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}\int_0^x \frac{\lambda_0}{\lambda(x)}\cdot dx$$

$$(2)\rightarrow\quad T(x)-T_i=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}\int_0^x \frac{\cancel{\lambda_0}}{\cancel{\lambda_0}\left(1+\alpha w(x)\right)}\cdot dx$$

$$(1)\rightarrow\quad T(x)-T_i=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}\int_0^x \frac{dX}{\left(1+\alpha w_a \frac{x}{d}\right)}$$

$$T(x)-T_i=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}\ln\left(1+\alpha w_a \frac{x}{d}\right)\cdot\frac{d}{\alpha w_a} \tag{6}$$

$$x=d:\rightarrow T_a-T_i=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}\ln\left(1+\alpha w_a\right)\cdot\frac{d}{\alpha w_a} \tag{6a}$$

$$(6a)\rightarrow\quad \underline{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0,\lambda=\lambda_0}=\frac{T_a-T_i}{d}\cdot\frac{\alpha w_a}{\ln\left(1+\alpha w_a\right)}>\frac{T_a-T_i}{d}} \tag{7}$$

$$(6,7)\rightarrow\quad T(x)-T_i=\frac{T_a-T_i}{\cancel{d}}\cdot\frac{\cancel{\alpha w_a}}{\ln\left(1+\alpha w_a\right)}\cdot\ln\left(1+\alpha w_a\frac{x}{d}\right)\cdot\frac{\cancel{d}}{\cancel{\alpha w_a}}$$

$$\boxed{T(x)-T_i=\left(T_a-T_i\right)\cdot\frac{\ln\left(1+\alpha w_a\frac{x}{d}\right)}{\ln\left(1+\alpha w_a\right)}} \tag{8}$$

c) Wärmeströme:

Feuchte Wand

$$\dot{Q} = A\lambda(x)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \text{const}$$

$$(5) \rightarrow \qquad \dot{Q} = A\lambda_0 \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}$$

$$(7) \rightarrow \qquad \dot{Q} = A\lambda_0 \frac{T_a - T_i}{d} \cdot \frac{\alpha w_a}{\ln(1+\alpha w_a)} \qquad (9)$$

Trockene Wand

$$\dot{Q}_0 = A\lambda_0 \frac{T_a - T_i}{d} \qquad (10)$$

$$(9,10) \qquad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_0} = \frac{\cancel{A\lambda_0 \frac{T_a - T_i}{d}} \cdot \frac{\alpha w_a}{\ln(1+\alpha w_a)}}{\cancel{A\lambda_0 \frac{T_a - T_i}{d}}}$$

$$\boxed{\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_0} = \frac{\alpha w_a}{\ln(1+\alpha w_a)}}$$

Wenn $\quad w_a = 5\% \ , \alpha = 10 \rightarrow$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_0} = \frac{10 \cdot 0,05}{\ln(1+10 \cdot 0,05)}$$

$$\underline{\underline{\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_0} = 1,23}}$$

Aufgabe A 18 a

Abkühlung einer erstarrenden Betonwand

Beim Erstarren von frisch gegossenem Beton tritt durch chemische Vernetzungsreaktionen in den Silikatverbindungen Reaktionswärme auf, die näherungsweise als zeitlich konstante homogen im Beton verteilte Wärmequellen der Stärke $p_v = 267\,\mathrm{W/m^3}$ beschrieben werden kann.

a) Man berechne den stationären Temperaturverlauf $T = T(x)$ in einer $d = 60\,\mathrm{cm}$ dicken Betonwand mit den inneren Wärmequellen (p_v), die sich in einer Umgebung der konstanten Außentemperatur $T_a = 10°\mathrm{C}$ befindet.

b) Wie groß ist der Unterschied zwischen der Temperatur in der Mitte der Mauer $T(x=0)$ und der Temperatur an der Mauerwand $T(x = d/2)$?

c) Welche Wärme gibt die Wand pro m^2 Oberfläche an ihre Umgebung ab?

Hinweis: Man integriere die eindimensionale stationäre Temperaturleitungsgleichung

$$\lambda \partial_x^2 T(x) + p_v = 0$$

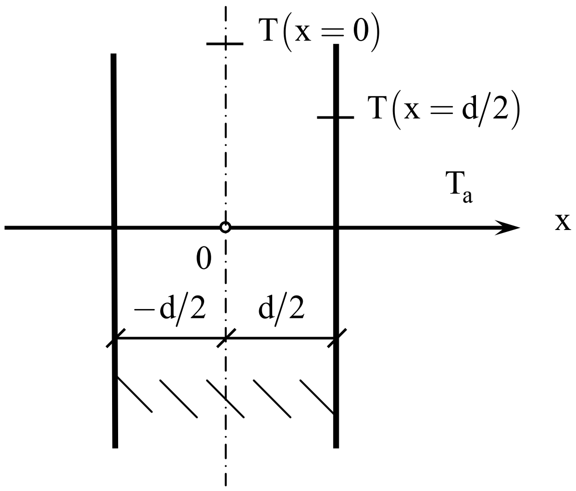
und bestimme die Integrationskonstanten aus der Symmetriebedingung $\partial_x T(x=0) = 0$ und dem Fourier - Gesetz für den Wärmeübergang Wandoberfläche – Umgebung (α), siehe Figur.

Stoffdaten

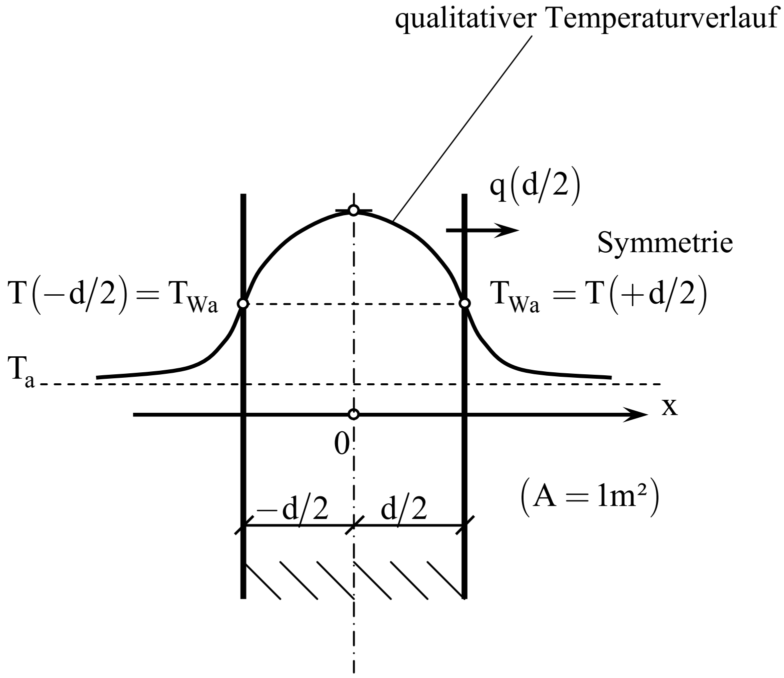
$\lambda_{\mathrm{Beton}} = 4\,\mathrm{W/Km}$

$\alpha = 10\,\mathrm{W/Km^2}$

$A = 1\mathrm{m}^2$



Lösung A 18a



a) Allg. Temperaturleitungsgleichung

$$\boxed{\rho c \partial_t T = \partial_\alpha \left(\lambda \partial_\alpha T \right) + p_v} \qquad (1)$$

- Anfangs – und Randbedienungen

1) Stationarität : $\partial_t T = 0$

(1) $\rightarrow$ $$0 = \partial_\alpha \left(\lambda \partial_\alpha T \right) + p_v \qquad (2)$$

3) Große Wand $\rightarrow D = 1$ x-Achse

(2) $\rightarrow$ $$0 = \partial_x \left(\lambda \partial_x T \right) + p_v \qquad (3)$$

2) Stoffdaten konstant (ρ, c, λ, p_v)

(3) $\rightarrow$ $$\underline{0 = \lambda \partial_x^2 T + p_v} \text{ ......} \qquad (4)$$

$$\partial_x^2 T = \frac{-p_v}{\lambda}$$

$$\partial_x T = \frac{-p_v}{\lambda} x + C_1 \qquad (5)$$

$$T(x) = \frac{-p_v}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (6)$$

- Nebenbedingungen:

1) Symmetrie um $x = 0$, $\left(T(0) \neq 0,\ (\partial_x T)_0 = 0\right)$ keine punktförmigen Wärmequellen

(5) $\rightarrow$ $$\underline{\partial_x T(0) = C_1 = 0}$$

2) Wärmeabfluss an die Umgebung

$$q(\pm d/2) = \alpha\left(T(\pm d/2) - T_a\right)$$

$$q(\pm d/2) = \alpha\left(T_{Wa} - T_a\right) \qquad (7)$$

Fourier Gesetz $q(x) = -\lambda \partial_x T$

(5) $\rightarrow$ $$q(x) = -\cancel{\lambda} \frac{-p_v}{\cancel{\lambda}} x$$

$$q(x) = p_v x$$

$$q(d/2) = p_v \frac{d}{2} \qquad (8)$$

$$(7{,}8) \rightarrow \qquad p_v \frac{d}{2} = \alpha\left(T_{Wa} - T_a\right)$$

$$T_{Wa} - T_a = \frac{p_v d}{2\alpha}$$

$$\boxed{T_{Wa} = T_a + \frac{p_v d}{2\alpha}} \qquad (9)$$

Bestimmung C_2

$$(6) \rightarrow \qquad T(\mp d/2) = T_{Wa} = \frac{-p_v}{2\lambda}\frac{d^2}{4} + C_2$$

$$\rightarrow \qquad C_2 = T_{Wa} + \frac{p_v}{2\lambda}\frac{d^2}{4}$$

$$\underline{C_2 = T_{Wa} + \frac{p_v d^2}{8\lambda}}$$

Einsetzen in (6)

$$\rightarrow T(x) = \frac{-p_v}{2\lambda}x^2 + T_{Wa} + \frac{p_v d^2}{8\lambda}$$

$$(9) \rightarrow \boxed{T(x) = \underbrace{T_a + \frac{p_v d}{2\alpha}}_{T_{Wa}} + \frac{p_v}{2\lambda}\underbrace{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2\right)}_{\text{Parabel 2. Ordnung}}} \qquad (10)$$

b) Der Unterschied zwischen der Temperatur in der Mitte der Mauer $T(x=0)$ und der Temperatur an der Mauerwand $T(x=d/2)$

(10) $\rightarrow$ $$T(0)-T_{Wa}=T(0)-T(d/2)=\frac{p_v}{2\lambda}\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$T(0)-T(d/2)=\frac{267\,W/m^3}{2\cdot 4\,W/Km}\left(\frac{0,6m}{2}\right)^2$$

$$\underline{\underline{T(0)-T(d/2)=3°C}}$$

c) Wärmeabfluss an die Umgebung

(8) $\rightarrow$ $$q(d/2)=267\frac{W}{m^3}\frac{0,6m}{2}$$

$$q(d/2)=80,1\,W/m^2$$

Aufgabe A 18 b

Temperaturverteilung im zylindrischen Ohmschen Widerstand

Ein Kupferstab (Radius $r_0 = 1\text{cm}$, Länge $\ell = 6\text{m}$) besitzt den Ohmschen Widerstand $R = 10^3\,\Omega$ und wird von Wechselstrom der Amplitude $I_{eo} = 50\text{A}$ durchflossen. Die Ohmsche Wärme werde stationär und gleichmäßig überall im Stab erzeugt $\left(P_v = P/V = \text{const} = 0{,}66\,\text{MW/m}^3\right)$.

a) Man berechne den stationären Temperaturverlauf $T = T(r)$ in Abhängigkeit vom Radius r im Stab durch Integration der stationären Temperaturleitungsgleichung

$$\lambda \Delta T + p_v = 0$$

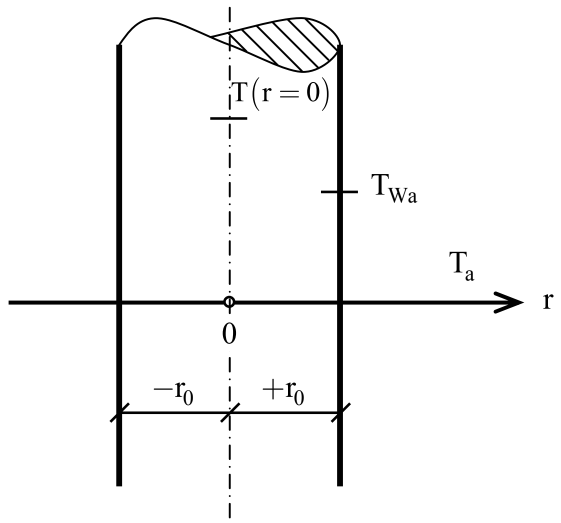
in Zylinderkoordinaten (r, φ, z).

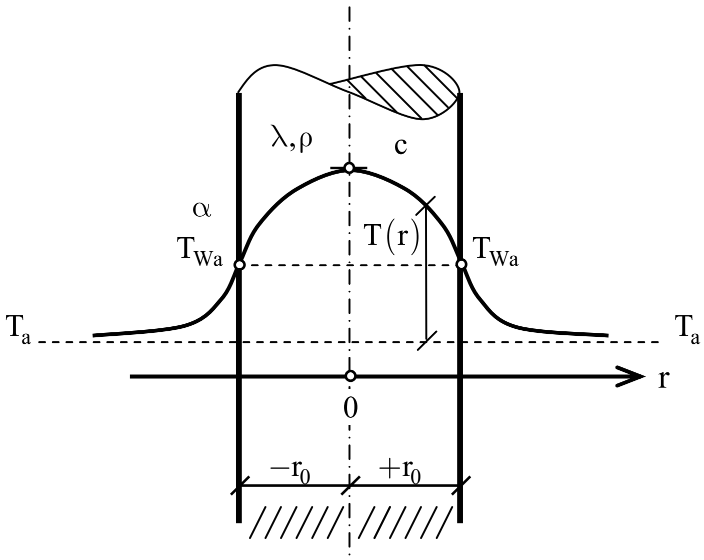
b) Die Stromwärme wird an der Oberfläche des Stabes (α) an die Umgebung der Temperatur $T_a = 120°\text{C}$ abgegeben. Wie groß ist der Unterschied zwischen der Oberflächentemperatur $T_{Wa} = T(r = r_0)$ des Stabes und der Umgebungstemperatur T_a?

Stoffdaten: $\lambda_{Cu} = 370\,\text{W/Km}$, $\alpha = 50\,\text{W/Km}^2$.

c) Wie groß ist die Temperatur $T(r = 0)$ auf der Achse des Stabes?

Hinweis: Man bestimme die Integrationskonstanten aus der Symmetriebedingung $\partial_r T_r(r=0) = 0$ und dem Fourier – Gesetz für den Wärmeübergang Zylinderoberfläche/Umgebung.





a) Wärmeleitung im Zylinderstab mit homogenen Wärmequellen (Ohm)

Wärmebilanz $\rightarrow$ Temperaturleitungsgleichung

$$\rho c \partial_t T = \partial_\alpha \left(\lambda \partial_\alpha T\right) + p_v \qquad (1)$$

Anfangs + Randbedingungen

1) Stationarität : $\partial_t T = 0$

2) Stoffdaten konstant (ρ, c, λ, p_v)

3) Zylindersymmetrie, (Stab unendlich lang)

$\rightarrow \; T = T\left(r, \cancel{\varphi}, \cancel{z}\right)$

$$(1) \qquad \underline{0 = \lambda\left(\partial_r^2 T + \frac{1}{r}\partial_r T\right) + p_v} \quad \Big| \cdot \frac{r}{\lambda} \qquad (1a)$$

$$0 = \underbrace{r\partial_r^2 T + \partial_r T}_{=\partial_r\left(r\partial_r T\right)} + \frac{p_v}{\lambda} r \qquad (1b)$$

$$0 = \partial_r \left(r\partial_r T\right) + \frac{p_v}{\lambda} r$$

$$\partial_r\left(r\partial_r T\right) = -\frac{p_v}{\lambda} r$$

Integration

$$r\partial_r T = -\frac{p_v}{2\lambda} r^2 + C_1 \qquad (2) \quad \left| \cdot \frac{1}{r} \right.$$

$$\partial_r T = -\frac{p_v}{2\lambda} r + \frac{C_1}{r} \qquad (3)$$

$$\underline{T(r) = -\frac{p_v}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2} \qquad (4)$$

Nebenbedingungen

1) Zylindersymmetrie, Achse: kein Wärmestrom

$$\left(\partial_r T(r)\right)_{r=0} = 0$$

$$\Rightarrow \; (2) \qquad C_1 = 0 \qquad (5)$$

$$(4{,}5) \rightarrow \qquad T(r_0) = -\frac{p_v}{4\lambda} r_0^2 + C_2$$

$$\Rightarrow \qquad C_2 = T(r_0) + \frac{p_v}{4\lambda} r_0^2 = T_{Wa} + \frac{p_v}{4\lambda} r_0^2 \quad (6)$$

2) Wärmeübergang Zylinder-Umgebung (Luft)

$$q(r_0) = \alpha\left(T_{Wa} - Ta\right) \qquad (7)$$

Wärmestromdichte

$$q(r) = -\lambda \partial_r T$$

$$(3) \rightarrow \qquad q(r) = -\lambda\left(-\frac{p_v}{2\lambda} r\right)$$

$$q(r) = \frac{p_v}{2} r \qquad (8)$$

$$(7,8) \rightarrow \quad q(r_0) = \frac{p_v}{2} r_0 = \alpha\left(T_{Wa} - Ta\right)$$

$$\Rightarrow T_{Wa} - Ta = \frac{p_v}{2\alpha} r_0 \qquad (9)$$

$$\underline{T_{Wa} = Ta + \frac{p_v}{2\alpha} r_0} \qquad (10)$$

$$(6,10) \rightarrow \qquad C_2 = Ta + \frac{p_v}{2\alpha} r_0 + \frac{p_v}{4\lambda} r_0^2 \qquad (11)$$

$$(4,5,11) \rightarrow T(r) = -\frac{p_v}{4\lambda} r^2 + Ta + \frac{p_v}{2\alpha} r_0 + \frac{p_v}{4\lambda} r_0^2$$

$$T(r) = Ta + \frac{p_v}{2\alpha} r_0 + \frac{p_v}{4\lambda} r_0^2 - \frac{p_v}{4\lambda} r^2$$

$$\boxed{T(r) = \underbrace{Ta + \frac{p_v}{2\alpha} r_0}_{T_{Wa}} + \frac{p_v}{4\lambda} \underbrace{\left(r_0^2 - r^2\right)}_{\substack{\text{Parabel} \\ \text{2.Ordnung}}}} \qquad (12)$$

b) Unterschied zwischen der Oberflächentemperatur $T_{Wa} = T(r = r_0)$ des Stabes und der Umgebungstemperatur T_a

$$(9) \rightarrow T_{Wa} - Ta = \frac{p_v}{2\alpha} r_0$$

$$T_{Wa} - Ta = \frac{0,66 \cdot 10^6 \cancel{W} / \cancel{m^3}}{250 \cancel{W} / K \cancel{m^2}} 0,01 \cancel{m}$$

$$\underline{\underline{T_{Wa} - Ta = 26,4°C}}$$

c) die Temperatur $T(r=0)$ auf der Achse des Stabes

$$(12) \rightarrow T(r=0) = \underbrace{Ta + \frac{p_v}{2\alpha} r_0}_{T_{Wa}} + \frac{p_v}{4\lambda} r_0^2$$

$$T(r=0) = \underbrace{Ta + \frac{p_v}{2\alpha} r_0}_{T_{Wa}} + \frac{p_v}{4\lambda} r_0^2$$

$$(10) \rightarrow \qquad T_{Wa} = 120°C + \frac{0{,}66 \cdot 10^6 \cancel{W}/\cancel{m^3}}{2 \cdot 50 \cancel{W}/K \cancel{m^2}} 0{,}01 \cancel{m}$$

$$\underline{T_{Wa} = 186°C}$$

$$T(r=0) = T_{Wa} + \frac{p_v}{4\lambda} r_0^2$$

$$T(r=0) = 186°C + \frac{0{,}66 \cdot 10^6 \cancel{W}/\cancel{m^3}}{4 \cdot 370 \cancel{W}/K \cancel{m}} (0{,}01)^2 \cancel{m^2}$$

$$\underline{\underline{T(r=0) = T_{Wa} + 0{,}044K}}$$

Aufgabe A 19

Wärmeabgabe von berippten Blechen

Auf einem beheizten quadratischen Stahlblech der Seitenlänge $\ell = 1\text{m}$ sollen zur Verbesserung der Wärmeabgabe an die Umgebung parallel zu einer Seitenkante Rippen (Höhe $H = 40\text{cm}$, Dicke $d_R = 1\text{mm}$, Länge $\ell_R = 1\text{m}$) angeschweißt werden. Die Wärmeleitfähigkeit des Stahlbleches beträgt $\lambda = 20\,\text{W/mK}$

Die Oberflächentemperatur des Basisbleches und aller Rippen sei konstant $T_0 = 120°\text{C}$.

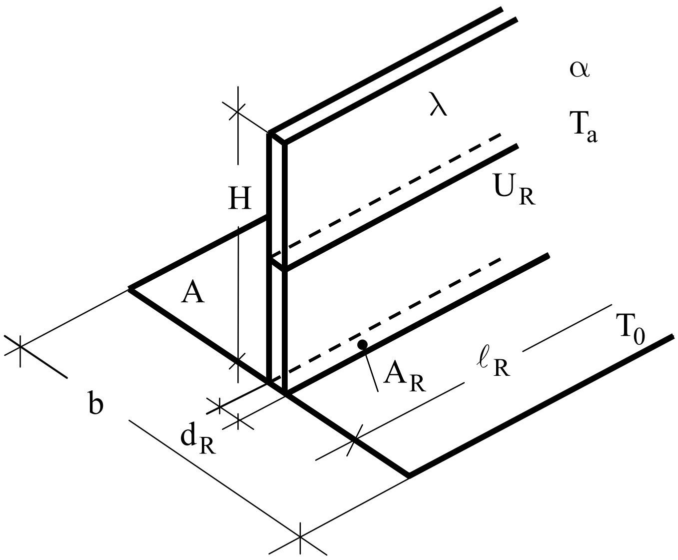
Die Temperatur der umgebenden Luft ist $T_a = 20°\text{C}$.

a) Welche Wärme $\left(\dot{Q}_A\right)$ wird von unberipptem Blech abgegeben, wenn der Wärmeübergangskoeffizient $\alpha = 100\,\text{W/Km}^2$ beträgt?

b) Wie viele Rippen obiger Art müssen auf das Blech geschweißt werden, um die abgegebene Wärme $\left(\dot{Q}\right)$ auf das Fünffache von $\left(\dot{Q}_A\right)$

   Man überprüfe das Ergebnis durch eine einfache Abschätzung basierend auf dem Wert von $\left(\dot{Q}_A\right)$ allein

Lösung A 19



$$A_R = d_R \cdot \ell_R = 10^{-3}\,\text{m}^2$$

$$U_R = 2(d_R + \ell_R) = 2{,}002\,\text{m}$$

$$A = b \cdot \ell_R = 1\,\text{m}^2 \quad \text{Basisblech}$$

a) Basisblech ohne Rippen, Wärmeabgabe

$$\dot{Q}_A = \alpha A (T_0 - T_a)$$
(1)

$$\dot{Q}_A = 100 \frac{\text{W}}{\cancel{\text{K}}\,\cancel{\text{m}^2}} \cdot 1\,\cancel{\text{m}^2}\,(120 - 20)\,\cancel{\text{K}}$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}_A = 10\,\text{kW}}}$$
(1a)

b) Wärmeabgabe einer einzelnen Rippe

$$\boxed{\dot{Q}_0 = \sqrt{\alpha\lambda A_R \cdot U_R} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha U_R}{\lambda A_R}} \cdot H\right) \cdot (T_0 - T_a)} \qquad (2)$$

$$\dot{Q}_0 = \left(100 \frac{W}{\cancel{m^2}K} \cdot 20 \frac{W}{\cancel{m}K} \cdot 10^{-3}\,\cancel{m^2} \cdot 2\,\cancel{m}\right)^{1/2} \cdot \tan h\left(\sqrt{\frac{100\,W/m^2K \cdot 2m}{20\,W/mK \cdot 10^{-3}m^2}} \cdot 0{,}4m\right) \cdot (120 - 20)K$$

$$\dot{Q}_0 = 2\frac{W}{\cancel{K}} \cdot \underbrace{\tanh(40)}_{=1} \cdot 100\,\cancel{K}$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}_0 = 200W}} \qquad (2a)$$

Anzahl der Rippen (n), um Wärmeabgabe des Bleches von $\dot{Q}_A = 10kW$ auf $\dot{Q} = 50kW$ zu steigen?

$$\dot{Q} = \alpha\left(A - nA_R\right)\left(T_0 - T_a\right) + n\dot{Q}_0 \qquad \text{Blech mit Rippen}$$

(3)

$$(1{,}3) \rightarrow \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{\alpha\left(A - nA_R\right)\left(T_0 - T_a\right) + n\dot{Q}_0}{\alpha A\left(T_0 - T_a\right)}$$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{\alpha A\left(T_0 - T_a\right) - \alpha n A_R\left(T_0 - T_a\right) + n\dot{Q}_0}{\alpha A\left(T_0 - T_a\right)}$$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{\cancel{\alpha A\left(T_0 - T_a\right)}}{\cancel{\alpha A\left(T_0 - T_a\right)}} - \frac{\cancel{\alpha} n A_R \cancel{\left(T_0 - T_a\right)}}{\cancel{\alpha} A \cancel{\left(T_0 - T_a\right)}} + \frac{n\dot{Q}_0}{\alpha A\left(T_0 - T_a\right)}$$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = 1 - n\frac{A_R}{A} + \frac{n\sqrt{\alpha\lambda A_R \cdot U_R} \cdot \tan h\left(\sqrt{\frac{\alpha U_R}{\lambda A_R}} \cdot H\right) \cdot \cancel{\left(T_0 - T_a\right)}}{\alpha A \cancel{\left(T_0 - T_a\right)}}$$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = 1 - n\frac{A_R}{A} + n\underbrace{\frac{1}{A}\sqrt{\frac{\lambda A_R \cdot U_R}{\alpha}} \cdot \tan h\left(\sqrt{\frac{\alpha U_R}{\lambda A_R}} \cdot H\right)}_{F....\text{Formfaktor}}$$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = 1 - n\frac{A_R}{A} + nF$$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = 1 + n\left(F - \frac{A_R}{A}\right)$$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} - 1 = n\left(F - \frac{A_R}{A}\right)$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{n = \frac{\left(\dot{Q}/\dot{Q}_A\right) - 1}{F - \left(A_R/A\right)}} \qquad (4)$$

$$F = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\lambda A_R \cdot U_R}{\alpha}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha U_R}{\lambda A_R}} \cdot H\right)$$

$$F = \frac{1}{1\mathrm{m}^2}\sqrt{\frac{20\,\mathrm{W/mK} \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^2 \cdot 2\mathrm{m}}{100\,\mathrm{W/m^2K}}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{100\,\mathrm{W/m^2K} \cdot 2\mathrm{m}}{20\,\mathrm{W/mK} \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^2}} \cdot 0{,}4\mathrm{m}\right)$$

$$F = 0{,}02 \cdot \tanh(40)$$

$$\underline{F = 0{,}02}$$

$$(4) \rightarrow n = \frac{\left(50\,\cancel{\mathrm{kW}}/10\,\cancel{\mathrm{kW}}\right) - 1}{0{,}02 - \left(10^{-3}\,\cancel{\mathrm{m}^2}/1\,\cancel{\mathrm{m}^2}\right)}$$

$$\underline{\underline{n = 210}} \quad \text{Rippen}$$

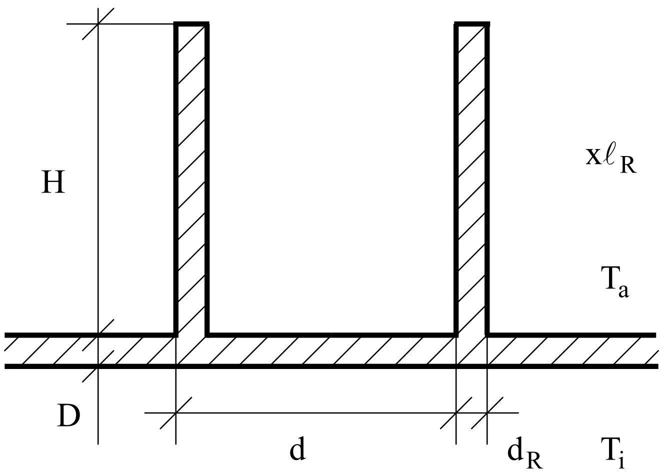
Nährung nach

$$(1a,\ 2a){:} \rightarrow n = \frac{5\,\text{Rippen}}{\cancel{\mathrm{kW}}} \cdot 50\,\cancel{\mathrm{kW}} = 250\ \text{Rippen}$$

Aufgabe A 20

Wärmedurchgang durch ein beripptes Stahlblech

Ein rechteckiges Stahlblech (Dicke D, Länge L, Breite ℓ_R) trägt periodisch angeordnete Rippen aus demselben Material (Höhe H, Dicke d_R , Länge ℓ_R) die voneinander den Abstand d besitzen, vgl. Figur.



Periodenelement

Unter dem Blech ist Heißluft der Temperatur $T_i = 120°C$, oberhalb im berippten Bereich Außenluft der Temperatur $T_a = 20°C$

Thermische Daten des Blechmaterial

Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 20\,W/Km$

Wärmeübergangskoeffizienten: $\alpha_i = 500\,W/m^2K$

$$\alpha_a = 100\,W/m^2K$$

Geometrische Daten eines Periodenelements des Bleches:

$D = 2mm$, $d_R = 1mm$, $d = 5cm$, $H = 40cm$, $\ell_R = 1m$.

a) Welche Wärme $\dot{Q}_A$ tritt durch eine Fläche $A = \ell_R \cdot d$ des zunächst als unberippt angenommenen Blechs ?

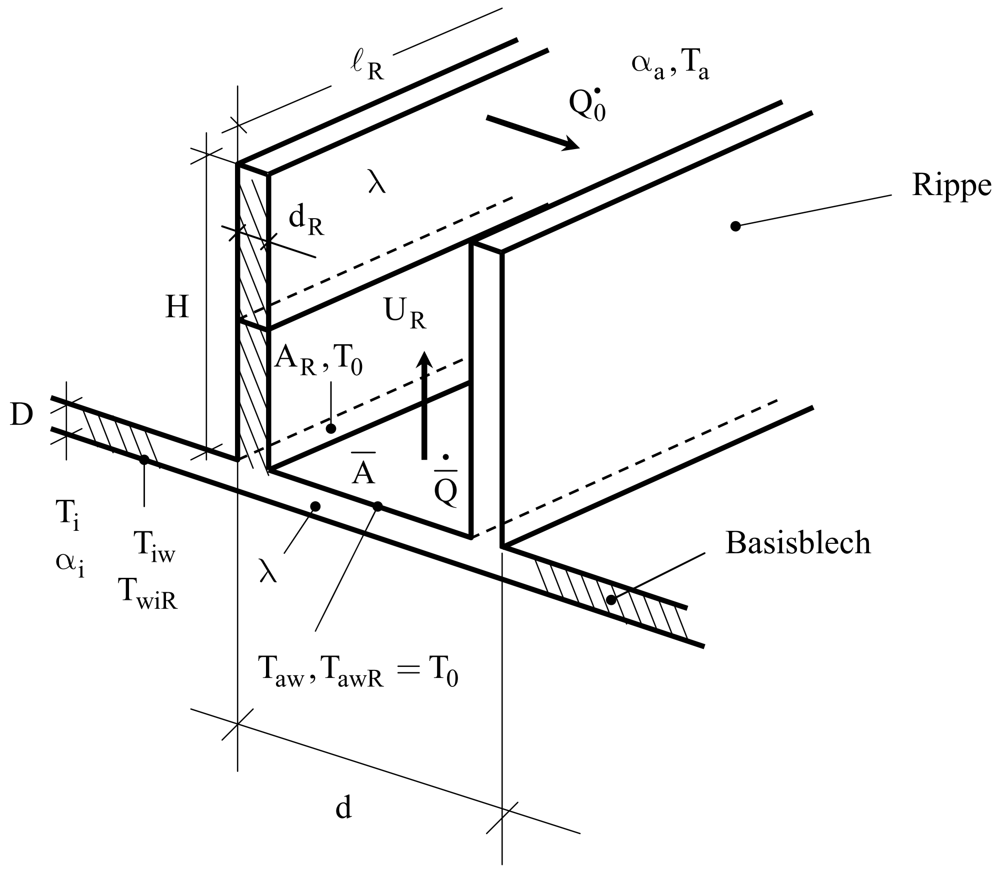
b) Welche Wärme $\dot{Q}$ tritt durch ein Periodenelement des Rippenblechs ?

Hinweis: Man nehme als Näherung an, die Temperatur an der Oberfläche der Rippe und der äußeren Oberfläche des nichtberippten Teils des Bleches seien gleich

c) Wie groß ist das Verhältnis $\dot{Q}/\dot{Q}_A$?

Man diskutiere das Ergebnis

Lösung A 20



Grundfläche Rippe $A_R = \ell_R \cdot d_R = 10^{-3} m^2$

Rippenfreie Fläche $\overline{A} = \ell_R (d - d_R) = 0{,}049 m^2$

Rippenumfang $U = 2(\ell_R + d_R) = 2{,}002 m$

Gesamte Innenfläche Blech $A = A_R + \overline{A} = 0{,}05 m^2$

a) Wand / Periodenelement ohne Rippe

$$A = A_R + \overline{A}$$

Grundfläche Rippe — rippenfreie Fläche

$$\dot{Q}_A = kA\left(T_i - T_a\right)$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{D}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}$$

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{500} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{20} + \frac{1}{100}\right)\frac{m^2K}{W}$$

$$k = 82{,}6\frac{W}{m^2K}$$

$$\dot{Q}_A = 82{,}6\frac{W}{m^2K} \cdot 0{,}05m^2 \cdot 100K$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}_A = 413{,}2W}}$$

b) Wand / Periodenelement mit Rippe

<u>Wärmestrombeziehungen</u>:

WÜ innen

$$\dot{Q} = \alpha_i A\left(T_i - T_{wiR}\right) \qquad (1)$$

WL/WÜ Rippe

$$\dot{Q}_0 = RF\left(T_0 - T_a\right) \qquad (2a)$$

$$RF = \sqrt{\alpha_a \lambda A_R U_R} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha_a U_R}{\lambda A_R}} \cdot H\right) \qquad \text{Rippenformfaktor}$$

WÜ rippenfreie Fläche

$$\dot{\overline{Q}} = \alpha_a \overline{A} \left(T_0 - T_a \right) \tag{2b}$$

$$Q^\bullet = Q_0^\bullet + \dot{\overline{Q}} \tag{2}$$

Wärmeleitung durch Basisblech

$$Q^\bullet = \lambda \frac{A}{D} \left(T_{wiR} - T_{waR} \right) \tag{3}$$

Modell Wandtemperatur außen $\left(T_{waR} \right)$

$$T_{waR} = T_0$$

Basistemperatur an Rippenfuß!

Unbekannte: $Q^\bullet,\ T_{wiR},\ T_0 = T_{waR}$ Gleichungen (1-3)

(1-3) $\rightarrow$
$$T_0 = \frac{b_1 - b_2}{a_1 + a_2} \tag{5}$$

$$T_{wiR} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 + a_2} \tag{6}$$

wobei

$$a_1 = \frac{1}{\alpha_i A} \left(RF + \alpha_a \overline{A} \right) \qquad \left[a_1 \right] = 1$$

$$a_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha_i D} \qquad \left[a_2 \right] = 1$$

$$b_1 = T_i + a_1 T_a \qquad \left[b_1 \right] = K$$

$$b_2 = \frac{\alpha_i D}{\lambda + \alpha_i D} T_i \qquad \left[b_2 \right] = K$$

Numerische Resultate

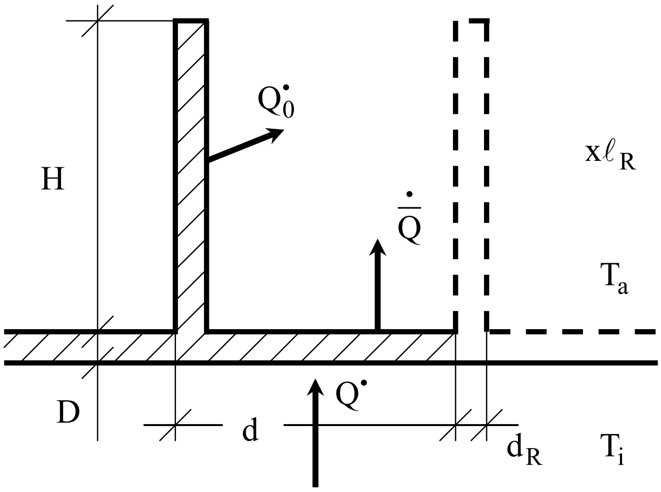
$$RF = 2\frac{W}{K}\cdot\underbrace{\tanh(40)}_{=1} = 2\,W/K$$

$a_1 = 0,276$

$a_2 = 0,9524$

$b_1 = 125,5°C$

$b_2 = 5,71°C$



Periodenelement
Der Rippenplatte

Basistemperatur Rippe: $T_0 = T_{waR} = 97,5°C$

Wandinnentemperatur: $T_{wiR} = 98,59°C$

Wärmestrom durch Periodenelement (Rippe + Basisplatte):

$$\dot{Q} = \alpha_i A\left(T_i - T_{wiR}\right)$$

$$\dot{Q} = 500\frac{W}{m^2K}\cdot 0,05m^2\left(120-98,59\right)°C$$

$$\underline{\underline{\dot{Q} = 535,3W}}$$

c) Verhältnis Wärmeströme Basisplattenelement mit und ohne Rippe

$$\underline{\underline{\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{535,3}{413,2} = 1,3}}$$

Wärme durch Freifläche

$$\overline{\dot{Q}} = \alpha_a \overline{A}\left(T_0 - T_a\right)$$

$$\overline{\dot{Q}} = 100\frac{W}{m^2K}\cdot 0{,}049m^2\left(97{,}5-20\right)°C$$

$$\underline{\underline{\overline{\dot{Q}} = 380W}}$$

Wärme durch Rippenflachen:

$$\dot{Q}_0 = \dot{Q} - \overline{\dot{Q}}$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}_0 = 156W}}$$

Aufgabe A 21

Erhöhung der Wärmeabgabe durch Berippung eines Kreisrohrs

An der äußeren Oberfläche eines Kupferrohres mit dem Außenradius $r_a = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ herrscht eine Temperatur $T_0 = 250°\mathrm{C}$. Die umgebende strömende Luft hat die Temperatur $T_a = 0°\mathrm{C}$. Der Wärmeübergangskoeffizient Kupferrohr – Luft beträgt $\alpha = 30\,\mathrm{W/m^2K}$ (Zwangskonvektion).

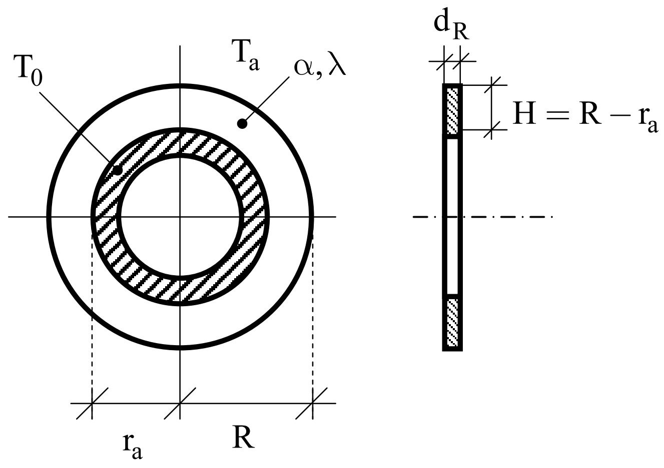
Zur Erhöhung der Wärmeabgabe werden Kreisrippen der Dicke $d_R = 1\,\mathrm{mm}$, Höhe $H = 10\,\mathrm{cm}$ auf das Rohr geschweißt. Die Wärmeleitfähigkeit des Kupfers beträgt $\lambda = 350\,\mathrm{W/Km}$.

a) Welche Wärme gibt das zunächst unberippt gedachte Rohr auf der Basislänge der Rippe $\left(d_R = 1\,\mathrm{mm}\right)$, d. h. durch die Fläche $A_R = 2\pi r_a d_R$ ab ?

b) Welche Wärme wird durch die Oberfläche einer einzelnen Rippe abgegeben unter der als Näherung anzusehenden Voraussetzung, dass die Oberfläche der Rippe überall auch die Temperatur $T_0 = 250°\mathrm{C}$ besitzt ?

<u>Hinweis</u>: Man verwende die sog. Schmidt – Näherung und prüfe, ob die dazu notwendigen Voraussetzungen erfüllt sind.

Lösung A 21



a) Wärmeabgabe des unberippten Rohrs auf Rohrlänge (d_R)

$$\dot{Q}_A = \alpha A_R (T_0 - T_a)$$

$$\dot{Q}_A = 30 \frac{W}{Km^2} \cdot 2\pi \cdot 0{,}025m \cdot 10^{-3} m (250 - 0) K$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}_A = 1{,}18W}}$$

b) Wärmeabgabe des Rohres durch die Kreisrippe

$$\dot{Q} = \alpha^* A_R (T_0 - T_a)$$

$$\alpha^* = \frac{\lambda m \cdot \tanh\left[mH\left(1 + 0{,}35 \ln\left(R/r_a\right)\right)\right]}{2\left(1 + 0{,}35 \ln\left(R/r_a\right)\right)} \left(1 + \frac{R}{r_a}\right)$$

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \cdot d_R}}$$

$$m = \left(\frac{2 \cdot 30W \cdot mK}{m^2K \cdot 350W \cdot 10^{-3} m}\right)^{1/2} = 13{,}1m^{-1}$$

$$\alpha^* = \frac{350\,\mathrm{W/Km} \cdot 13{,}1\mathrm{m}^{-1} \overbrace{\tanh(2{,}05)}^{=0{,}967}}{2\left(1 + 0{,}35\ln(0{,}125/0{,}025)\right)}\left(1 + \frac{0{,}125}{0{,}025}\right)$$

$$\underline{\alpha^* = 8508\,\mathrm{W/m^2\,K}}$$

Schmidt – Näherung: $V_1:\ mH = 13{,}1\mathrm{m}^{-1} \cdot 0{,}1\mathrm{m} = 1{,}31 < 2$

$V_2:\ mr_a = 13{,}1\mathrm{m}^{-1} \cdot 0{,}025\mathrm{m} = 0{,}32 \leq 0{,}5$

V_2 nicht erfüllt!...aber annähernd

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{\alpha^*}{\alpha} = \frac{8508}{30} = 283{,}6$$

$$\underline{\underline{\dot{Q} = 334{,}6\mathrm{W}}}$$

Aufgabe A 22

Instationäre Wärmeleitung
Verzinken eines Stahlbleches

Ein Stahlblech (Länge ℓ, Dicke d, Höhe h) soll durch vollständiges Eintauchen in ein Bad mit flüssigen Zink (Zn) der Temperatur $T_{Zn} = 640°C$ verzinkt werden.

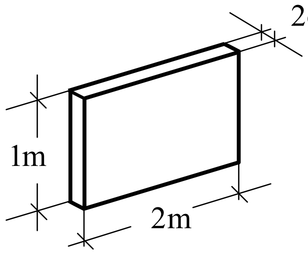
a) Welche Mitteltemperatur (T_m) besitzt das Stahlblech nach einer Tauchzeit von 1 Minute ?

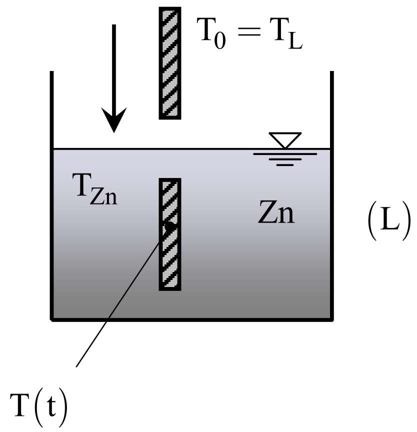
b) Wie lange muss man warten, damit sich das Blech nach Herausziehen aus dem Bad mit der Mitteltemperatur T_m nach (a) an Luft der Temperatur $T_L = 20°C$ auf $T_{max} = 60°C$ abgekühlt hat ?

<u>Stoffdaten</u>:

Dichte des Stahls	$\rho = 7{,}5\,t/m^3$
Spezifische Wärmekapazität	$c = 0{,}5\,kJ/kgK$
Wärmeübergangskoeffizienten	$\alpha_{Zn,St} = 450\,W/Km^2$
	$\alpha_{St,L} = 15\,W/Km^2$

Lösung A 22





$$\theta = T(t) - T_{Zn}$$

$$\theta_0 = T_0 - T_{Zn} = T_L - T_{Zn}$$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 e^{-t/\tau}} \qquad (1)$$

$$\tau = \frac{cm}{\alpha A} \qquad (2)$$

a)

$$\tau = \frac{cm}{\alpha_{Zn,St} \cdot \underbrace{2A}_{\text{Vorder + Rückseite}}}$$

$$V = 1m \cdot 2m \cdot 0{,}02m = 0{,}04m^3$$

$$m = \rho \cdot V$$

$$m = 7{,}5 \cdot 10^3 \frac{kg}{\cancel{m^3}} \cdot 0{,}04 \cancel{m^3} = 300kg$$

$$\tau = \frac{0,5\cdot 10^3\,\mathrm{J/kgK}\cdot 300\mathrm{kg}}{450\,\mathrm{W/Km^2}\cdot 2\cdot 2\mathrm{m^2}}$$

$$\underline{\tau = 83,3\mathrm{s}}$$

$$\theta(60\mathrm{s}) = \theta_0 e^{-60/83,3} = -620^\circ\mathrm{C}\cdot 0,4866 = -302^\circ\mathrm{C}$$

$$T(60\mathrm{s}) = 640^\circ\mathrm{C} - 302^\circ\mathrm{C}$$

$$\underline{\underline{T(60\mathrm{s}) = {}^\circ\mathrm{C}338}}$$

b)

$$\theta = T(t) - T_L$$

$$\theta = \theta_0 e^{-t/\tau'} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow\ \tau' = \frac{mc}{\alpha_{St,L}\cdot A} = \frac{\alpha_{St,Zn}}{\alpha_{St,L}}\tau$$

$$\tau' = \frac{450\,\mathrm{W/m^2K}}{15\,\mathrm{W/m^2K}}\tau$$

$$\underline{\underline{\tau' = 2499\mathrm{s}}}$$

$$(*) \qquad t = -\tau' \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta}\right)$$

$$t = -2499\mathrm{s}\cdot\ln\left(\frac{60-20}{338-20}\right)$$

$$\underline{t = 86,3\,\mathrm{min} = 1\mathrm{h}\ 26,3\,\mathrm{min}}$$

Aufgabe A 23

Abkühlung der Zwischenwand eines Industrieofens, Gröber – Diagramm

Die Zwischenwand eines Industrieofens besitzt in der Heizphase überall die Temperatur $T_A = 370°C$. Nach Beendigung des Prozesses wird zur Kühlung ein Luftstrom der Temperatur $T_L = 20°C$ eingesetzt.

a) Welche Temperatur besitzt die Mauer an ihren Oberflächen nach einer Kühlzeit $t = 3h$?

b) Wie groß ist die thermische Mitteltemperatur der Mauer nach dieser Zeit?

<u>Hinweis</u>: Man benutze zur Lösung die entsprechenden Diagramme für die reduzierten Temperaturen (θ) nach Gröber.

<u>Stoffdaten</u>:

Dicke der Mauer $d = 2X = 0{,}12m$

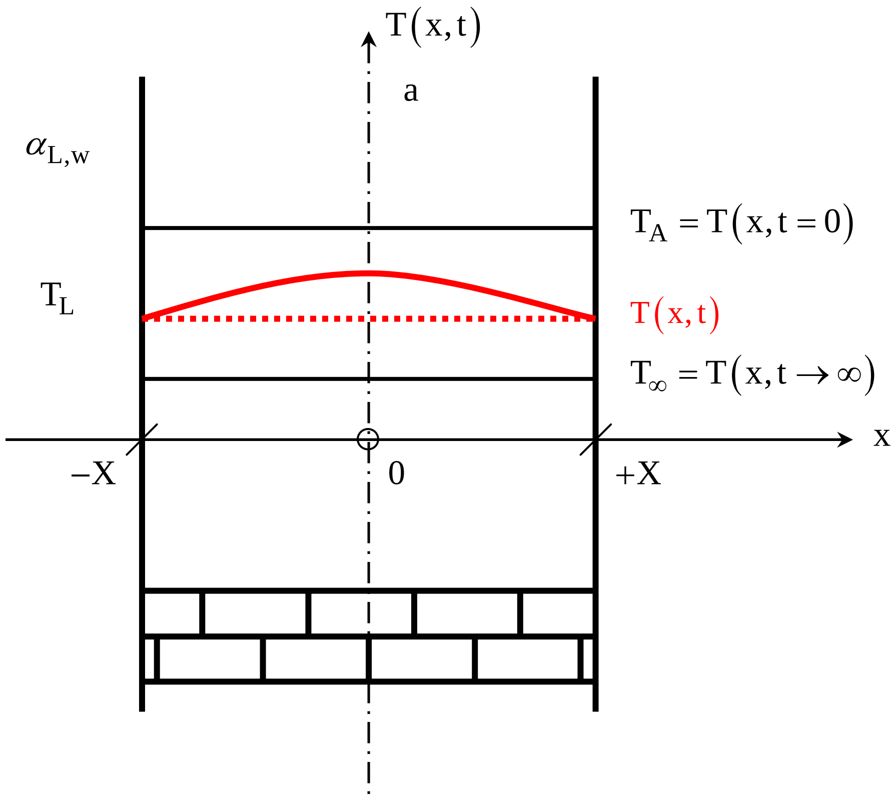
Wärmeleitfähigkeit des Mauermaterials $\lambda = 1{,}2\,W/mK$

Wärmeübergangskoeffizient Mauer – Luftstrom $\alpha_{L,w} = 14\,W/m^2K$

Wärmekapazität der Mauer $c = 0{,}84\,kJ/kgK$

Dichte des Mauermaterials $\rho = 1600\,kg/m^3$.

Lösung A 23



$d = 2X$

Die reduzierten Temperaturen

$$\theta_0(t) = \frac{T_0(t) - T_\infty}{T_A - T_\infty} \cdots\cdots\cdots |\xi| = 1 \ , \quad x = \pm X \tag{1}$$

$$\theta_0(\infty) = 0$$

$$\theta_0(0) = 1$$

$$\bar{\theta}(t) = \frac{\bar{T}(t) - T_\infty}{T_A - T_\infty} \tag{2}$$

können aus Gröber – Diagrammen abgelesen werden, wenn die Biotzahl $B_i = \frac{\alpha_a X}{\lambda}$ des Systems und die Fourier Zeit $\tau = \frac{at}{X^2}$ bekannt sind.

$$\tau = \frac{at}{X^2} \quad , \quad a = \frac{\lambda}{c\rho}$$

$$\tau = \frac{\lambda t}{c\rho X^2}$$

$$t = 3h: \qquad \tau = \frac{1,2\,W/mK \cdot 3 \cdot 3600s}{0,84 \cdot 10^3\,J/kgK \cdot 1600\,kg/m^3 (0,06)^2\,m^2}$$

$$\underline{\tau = 2,6786} \tag{3}$$

$$B_i = \frac{\alpha_{L,w} X}{\lambda}$$

$$B_i = \frac{14\,W/m^2K \cdot 0,06m}{1,2\,W/mK}$$

$$\underline{B_i = 0,7} \tag{4}$$

(3,4) : Diagramm für θ : $\theta_0 = 0,17$ $\quad t = 3h$ (5)

Diagramm für $\bar{\theta}$: $\bar{\theta} = 0,23$ $\quad t = 3h$ (6)

$$(5,1) \Rightarrow \quad T_0(3h) = T_\infty + \theta_0(\tau = 2,6786)(T_A - T_\infty)$$

$$T_0(3h) = 20°C + 0,17(370 - 20)°C$$

$$\underline{\underline{T_0(3h) = 79,5°C}}$$

$$(6,2) \Rightarrow \quad \bar{T}(3h) = T_\infty + \bar{\theta}(\tau = 2,6786)(T_A - T_\infty)$$

$$\bar{T}(3h) = 20 + 0,23(370 - 20)°C$$

$$\underline{\underline{\bar{T}(3h) = 100,5°C}}$$

Aufgabe A 24

Sterilisation Lebensmittelkonserve Schlünder – Methode

Eine zylindrische Konservendose (Radius $R = 5\,\mathrm{cm}$, Höhe $H = 5\,\mathrm{cm}$) soll in einem Wasserbad der Temperatur $T_F = 150°C$ unter Druck ($p_s(150°C) = 4{,}76\,\mathrm{bar}$) von anfänglich ($T_A = 20°C$) auf mindestens $T_{soll} = 100°C$ erhitzt werden.

Wie lange muss die Konserve mindestens im Wasserbad bleiben, damit ihre thermische Mitteltemperatur $\overline{T} = T_{soll} = 100°C$ beträgt?

Man bestimme die gesuchte Sterilisationszeit (t_{soll}) zunächst nach der integralen Kapazitätsmethode und danach nach der Methode von Schlünder und diskutiere die (unterschiedlichen) Ergebnisse.

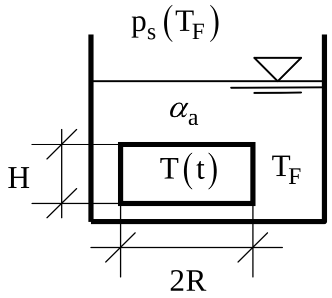
<u>Stoffdaten</u>:

Wärmeübergangskoeffizient Wasserbad – Konserve $\alpha_a = 600\,\mathrm{W/Km}$.

Wärmekapazität des Doseninhalts $c = 4{,}18\,\mathrm{kJ/kgK}$.

Dichte des Doseninhalts $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lösung A 24



1.Versuch: Integrale Kapazitätsmethode

$$T_{soll} - T_F = (T_A - T_F)\, e^{-t/\tau_M}$$

$$\tau_M = \frac{cm}{\alpha A}$$

$$t_{soll} = -\tau_M \ln\left(\frac{T_{soll} - T_F}{T_A - T_F}\right)$$

$$\underline{\underline{t_{soll} = 87{,}3\,s}}$$

$$B_i = \frac{\alpha L}{\lambda} << 1$$

$$B_i = \frac{600\, W/m^2K\; 0{,}1m}{0{,}6\, W/mK}$$

$$\underline{B_i = 100} > 1......??$$

Integrale Kapazitätsmethode nicht anwendbar !

2. Versuch: Berechnung Sterilisationstemperatur nach Schlünder

Dose $\rightarrow$ Unendlich langer Zylinder

Einfluss Dachfläche ?

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{T}_{soll} - T_\infty}{T_A - T_\infty} \qquad T_\infty = T_F$$

$$\bar{\theta} = \frac{100-150}{20-150} = 0,3846$$

$$\bar{\theta} = \exp\left\{-\frac{2\tau}{1/B_i + 1/Nu_i}\right\} \qquad (*)$$

$$B_i = \frac{\alpha_a R}{\lambda}$$

$$B_i = \frac{600\,W/m^2K \cdot 0,05mR}{0,6\,W/mK}$$

$$B_i = 50 > 1$$

$$Nu_i^2 = 8,36 + \frac{4}{\pi\tau}$$

$$\tau = \frac{at}{R^2}$$

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{0,6\,W/Km}{4,18 \cdot 10^3\,J/kgK \cdot 1000\,kg/m^3}$$

$$a = 0,1435 \cdot 10^{-6}\,m^2/s$$

$$(*) \qquad \tau = -\frac{\ln\bar{\theta}}{2}\left(\frac{1}{B_i} + \frac{1}{\sqrt{8,36 + 4/\pi\tau}}\right)$$

$$\tau = -\frac{\ln 0,3846}{2}\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{\sqrt{8,36 + 4/(3,14\tau)}}\right)$$

Iterative Lösung gemäß $x = f(x)$, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_{n+1} = f(x_n)$

$$\rightarrow \tau = 0.1190, t = \frac{\tau R^2}{a}$$

$\rightarrow \underline{\underline{t = 2073s = 34Min\,\&\,55s}}$ zu lang, Deckflächen berücksichtigt

Aufgabe A 25

Erstarrung von Schokoladebrei in lotrechter Transportleitung

Durch ein lotrechtes Stahlrohr (Radius $R = 1,3\,\text{cm}$, Wanddicke $d = 2\,\text{mm}$) wird Schokoladebrei gefördert. Durch eine Betriebsstörung wird die Förderung unterbrochen. Gleichzeitig fällt die Beheizung des Rohres aus, so dass sich außerhalb des Rohres eine Temperatur $T_\infty = 0°\text{C}$ einstellt.

a) Man berechne näherungsweise die minimale Erstarrungszeit des Breis ab Erreichen der Phasenumwandlungstemperatur $T_{PH} = 25°\text{C}$.

b) Wie groß ist die tatsächliche Zeit, die vergehen muss, bis der Brei vollständig im Rohr erstarrt ist? Man bestimme diese Zeit mit Hilfe des beigefügten Diagramms (VDI) und den folgenden Stoffdaten

<u>Stoffdaten</u>:

$\lambda = \lambda_{\text{Stahl}} = 15\,\text{W/Km}$

$\alpha_a = \alpha_{\text{Wasser,Stahl}} = 800\,\text{W}/\text{Km}^2$

$\lambda_S = 0,4\,\text{W/Km}$

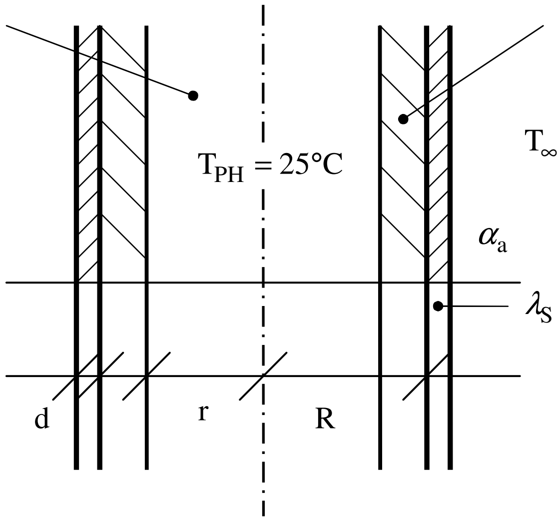
$c_p^S = 1,2\,\text{kJ/kgK}$

$\rho^S = 0,8 \cdot 10^3\,\text{kg}/\text{m}^3$

$\rho^L = 0,77 \cdot 10^3\,\text{kg}/\text{m}^3$

$r_{SL} = 180\,\text{kJ/kg}$

Lösung A 25



a) Berechnung der minimalen Erstarrungszeit

$$\tau_{E,min} = \frac{1}{2} PH \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{B_i} \right) \qquad \ldots\ldots \text{Zylinder}$$

$$PH = \frac{\rho^L r_{SL}}{c_p^S \rho^S \left(T_{PH} - T_\infty \right)}$$

$$\frac{1}{B_i} = \frac{\lambda_S}{R} \left(\frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a} \right)$$

$$t_{E,min} = \frac{c_p^S \rho^S}{\lambda_S} R^2 \tau_E$$

b)

$$\tau_E = \underbrace{\left(\frac{\tau_E}{\tau_{E,min}} \right)}_{\text{Diagramm}} \cdot \tau_{E,min}$$

$$t_E = \frac{c_p^S \rho^S}{\lambda_S} \tau_E$$

Numerik

$$\frac{1}{B_i} = \frac{\lambda_S}{R}\left(\frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}\right) \qquad \ldots\ldots \; d \ll R \;\; (?)$$

$$\frac{1}{B_i} = \frac{0,4\,W/Km}{0,013m}\left(\frac{0,002m}{15\,W/Km} + \frac{1}{800\,W/Km^2}\right)$$

$$\frac{1}{B_i} = 0,0426$$

$$\rightarrow \qquad Bi = 23,5$$

$$\frac{Bi}{1+Bi} = 0,9592 \quad \text{…. Für Korrektur – Diagramm (VDI)}$$

$$\tau_{E,min} = \frac{0,77\cdot 10^3\cdot 180}{2(25-0)\cdot 1,2\cdot 800}\left(\frac{1}{2} + 0,0426\right)$$

$$\tau_{E,min} = 1,5668 \quad \text{… Fourier – Zeit}$$

$$PH = 5,7750 \quad , \quad \frac{1}{PH} = 0,1732$$

Diagramm (VDI): $\tau_E = 1,15\tau_{E,min} = 1,802$

$$t_E = \frac{1}{\lambda_S} c_p^S \rho^S R^2 \tau_E$$

$$t_E = \frac{1,2\cdot 10^3\cdot 800\cdot 1,69\cdot 10^{-4}}{0,4}\cdot 1,802s$$

$$\underline{\underline{t_E = 730,8s = 12Min,11s}} \quad \text{….wahrscheinlich etwas zu kurz}$$

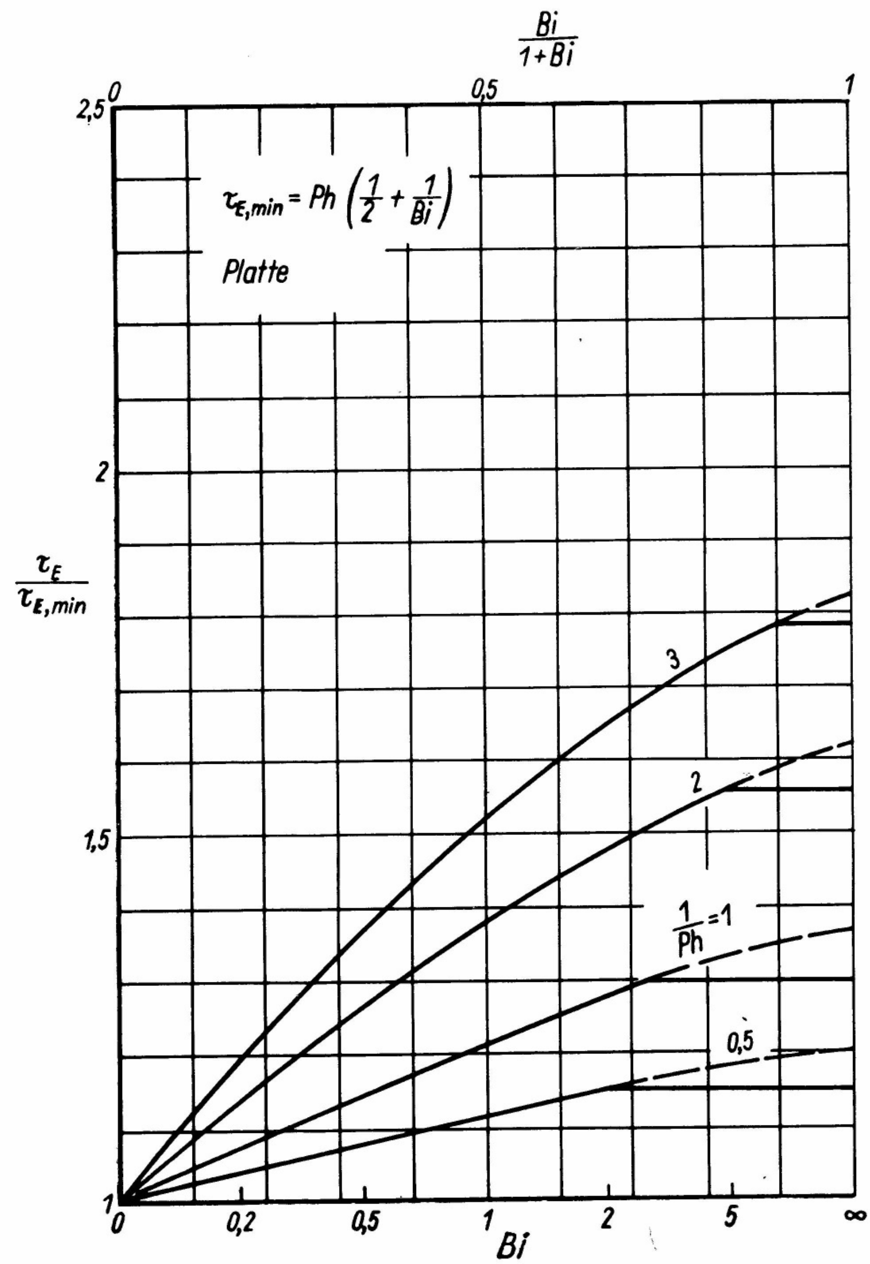


Bild 14. Ermittlung der wahren Erstarrungszeit τ_E für Platte, Zylinder und Kugel.

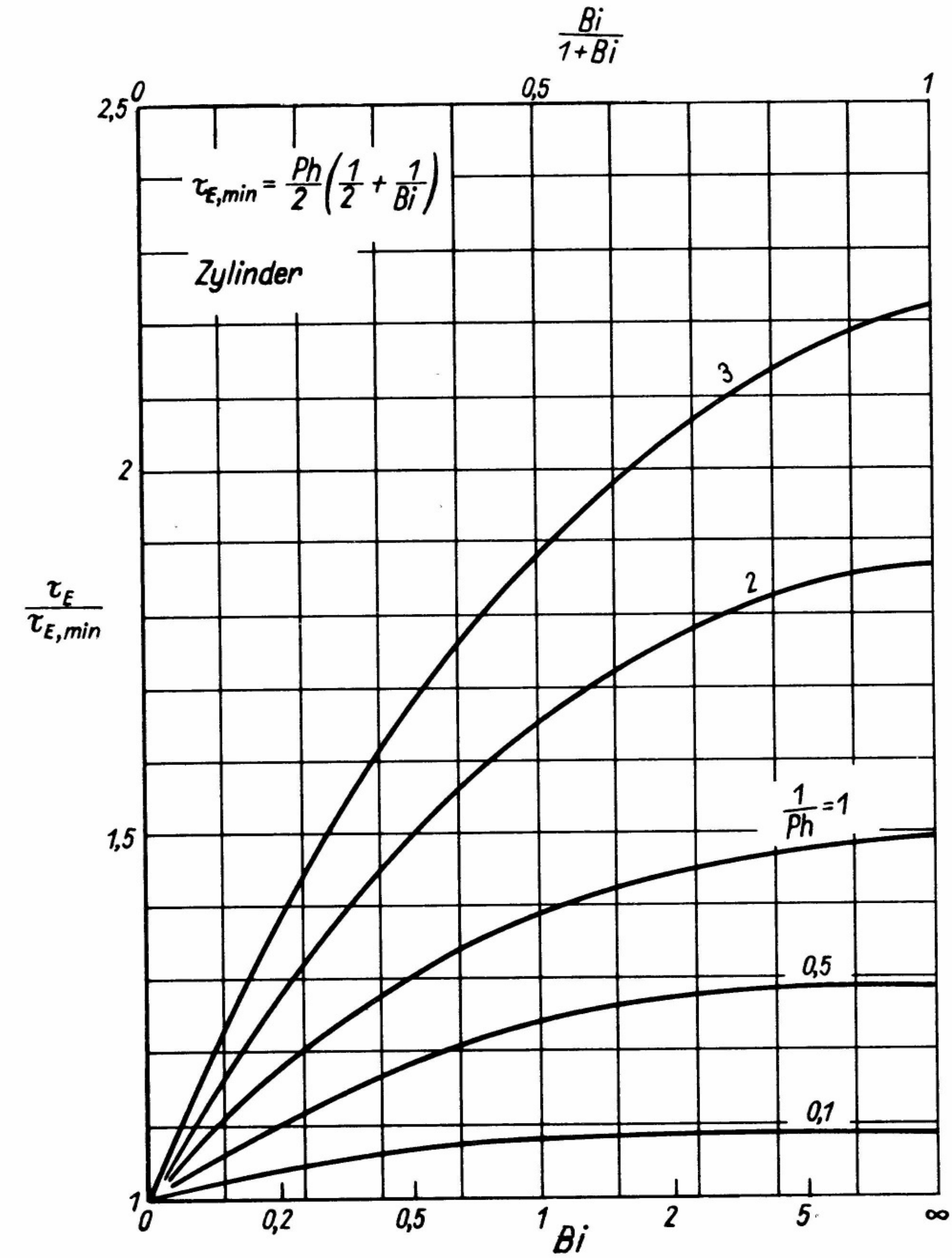


Bild 15. Ermittlung der wahren Erstarrungszeit τ_E für Platte, Zylinder und Kugel.

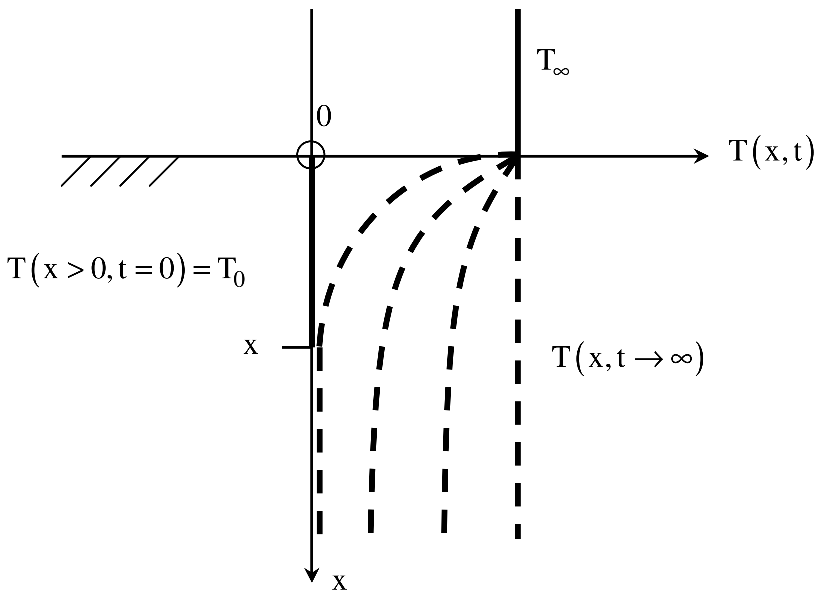
Aufgabe A 26

Ausbreitung von Wärme in Halbräumen konstanter Anfangstemperatur (T_0)

Beispiele:

1. Auftauen von Permafrostböden in der Sommerzeit.
2. Temperaturanstiege in Räumen, Lagern, Tanks etc. in der Umgebung von Brandherden.

Man berechne den Temperaturverlauf $T = T(x,t)$ in Abhängigkeit vom Ort (x) und der Zeit (t) in einem Halbraum $(x > 0)$ konstanter Anfangstemperatur (T_0) an dessen Oberfläche $(x = 0)$ durch äußere Umstände (Sonne, Brand etc.) die konstante erhöhte Temperatur $T_\infty > T_0$ herrscht.



a) Man löse dazu die eindimensionale Temperaturleitungsgleichung (TLG)

$$\partial_t T(x,t) = a\partial_x^2 T(x,t)\ , \qquad a = \frac{\lambda}{c\rho}$$

mit den Anfangs – und Randbedingungen:

$$T(x,t=0) = \begin{cases} T_\infty = \text{const....} x < 0 \\ T_0 = \text{const.....} x > 0 \end{cases}$$

$$T(x, t \to \infty) = T_\infty = \text{const} \ldots\ldots\text{alle } x$$

durch Einführung der Gauß-Variablen

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{at}} \quad \cdots\cdots t \geq 0$$

und Umwandlung der TLG in eine gewöhnliche Differentialgleichung (ODE).

b) Bis zu welcher Tiefe taut der sibirische Permafrostboden in der Sommerzeit auf, wenn diese durch eine 6 Wochen lange Zeit konstanter Oberflächentemperatur $T_\infty = 10°C$ simuliert wird und der Boden zunächst überall die Temperatur $T_0 = -20°C$ besitzt.

<u>Stoffwerte</u>:

$\rho = 2{,}8 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$

$c = 3{,}2\ \text{kJ/kgK}$ (Sumpf!)

$\lambda = 0{,}5\ \text{W/mK}$

Lösung A 26

TLG : $$\partial_t T(x,t) = a\partial_x^2 T(x,t) \tag{1}$$

Temperaturleitfähigkeit

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} > 0 \tag{2}$$

Anfangsbedingungen

$$T(x,t=0) = \begin{cases} T_\infty = \text{const....} x < 0 \\ T_0 = \text{const.....} x > 0 \end{cases} \tag{3a}$$

$$T(x,t\to\infty) = T_\infty \;\ldots\ldots\; \text{alle } x \tag{3b}$$

Randbedingung

$$T(x\to\infty, t<\infty) = T \;\ldots\ldots\; \text{alle } t > 0 \tag{4}$$

Ansatz Gauß-Variable

$$T(x,t) = \phi(\xi) \tag{5}$$

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{at}} \tag{5a}$$

$$\partial_t T(x,t) = -\frac{\xi}{2t}\phi'(\xi), \qquad \phi' = \frac{d\phi}{d\xi}$$

$$\partial_x T = \frac{1}{2\sqrt{at}}\phi'$$

$$\partial_x^2 T = \frac{1}{4at}\phi''$$

Einsetzen in (1) $\rightarrow$ $\phi'' + 2\xi\phi' = 0$ … ODE ϕ kommt selbst <u>nicht</u> vor! (6)

$$\phi'(\xi) = \psi(\xi) \qquad (7)$$

(6,7) $\rightarrow$ $\psi' + 2\xi\psi = 0$

$$\ln\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right) = -\left(\xi^2 - \xi_0^2\right)$$

$$\psi = \psi_0 e^{-\left(\xi^2 - \xi_0^2\right)}$$

$\xi_0 = 0$:

(7) $$\phi(\xi) = \psi_0 \int_0^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi + C$$

(5) $$T(x,t) = C + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\psi_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \qquad (9)$$

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-w^2} dw$$ …Gauß Fehlerfunktion (10)

Bestimmung Integrationskonstante C, ψ_0 über Anfangsbedingung für Halbraum $(x > 0)$.

$x > 0$, $t = 0$

(1) $x \rightarrow \infty$: $T_0 = C + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\psi_0 \cdot 1$ $\qquad \operatorname{erf}(\infty) = 1$ (11)

$x > 0$, $t \rightarrow \infty$

(2) $T_\infty = C$ $\qquad \operatorname{erf}(0) = 0$ (12)

Allg. Lösung:

(9,11,12) $$\underline{\underline{T\underbrace{\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)}_{\xi} = T_\infty + \left(T_0 - T_\infty\right)\operatorname{erf}\underbrace{\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)}_{\xi}}} \qquad (13)$$

b) Temperaturleitfähigkeit:

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}$$

$$a = \frac{0{,}5\,\mathrm{W/mK}}{3{,}2\cdot 10^3\ \mathrm{J/kgK}\ 2{,}8\cdot 10^3\ \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3}$$

$$a = 0{,}056\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$

$$\underline{\underline{t = 6\,\text{Wochen} = 3{,}63\cdot 10^6\,\mathrm{s}}}$$

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{at}}$$

x .. Eindringtiefe Temperatur $T(x,t) = 0°C$
t .. Dauer Sommerzeit

$$x = 2\xi\sqrt{at} \qquad (*)$$

Bestimmung von ξ aus (13)

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{T_\infty - T(x,t)}{T_\infty - T_0}$$

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{10-0}{10-(-20)} = 0.333$$

Graphische Darstellung der Fehlerfunktion, Anlage

$$\rightarrow \qquad \xi = 0{,}3$$

$$(*) \qquad x = 2 \cdot 0{,}3 \left(0{,}056 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{\cancel{s}} \cdot 3{,}63 \cdot 10^6 \cancel{s} \right)^{1/2}$$

$$\underline{\underline{x = 0{,}27 m}}$$

Wichtig für Biologie, Standfestigkeit von Fundamenten, Stützpfeilern von Brücken, Pipelines (Alaska) etc.!

Anlage: Diagramm Gauß – Fehlerintegral nach VDI.

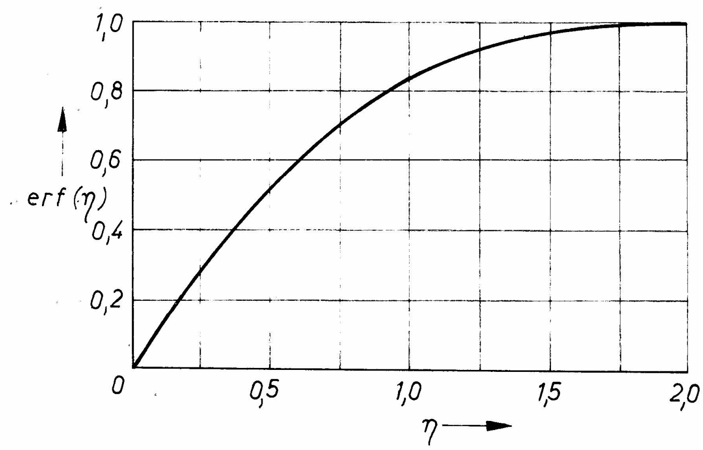


Bild 3.4: Gaußsches Fehlerintegral

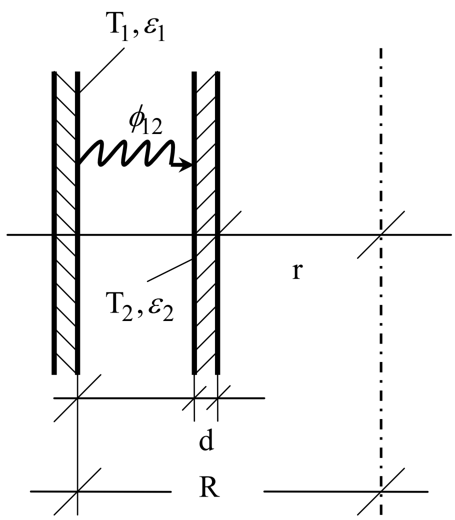
Aufgabe S 1

Tieftemperaturisolierung Wasserstofftank, Strahlungsaustausch, Abdampfrate

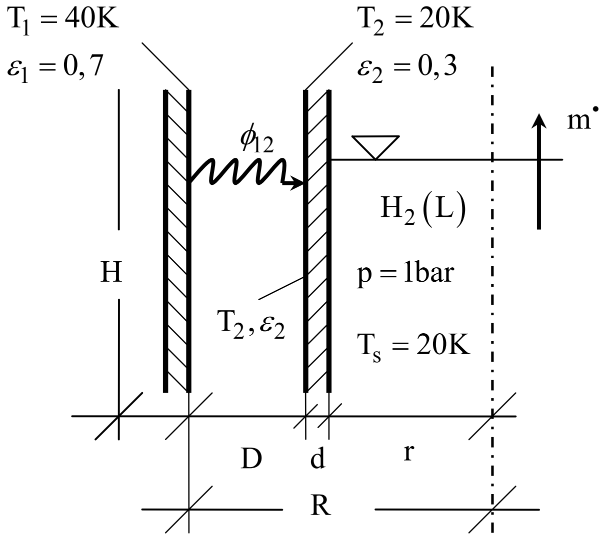
Ein zylindrischer Vorratsbehälter für flüssigen Wasserstoff (H_2 (L)) besteht aus Edelstahl und hat einen Innendurchmesser von d = 2 r = 2 m, eine Höhe H = 6 m und eine Wandstärke d = 5 cm. Der Emissionskoeffizient beträgt ε_2 = 0,3, die Temperatur der äußeren Oberfläche T_2 = 20 K. Der Tank ist von einem weiteren Stahlzylinder umgeben, dessen Innenradius R = 1,15 m beträgt. Die innere Oberfläche des Behälters hat das Emissionsvermögen ε_1 = 0,7 und die Temperatur T_1 = 40 K.

a) Welche Strahlungsleistung Φ_{12} (W) wird zwischen den beiden konzentrisch angeordneten Zylindern ausgetauscht?

b) Welche Masse Wasserstoff verdampft aus dem Tank pro Sekunde bzw. pro Jahr durch die über die Wärmestrahlung eingetragene Energie? Die Verdampfungsenthalpie von Wasserstoff beträgt im Siedezustand (1 bar, 20 K), r = 445 kJ/kg.



Lösung S1



A … Approximation durch „ Mittelzylinder “

$$\left(R = r + d + \frac{D}{2} \right)$$

$$A = 2\pi R \cdot H$$

Durch Strahlung übertragene Wärme zwischen Isolierungen :

$$\phi_{12} = A \cdot \varphi_{12} = 2\pi R H \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma \left(T_1^4 - T_2^4 \right)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

$$\phi_{12} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}1\cancel{m} \cdot 6\cancel{m} \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 5{,}8\,\mathrm{W}/\cancel{m^2}\left((40/100)^4 - (20/100)^4 \right)}{(0{,}7 + 0{,}3 - 0{,}7 \cdot 0{,}3)}$$

$$\underline{\underline{\phi_{12} = 1{,}5\mathrm{W}}}$$

Diskussion ! Abdampfrate: $\quad m^\bullet = \phi_{12} \cdot \frac{1}{r_{LV}(H_2)}$

$$m^\bullet = \frac{1{,}5\mathrm{W}}{445 \cdot 10^3\,\mathrm{J/kg}} = \underline{\underline{12\,\mathrm{g/h}}}$$

Aufgabe S 2

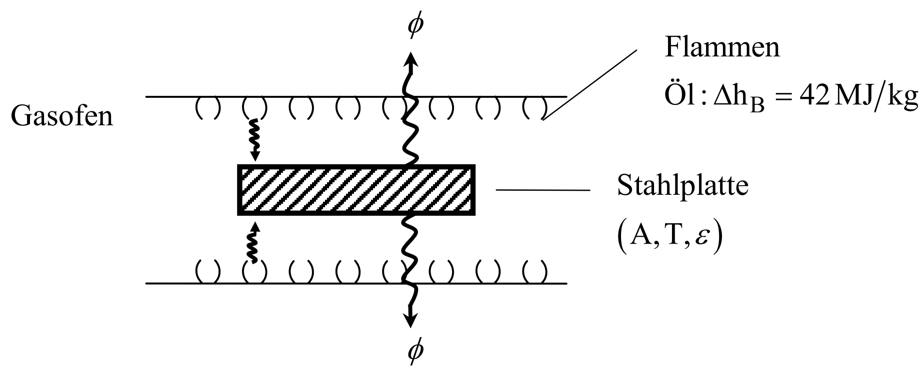
Temperierung von Stahlplatten im Strahlungsofen

Eine Stahlplatte der Fläche $A = 2\ m^2$ soll zur Weiterverarbeitung auf konstanter Temperatur $T = 1000\ °C$ gehalten werden. Die Platte wird dazu in einen Ofen geschoben und von Gasflammen von beiden Seiten, d. h. von oben und unten, bestrahlt.

c) Welche Strahlung gibt die Platte an die Oberflächen des Ofens ab?
Der Emissionskoeffizient der Stahlplatte ist $\varepsilon = 0{,}9$.

d) Wie viel Gas muss pro Stunde im Ofen verbrannt werden, um die Stahlplatte auf konstanter Temperatur T zu halten? Der Heizwert des Gases betrage $\Delta h_B = 42$ MJ/kg.

Hinweis: Zur Vereinfachung kann angenommen werden, dass die Ofenwände die von der Stahlplatte emittierte Strahlung nicht reflektieren und dass die Wärmeübertragung auf die Platte durch heiße Luft gegenüber der Wärmeübertragung durch Strahlung vernachlässigt werden kann.



Lösung S2

Strahlungsleistung der Platte

$$\phi = A\varepsilon\overline{\sigma}\left(\frac{T}{100K}\right)^4$$

$$\phi = 2 \cdot 2m^2 \cdot 0,9 \cdot 5,8\frac{W}{m^2}\left(\frac{1273}{100}\right)^4$$

Oberseite + Unterseite

$$\underline{\underline{\phi = 548kW}}$$

Brennstoffbedarf (Strahlungsgleichgewicht)

$$\phi = \Delta h_B \cdot m^{\bullet}$$

$$m^{\bullet} = \frac{\phi}{\Delta h_B}$$

$$m^{\bullet} = \frac{548kW}{42MJ}kg$$

$$\underline{\underline{m^{\bullet} = 0,0131\,kg/s = 47\,kg/h}}$$

Aufgabe S 3

Bereifen der Windschutzscheibe eines Autos
Abkühlung durch Wärmestrahlung

Die Windschutzscheibe eines Autos (Temperatur T = T (t)), Emissionskoeffizient $\varepsilon = 0{,}8$ strahlt in einer klaren Nacht Strahlungsenergie $(\dot{Q}_s)$ in den Nachthimmel ab. Dieser kann als schwarzer Strahler sehr geringer Temperatur $(T_H \simeq 4K)$ angesehen werden. Die umgebende Luft (Temperatur T_L = const) tauscht mit der Scheibe, unterstützt durch Konvektionsströmungen, Wärme $(\dot{Q}_K)$ aus. Der Wärmeübergangskoeffizient betrage $\alpha_{LSch} = 65\ W/m^2\ K$ (Erfahrungswert).

e) Man leite aus dem Energiesatz für die Autoscheibe eine Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf der Scheibentemperatur T = T (t) ab.

f) Man löse die unter (a) gefundene Gleichung unter Vernachlässigung des konvektiven Wärmestroms $(\dot{Q}_K = 0)$ und berechne die Zeit, nach der sich die Scheibe von anfänglich $T_0 = 25$ °C auf $T_1 = 0$ °C abgekühlt hat.

g) Welche Temperatur muss die Luft mindestens haben, damit Bereifen der Scheibe vermieden wird?

System- und Stoffdaten:

Scheibenfläche	A = 2,5 m*2
Glasdicke	d = 5 mm
Wärmekapazität des Glases	$c_G = 0{,}7$ kJ/kg K
Dichte des Glases	$\rho_G = 3000$ kg / m^3
Strahlungskonstante	$\overline{\sigma} = 5{,}8 \bullet W / (100\ K)^4\ m^2$

Lösung S3

Abkühlung durch Wärmestrahlung
Bereifen der Windschutzscheibe eines Autos

a) Wärmeverlust durch Abstrahlen in Nachthimmel

$\varepsilon_{\text{Scheibe}} = 0{,}8$, $\alpha_{\text{Luft}} = \varepsilon_{\text{Luft}} \to 0$, $\dot{Q}_S$

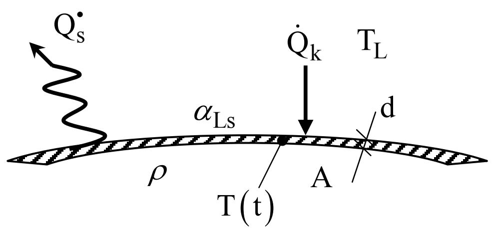
b) Konvektiver Wärmegewinn aus Umgebungsluft

T_L, $\alpha_{L,Sch} = 65\,\text{W/Km}^2$.....Wind! , $\dot{Q}_K$

Daten:

Scheibenfläche	A = 2,5 m*2
Glasdicke	d = 5 mm
Wärmekapazität des Glases	c_G = 0,7 kJ/kg K
Dichte des Glases	ρ_G = 3000 kg / m^3
Strahlungskonstante	$\overline{\sigma}$ = 5,8 • W / (100 K)^4 m^2

1. Temperaturverlauf der Scheibe als Funktion der Zeit:



a)

1.HS

Scheibe: $\dot{U} = \dot{Q}_k - \dot{Q}_s$ (1)

CEOS: $U = U_0 + cm\left(T(t) - T_0\right) + \vartheta(2)$

$$\dot{Q}_k = \alpha_{Ls} A \left(T_L - T(t)\right) \qquad (2)$$

$$\underline{\dot{Q}_s = \varepsilon \sigma A T(t)^4} \qquad (3)$$

(1-3)
$$\underline{c m \dot{T} = \alpha_{Ls} A \left(T_L - T\right) - \varepsilon \sigma A T^4} \qquad (4)$$

Lösung: Variabelentrennung, Integration, Numerik

$$\frac{1}{A} c m \int_{T_0}^{T(t)} \frac{dT}{\alpha_{Ls}\left(T_L - T\right) - \varepsilon \sigma T^4} = t - t_0 \qquad (4a)$$

b) <u>Abkühlzeit</u> der Scheibe von $T_1 = 25°C$ auf $T_2 = 0°C$
bei Vernachlässigung der Konvektion $\left(\dot{Q}_k \simeq 0\right)$

(4)
$$c m \dot{T} = -\varepsilon \sigma A T^4$$

$$m = \rho d A$$

$$\frac{c \rho d}{\varepsilon \sigma} \cdot \frac{dT}{T^4} = -dt$$

$$t_{12} = \frac{c \rho d}{3 \varepsilon \sigma} \left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3} \right)$$

$$t_{12} = \frac{0,7 kJ \cdot 300 kg \cdot 5 \cdot 10^{-3} m K^4 m^2 \cdot 10^8}{kg K m^3 \cdot 0,8 \cdot 5,8 W \cdot K^3} \left(\frac{1}{(273,15)^3} - \frac{1}{(298,15)^3} \right)$$

$$\underline{\underline{t_{12} = 5485 s \cong 1h \quad 31 Min}} < t_{12real} \text{ !...für } \quad T_L > 0°C$$

c) <u>Mindestlufttemperatur</u> um Bereifen der Scheibe zu verhindern.

Temperatur der Scheibe $\left(T = T(t)\right)$ strebt nach (4) einem konstanten Wert $\left(T_\infty\right)$ zu, bei welchem Gleichgewicht hinsichtlich Wärmeaustausch besteht, d.h. $\dot{Q}_s = \dot{Q}_k$ oder $\dot{T} = 0$ gilt. Diese Temperatur muss größer/gleich Gefriertemperatur sein:

$$T_\infty \geq T_{Eis} = 0°C = 273{,}15K$$

$\rightarrow (4)$
$$0 = \alpha_{Ls} \cancel{A} \left(T_L - T_\infty\right) - \varepsilon\sigma \cancel{A} T_\infty{}^4$$

$T_\infty \geq T_{Eis} \quad \rightarrow$
$$T_L = T_{Eis} + \frac{\varepsilon\sigma}{\alpha_{Ls}} T_{Eis}{}^4$$

$$T_L = 273{,}15K + \frac{0{,}8 \cdot 5{,}8WKm^2}{65Wm^2} \left(\frac{273{,}15}{100}\right)^4$$

$$\underline{\underline{T_L = 277{,}12K \cong 4°C}}$$

Aufgabe W1

Wärmeübertrager mit Gegenstrom bzw. Gleichstrom

In einem Wasser – Wasser – Gegenstrom – Wärmeübertrager wird Wärme von einem Wasserstrom $(\dot{m}_A)$ mit den Eingangs – und Ausgangstemperaturen $T_{A1} = 78°C$, $T_{A2} = 35,5°C$ auf einen anderen Wasserstrom $\dot{m}_B = 0,75\,kg/s$ übertragen.
Die Eintritts – bzw. Austrittstemperatur dieses Stroms sind $T_{B1} = 15°C$, $T_{B2} = 67,4°C$.
Die spez. Wärmekapazität von Wasser ist etwa $c_p = 4,2\,kJ/kgK$.

a) Welche Wärme wird pro Sekunde von $\dot{m}_A$ auf $\dot{m}_B$ übertragen?
Wie groß ist der Massenstrom $\dot{m}_A = ?$

b) Wie groß ist die logarithmische Temperaturdifferenz des Wärmetauschers?

c) Wie groß ist die Wärmeübertragungskapazität (kA) des Wärmetauschers?
Welche Austauschfläche (A) wird benötigt, wenn $k = 100\,W/m^2K$ beträgt?

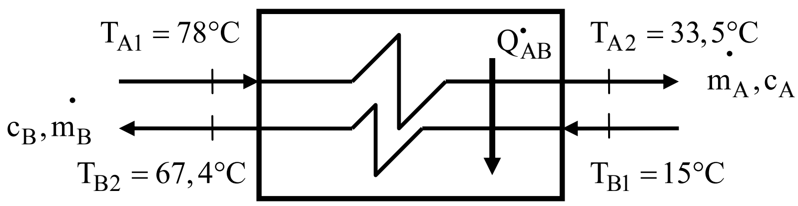
d) Der Wärmeübertrager werde nun im Gleichstrom mit denselben Eintrittstemperaturen $T_{A1} = 78°C$, $T_{B1} = 15°C$ und gleichen Massenströmen $\dot{m}_B = 0,75\,kg/s$, $\dot{m}_A = \cdots vgl.(a)$, betrieben.
Auf welche Temperatur T_{B2} kann der Massenstrom $\dot{m}_B$ maximal erwärmt werden?

e) Wie groß ist die im Gleichstrombetrieb übertragene Wärmeleistung?

f) Angenommen, der Wärmeübertrager habe im Gleichstrombetrieb dieselbe Wärmeübertragungskapazität wie im Gegenstrombetrieb, nämlich $kA = 11,64\,kW/K$.
Wie groß sind die Austrittstemperaturen der Wasserströme und welche Wärme wird zwischen ihnen ausgetauscht?

Lösung W1

Gegenstrom – Wärmeübertrager / Wärmetauscher

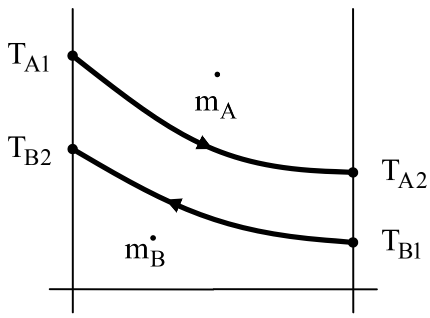


a)
$$\dot{Q}_{AB} = \left(h_{B2} - h_{B1}\right)\dot{m}_B \qquad (1)$$

$$\dot{Q}_{AB} = c_B\left(T_{B2} - T_{B1}\right)\dot{m}_B$$

$$\dot{Q}_{AB} = 4,2\frac{kJ}{kgK}\left(67,4 - 15\right)K \cdot 0.75\frac{kg}{s}$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}_{AB} = 165,1kW}}$$



$$\dot{m}_A = \frac{\dot{Q}_{AB}}{h_{A1} - h_{A2}} = \frac{\dot{Q}_{AB}}{c_p\left(T_{A1} - T_{A2}\right)}$$

$$\dot{m}_A = \frac{165,1\text{kW} \cdot \text{kgK}}{4,2\text{kJ}\left(78-35,5\right)\text{K}} = 0,925\,\text{kg/s}$$

b)

$$\Delta_{\ln}T_{GE} = \frac{T_{A1}-T_{B2}-\left(T_{A2}-T_{B1}\right)}{\ln\left(\dfrac{T_{A1}-T_{B2}}{T_{A2}-T_{B1}}\right)} \qquad (2)$$

$$\Delta_{\ln}T_{GE} = \frac{78-67,4-\left(33,5-15\right)}{\ln\left(\dfrac{78-67,4}{33,5-15}\right)} \quad °C$$

$$\underline{\underline{\Delta_{\ln}T_{GE} = 14,18 \quad °C}}$$

c)

$$\dot{Q}_{AB} = kA \cdot \Delta_{\ln}T_{GE}$$

(1,2):

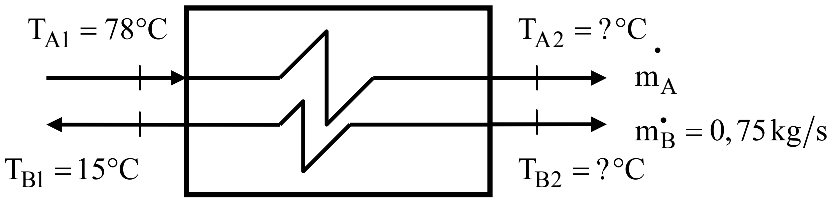
$$kA = \frac{\dot{Q}_{AB}}{\Delta_{\ln}T_{GE}}$$

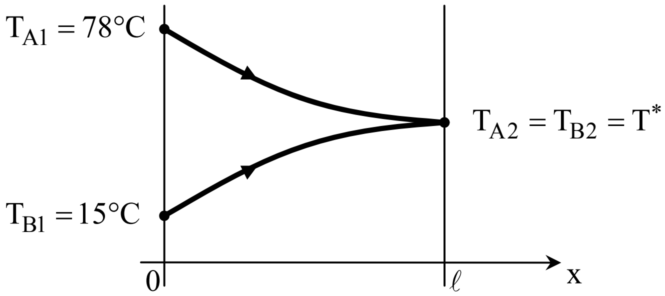
$$kA = \frac{165,1\text{kW}}{14,18\text{K}}$$

$$\underline{\underline{kA = 11,64\frac{\text{kW}}{\text{K}}}} \qquad (3)$$

$$k = 100\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}: \quad A = \frac{11,64\text{kW}}{100\text{WK}}\text{m}^2\text{K} = 116,4\text{m}^2$$

d)





$(*)$

$$\dot{Q}'_{AB} = c_A \dot{m}_A \left(T_{A1} - T_{A2}\right) = c_B \dot{m}_B \left(T_{B2} - T_{B1}\right) \qquad (4)$$

$$(*,4) \qquad c_A \dot{m}_A \left(T_{A1} - T^*\right) = c_B \dot{m}_B \left(T^* - T_{B1}\right)$$

$$T^* = \frac{c_A \dot{m}_A T_{A1} + c_B \dot{m}_B T_{B1}}{c_A \dot{m}_A + c_B \dot{m}_B} \quad \text{.... 1.HS Mischungstemperatur}$$

$$T^* = \frac{3{,}142 \cdot 15 + 3{,}71 \cdot 78}{3{,}142 + 3{,}71}\,°C$$

$$\underline{\underline{T^* = 49{,}1°C}} \qquad (4.1)$$

e) Berechnung von $c_A \dot{m}_A$ aus Gegenstrom – WÜ – Daten:

$$c\dot{m} = \frac{\dot{Q}_{AB}}{T_{A1} - T_{A2}} = \frac{165{,}1\,kW}{(78 - 33{,}5)\,K} = 3{,}71\,kW/K$$

(Wärmekapazitätsstrom des Massenstroms $\dot{m}_A$)

(4) $$\dot{Q}'_{AB} = 3{,}71\frac{kW}{K}\left(78-49{,}1\right)K$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}'_{AB} = 107{,}17kW}} < \dot{Q}_{AB} = 165{,}1kW \qquad (4.2)$$

f) 1. HS $\dot{m}_A$: $$\dot{Q}''_{AB} = c_A\dot{m}_A\left(T_{A1}-T_{A2}\right) \qquad (5)$$

$\dot{m}_B$: $$\dot{Q}''_{AB} = c_B\dot{m}_B\left(T_{B2}-T_{B1}\right) \qquad (6)$$

Fourier: $$\dot{Q}''_{AB} = kA\Delta_{ln}T_{GL} \qquad (7)$$

(5,6,7): 3Gleichungen für $T_{A2}, T_{B2}, \dot{Q}''_{AB}$

$$\Delta_{ln}T_{GL} = \frac{T_{A1}-T_{B1}-\left(T_{A2}-T_{B2}\right)}{\ln\left(\dfrac{T_{A1}-T_{B1}}{T_{A2}-T_{B2}}\right)}$$

(5+6) $$\dot{Q}''_{AB}\left(\frac{1}{c_A\dot{m}_A}+\frac{1}{c_B\dot{m}_B}\right) = T_{A1}-T_{B1}-\underbrace{\left(T_{A2}-T_{B2}\right)}_{\equiv\Delta T_{AB2}}$$

$$\Delta T_{AB2} = T_{A1}-T_{B1}-kA\cdot\left(\frac{1}{c_A\dot{m}_A}+\frac{1}{c_B\dot{m}_B}\right)\frac{T_{A1}-T_{B1}-\Delta T_{AB2}}{\ln\left(\dfrac{T_{A1}-T_{B1}}{\Delta T_{B2}}\right)} \qquad (8)$$

$$\Delta T_{AB2} = 63°C - 6{,}8414\cdot\frac{63°C-\Delta T_{AB2}}{\ln\left(63°C/\Delta T_{AB2}\right)}$$

$$\underline{\underline{\Delta T_{AB2} = 0{,}0673°C \cong 0K}}$$

$\rightarrow$ $$T_{A2} = T_{B2} = T^* = 49{,}1°C$$

$$Q''_{AB} = Q'_{AB} = 107{,}2kW$$